

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТРАНЗИТНОЙ КРИВОЙ БЛЕСКА ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО ГЛАВНОГО МИНИМУМА С УЧЕТОМ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ ОРБИТЫ ТРАНЗИТА (ПЛАНЕТЫ)

© 2024 г. М. К. Абубекеров^{1,*}, Н. Ю. Гостев^{1,**}

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

*E-mail: marat@sai.msu.ru

**E-mail: ngostev@mail.ru

Поступила в редакцию 29.03.2024 г.

После доработки 10.05.2024 г.

Принята в печать 04.06.2024 г.

С помощью высокоточного алгоритма интерпретации транзитных кривых блеска в модели затменной классической двойной системы звезда-экзопланета исследована возможность определения параметров системы в отсутствие априорного знания об эксцентриситете орбиты. Показано, что на основе лишь главного минимума транзитной кривой блеска невозможно определить точное значение эксцентриситета и долготы периастра. Также при точности наблюдений порядка 1% от глубины затмения неопределенность эксцентриситета и долготы периастра в совокупности вызывает значительную неопределенность в значениях радиусов компонентов (ошибка в 2–3 раза относительно истинных значений) и угла наклона орбиты. Однако с хорошей точностью определяется отношения радиусов компонентов системы и коэффициенты потемнения к краю. При увеличении же точности наблюдений до 0.1% от глубины затмения становится возможным определение радиусов компонентов и угла наклона орбиты при интерпретации кривой блеска с учетом эксцентриситета.

Ключевые слова: кривые блеска, двойные системы с экзопланетами, эксцентриситет двойной системы, радиус звезды, радиус планеты, наклонение орбиты

DOI: 10.31857/S0004629924070028 EDN: IVCBAE

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно теории затменных систем [1] с эллиптическими орбитами, форма кривой блеска в минимумах затмений определяется прежде всего значением $e \sin \omega$. Здесь e — эксцентриситет орбиты, ω — долгота периастра. При этом $e \cos \omega$ не оказывает существенного влияния на форму минимумов кривой блеска, а определяет расстановку этих минимумов, т. к. расстояние между точками, в которых блеск достигает минимальных значений, зависит в основном от $e \cos \omega$. Следует отметить, что эти выводы получены аналитически в предположении малых $e < 0.1$. Однако вычисления на современных компьютерах позволяют проверить, что и для больших значений e , варьируя ω в совокупности с моментом прохождения периастра t_0 , радиусами компонентов системы и углом наклона орбиты, можно добиться, чтобы при изменении значений e форма минимума кривой блеска с большой точностью сохранялась, с существенным изменением расстояния между минимумами при изменении e .

Таким образом, для точного определения эксцентриситета и долготы периастра путем интерпретации транзитной кривой блеска необходимо использовать два минимума. Однако, в имеющемся фотометрическом материале значительную часть составляют кривые блеска затменных двойных систем звезда-экзопланета. У таких кривых блеска, как правило, явно выражен лишь один минимум, соответствующий затмению звезды планетой. И понятно, что при интерпретации кривой блеска с использованием лишь этого минимума неопределенность в значениях e и ω будет крайне высока. В то время как значения других параметров системы (радиусы компонентов, угол наклона орбиты, коэффициенты потемнения к краю) можно сравнительно хорошо определять лишь по одному минимуму системы, если значения e и ω предполагать известными. Например, если значения e и ω находятся из анализа кривых лучевых скоростей или, если модель упрощается до предположения круговых орбит (предполагается, что $e = 0$). При этом неопределенность в значениях e и ω создает неопределенность в значениях других параметров, так как

при различных фиксированных значениях e и ω минимум невязки χ^2 по остальным параметрам будет достигаться при различных значениях этих параметров. Поэтому представляет интерес исследовать вопрос о том, какой максимальный объем информации о параметрах системы можно получить по одному минимуму кривой блеска в предположении эллиптичности орбиты.

Трудность такой задачи во многом связана с тем, что невязка χ^2 при изменении совокупности всех параметров системы, включая эксцентриситет и долготу периастра, может меняться очень мало по сравнению с изменением невязки при изменении отдельных параметров, а также, по сравнению с тем, как сильно проявляется нелинейный характер зависимости невязки от искомых параметров: отличие такой зависимости от квадратичной может проявляться значительно сильнее, чем приближение к минимуму. Зависимость невязки от параметров приобретает т. н. овражный характер, когда график невязки имеет форму многомерного длинного и узкого оврага с искривленными стенками и пологим дном. В частности, это мешает применению метода Ньютона для поиска минимума, поскольку такой метод предполагает, что минимизируемая функция существенно не отклоняется от квадратичной зависимости на масштабах шага итерации. Также, вследствие различных скоростей изменения функции (на несколько порядков) в разных направлениях значительно возрастает роль ошибок округления. Для целей данной работы мы решали такую задачу, используя разработанный нами алгоритм высокоточного вычисления кривой блеска. При этом мы производили минимизацию невязки методом Левенберга-Марквардта, адаптированного с учетом специфики для конкретной задачи (ссылка для скачивания приведена в конце статьи).

В работе была таким образом исследована точность, с которой можно найти геометрические параметры и коэффициенты потемнения к краю, в том числе, в зависимости от точности кривой блеска. В рамках исследования мы рассмотрели как реальные наблюдаемые кривые блеска, полученные с помощью космических телескопов, объектов Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b и HD 209459b, точность которых составляет порядка 10^{-4} от полного блеска (порядка 1% от глубины затмения), так и синтетические кривые блеска, симулированные с такой же точностью. Кроме того, мы рассмотрели и синтетические кривые блеска с более высокой точностью 10^{-5} , (0.1% от глубины затмения), чтобы оценить перспективы будущих фотометрических наблюдений с такой точностью.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИНТЕРПРЕТАЦИИ И АЛГОРИТМА

Метод интерпретации наблюдаемых транзитных кривых блеска классической затменной двойной системы звезда-экзопланета (далее «двойной системы») основан на алгоритме высокоточного вычисления блеска при транзите планеты по диску звезды, описанному в цикле работ [2–6].

Использовалась модель двух сферических тел на круговой орбите, в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Относительный радиус полости Роша в десятки раз превосходит радиус планеты [8]. Поэтому наше предположение о сферичности планеты вполне обосновано. То же самое можно сказать и об оптической звезде.

При расчете кривой блеска в качестве функций распределения яркости по диску звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска с линейным коэффициентом потемнения к краю x :

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right), \quad (1)$$

и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения к краю y :

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right) - y \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right)^2 \right). \quad (2)$$

Здесь ρ — полярное расстояние от центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, а r_s — радиус диска звезды. Яркость в центре планеты и, соответственно, яркость в любой точке ее диска, предполагается равной нулю. Планета в орбитальной фазе $\theta = \pi$ проходит по диску звезды. Единицей длины в наших моделях является большая полуось орбиты, $a = 1$. «Третий свет» в модели отсутствует. Радиус планеты обозначен как r_p . Искомыми параметрами модели являются радиусы звезды и планеты: r_s , r_p , угол наклона орбиты i , коэффициент потемнения к краю x , а в случае квадратичного закона потемнения к краю и коэффициент потемнения y , а в общем случае также e и ω .

Полный (внезатменный) блеск системы предполагается известным, наблюдаемые значения блеска предполагаются распределенными по нормальному закону. Также предполагаются известными стандартные отклонения наблюдаемых значений блеска.

Интерпретация производилась методом наименьших квадратов, когда ищется минимум нормированной невязки χ^2 :

$$\mathcal{R}(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p, x, y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{L_j - l_j}{\sigma_j} \right)^2, \quad (3)$$

где N — количество наблюдений блеска, t_j — моменты измерения блеска, l_j — измеренные в эти моменты значения блеска, σ_j — стандартные отклонения измеренных значений блеска, t_0 — время прохождения периастра,

$$L_j = L(t_j - t_0, e, \omega, i, r_s, r_p, x, y)$$

теоретические значения блеска в моменты измерений. Вычисление функции нормированной кривой блеска L описано в работах [5, 6]. Поскольку зависимость блеска от коэффициентов потемнения к краю x и y сводится к линейной зависимости, значения $x(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p)$ и $y(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p)$, доставляющие минимум невязки при фиксированных значениях $t_0, e, \omega, i, r_s, r_p$, находятся аналитически [6]. Ввиду этого, мы рассматривали зависимость $\mathcal{R}(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p)$, получающуюся из формулы (3) путем подстановки $x(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p)$ и $y(t_0, e, \omega, i, r_s, r_p)$. Таким образом, мы решаем задачу минимизации функции

$$\mathcal{R}(x_1, \dots, x_6) = \sum_{n=1}^N \mathcal{R}_n(x_1, \dots, x_6)^2, \quad (4)$$

где $\{x_1, \dots, x_6\} \equiv \vec{x}$ обозначает совокупность параметров $t_0, e, \omega, i, r_s, r_p$,

$$\mathcal{R}_n(x_1, \dots, x_6) = \left(\frac{L_n - l_n}{\sigma_n} \right).$$

При поиске минимума методом Левенберга-Марквардта мы ищем $(k + 1)$ -ую итерацию вектора параметров как $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{\Delta}x_k$, где $\vec{\Delta}x_k$ определяется из решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}_n(\vec{x}_k)}{\partial x_{ki}} \frac{\partial \mathcal{R}_n(\vec{x}_k)}{\partial x_{kj}} + \lambda_k \delta_{ij} \right) \Delta x_{ki} = \\ = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}_n(\vec{x}_k)}{\partial x_{kj}} \mathcal{R}_n(\vec{x}_k), \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а λ_k подбирается так, чтобы обеспечивалась приемлемая сходимость. Мы при решении данной задачи добивались достаточно хорошей сходимости итерационной последователь-

ности, полагая эту величину пропорциональной

градиенту невязки: $\lambda_k = \kappa \sqrt{\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x}_k)^2}{\partial x_{ki}}}$. Коэффициент κ при этом мог быть легко подобран эмпирически для конкретной системы.

3. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В работе выполнен анализ высокоточных транзитных кривых блеска двойных систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b и HD 209458b.

Наблюдаемая кривая блеска HD 209458 получена на космическом телескопе имени Хаббла (HST) в апреле-мае 2000 г. Кривая блеска включает в себя 556 индивидуальных значений блеска двойной системы. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения для разных точек кривой блеска находится в пределах от $\sigma_i^{obs} = 1.13 \times 10^{-4}$ до $\sigma_i^{obs} = 2.47 \times 10^{-4}$ (в долях внезатменной интенсивности). Величины относительных ошибок (в долях глубины затмения) лежат в пределах от $\sim 7 \times 10^{-3}$ до $\sim 1.5 \times 10^{-2}$. Более подробно наблюдательные данные представлены в работе [9].

Наблюдаемые транзитные кривые блеска Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b подробно описаны в работах [10–13]. Кривые блеска были получены на космической обсерватории Kepler с 1 мая по 14 июня 2009 г.

Системы Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b являются объектами ~ 13 звездной величины. Кривые блеска получены в оптическом «белом свете» (диапазон λ 400–850 нм) и в так называемой «длинной моде» (long-cadence mode) с итоговой экспозицией в 30 мин. В этой моде базовая 6 секундная съемка копилась и складывалась до передачи на Землю одной единственной 30-минутной экспозиции, из которой и получались индивидуальные значения блеска исследованных систем. Транзитные кривые блеска каждой из исследуемых систем включают в себя около 2100 индивидуальных значений блеска системы, большинство которых приходится на внезатменную часть кривой блеска.

Точность транзитных кривых блеска двойных систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в интенсивностях составила $\sigma = 1.3759 \times 10^{-4}$, $\sigma = 1.2874 \times 10^{-4}$, $\sigma = 1.0248 \times 10^{-4}$ соответственно. Относительная ошибка (по отношению к глубине затмения) исследуемых в работе транзитных кривых блеска составляет $\sim 1\%$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СИНТЕТИЧЕСКИХ ТРАНЗИТНЫХ КРИВЫХ БЛЕСКА

Работа алгоритма апробирована на ряде синтетических «наблюдаемых» кривых блеска со стандартным отклонением индивидуального значения блеска 10^{-4} и 10^{-5} . Модельные значения параметров, используемых при генерации «наблюдаемых» кривых блеска, приведены в табл. 1. Значение орбитального периода двойной системы P_{orb} принято равным 8^d . При интерпретации кривой блеска поиск значения орбитального периода не выполнялся.

Результат интерпретации синтетических транзитных кривых блеска со стандартным отклонением индивидуального значения блеска 10^{-4} , в предположении линейного закона падения блеска звезды приведен в табл. 2. В предположении квадратичного закона потемнения к краю — в табл. 3.

При интерпретации синтетических кривых блеска параметры орбиты e и ω полагались известными. Поиск остальных параметров выполнен методом минимизации невязки χ^2 по этим параметрам.

Из табл. 2 и 3 видно, что значения искомым параметров двойной системы, а именно, радиуса звезды r_s , радиуса планеты r_p , наклонения орбиты i , коэффициента потемнения к краю x определены весьма надежно.

Далее авторы приступили к интерпретации синтетических транзитных кривых блеска с минимизацией по всем параметрам, включая e и ω , со стандартным отклонением индивидуального значения блеска 10^{-4} . При интерпретации орбита двойной системы предполагалась эксцентричной. Результаты интерпретации синтетической транзитной кривой в предположении линейного закона потемнения к краю представлены в табл. 4.

Таблица 1. Заданные модельные значения параметров, используемых при генерации «наблюдаемых» кривых блеска

Параметр	Значение
e	0.1
$\omega, ^\circ$	60, 120
$i, ^\circ$	88°
r_s	0.1
r_p	0.01
x	0.45
y	0.0

Таблица 2. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска с погрешностью наблюдения 10^{-4} в линейном законе потемнения при фиксированных значениях e и ω

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e / ω)		
	0.1/120	0.1/60	0/—
$e, ^\circ$	0.1	0.1	0
$\omega, ^\circ$	120	60	—
$i, ^\circ$	87.96	88.39	88.02
r_s	0.1002	0.09130	0.09992
r_p	0.01004	0.009120	0.009989
x	0.4470	0.4502	0.4524
χ^2	0.9678	1.008	0.9808

Таблица 3. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска с погрешностью наблюдения 10^{-4} в квадратичном законе потемнения при фиксированных значениях e и ω

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e / ω)		
	0.1/120	0.1/60	0/—
e	0.1	0.1	0
$\omega, ^\circ$	120	60	—
$i, ^\circ$	87.92	88.35	88.02
r_s	0.1005	0.09148	0.09990
r_p	0.01007	0.009153	0.009986
x	0.4677	0.4742	0.45046
y	-0.03799	-0.04490	0.0036708
χ^2	0.9671	1.00679	0.9808

Таблица 4. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска, включая e и ω , с погрешностью наблюдения 10^{-4} в линейном законе потемнения

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e / ω)		
	0.1/120	0.1/60	0/—
e	0.6503	0.7000	0.6176
$\omega, ^\circ$	269.90	-84.11	-93.91
$i, ^\circ$	78.88	82.25	81.52
r_s	0.2195	0.2147	0.1952
r_p	0.0219	0.0214	0.01948
x	0.4259	0.4222	0.4381
χ^2	0.9664	1.005	0.9802

Таблица 5. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска, включая e и ω , с погрешностью наблюдения 10^{-4} в квадратичном законе потемнения

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e/ω)		
	0.1/120	0.1/60	0/—
e	0.6641	0.7154	0.7378
$\omega,^\circ$	269.93	-85.22	269.47
$i,^\circ$	78.72	83.48	89.012
r_s	0.2229	0.2187	0.2251
r_p	0.02224	0.0218	0.02235
x	0.4201	0.4132	0.3819
y	0.006621	0.00984	0.06476
χ^2	0.9664	1.004	0.9787

Таблица 6. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска, включая e и ω , с погрешностью наблюдения 10^{-5} в линейном законе потемнения

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e/ω)	
	0.1/120	0.1/60
e	0.3722	0.1531
$\omega,^\circ$	3.83	-31.56
$i,^\circ$	87.22	87.16
r_s	0.1141	0.1188
r_p	0.0114	0.01188
x	0.4490	0.4495
χ^2	1.0021	1.0075

Таблица 7. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска, включая e и ω , с погрешностью наблюдения 10^{-5} в квадратичном законе потемнения

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой (e/ω)	
	0.1/120	0.1/60
e	0.9974	0.3169
$\omega,^\circ$	86.27	54.05
$i,^\circ$	89.86	87.13
r_s	0.007116	0.1303
r_p	0.0007116	0.01303
x	0.45112668	0.4490
y	-0.002635	0.0008880
χ^2	1.0011	0.9873

Из табл. 4 видно, что отсутствие знания априорных значений эксцентриситета e и долготы периастра ω искажает значения радиуса звезды r_s и планеты r_p в ~ 2 раза. Ошибка в определении наклонения орбиты двойной системы составляет $6^\circ - 10^\circ$. Определенные значения элементов орбиты также не соответствуют истинным значениям (см. табл. 1).

Применение квадратичного закона потемнения к краю при интерпретации синтетической транзитной кривой блеска со стандартным отклонением индивидуального значения блеска 10^{-4} не меняет ситуацию. Из табл. 5 видно, что радиус планеты r_p и звезды r_s вдвое больше истинных значений. Точность синтетической транзитной кривой оказывается недостаточной для определения элементов орбиты e и ω из одного минимума кривой блеск. Полученные значения коэффициентов потемнения к краю x и y также отличаются от истинных.

Отметим, что несмотря на то, что значения радиусов планеты r_p и звезды r_s значительно отличаются от истинных, их отношение r_p/r_s определяются достаточно точно.

В настоящее время точность транзитных кривых блеска растет. Поэтому в работе выполнен анализ синтетической транзитной кривой блеска с теми же центральными значениями (см. табл. 1), но со стандартным отклонением индивидуального значения блеска 10^{-5} . Результаты интерпретации приведены ниже. В табл. 6 — в предположении линейного закона потемнения к краю. В табл. 7 — в предположении квадратичного закона потемнения к краю.

Видно, что при увеличении точности наблюдений, а именно, уменьшения стандартного отклонения индивидуального значения блеска с 10^{-4} до 10^{-5} значения радиусов звезды и планеты близки к исходным центральным значениям (см. табл. 1). Ошибка радиусов планеты и звезды при увеличении точности индивидуального значения блеска с 10^{-4} до 10^{-5} уменьшается со $\sim 100\%$ до $\sim 10\%$.

Отметим, что в ряде случаев (см. столбец 2 табл. 7) искомые значения, доставляющие минимум невязки, оказываются недостоверны. Причиной этого является неприменимость метода наименьших квадратов в конкретном случае для оценки значений искомых параметров, поскольку минимум невязки обусловлен не близостью значений параметров к их истинным значениям, а ограничениями на область значений невязки, связанными со значительной нелинейностью модели. Соответственно, предположение о распределении

Таблица 8. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска в линейном законе потемнения для круговых орбит, $\sigma = 10^{-4}$

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой блеска (e / ω)		
	0.1/120	0.1/60	0.6/60
e	0	0	0
$i, ^\circ$	87.60	87.64	85.66
r_s	0.1091	0.1089	0.1652
r_p	0.01093	0.0109	0.01651
x	0.4467	0.4499	0.4509
χ^2	0.9678	1.008	0.9996

минимальных значений вокруг их истинных значений не выполняется даже приближенно. Так, например, в случае круговых орбит минимум невязки может достигаться при значении угла наклона орбиты i , равным в точности 90° . При эксцентричных орбитах о подобных особенностях модели может свидетельствовать значение эксцентриситета, нереально близкое к единице. При этом угол наклона и долгота периастра оказываются также близки к 90° . В рамках данной работы мы ограничиваемся констатацией и отсеиванием таких случаев. При этом проведение интерпретации в разных законах потемнения к краю увеличивает шансы не столкнуться с ними.

Дополнительно проведена интерпретация синтетических кривых блеска, сгенерированных с центральными значениями, содержащимися в табл. 1, в предположении круговой орбиты и с точностью наблюдений 10^{-4} . Такая ситуация нередко возникает при малом значении эксцентриситета двойной системы с экзопланетой. Исследователь полагает орбиту двойной системы, имеющую малый эксцентриситет ~ 0.1 , круговой. В связи с этим, интересно выявить величину ошибки значений геометрических параметров двойной системы r_s, r_p, i при игнорировании у орбиты эксцентриситета. Результаты представлены в табл. 8.

Из табл. 8 видно, что при игнорировании эксцентриситета $e = 0.1$ удается достаточно точно определить наклонение орбиты, коэффициент потемнения к краю. Ошибка же радиуса звезды и планеты составляет около 9%. Это подтверждает результаты работы [14], в которой исследовано влияние эксцентриситета орбиты на параметры при небольшом отклонении эксцентриситета от нуля ($e < 0.1$).

Таблица 9. Оптимальные значения параметров синтетических кривых блеска в квадратичном законе потемнения для круговых орбит, $\sigma = 10^{-4}$

Параметр	Параметры генерации синтетической кривой блеска (e / ω)		
	0.1/120	0.1/60	0.6/60
e	0	0	0
$i, ^\circ$	87.55	87.64	85.63
r_s	0.1094	0.1089	0.1653
r_p	0.0110	0.01089	0.01654
x	0.4673	0.4506	0.4680
y	-0.03756	-0.001214	-0.02934
χ^2	0.9671	1.008	0.9991

В случае игнорирования эксцентриситета величиной 0.6 (см. четвертый столбец табл. 8) значение наклонения орбиты двойной системы и коэффициента потемнения к краю удается установить достаточно точно. Ошибка же радиуса планеты и радиуса звезды значительно возрастает и составляет около 65%.

Использование квадратичного закона потемнения к краю при интерпретации этих же синтетических транзитных кривых блеска не меняет ситуацию: удается определить радиус планеты и звезды с точностью $\sim 9 - 10\%$, наклонение орбиты с точностью $\sim 3 - 5^\circ$. Ожидаемо, что игнорирование эксцентриситета орбиты 0.1 приводит к меньшим ошибкам радиуса и планеты в сравнении с результатами интерпретации, полученными при игнорировании эксцентриситета 0.6. Так, в первом случае ошибка радиусов планеты и звезды составляет 9 - 10%, во втором — $\sim 16\%$ (см. табл. 9).

Результаты расчетов, проведенных выше, как и результат работы [14], наглядно продемонстрировали, что при отсутствии некоторой априорной информации об орбите двойной системы определение значения эксцентриситета e и значения долготы периастра ω по одному лишь главному минимуму невозможно.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НАБЛЮДАЕМЫХ ТРАНЗИТНЫХ КРИВЫХ БЛЕСКА

Ниже в табл. 10 и табл. 11 представлены результаты интерпретации наблюдаемых транзитных кривых блеска систем Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7, HD 209458.

Таблица 10. Оптимальные значения параметров наблюдаемых кривых блеска в линейном законе потемнения

Параметр	Наблюдаемая кривая блеска			
	Kepler-5	Kepler-6	Kepler-7	HD 209458
e	0.5253	0.9452	0.5932	0.1
$\omega, ^\circ$	134.35	66.31	-75.18	90.00
$i, ^\circ$	84.629	86.33	60.84	90.00
r_s	0.1562	0.07365	0.29599	9.91×10^{-5}
r_p	0.0132	0.007402	0.02510	1.21×10^{-5}
x	0.4820	0.6306	0.5164	0.4955
χ^2	1.0515	1.07011	1.0521	1.1295

Орбитальные периоды этих систем в ходе интерпретации рассматривались как фиксированные, а их значения были взяты из работ [10, 11, 12, 13] и приняты равными 3.548460^d для Kepler-5, 3.234723^d для Kepler-6, 4.885525^d для Kepler-7 и 3.52474859^d для HD 209458.

Полученные значения элементов орбиты для двойных систем Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7 далеки от полученных в предположении круговой орбиты как линейном законе потемнения (см. табл. 10), так и в квадратичном (см. табл. 11). Для наблюдаемой транзитной кривой блеска двойной системы HD 209458 полученные значения радиусов планеты и звезды являются физически недостоверными (см. табл. 10 и табл. 11).

Таким образом, чтобы получить значения радиуса планеты, радиуса звезды, наклона орбиты приходится полагать орбиту круговой. Ре-

зультаты для круговой орбиты в линейном законе приведены в табл. 12, в квадратичном — в табл. 13.

Подчеркнем, что в свете приведенных выше расчетов на основе синтетических кривых блеска ясно, что при наличие малого эксцентриситета ~ 0.1 мы получаем заведомо искаженные на несколько процентов значения радиусов планеты и звезды и наклона орбиты. Если же эксцентриситет $\sim 0.5 - 0.6$, то значения радиусов планеты и звезды будут искажены весьма значительно, вплоть до $\sim 60 - 70\%$.

Также, для рассмотренных четырех систем мы в табл. 14 приводим значения их параметров, полученные в работах [10, 11, 12, 13]. Для двойных систем Kepler-5b, Kepler-6b, и Kepler-7b в соответствующих работах коэффициенты потемнения не определялись путем интерпретации транзитных кривых блеска (их значения вычислялись из отдельных соображений и при интерпретации по-

Таблица 11. Оптимальные значения параметров наблюдаемых кривых блеска в квадратичном законе потемнения

Параметр	Наблюдаемая кривая блеска			
	Kepler-5	Kepler-6	Kepler-7	HD 209458
e	0.4128	0.6706	0.7643	0.99999
$\omega, ^\circ$	192.00	-84.91	-86.41	90.01
$i, ^\circ$	77.59	52.74	34.61	89.99
r_s	0.2445	0.3197	0.3131	2.64×10^{-5}
r_p	0.02007	0.03134	0.02597	3.19×10^{-6}
x	-0.0536	0.3363	0.1845	0.29398
y	0.7284	0.3967	0.4388	0.3441
χ^2	1.046	1.0678	1.0493	1.039

Таблица 12. Оптимальные значения параметров наблюдаемых кривых блеска в линейном законе потемнения для круговых орбит

Параметр	Наблюдаемая кривая блеска			
	Kepler-5	Kepler-6	Kepler-7	HD 209458
i_s°	81.59	82.98	83.11	86.483
r_s	0.2111	0.1792	0.1724	0.11472
r_p	0.01777	0.0180	0.01469	0.01406
x	0.4824	0.6348	0.5377	0.4946
χ^2	1.0517	1.071	1.053	1.1310

Таблица 13. Оптимальные значения параметров наблюдаемых кривых блеска в квадратичном законе потемнения для круговых орбит

Параметр	Наблюдаемая кривая блеска			
	Kepler-5	Kepler-6	Kepler-7	HD 209458
i_s°	81.91	83.15	83.30	86.674
r_s	0.2091	0.1785	0.1711	0.11387
r_p	0.01716	0.01767	0.01433	0.01377
x	-0.06556	0.3862	0.2256	0.2949
y	0.7479	0.3737	0.4351	0.3436
χ^2	1.046	1.069	1.051	1.0340

лагались фиксированными). Этим может объясняться заметное расхождение результатов, полученных нами и другими авторами для Kepler-5, Kepler-6 и Kepler-7.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде всего, следует отметить, что даже серьезное увеличение точности кривой блеска не позво-

ляет надежно определить эксцентриситет и долготу периастра по одному лишь главному минимуму кривой блеска.

В то же время, по одному минимуму даже при точности наблюдений 10^{-4} достаточно хорошо определяется отношение радиусов планеты и звезды, а также коэффициенты потемнения к краю. При этом значения радиуса планеты, радиуса звезды и угла

Таблица 14. Значения параметров наблюдаемых кривых блеска для круговых орбит, полученные другими авторами в квадратичном законе потемнения

Параметр	Наблюдаемая кривая блеска			
	Kepler-5	Kepler-6	Kepler-7	HD 209458
i_s°	86.3	86.8	86.5	86.665
r_s	0.165	0.14	0.138	0.11393
r_p	0.0135	0.014	0.0114	0.01378
x	—	—	—	0.297
y	—	—	—	0.338
χ^2	—	—	—	1.056

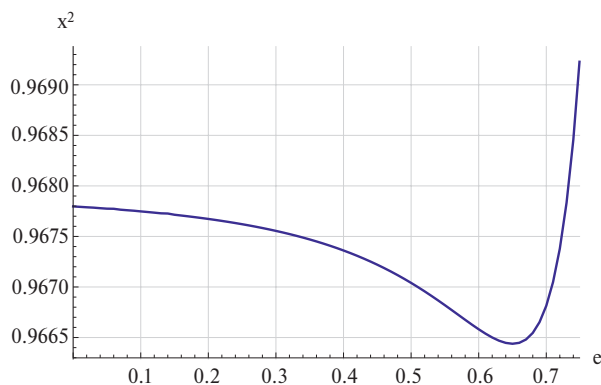


Рис. 1. Зависимость от e невязки χ^2 , минимизированной по всем остальным параметрам, в линейном законе потемнения к краю. Использовалась синтетическая кривая блеска с центральными значениями $e = 0.1$, $\omega = 120$, точность наблюдений 10^{-4} .

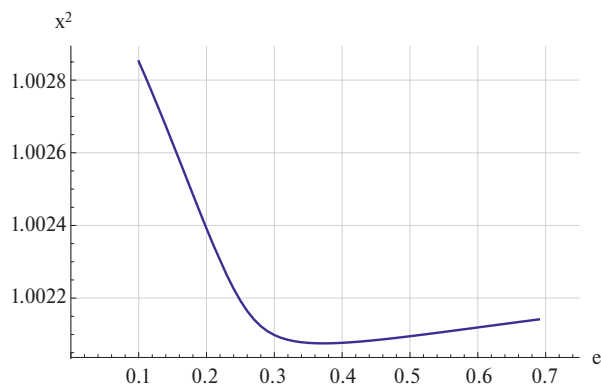


Рис. 2. Зависимость от e невязки χ^2 , минимизированной по всем остальным параметрам, в линейном законе потемнения к краю. Использовалась синтетическая кривая блеска с центральными значениями $e = 0.1$, $\omega = 120$, точность наблюдений 10^{-5} .

наклона орбиты могут существенно отличаться от их истинных значений, принимая совершенно неправдоподобные значения. Увеличивая точность наблюдений до $\sim 10^{-5}$, можно значительно приблизить найденные значения радиусов и угла наклона орбиты к их истинным значениям. В некоторых случаях эти найденные значения могут давать довольно точные оценки истинных величин. Однако, нелинейность модели не позволяет оценить стандартными статистическими способами надежность этих значений (например, построить доверительный интервал с заданным уровнем доверия). Степень нелинейности можно оценить, например, по графику зависимости невязки, минимизированной по всем параметрам, кроме e , от значения e .

На рис. 1 и 2 мы привели вышеупомянутую зависимость в предположении линейного закона потемнения к краю для синтетических кривых блеска, сгенерированных для центральных значений $e = 0.1$, $\omega = 120$, с точностью наблюдений (стандартным отклонением блеска) 10^{-4} и 10^{-5} соответственно. Видно, что эти графики существенно отличаются от графика квадратичной зависимости.

Поэтому достоверность найденных значений радиусов следует дополнительно проверять, отсеивая недостоверные значения. В том числе, можно сравнивать значения, полученные в различных законах потемнения к краю. Также, можно использовать оценки значений эксцентриситета и долготы периастра, полученные из кривых лучевых скоростей. При наличии оснований полагать, что эксцентриситет достаточно мал, можно проводить интерпретацию в предположении круговых орбит.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даже высокоточная кривая блеска (со стандартным отклонением индивидуального значения блеска $\sim 10^{-5}$) при отсутствии априорных данных об элементах орбиты дает большую ошибку при определении радиусов планеты и звезды, чем при использовании предположения о круговой орбиты или априорной информации о долготе периастра и эксцентриситета.

Тем не менее, при высокой точности наблюдений $\sim 10^{-5}$ по сравнению с точностью $\sim 10^{-4}$ заметно увеличивается объем информации, которую можно получить при интерпретации транзитной кривой блеска по одному минимуму.

Также отметим, что можно достоверно определить из транзитной кривой блеска отношения радиусов компонентов двойной системы и значения коэффициентов потемнения к краю, даже не располагая информацией о долготе периастра и величине эксцентриситета.

Даже для сверхвысокоточных транзитных кривых блеска, при их интерпретации по одному минимуму, рекомендуется использовать дополнительную информацию об эксцентриситете и долготе периастра или каких-либо остальных геометрических параметрах. В том числе, может быть полезным, при наличии информации о малости эксцентриситета ($e < 0.1$) проводить интерпретацию в предположении круговой орбиты. В некоторых случаях при наблюдениях транзитов в ИК диапазоне удастся пронаблюдать вторичное затмение экзопланеты, нагретой звездой, что позволяет оценить величину $e \cos \omega$.

Это также может помочь в реализации более однозначной интерпретации транзитной кривой блеска.

Алгоритм интерпретации кривой блеска с минимизацией методом Левенберга-Марквардта доступен на сайте ГАИШ МГУ¹.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность академику РАН А. М. Черепашуку за полезные замечания и рекомендации к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Я. Мартынов, Затменные переменные звезды, под ред. В. П. Цесевича (М.: Наука, 1971).
2. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* 85(2), 121 (2008).
3. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* 86(8), 778 (2009).
4. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* 87(12), 1199 (2010).
5. М. К. Abubekеров and N. Yu. Gostev, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 432(3), 2216 (2013).
6. М. К. Abubekеров and N. Yu. Gostev, *Astron. and Astrophys.* 633, id. A96 (2020).
7. М. К. Abubekеров and N. Yu. Gostev, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 459(2), 2078 (2016).
8. Н. Ю. Гостев, *Астрон. журн.* 88, 704 (2011).
9. T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, R. W. Noyes, and A. Burrows, 552(2), 699 (2001).
10. D. G. Koch, W. J. Borucki, J. F. Rowe, N. M. Batalha, et al., 713(2), L131 (2010).
11. E. W. Dunham, W. J. Borucki, D. G. Koch, N. M. Batalha, et al., 713(2), L136 (2010).
12. D. W. Latham, W. J. Borucki, D. G. Koch, T. M. Brown, et al., *Astrophys.J.* 713(2), L140 (2010).
13. J. Southworth, P. J. Wheatley, and G. Sams, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 379(1), L11 (2007).
14. Е. В. Бекесов, М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* 100(11), 964 (2023).

¹ <http://lnfm1.sai.msu.su/~ngostev/Files/lmfit.zip>

INTERPRETATION OF THE TRANSIT LIGHT CURVE IN THE PRESENCE OF ONE PRINCIPAL MINIMUM TAKING INTO ACCOUNT THE ECCENTRICITY OF THE TRANSIT (PLANET) ORBIT

M. K. Abubekеров¹, N. Yu. Gostev¹

¹*Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

Using a high-precision algorithm for interpreting transit light curves in a model of a classical eclipsing binary star-exoplanet system, we investigated the possibility of determining the system parameters in the absence of a priori knowledge of the orbital eccentricity. It was shown that it is impossible to determine the exact value of the eccentricity and periastron longitude based on the main minimum of the transit light curve alone. Also, with an observational accuracy of about 1% of the eclipse depth, the uncertainty in the eccentricity and periastron longitude together causes a significant uncertainty in the values of the component radii (an error of 2–3 times relative to the true values) and the orbital inclination angle. However, the ratios of the system component radii and the limb darkening coefficients are determined with good accuracy. With an increase in the observational accuracy to 0.1% of the eclipse depth, it becomes possible to determine the component radii and the orbital inclination angle when interpreting the light curve taking into account the eccentricity.

Keywords: light curves, binary systems with exoplanets, binary system eccentricity, star radius, planet radius, orbital inclination