

# НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКИХ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

© 2024 г. Б. П. Кондратьев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, Москва, Россия

<sup>2</sup>Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: work@boris-kondratyev.ru

Поступила в редакцию 03.07.2024 г.

После доработки 03.08.2021 г.

Принята в печать 15.08.2024 г.

Целью работы является вывод новой динамической формулы для угловой скорости вращения фигур равновесия гравитирующей жидкости с политропным уравнением состояния. В этой формуле угловая скорость вращения зависит не только от показателя политропы  $0 \leq n \leq 5$ , но, и это главное, от компонентов внутренней и внешней гравитационной энергии фигуры. При решении задачи постоянную интегрирования в полном потенциале удалось выразить через три глобальные характеристики: массу, полную гравитационную энергию и энергию вращения фигуры равновесия. Справедливость новой формулы подтверждена при  $n = 0$  предельным переходом к классическим однородным сфероидом Маклорена и эллипсоидам Якоби. Результаты работы расширяют область применения теории фигур равновесия.

**Ключевые слова:** фигуры равновесия, однородные и неоднородные, политропы, уровенные поверхности, компоненты внешней и внутренней гравитационной энергии тела, угловая скорость вращения

DOI: 10.31857/S0004629924100059 EDN: JLUFZX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория фигур равновесия гравитирующей вращающейся жидкости глубоко разработана во многих аспектах и имеет много приложений в астрономии, физике и астрофизике, см. обзор Тодхантера [1], книги Аппеля [2] и Чандрасекара [3]. На практике теорию фигур равновесия применяют не только к планетам и спутникам, см., например, Пицетти [4], Мюррей и Дермотт [5], но и к вращающимся звездам (см. монографии Тассуля [6] и Кокса [7]), а также к звездным системам и к галактикам (см., например, Огородников [8], Binney и Tremaine [9], Кондратьев [10]).

Для любой фигуры равновесия надо знать, прежде всего, угловую скорость вращения; именно эта характеристика задает форму и динамику тела, а также определяет всю последовательность фигур равновесия. В аналитическом виде угловая скорость известна только для классических однородных сфероидов Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби. Для сфероидов Маклорена с полуосями  $a_1 \geq a_3$  и плотностью  $\rho$  квадрат нормализованной угловой скорости равен (см., например, [2, 3, 10]):

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = A_1 - (1 - e^2) A_3, \quad (1)$$

где коэффициенты  $A_i$  внутреннего потенциала однородного сжатого сфероида зависят от его эксцен-

триситета  $e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \leq 1$  и равны

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2}; \\ A_3 &= \frac{2}{e^2} - 2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e. \end{aligned} \quad (2)$$

Что касается трехосных эллипсоидов Якоби, то здесь ситуация несколько сложнее. Во-первых, для них вместо (1) имеем выражение для квадрата угловой скорости

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = \frac{A_1 - e_{12}^2 A_2}{e_{12}^2}, \quad (3)$$

где  $e_{12} = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}}$  и  $e_{13} = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}$  — эксцентриситеты сечений эллипсоида с полуосями  $a_1 \geq a_2 > a_3$ . Во-вторых, для эллипсоидов Якоби есть добавочное соотношение

$$a_1^2 a_2^2 \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} = A_3 a_3^2, \quad (4)$$

в неявном виде связывающее  $e_{12}$  и  $e_{13}$ . Сами коэффициенты  $A_i$  для трехосного эллипсоида сложным образом (через стандартные неполные эллиптиче-

ские интегралы Лежандра) зависят от отношений полуосей (см., например, [3, 10]).

Согласно формулам (1) и (3), угловая скорость вращения определяется геометрической формой фигуры равновесия. И хотя эта связь не всегда однозначная (так, для сфероидов Маклорена в интервале  $0 \leq \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} < 0.224665$  для каждого значения  $\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$  существуют два сфероида разной сплюснутости), именно знание угловой скорости и позволило ввести понятие последовательности фигур равновесия. К сожалению, для подавляющего большинства других фигур равновесия, например, для неэллипсоидальных фигур, открытых Пуанкаре и Ляпуновым (см. [2, 13, 10]), аналогичных формул для угловой скорости не существует. По этой причине, для каждой неэллипсоидальной серии фигур равновесия приходится подбирать свой главный параметр.

В данной работе получена новая формула для угловой скорости неоднородных фигур равновесия вращающейся жидкой массы с политропным уравнением состояния. Важной особенностью этой формулы является то, что угловая скорость выражается через компоненты внутренней и внешней гравитационной энергии фигуры, введенные ранее в монографии [10]. Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напомним определение понятий внутренней и внешней частей гравитационной энергии тела. В разделе 3 изложен метод вывода новой формулы для угловой скорости на примере однородных фигур равновесия. Здесь в 3.1. дана постановка задачи и получена сама формула для угловой скорости вращения. В 3.2. установлена адекватность данной формулы и показано, что она дает правильные значения угловой скорости для классических фигур равновесия однородных сфероидов Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби. В разделах 4 и 5 дано решение основной задачи для неоднородных тел и получено выражение для угловой скорости фигур равновесия с политропным уравнением состояния. В разделе 4.1. получено выражение уровня поверхности. В разделе 4.2. решена оригинальная вспомогательная задача и постоянная интегрирования уравнений равновесия выражена через три глобальные характеристики фигуры равновесия. В разделе 5 подробно излагается метод получения выражения угловой скорости для политропных фигур равновесия.

## 2. КОМПОНЕНТЫ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛА

По определению (см. [3, 10]), ньютоновская (потенциальная) энергия гравитирующей массы объемом  $V$ , распределением плотности  $\rho(x)$  и внутренним потенциалом  $\phi(x)$  равна

$$W_t = -\frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV. \quad (5)$$

Это выражение после замены под знаком интеграла плотности  $\rho(x)$  с помощью уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = -4\pi G\rho \quad (6)$$

и применения второй формулы Грина приводится к сумме двух членов

$$W_t = -\frac{1}{8\pi G} \int_V (\text{grad}\phi)^2 dV + \frac{1}{8\pi G} \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (7)$$

где  $n$  есть внутренняя нормаль к поверхности  $S$ . Если распространить интегрирование в (7) на все пространство, второй член исчезнет, и мы приходим к формуле Дирихле

$$W_t = -\frac{1}{8\pi G} \int_V \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)^2 \right) dV. \quad (8)$$

Возвращаясь к выражению (7) заметим, что с физической точки зрения первый член здесь

$$W_{in} = -\frac{1}{8\pi G} \int_V (\text{grad}\phi)^2 dV \quad (9)$$

можно рассматривать (см. Кондратьев [10, 11]) как «внутреннюю» часть гравитационной энергии тела. Тогда второй член

$$\begin{aligned} W_{out} &= -\frac{1}{8\pi G} \int_{R_E-V} (\text{grad}\phi)^2 dV = \\ &= \frac{1}{8\pi G} \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (10)$$

будет представлять «внешнюю» гравитационную энергию тела. Полная гравитационная энергия тела есть сумма его внутренней и внешней частей

$$W_t = W_{in} + W_{out} = -\frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV. \quad (11)$$

Введение понятий внутренней и внешней частей гравитационной энергии тела оказывается полезным в задачах при расчете работы по заполнению веществом полостей и рассеянию вещества тела на ограниченные расстояния. Как показано в [11], для однородного сжатого сфероида с полуосями  $a_1 \geq a_3$ , эксцентриситетом  $e$  и плотностью

$\rho$  внешняя и внутренняя части гравитационной энергии будут соответственно равны:

$$W_{\text{out}} = -\frac{3}{20} \frac{M^2 G}{a_1} \left\{ -\sqrt{1-e^2} \frac{3-2e^2}{e^4} \left( \frac{\arcsin e}{e} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( 2 + 3 \frac{1-e^2}{e^4} \frac{\arcsin e}{e} - \sqrt{1-e^2} \frac{3-2e^2}{e^4} \right) \right\}; \quad (12)$$

$$W_{\text{in}} = -\frac{3}{20} \frac{M^2 G}{a_1} \left[ \frac{A_1^2(e)}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{A_3^2(e)}{2} \sqrt{1-e^2} \right],$$

где коэффициенты потенциала  $A_i(e)$  даны в (2).

В частном случае шара  $e = 0$ , формулы (12) упрощаются и дают

$$W_{\text{in}} = -\frac{1}{10} \frac{M^2 G}{R}; W_{\text{out}} = -\frac{1}{2} \frac{M^2 G}{R}, \quad (13)$$

так что

$$\frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} = 5. \quad (14)$$

Подчеркнем, что среди всех однородных тел результат (14) для шара является абсолютным минимумом. Так, для сжатого сфероида с компонентами энергии (12) отношение  $\frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}}$  медленно увеличивается от 5 до 6 с ростом эксцентриситета от 0 до 0.90, а при бóльших сжатиях возрастает очень быстро (см. рис. 63 в монографии [11]).

### 3. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

#### 3.1. Постановка задачи и вывод основной формулы

Рассмотрим уравнение равновесия жидкой гравитирующей массы, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Ox_3$ :

$$\text{grad } p = \rho \text{grad } \Phi. \quad (15)$$

Здесь  $p(x)$  — давление в жидкости,  $\Phi(x)$  — полный потенциал, равный сумме гравитационного и центробежного потенциалов

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2). \quad (16)$$

Для равномерно вращающихся однородных конфигураций уравнение (15) дает формулу, описывающую внутренние поверхности уровня:

$$\frac{p(x)}{\rho} = \varphi(x) + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \text{const}. \quad (17)$$

Применяя оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (18)$$

к выражению  $\frac{p}{\rho}$  из (17), получаем

$$\Delta \frac{p}{\rho} = -2 \left( 2\pi G \rho - \Omega^2 \right). \quad (19)$$

Кроме того, из уравнения (15) следует выражение

$$(\text{grad } \varphi)^2 = \left( \text{grad } \frac{p}{\rho} \right)^2 + \Omega^4 r^2 - 2\Omega^2 r \cdot \text{grad } \frac{p}{\rho}. \quad (20)$$

Интегрируя выражение (20) по объему фигуры  $V$  получим

$$-8\pi G W_{\text{in}} = \int_V \left( \text{grad } \frac{p}{\rho} \right)^2 dV + \\ + \frac{\Omega^4}{\rho} I_3 - 2\Omega^2 \int_V r \cdot \text{grad } \frac{p}{\rho} dV. \quad (21)$$

Здесь

$$I_3 = \int_V \rho \cdot r^2 dV \quad (22)$$

— момент инерции фигуры относительно оси  $Ox_3$ .

Обратим внимание, что в левой части (21) появилась величина внутренней гравитационной энергии  $W_{\text{in}}$  введенная выше в (9). Рассмотрим подробнее первый член в правой части (21)

$$Z = \int_V \left( \text{grad } \frac{p}{\rho} \right)^2 dV \quad (23)$$

и применим к нему теорему Грина. Тогда, поскольку давление на граничной поверхности фигуры равно нулю

$$p_S = 0, \quad (24)$$

получим

$$Z = - \int_V \frac{p}{\rho} \cdot \Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) dV = \frac{4\pi G \rho - 2\Omega^2}{\rho} \cdot \Pi, \quad (25)$$

где мы учли формулу (19). Величина  $\Pi$  (тепловой член) в (25) есть интеграл от давления

$$\Pi = \int_V p(x) dV. \quad (26)$$

Далее, третий член в правой части (21) после интегрирования по частям оказывается равен

$$2\Omega^2 \int_V r \cdot \text{grad } \frac{p}{\rho} dV = -\frac{4\Omega^2}{\rho} \cdot \Pi. \quad (27)$$

Таким образом, выражение (21) приводится к виду

$$-8\pi G W_{\text{in}} = \left( \frac{2\Omega^2}{\rho} + 4\pi G \right) \cdot \Pi + \frac{\Omega^4 I_3}{\rho}. \quad (28)$$

С другой стороны, согласно теореме вириала,

$$-3\Pi = 2T_{\text{rot}} + W_t = \Omega^2 I_3 + W_t. \quad (29)$$

Здесь  $T_{\text{rot}}$  — энергия вращения тела. Исключая  $\Omega$  из (28) с помощью (29), получаем биквадратное уравнение для нормированной угловой скорости

$$\Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \rho}}$$

$$\Omega^4 - 4\Omega^2(1 - \eta) + 4\frac{6W_{\text{in}} - W_t}{\pi G \rho I_3} = 0, \quad (30)$$

где

$$\eta = -\frac{W_t}{2\pi G \rho I_3} > 0 \quad (31)$$

(см. также неравенство (34)).

Корни уравнения (30) равны

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = 1 - \eta \pm \sqrt{(1 - \eta)^2 - \frac{6W_{\text{in}} - W_t}{\pi G \rho I_3}}. \quad (32)$$

Решение (32) и определяет квадрат угловой скорости однородной фигуры относительного равновесия через внутреннюю (9) и полную (11) гравитационную энергию.

### 3.2. Некоторые свойства выражения (32)

Главная особенность формулы (32) в том, что выражение угловой скорости вращения  $\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho}$  для однородных гравитирующих фигур относительного равновесия выражается через компоненты внутренней  $W_{\text{in}}$  и внешней  $W_{\text{out}}$  гравитационной энергии фигуры. Формулу (32) можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = 1 - \eta \pm \sqrt{(1 - \eta)^2 - 2\eta - \frac{6W_{\text{in}}}{\pi G \rho I_3}}. \quad (33)$$

Здесь

$$\eta = -\frac{W_t}{2\pi G \rho I_3} \geq 1, \quad (34)$$

причем точное равенство в (34) выполняется только для шара.

Формула (33) была проверена нами в монографии [11] и, особенно тщательно, в статье [12]. Установлено, что только при знаке «—» перед радикалом она дает правильные значения угловой скорости для классических фигур равновесия однородных сфероидов Маклорена (1) и трехосных эллипсоидов Якоби (3)

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = 1 - \eta - \sqrt{(1 - \eta)^2 - 2\eta - \frac{6W_{\text{in}}}{\pi G \rho I_3}}. \quad (35)$$

## 4. ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ФИГУР С ПОЛИТРОПНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

До сих мы рассматривали однородные фигуры относительного равновесия. Однако большинство реальных небесных тел (астероиды, планеты и спутники, а также звезды и галактики) имеют сложное строение и являются неоднородными системами. Возникает актуальный вопрос: допускает ли формула (35) обобщение на неоднородные конфигурации? В этом разделе будет показано, что для широкого класса неоднородных тел, описываемых политропным уравнением состояния, аналог формулы (35) действительно существует, и угловую скорость вращающихся политроп можно представить как функцию от компонентов внешней и внутренней гравитационной энергии фигуры.

### 4.1. Уравнение уровня поверхности

Вновь рассмотрим уравнение равновесия жидкой гравитирующей массы, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Ox_3$ . Уравнение (15) запишем в виде

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } \Phi. \quad (36)$$

Напомним, здесь  $p(x)$  — давление в жидкости,  $\rho(x)$  — плотность,  $\Phi(x)$  — полный (гравитационный плюс центробежный) потенциал тела из (16).

Полагаем теперь, что внутри конфигурации выполняется политропное уравнение состояния, связывающее давление вещества и плотность известной формулой

$$p = K \rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (37)$$

где  $n$  — индекс политропы, изменяющийся в интервале

$$0 \leq n \leq 5. \quad (38)$$

Для решения поставленной задачи прежде всего заметим, что с помощью (37) входящее в уравнение равновесия (36) отношение  $\frac{\text{grad } p}{\rho}$  можно записать

в виде полного дифференциала от функции плотности

$$\frac{dp}{\rho} = K \left( \frac{n+1}{n} \right) \rho^{\frac{1-n}{n}} d\rho = K(n+1) d \left( \rho^{\frac{1}{n}} \right). \quad (39)$$

Подставляя выражение (39) в левую часть (36) и интегрируя, получим уравнение уровня поверхности

$$(n+1) \frac{p}{\rho} = \varphi(x) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + \text{const}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (40)$$

Значение постоянной интегрирования в (40)  $\text{const} \equiv C$  можно выбрать так, чтобы на поверхно-

сти фигуры  $S(x) = 0$  давление тождественно обращалось в нуль

$$p_S = 0. \quad (41)$$

#### 4.2. Нахождение постоянной интегрирования через глобальные характеристики фигуры равновесия.

Для большинства задач в теории фигур равновесия обычно принимаются во внимание только силы, и при этом нет необходимости рассматривать входящую в уравнение (40) постоянную интегрирования  $\text{const} \equiv C$ . Однако особенность поставленной здесь задачи в том, что для ее решения эту постоянную интегрирования необходимо рассматривать как функцию от интегральных характеристик фигуры. Как установлено в монографии [10] (см. форм. (1.13)), для однородных фигур равновесия постоянная в формуле (40) равна

$$C = \text{const} = \frac{5}{3} \frac{W_t - T_{\text{rot}}}{M}, \quad (42)$$

где  $M$  — масса,  $W_t$  — полная гравитационная энергия,  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Omega^2 I_3$  — энергия вращения тела.

При рассмотрении неоднородного случая, метод нахождения константы  $C$  следует обобщить. Для этого умножим обе части выражения (40) на  $\rho(x)$

$$(n+1)p = \rho \varphi(x) + \frac{1}{2} \Omega^2 \rho r^2 + C \cdot \rho, \quad (43)$$

и проинтегрируем уравнение (43) по объему фигуры. Получим

$$(n+1)\Pi = -2W_t + \frac{1}{2} \Omega^2 I_3 + C \cdot M, \quad (44)$$

где появляется тепловой член  $\Pi$  из (26). Исключая этот тепловой член в (44) с помощью теоремы вириала (29), в итоге находим значение постоянной интегрирования

$$C = \frac{(5-n)W_t - (5+2n)T_{\text{rot}}}{3M} = \frac{(5-n)W_t - (5/2+n)\Omega^2 I_3}{3M}. \quad (45)$$

В частности, при  $n = 0$  из (45) получим известное уже нам из (42) значение постоянной  $C$  для однородного случая.

## 5. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ

### 5.1. Моментное уравнение для угловой скорости

Перепишем выражение (40) в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{n+1} \left( \varphi(x) + \frac{1}{2} \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \text{const} \right), \quad (46)$$

применим к нему оператор Лапласа (18), получим

$$\Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{2}{n+1} \left( \Omega^2 - 2\pi G \rho \right). \quad (47)$$

Далее из (40) находим  $\text{grad} \varphi$

$$\text{grad} \varphi = (n+1) \text{grad} \frac{p}{\rho} - \Omega^2 r. \quad (48)$$

Возводя в квадрат левую и правую части (48) и интегрируя по объему фигуры  $V$ , получим

$$\begin{aligned} -8\pi G \cdot W_{\text{in}} &= (n+1)^2 \int_V \left( \text{grad} \frac{p}{\rho} \right)^2 dV + \Omega^4 \int_V r^2 dV - \\ &- 2(n+1)\Omega^2 \int_V r \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} dV, \end{aligned} \quad (49)$$

где при записи левой части было использовано равенство (9).

### 5.2. Анализ уравнения (49)

Рассмотрим первый член в правой части (49)

$$Z_1 = (n+1)^2 \int_V \left( \text{grad} \frac{p}{\rho} \right)^2 dV. \quad (50)$$

Применяя к нему интегральную формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= (n+1)^2 \int_V \left( \text{grad} \frac{p}{\rho} \right)^2 dV = \\ &= -(n+1)^2 \int_V \frac{p}{\rho} \Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) dV + \\ &+ (n+1)^2 \int_S \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho} \right) dS. \end{aligned} \quad (51)$$

В силу равенства нулю давления на поверхности фигуры (24), второй член в правой части (51) также обратится в нуль, и мы получим

$$Z_1 = 2(n+1) \int_V \frac{p}{\rho} \left( 2\pi G \rho - \Omega^2 \right) dV. \quad (52)$$

Учитывая тепловой член (26), приводим  $Z_1$  к виду



$$Z_1 = 4\pi G(n+1)\Pi - 2(n+1)\Omega^2 \int_V \frac{p}{\rho} dV. \quad (53)$$

Далее рассмотрим третий член в правой части (51)

$$Z_2 = -2(n+1)\Omega^2 \int_V \mathbf{r} \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} dV, \quad (54)$$

который также преобразуем. Для этого раскроем подынтегральное выражение

$$\mathbf{r} \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{p}{\rho} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{p}{\rho}. \quad (55)$$

Учитывая тождество

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{p}{\rho} x_1 \right) - \frac{p}{\rho}, \quad (56)$$

сложим два таких выражения, получим

$$\mathbf{r} \cdot \text{grad} \frac{p}{\rho} = \text{div} \left( \frac{p}{\rho} \mathbf{r} \right) - 2 \frac{p}{\rho}. \quad (57)$$

Тогда, в силу известного векторного равенства и дополнительного условия (24), интеграл по объему тела от первого члена в (57) исчезает

$$\int_V \text{div} \left( \frac{p}{\rho} \mathbf{r} \right) dV = \int_S \left( \frac{p}{\rho} \mathbf{r} \right) dS = 0, \quad (58)$$

поэтому

$$Z_2 = 4(n+1)\Omega^2 \int_V \frac{p}{\rho} dV. \quad (59)$$

Подставляя теперь  $Z_1$  из (53) и  $Z_2$  из (59) в (49), после некоторых сокращений приведем последнее выражение к виду

$$\begin{aligned} -8\pi G \cdot W_{\text{in}} &= 4\pi G(n+1)\Pi + \\ &+ 2(n+1)\Omega^2 \int_V \frac{p}{\rho} dV + \Omega^4 \int_V r^2 dV. \end{aligned} \quad (60)$$

Исключая здесь тепловой член с помощью теоремы вириала (29), запишем (60) в виде

$$\begin{aligned} -8\pi G \cdot W_{\text{in}} &= -\frac{4}{3}\pi G(n+1)(\Omega^2 I_3 + W_{\text{tot}}) + \\ &+ 2(n+1)\Omega^2 \int_V \frac{p}{\rho} dV + \Omega^4 \int_V r^2 dV. \end{aligned} \quad (61)$$

### 5.3. Биквадратное уравнение для угловой скорости и его корни

Рассмотрим в правой части (61) интеграл

$$I_n = (1+n) \int_V \frac{p}{\rho} dV, \quad (62)$$

и подставим в него отношение  $(1+n) \frac{p}{\rho}$  из уравне-

ния уровенной поверхности (40). При этом важно заметить, что вначале само уравнение (40) следует записать с учетом значения постоянной интегрирования из (45) в виде

$$\begin{aligned} (1+n) \frac{p}{\rho} &= \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\Omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \\ &+ \frac{(5-n)W_t - (5/2+n)\Omega^2 I_3}{3M}. \end{aligned} \quad (63)$$

Введем теперь среднюю плотность фигуры  $\rho_m$ , а также вспомогательные интегралы

$$h_1 = \int_V r^2 dV; h_2 = \int_V \varphi(\mathbf{x}) dV. \quad (64)$$

Интегрируя выражение (63) по объему фигуры, с учетом формул (64) находим

$$\begin{aligned} I_n &= (1+n) \int_V \frac{p}{\rho} dV = h_2 + \frac{1}{2}\Omega^2 h_1 + \\ &+ \frac{(5-n)W_t}{3\rho_m} - \frac{(5+2n)}{6\rho_m} I_3 \Omega^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Подставляя теперь (65) в (61), после преобразований (см. Приложение) получим биквадратное уравнение для  $\frac{\Omega}{\sqrt{2\pi G\rho}}$

$$a \cdot \Omega^4 - 2b \cdot \Omega^2 + c = 0. \quad (66)$$

Коэффициенты в уравнении (66) равны

$$\begin{aligned} a &= \frac{6\rho_m h_1}{I_3} - 2n - 5; \\ b &= 1 + n - \frac{3h_2}{2\pi G I_3} - (5-n) \frac{W_t}{2\pi G \rho_m I_3}; \\ c &= \frac{6W_{\text{in}} - (1+n)W_t}{\pi G \rho_m I_3}. \end{aligned} \quad (67)$$

Корни уравнения (66) равны

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (68)$$

Формула (68) и дает решение поставленной задачи. При выборе знака перед радикалом следует учитывать, как будет показано в следующем разделе, только при знаке «—» перед радикалом формула

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (69)$$

позволяет получить правильные значения угловой скорости для однородных классических сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби.

#### 5.4. Проверка: частный случай однородных фигур равновесия

Для проверки сложных расчетов рассмотрим частный случай однородных фигур, для которых выполняются соотношения

$$n = 0; \rho_m = \rho; h_1 = \frac{I_3}{\rho}; h_2 = -\frac{2W_t}{\rho}. \quad (70)$$

Подставляя равенства (70) в формулы (67), получим значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a &= 1; \quad b = 1 + \frac{W_t}{2\pi G \rho I_3}; \\ c &= \frac{6W_{in} - W_t}{\pi G \rho I_3}, \end{aligned} \quad (71)$$

при которых уравнение (66) переходит в полученное ранее уравнение (30). Следовательно, решение (69) действительно сводится в однородном случае к известному нам решению (35). Доказательство новой формулы закончено.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ

Целью работы является вывод новой динамической формулы для угловой скорости вращения фигур равновесия гравитирующей жидкости с политропным уравнением состояния. В этой формуле угловая скорость вращения зависит не только от показателя политропы  $0 \leq n \leq 5$ , но и от компонентов внутренней и внешней гравитационной энергии фигуры равновесия.

Ранее [10, 11, 12] нами было доказано, что новая формула (35) для однородных фигур дает известные значения угловой скорости для классических фигур равновесия сфероидов Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби.

Здесь получена новая формула для угловой скорости неоднородных фигур равновесия политроп с жестким вращением. При решении этой задачи впервые возникла необходимость представления постоянной интегрирования уравнений движения через показатель политропы и три глобальные характеристики: массу, полную гравитационную энергию и энергию вращения тела.

Справедливость новой формулы для угловой скорости (69) подтверждается предельным переходом к однородным фигурам равновесия.

Другой проверкой новой формулы (69) является ее применение к уникальной быстро вращающейся карликовой планете Наумеа. Подробный анализ расчетов по Наумеа будет дан в нашей следующей работе [14].

Отметим также следующее. В теории фигур равновесия до сих пор нет общего метода построения даже однородных фигур равновесия. Это связано с тем, что основное функциональное уравнение не имеет, как известно, общего решения. Все известные решения сначала как бы угадываются, а уже потом строго проверяются и изучаются.

Формула для угловой скорости (69) также не может рассматриваться как самостоятельный способ построения новых фигур равновесия. Но достаточно того, что в этой формуле указана ранее неизвестная связь между угловой скоростью и отношением внутренней и внешней частей гравитационной энергии фигуры равновесия. Поэтому формула (69) может быть полезна при анализе разных моделей фигур равновесия небесных тел.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Тодхантер История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа (М.: Эдиториал УРСС, 2002).
2. П. Анпель Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости (Л.-М.: ОНТИ, 1936).
3. С. Чандрасекар Эллипсоидальные фигуры равновесия (М.: Мир, 1972).
4. П. Пицетти Основы механической теории фигуры планет (М.: ГТТИ, 1933).
5. К. Мюррей, С. Дермотт Динамика Солнечной системы (М.: Физматлит, 2009).
6. Ж.Л. Тассуль Теория вращающихся звезд (М.: Мир, 1978).
7. Дж. П. Коке Теория звездных пульсаций (М.: Мир, 1983).
8. К.Ф. Огородников Динамика звездных систем (М.: Физматгиз, 1958).
9. J. Binney, S. Tremaine Galactic dynamics (Princeton University Press, 1987).
10. Б.П. Кондратьев Теория потенциала и фигуры равновесия (Москва-Ижевск: РХД, 2003).
11. Б.П. Кондратьев Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями (М.: Мир, 2007).
12. B.P. Kondratyev, Astrophys. and Space Sci. 368, 10, id. 84 (2023).
13. Y. Hagiwara Theories of Equilibrium Figures of a Rotating Homogeneous Fluid Mass (NASA, Washington, 1970).
14. Б.П. Кондратьев, Астрон. журн. (принято в печать) (2025).

### ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТОВ (67)

Запишем выражение (61) с учетом интеграла (65) в полном виде

$$-8\pi G \cdot W_{\text{in}} = -\frac{4}{3}\pi G(n+1)(\Omega^2 I_3 + W_t) + \Omega^4 \int_V r^2 dV + 2\Omega^2 \left( h_2 + \frac{1}{2}\Omega^2 h_1 + \frac{(5-n)W_t}{3\rho_m} - \frac{(5+2n)}{6\rho_m} I_3 \Omega^2 \right). \quad (\text{П1})$$

Разделим обе части этого выражения на  $\frac{4}{3}\pi G$ , получим

$$-6W_{\text{in}} = -(n+1)(\Omega^2 I_3 + W_t) + \frac{3h_1}{4\pi G} \Omega^4 + \quad (\text{П2})$$

$$+ 2\Omega^2 \left( \frac{3h_2}{4\pi G} + \frac{3h_1}{8\pi G} \Omega^2 + \frac{(5-n)W_t}{6\pi G\rho_m} - \frac{(5+2n)}{8\pi G\rho_m} I_3 \Omega^2 \right).$$

Для дальнейших преобразований удобно ввести безразмерные величины

$$\Omega^2 \rightarrow \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m}, W_{\text{in}} \rightarrow \frac{W_{\text{in}}}{\pi G\rho_m I_3}, W_t \rightarrow \frac{W_t}{\pi G\rho_m I_3}. \quad (\text{П3})$$

Раскрывая (П2), запишем это выражение в виде (66) с коэффициентами

$$a = (2\pi G\rho_m)^2 I_3 \left[ \frac{3h_1}{2\pi G I_3} - \frac{5+2n}{4\pi G\rho_m} \right];$$

$$b = (2\pi G\rho_m) I_3 \left[ \frac{1+n}{2} - \frac{3h_2}{4\pi G I_3} - \frac{(5-n)}{4} W_t \right]; \quad (\text{П4})$$

$$c = (6W_{\text{in}} - (1+n)W_t) \pi G\rho_m I_3.$$

Сокращая теперь все коэффициенты (П4) на  $\pi G\rho_m I_3$  и вновь переходя к размерным компонентам  $W_{\text{in}}$  и  $W_t$ , в итоге получим искомые коэффициенты (67).

## NEW FORMULA FOR THE ANGULAR VELOCITY OF ROTATION OF LIQUID EQUILIBRIUM FIGURES

**B. P. Kondratyev<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Sternberg Astronomical Institute of Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Central Astronomical Observatory of the RAS at Pulkovo, Saint Petersburg, Russia*

\*E-mail: work@boris-kondratyev.ru

The aim of the work is to derive a new dynamic formula for the angular velocity of rotation of equilibrium figures of a gravitating fluid with a polytropic equation of state. In this formula, the angular velocity of rotation depends not only on the polytropic index  $0 \leq n \leq 5$ , but, and this is the main thing, on the components of the internal and external gravitational energy of the figure. When solving the problem, the integration constant in the full potential was expressed through three global characteristics: mass, full gravitational energy and rotation energy of the equilibrium figure. The validity of the new formula was confirmed by the limiting transition at  $n = 0$  to classical homogeneous Maclaurin spheroids and Jacobi ellipsoids. The results of the work expand the scope of application of the theory of equilibrium figures.

**Keywords:** equilibrium figures, homogeneous and inhomogeneous, polytropic equation of state, level surfaces, components of external and internal gravitational energy, angular velocity of rotation