ПРОФИЛИ И НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

© 2024 г. С. А. Гасанов¹

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

E-mail: gasanov@sai.msu.ru

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.

После доработки 23.11.2023 г.

Принята в печать 27.12.2023 г.

Рассмотрены несколько новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ), имеющей форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида, и состоящей из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с разными законами распределения плотности — профилями. На основе этих моделей определены некоторые ключевые динамические параметры ЭГ: гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, суммарная поверхностная яркость, полная светимость, а также дисперсия скоростей в зависимости от расстояния до центра ЭГ. Установлены соотношения между важными динамическими параметрами галактики: “масса—размеры”, “масса—дисперсия скоростей”, “размер—дисперсия скоростей—светимость” (поверхностная яркость). Исследованы эволюционные сценарии образования ЭГ согласно этим моделям.

Полученные результаты применены к шестидесяти модельным ЭГ с параметрами, точно совпадающими с реально существующими, и приведены в виде таблиц.

Ключевые слова: эллиптические галактики, сценарии образования, фундаментальные параметры, соотношения между параметрами галактик

DOI: 10.31857/S0004629924020027 EDN: KTMGGG

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основе созданных новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ) определены полная гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения эллиптической галактики (ЭГ), ее дисперсия скоростей в зависимости от расстояния. При этом считается, что ЭГ состоит из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ), имеющих разные законы распределения плотности — профили. Для получения точных результатов во всех моделях потенциалы в ряд не разлагаются, а берутся их точные выражения.

Задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле слоисто-неоднородной ЭГ рассмотрена в работе [2]. Определена область возможности движения ПГТ в силу найденного аналога интеграла Якоби и построены поверхности нулевой скорости. Найдены стационарные решения — точки либрации — и установлена их устойчивость в смысле Ляпунова.

В настоящей работе рассмотрены три новые модели слоисто-неоднородной ЭГ. Модель I: ЭГ представляет собой неоднородный трехосный эллипсоид с полуосями $a > b > c$; модель II: ЭГ — неоднородный

сжатый сфероид ($a = b > c$), и модель III: ЭГ — неоднородный вытянутый сфероид ($a > b = c$). В каждой модели рассматриваются два варианта: (а) и (б). Согласно варианту (а), ЭГ состоит только из БМ с профилем $\rho(m)$, а согласно варианту (б), она состоит из БМ и ТМ с профилями $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$ соответственно. Если рассматривается вариант (а), то в качестве профиля $\rho(m)$ БМ берется либо “астрофизический закон” распределения плотности — “астрофизический” профиль [1], либо аналог профиля NFW [1], либо аналог профиля Хернквиста [1]. Если же рассматривается вариант (б), то в качестве $\rho_1(m)$ берется тот же “астрофизический” профиль, а в качестве $\rho_2(m)$ для ТМ — один из аналогов профилей NFW и Хернквиста. Оригиналы последних профилей, рассмотренных в работах NFW [3] и Хернквиста [4], предназначены для сферически симметричных галактик. Для применения этих профилей к ЭГ мы внесли соответствующие изменения, полученные профили были названы аналогами профилей [1].

На основе этих моделей определены гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, суммарная поверхностная яркость и полная светимость галактик в зависимости от профиля плотности, а также дисперсии скоростей

в зависимости от расстояния до центра галактики. Определены значения эффективного радиуса и параметра семейства гомотетических эллипсоидов, центральной и эффективной поверхностной яркости в зависимости от профиля плотности модельной галактики. Кроме того, установлены соотношения между важными динамическими параметрами галактики и исследованы эволюционные сценарии образования ЭГ согласно этим моделям.

2. ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ВРАЩЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

В этом разделе приведем формулы вычисления потенциальной энергии и кинетической энергии вращения ЭГ в соответствии с вариантом (б) модели I. Этот вариант носит более общий характер, так как рассматриваемые выше варианты (а) и (б) моделей II и III, а также вариант (а) модели I являются практически его частными случаями. Исходя из этих соображений, положим, что эллиптическая галактика (ЭГ) представляет собой трехосный слоисто-неоднородный эллипсоид с полуосями a , b и c , состоящий из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ). Под слоисто-неоднородным эллипсоидом подразумевается эллипсоид с гомотетическим (эллипсоидальным) законом распределения плотности — профилем. Положим, что $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$ — законы распределения плотности БМ и ТМ данного эллипсоида соответственно. Эти профили являются функциями только параметра m семейства эллипсоидальных поверхностей,

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad a > b > c, \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (1)$$

Здесь значение $m=0$ соответствует центру ЭГ, а $m=1$ — эллипсоидальной поверхности, которой ограничена ЭГ.

Полная гравитационная (потенциальная) энергия $W(m=1)$ и кинетическая энергия вращения $T(m=1)$ слоисто-неоднородного эллипсоида с полуосями a , b , c , плотностью $\rho(m)$ и массой $M(m)$ в случае изотропного давления определяются общей формулой [5]:

$$\begin{aligned} W(m=1) &= -2A_0J_0\Psi(1), \\ T(m=1) &= A_0J_1\Psi(1), \\ A_0 &= \frac{\pi Gabc}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Psi(m) = \int_0^m \rho(u)M(u)du^2, \quad (3)$$

$$M(m) = 4\pi abc \int_0^m u^2 \rho(u)du, \quad k=1, 2,$$

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\varphi_0, n), \quad J_1 = J_0 - 3c^2 K_0, \quad (4)$$

$$K_0 = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\Delta(u)} = \frac{2}{b^2 - c^2} \left[-\frac{E(\varphi_0, n)}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{b}{ac} \right]. \quad (5)$$

Здесь $F(\varphi_0, n)$, $E(\varphi_0, n)$ — неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Кроме того, аргумент φ_0 и модуль n этих интегралов, а также функция $\Delta(u)$ равны

$$\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \\ n &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}.$$

Теперь применим формулу (2) к слоисто-неоднородному промежуточному эллипсоиду, состоящему из барионной массы с профилем $\rho_1(m)$, массой $M_1(m)$ и темной материи с профилем $\rho_2(m)$, массой $M_2(m)$. Для этого в указанной формуле вместо профиля $\rho(m)$ и массы $M(m)$ следует пользоваться общим профилем и общей массой, т. е. положить

$$\begin{aligned} \rho(m) &= \rho_1(m) + \rho_2(m), \\ M(m) &= M_1(m) + M_2(m). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом массы $M_1(m)$ и $M_2(m)$ определяются по формуле (3) заменой профиля $\rho(m)$ на соответствующий, а полная масса — на массу, получаемую при $m=1$. Кроме того, формулу (2) в этом случае можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W(m=1) &= -2A_0J_0\Psi(1), \\ T(m=1) &= A_0J_1\Psi(1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi(m) = \sum_{n=1}^4 \Psi_n(m),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(m) &= \int_0^m \rho_1(u)M_1(u)du^2, \\ \Psi_2(m) &= \int_0^m \rho_1(u)M_2(u)du^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\psi_3(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_1(u) du^2, \\ \psi_4(m) &= \int_0^{m^2} \rho_2(u) M_2(u) du^2.\end{aligned}\quad (10)$$

3. ВЫРАЖЕНИЕ ЭНЕРГИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОФИЛЕЙ БАРИОННОЙ МАССЫ И ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

В этом разделе вычислим полную потенциальную энергию $W(m=1)$ и кинетическую энергию вращения $T(m=1)$ слоисто-неоднородной эллиптической галактики в зависимости от конкретных профилей $\rho_1(m)$ и $\rho_2(m)$, а также от ее формы в соответствии с моделями I, II и III. Согласно этим моделям, будем рассматривать следующие формы ЭГ: 1) трехосный эллипсоид ($a > b > c$); 2) сжатый сфероид ($a = b > c$) и 3) вытянутый сфероид ($a > b = c$). Очевидно, что трехосный эллипсоид представляет собой более сложную и общую форму, чем другие. Поэтому его следует рассмотреть более подробно; случаи 2) и 3) являются частными случаями первого.

3.1 Модель I: ЭГ слоисто-неоднородный трехосный эллипсоид ($a > b > c$)

В качестве профиля для барионной массы (БМ) эллиптической галактики как слоисто-неоднородного трехосного эллипсоида возьмем профиль $\rho_1(m)$, связанный с профилем поверхностной яркостью, открытый Хабблом [5, 6]:

$$\rho_1(m) = \frac{\rho_0}{w^3}, \quad w = \sqrt{1 + \beta m^2}, \quad (11)$$

где m определяется равенством (1), ρ_0 — плотность в центре эллиптической галактики, а параметр $\beta \gg 1$ для каждой ЭГ выбирается отдельно и находится выравниванием данных фотометрии [7]. Профиль $\rho_1(m)$ определяется из интегрального уравнения Абея, при известном, например, из наблюдения, профиле $I_1(m)$. По этой причине $\rho_1(m)$ будем считать “астрофизическим законом” распределения плотности [1, 5].

Масса $M_1(m)$ промежуточного эллипсоида, состоящего из БМ с профилем $\rho_1(m)$, вычисляется по формуле (3) и равна

$$\begin{aligned}M_1(m) &= \frac{4\pi\rho_0 abc}{\beta\sqrt{\beta}} \left[\ln \varphi_1(m) - \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w} \right], \\ \varphi_1(m) &= w + \sqrt{w^2 - 1},\end{aligned}\quad (12)$$

причем $m=1$ соответствует полной массе ЭГ с БМ, т.е. $M_1 = M(m=1)$, а w определен выше.

В случае (а) модели I, т.е. ЭГ состоит только из БМ, имеем

$$\begin{aligned}\psi_2(m) &= \psi_3(m) = \psi_4(m) \equiv 0, \\ \Psi(m) &\equiv \psi_1(m) = 4\pi\rho_0^2 abc f_1(m),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}f_1(m) &= \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta}} \left[\arctg \sqrt{w^2 - 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \ln \varphi_1(m)}{w} + \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Тогда, подставив выражение (13) функции $\Psi(m)$ в формулу (8) для полной потенциальной энергии $W(m=1)$ и кинетической энергии вращения $T(m=1)$ такой галактики, получим

$$\begin{aligned}W(m=1) &= -2W_0 J_0 \rho_0^2 f_1(1), \\ T(m=1) &= W_0 J_1 \rho_0^2 f_1(1), \\ W_0 &= 2\pi^2 G a^2 b^2 c^2,\end{aligned}\quad (15)$$

где коэффициенты J_0, J_1 определяются равенством (4), а функция $f_1(m)$ — равенством (14). Следовательно, отношение

$$t = \frac{T(m=1)}{|W(m=1)|} = \frac{J_1}{2J_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3c^2 K_0}{J_0} \right) \quad (16)$$

не зависит от распределения массы неоднородного эллипсоида, а зависит только от его формы или размеров.

Согласно варианту (б) модели I, положим, что ЭГ состоит из БМ и ТМ, причем профиль БМ $\rho_1(m)$ определяется равенством (11). В качестве профиля ТМ будем рассматривать один из аналогов профилей NFW, Хернквиста, приведенные в [1].

Сначала рассмотрим аналог профиля NFW:

$$\rho_2(m) = \frac{K}{g^2(g-1)}, \quad g = 1 + \mu m, \quad \mu = \frac{\sqrt[3]{abc}}{r_s}, \quad (17)$$

где r_s — радиус-шкала ЭГ, а K — нормализующий коэффициент, имеющий размерность плотности в массах Солнца на кубический парсек.

Масса промежуточного эллипсоида $M_2(m)$ при этом будет равна

$$M_2(m) = 4\pi K r_s^3 \left(\ln g - \frac{g-1}{g} \right).$$

Далее, вычислив функции $\psi_k(m)$, $k=2, 3, 4$ с учетом выражения $\psi_1(m)$ для энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} W(m=1) &= -2W_0 J_0 \Phi_1(1), \\ T(m=1) &= W_0 J_1 \Phi_1(1), \end{aligned} \quad (18)$$

где коэффициенты J_0 , J_1 и W_0 приведены выше, а функция $\Phi_1(m)$ равна

$$\begin{aligned} \Phi_1(m) &= \rho_0^2 N_1(m) + 2K\rho_0 N_2(m) + K^2 N_3(m), \\ N_1(m) &\equiv f_1(m). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь функция $f_1(m)$ определяется равенством (14), а

$$N_2(m) = \frac{1}{\beta\mu^3 w} \left[\frac{g-1}{g} - \frac{\mu w}{\sqrt{\beta}g} \ln \varphi_1(m) + \frac{\mu w}{2\sqrt{\beta+\mu^2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \ln g \right], \quad (20)$$

$$N_3(m) = \frac{1}{\mu^5} \left(1 - \frac{1}{g^2} - \frac{\ln g^2}{g} \right), \quad (21)$$

причем функция $\varphi_1(m)$ определена выше равенством (12), а

$$\begin{aligned} \varphi_2(m) &= \frac{w\sqrt{\mu^2 + \beta} + \beta m - \mu}{w\sqrt{\mu^2 + \beta} - \beta m + \mu}, \\ \varphi_2(0) &= \varphi_2(m=0). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно аналогу профиля Хернквиста, имеем

$$\begin{aligned} \rho_2(m) &= \frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{g}^3(\bar{g}-1)}, \\ M_2(m) &= \frac{M(\bar{g}-1)^2}{\bar{g}^2}, \\ \bar{g} &= 1 + \bar{\mu}m, \quad \bar{\mu} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь M — полная масса галактики, а $\bar{a}$ — шкала масштабирования галактики.

Аналогично вычисляем энергии

$$\begin{aligned} W(m=1) &= -2W_0 J_0 \Phi_2(1), \\ T(m=1) &= W_0 J_1 \Phi_2(1), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2(m) &= \rho_0^2 H_1(m) + 2M\rho_0 H_2(m) + M^2 H_3(m), \\ H_1(m) &\equiv f_1(m). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$H_2(m) = \frac{1}{8\pi\bar{\mu}^2\bar{a}^3} \left[\frac{1}{(\bar{\mu}^2 + \beta)^{3/2}} \ln \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \frac{2\ln \varphi_1(m)}{\beta\sqrt{\beta}\bar{g}^2} + \frac{2\bar{\mu}\varphi_3(m)}{\beta(\bar{\mu}^2 + \beta)} \right], \quad (26)$$

$$H_3(m) = \frac{(\bar{g}-1)^3(3+\bar{g})}{48\pi^2\bar{\mu}^5\bar{a}^6\bar{g}^4}, \quad (27)$$

$$\varphi_3(m) = 1 + \frac{1}{w} + \frac{(\bar{g}-1)(2\beta+w^2-2)}{\bar{g}^2 w},$$

а функции $\varphi_1(m)$ и $\varphi_2(m)$ определены выше¹.

Далее рассмотрим модели II и III, согласно которым ЭГ представляет собой неоднородный сфероид с общим профилем $\rho(m) = \rho_1(m) + \rho_2(m)$.

3.2. Модель II: ЭГ слоисто-неоднородный сжатый сфероид ($a=b>c$)

В случае варианта (б) этой модели полные энергии $W(m=1)$ и $T(m=1)$ также определяются формулами (18) и (24) с аналогами профилей NFW и Хернквиста. Только коэффициенты J_0 , J_1 , W_0 , а также параметры m , μ , $\bar{\mu}$ определяются иначе:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{2}{ae} \arcsin e, \\ J_1 &= \frac{1}{ae^2} \left[a(3-2e^2)J_0 - 6\sqrt{1-e^2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2},$$

$$W_0 = 2\pi^2 G a^4 c^2,$$

$$m^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (29)$$

$$\mu = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{r_s}, \quad \bar{\mu} = \frac{\sqrt[3]{a^2 c}}{\bar{a}}.$$

Аналогичные выражения для энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$, соответствующие варианту (а) модели II, получим согласно утверждению, приведенному в Примечании 1.

3.3. Модель III: ЭГ слоисто-неоднородный вытянутый сфероид ($a>b=c$)

В случае варианта (б) модели III в формулах (18) и (24) для энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$ следует учесть

¹ Полученные нами формулы (18) и (24) для энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$ совместно с равенствами (19) и (25) соответствуют варианту (б) модели I. Если в выражении (19) для функции $\Phi_1(m)$ положить $K=0$, а полученное выражение учесть в формуле (18), то получим выражения энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$, соответствующие варианту (а) модели I при “астрофизическом” профиле. То же самое получим, если в выражении (25) для функции $\Phi_2(m)$ положить $M=0$. Аналогично, если в (19) и (24) положить $\rho_0=0$, то получим выражения энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$ согласно варианту (а) модели I при профилях NFW и Хернквиста соответственно.

$$J_0 = \frac{1}{ae} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad (30)$$

$$J_1 = \frac{1}{2ae^2} [a(3-e^2)J_0 - 6],$$

$$W_0 = 2\pi^2 G a^2 c^4,$$

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2},$$

$$\mu = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{r_s}, \quad (31)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\bar{a}}.$$

Аналогичные выражения для энергий $W(m=1)$ и $T(m=1)$, соответствующие варианту (а) модели III, также получим согласно утверждению, приведенному в Примечании 1.

4. ПОВЕРХНОСТНАЯ ЯРКОСТЬ И ПОЛНАЯ СВЕТИМОСТЬ ГАЛАКТИКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРОФИЛЕЙ

В этом разделе определим зависимость от профилей тех динамических параметров галактики, которые связаны только с барионной массой. Иными словами, рассмотрим вариант (а) моделей I, II и III, различая два случая: светящийся диск галактики — либо круг, либо эллипс.

Пусть галактический диск имеет форму круга радиуса $\bar{R}$. Тогда связь между профилем плотности $\rho(R)$ и поверхностной яркостью $I(R)$ такой галактики задается интегральным уравнением Абея [8]:

$$\rho(R) = -\frac{\Upsilon}{\pi} \int_R^\infty \frac{dI(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \quad (32)$$

$$I(R) = \frac{2}{\Upsilon} \int_R^\infty \frac{r\rho(r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr.$$

Здесь Υ — отношение масса—светимость, причем верхний предел интеграла (бесконечность) иногда заменяется радиусом круга $\bar{R}$. Если известен профиль $I(R)$ галактики, то суммарная поверхностная яркость $L(R)$ в зависимости от расстояния R от центра галактики определяется по формуле [8]:

$$L(R) = \int_0^R S(r) I(r) dr, \quad (33)$$

$$S(r) = 2\pi r,$$

где $S(r)$ — длина промежуточного круга радиуса r .

Пусть закон распределения плотности БМ галактики совпадает с “астрофизическим” профилем $\rho(r)$, т.е.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + \bar{r}^2)^{3/2}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\bar{a}}, \quad (34)$$

где $\bar{a}$ — радиус масштабирования, ρ_0 — плотность в центре галактики. Подставив $\rho(r)$ из выражения (34) во вторую формулу (32), после вычисления интеграла для поверхностной яркости $I(r)$ находим

$$I(r) = \frac{I_0}{1 + \bar{r}^2}, \quad I_0 = \frac{2\rho_0 \bar{a}}{\Upsilon}. \quad (35)$$

Здесь I_0 — центральная поверхностная яркость галактики. Из выражения (35) легко находится значение поверхностной яркости $I_e = I(R_e)$, соответствующее эффективному радиусу R_e .

Далее в интеграле (33) учтем выражение $I(r)$ (35). Это позволит найти суммарную $L(r)$ и полную светимость $L_T = L(r = \bar{a})$, а также значение светимости L_e на расстоянии R_e :

$$L(r) = L_0 \ln(1 + \bar{r}^2),$$

$$L_0 = \frac{2\pi\rho_0 \bar{a}^3}{\Upsilon},$$

$$L_T = L_0 \ln 2, \quad (36)$$

$$L_e = L_0 \ln \left(1 + \frac{R_e^2}{\bar{a}^2} \right) = \frac{L_T}{2}.$$

При необходимости из последнего условия можно найти значение $R_e = \bar{a} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0.6436\bar{a}$.

Теперь предположим, что закон распределения плотности БМ галактики совпадает с профилем NFW [3]:

$$\rho(r) = \frac{K}{\tilde{r}(1 + \tilde{r})^2}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_s}, \quad (37)$$

где K — нормализующий коэффициент, имеющий размерность плотности, r_s — радиус-шкала галактики. Тогда в силу (32) находим поверхностную яркость $I(r)$ и, подставляя ее выражение в (33), определяем суммарную светимость $L(r)$:

$$I(r) = \frac{\tilde{I}_0}{\tilde{w}^3} [\bar{h}_1(r) - 2\tilde{w}],$$

$$L(r) = \tilde{L}_0 \left[\ln \frac{1 - \tilde{w}^2}{4} + \frac{\bar{h}_1(r)}{\tilde{w}} \right], \quad (38)$$

где положено

$$\tilde{I}_0 = \frac{K r_s}{\Upsilon}, \quad \tilde{L}_0 = \frac{2\pi K r_s^3}{\Upsilon},$$

$$\bar{h}_1(r) = \ln \frac{1 + \tilde{w}}{1 - \tilde{w}}, \quad \tilde{w} = \sqrt{1 - \tilde{r}^2}.$$

Отсюда находим значения поверхностной яркости $I_e = I(R_e)$ и светимости $L_e = L(R_e)$, соответствующие эффективному радиусу R_e .

Пусть теперь профиль плотности БМ галактики совпадает с профилем Хернквиста [4]:

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{r}(1+\bar{r})^3}, \quad (39)$$

где $\bar{a}$ и $\bar{r}$ определены выше, а M — полная масса галактики. Аналогичным образом из формул (32) и (33) находим

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{\bar{I}_0}{\bar{w}^4} \left[\frac{3 - \bar{w}^2}{\bar{w}} \bar{h}_2(r) - 6 \right], \\ L(r) &= \bar{L}_0 \frac{\bar{r}^2}{\bar{w}^3} \left[\bar{h}_2(r) - 2\bar{w} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}_0 &= \frac{M}{2\pi\Upsilon\bar{a}^2}, \quad \bar{h}_2(r) = \ln \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}}, \\ \bar{L}_0 &= \frac{M}{2\Upsilon}, \quad \bar{w} = \sqrt{1 - \bar{r}^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что поверхностную яркость $I(r)$ из (38) и (40), вычисленную для профилей NFW и Хернквиста, можно выразить в $mag/arcsec^2$ аналогичным образом.

Пусть теперь светящийся диск галактики имеет форму эллипса с полуосями a и c . При этом поверхностная яркость $I(m)$ галактики в общем случае является функцией от параметра m семейства гомотетических эллипсоидальных поверхностей:

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (a > b > c).$$

В этом случае по аналогии с (32) поверхностная яркость $I(m)$ определяется формулой

$$I(m) = \frac{2q}{\Upsilon} \int_m^\infty \frac{\rho(u)udu}{\sqrt{u^2 - m^2}}, \quad q = \sqrt[3]{abc}. \quad (41)$$

Затем находим суммарную поверхностную яркость $L(m)$:

$$L(m) = q \int_0^m S(m) I(m) dm. \quad (42)$$

Здесь длина $S(m)$ промежуточного эллипса с полуосями ma и mc , заданного в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x(v) &= ma \sin v, \\ y(v) &= mc \cos v \quad (a > c), \end{aligned}$$

равна

$$\begin{aligned} S(m) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(v)]^2 + [y'(v)]^2} dv = 4maE(e), \\ e &= \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \end{aligned}$$

где $E(e)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. Формулу (42) с учетом последнего выражения $S(m)$ можно переписать в виде

$$L(m) = 4aqE(e) \int_0^m u I(u) du. \quad (43)$$

Теперь рассмотрим различные варианты профиля БМ ЭГ. В случае “астрофизического” профиля в формуле (41) $\rho(u)$ следует заменить на профиль $\rho_1(u)$ из (11). Тогда для поверхностной яркости $I(m)$ получим:

$$\begin{aligned} I(m) &\equiv I_1(m) = \frac{I_0}{w^2}, \\ w &= \sqrt{1 + \beta m^2}, \quad I_0 = \frac{2q}{\Upsilon\sqrt{\beta}} \rho_0, \end{aligned} \quad (44)$$

где I_0 — центральная поверхностная яркость.

Далее, учтем в формуле (43) выражение поверхностной яркости $I(m) = I_1(m)$. Тогда для $L(m)$ находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} L(m) &= L_0 \ln(1 + \beta m^2), \\ L_0 &= \frac{A_0}{\beta\sqrt{\beta}}, \quad A_0 = \frac{4q^2 \rho_0 a E(e)}{\Upsilon}, \end{aligned} \quad (45)$$

из которого определяется полная светимость L_T при $m = 1$ и $\beta = \beta_1$. При этом параметр β_1 можно определить из трансцендентного уравнения

$$\beta_1 \sqrt{\beta_1} L_T - A_0 \ln(1 + \beta_1) = 0,$$

где значение L_T в первом приближении для каждой галактики можно взять из базы данных или из каталогов.

Далее обозначим через m_e, β_e, I_e, L_e значения величин $m, \beta, I(m), L(m)$, соответствующих эффективному радиусу R_e . Тогда в силу (44) и (45) получим

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{I_0}{1 + \beta_e m_e^2}, \\ L_e &= \frac{A_0}{\beta_e \sqrt{\beta_e}} \ln(1 + \beta_e m_e^2) = \frac{A_0}{\beta_e \sqrt{\beta_e}} \ln \frac{I_0}{I_e}, \\ L_T &= \frac{A_0}{\beta_1 \sqrt{\beta_1}} \ln(1 + \beta_1), \end{aligned} \quad (46)$$

а согласно определению эффективного радиуса R_e , имеем

$$I_e = \frac{L_T}{2}, \quad I_e = \frac{L_T}{2\pi R_e^2},$$

$$\beta_e \sqrt{\beta_e} = \frac{2\beta_1 \sqrt{\beta_1}}{\ln(1 + \beta_1)} \ln \frac{I_0}{I_e}.$$

Считая I_0 и I_e , а также параметр β_1 известными, из последнего соотношения находим β_e . Затем из первого равенства (46) определяем m_e . При этом для эффективного радиуса R_e получаем два соотношения:

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \sqrt{\frac{I_0}{I_e} - 1}, \quad (47)$$

$$R_e = qm_e, \quad R_e = \sqrt{\frac{L_T}{2\pi I_e}},$$

причем во второй формуле для R_e светимость L_T и поверхностная яркость I_e выражаются в соответствующих единицах.

В случае аналога профиля NFW учтем выражение для $\rho_2(m)$ из (17) в формуле (41). Это нам даст

$$I(m) = \frac{\tilde{I}_0}{w^3} [h_1(w) - 2w], \quad \tilde{I}_0 = \frac{Kr_s}{\Upsilon}, \quad (48)$$

где

$$h_1(w) = \ln \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \sqrt{1 - \mu^2 m^2}.$$

Тогда, подставив выражение $I(m)$ из (48) в формулу (43), для $L(m)$ и L_T получим:

$$L(m) = \tilde{L}_0 \left[\ln w^2 + \frac{h_1(w)}{w} + \ln \frac{1-w^2}{4} \right],$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{4Kr_s^2 a E(e)}{\mu \Upsilon}, \quad (49)$$

$$L_T = L(1) = \tilde{L}_0 \left[\ln \xi^2 + \frac{h_1(\xi)}{\xi} + \ln \frac{1-\xi^2}{4} \right],$$

где $\xi = \sqrt{1 - \mu^2}$. Эксцентриситет e определен выше.

Для нахождения значения m_e можно пользоваться условием $L(m_e) = L_T/2$:

$$2 \left[\ln w_e^2 + \frac{h_1(w_e)}{w_e} + \ln \frac{1-w_e^2}{4} \right] =$$

$$= \ln \xi^2 + \frac{h_1(\xi)}{\xi} + \ln \frac{1-\xi^2}{4},$$

$$w_e = \sqrt{1 - \mu^2 m_e^2}.$$

Это трансцендентное уравнение, позволяющее определить величину w_e , а значит и параметр m_e .

Наконец, в случае аналога профиля Хернквиста подставим в формулу (41) выражение $\rho_2(m)$ из (23). Тогда для $I(m)$ получим следующие выражения:

$$I(m) = \frac{\bar{I}_0}{\bar{w}^4} \left[\frac{3 - \bar{w}^2}{\bar{w}} h_2(\bar{w}) - 6 \right], \quad (50)$$

$$\bar{I}_0 = \frac{M}{2\pi \Upsilon \bar{a}^2}.$$

Далее, учтем выражение $I(m)$ в формуле (43) для определения $L(m)$:

$$L(m) = \bar{L}_0 \frac{1 - \bar{w}^2}{\bar{w}^3} [h_2(\bar{w}) - 2\bar{w}], \quad (51)$$

$$\bar{L}_0 = \frac{2MaE(e)}{\pi \mu \bar{a} \Upsilon}.$$

В последних равенствах положено:

$$\bar{w} = \sqrt{1 - \bar{\mu}^2 m^2},$$

$$h_2(\bar{w}) = \ln \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}},$$

$$\bar{\mu} = \frac{q}{a}, \quad \bar{\mu} < 1, \quad m \leq 1.$$

Условие $L(m_e) = L_T/2$ даст нам уравнение для определения m_e :

$$\frac{1 - \bar{w}_e^2}{\bar{w}_e^3} [h_2(\bar{w}_e) - 2\bar{w}_e] = \frac{1 - \bar{\xi}^2}{2\bar{\xi}^3} [h_2(\bar{\xi}) - 2\bar{\xi}],$$

$$\bar{w}_e = \sqrt{1 - \bar{\mu}^2 m_e^2}, \quad \bar{\xi} = \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}.$$

Далее поверхностную яркость $I(m)$, определяемую формулами (48) или (50), можно выразить в $\text{mag}/\text{arcsec}^2$ аналогичным образом.

5. ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТЕЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

При вычислении пространственной дисперсии скоростей слоисто-неоднородной галактики рассмотрим два случая: 1) ЭГ состоит только из БМ, 2) ЭГ состоит из БМ и ТМ. В первом случае полагаем, что закон распределения плотности БМ в ЭГ совпадает либо с “астрофизическим” профилем, либо с одним из аналогов профилей NFW, Хернквиста. Во втором случае для БМ берем “астрофизический” профиль, а для ТМ — один из аналогов профилей NFW, Хернквиста.

Рассмотрим сначала сферически симметричную галактику. В первом случае, считая профиль плот-

ности $\rho(r)$ известным, пространственную дисперсию скоростей $\sigma_s(R)$ на расстоянии R от центра галактики можно определять по формулам [8, 9]

$$\sigma_s^2(R) = \frac{G}{\rho(R)} \int_R^\infty \Phi_s(r) dr, \quad (52)$$

$$\sigma_s^2(R) = \frac{2G}{I(R)} \int_R^\infty \Phi_s(r) \sqrt{r^2 - R^2} dr$$

соответственно. Здесь $I(R)$ — поверхностная яркость,

$$\Phi_s(r) = \frac{\rho(r)M(r)}{r^2}, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r u^2 \rho(u) du, \quad (53)$$

$M(r)$ — масса промежуточного шара радиуса r .

Для ЭГ пространственную дисперсию скоростей $\sigma_s(R)$ нельзя определить по формулам (52) и (53). Для применения этих формул к ЭГ следует в них произвести замены переменных в зависимости от профиля. В случае “астрофизического” профиля $r = \bar{a}\sqrt{\beta}m$. Это очевидно из сравнения выражений (11) и (34) для этого профиля. При профиле NFW получаем: $r = r_s \mu m$, а при профиле Хернквиста — $r = \bar{a} \mu m$. Тогда формулы (52) и (53), адаптированные для ЭГ, можно переписать в виде

$$\sigma_s^2(m) = \frac{G}{q\rho(m)} \int_m^\infty \Phi_s(v) dv, \quad (54)$$

$$\sigma_s^2(m) = \frac{2G}{I(m)} \int_m^\infty \Phi_s(v) \sqrt{v^2 - m^2} dv$$

соответственно. Следовательно, с помощью формул (54) дисперсия скоростей $\sigma_s^2(m)$ выражается через параметр m семейства гомотетических эллипсоидов, определяемого равенством (1). При необходимости вычисленную по этим формулам дисперсию скоростей можно выразить через расстояние r от центра ЭГ с помощью приведенных выше замен переменных. В дальнейшем для определения дисперсии скоростей будем пользоваться первой формулой из (54). При этом следует отметить, что для ЭГ верхнюю границу интегрирования в формулах (54) можно было взять равной единице вместо бесконечности. Не нарушая общности, мы взяли именно последнее значение.

а) Случай “астрофизического” профиля, при котором профиль $\rho_1(m)$ и масса $M_1(m)$ определяются равенствами (11) и (12). В этом случае для $\sigma_s^2(m)$, вычисленной по формуле (53), получим [1]:

$$\sigma_s^2(m) \equiv \sigma_{bm}^2(m) = \frac{4\pi G \rho_0 q^2}{\beta} A(m), \quad (55)$$

где

$$A(m) = (1 + \beta m^2)^{3/2} \times \left[\frac{4Q^4}{Q^4 - 1} \ln Q - 2 \ln(Q^2 + 1) + \frac{2Q^2}{(Q^2 + 1)^2} \right],$$

$$Q \equiv \varphi_1(m),$$

функция $\varphi_1(m)$ определена в (12).

Следовательно, дисперсия скоростей $\sigma_s^2(m)$ выражается через параметр m семейства гомотетических эллипсоидов. Положив в (55) $m = m_e$, или, что то же самое, $m = R_e/q$, находим значение дисперсии скоростей на расстоянии эффективного радиуса R_e галактики;

б) Случай аналога профиля NFW. Для дисперсии скоростей находим

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(m) &\equiv \sigma_{dm}^2(m) = 4\pi G K r_s^2 N(m), \\ N(m) &= g^2(g-1)N_1(m), \quad (56) \\ g &= 1 + \mu m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_1(m) &= \frac{3}{2} \ln^2 g - \frac{1}{2} \ln(g-1) + 3 \operatorname{dilog}(g) + \\ &+ \frac{-2 + 10g - 8g^2 + g^3}{2g(g-1)^2} \ln g + \frac{1 + 5g - 7g^2}{2g^2(g-1)} + \frac{\pi^2}{2}, \\ \operatorname{dilog}(x) &= \int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt, \end{aligned}$$

причем

$$\operatorname{dilog}(1) = 0, \quad \operatorname{dilog}(0) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\operatorname{dilog}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

При необходимости положив в равенстве (56) $\mu m = R_e/r_s$, можно определить значение дисперсии скоростей на расстоянии эффективного радиуса R_e галактики;

в) Случай аналога профиля Хернквиста:

$$\sigma_s^2(m) \equiv \sigma_{dm}^2(m) = \frac{GM}{\mu \bar{a}} H(m), \quad (57)$$

где

$$H(m) = \bar{g}^3(\bar{g}-1) \left[\begin{array}{c} \ln \frac{\bar{g}}{\bar{g}-1} - \frac{1}{\bar{g}} - \\ - \frac{2}{3\bar{g}^2} - \frac{2-\bar{g}}{6\bar{g}^3} - \frac{1}{4\bar{g}^4} \end{array} \right],$$

$$\bar{g} = 1 + \mu m.$$

В случае (2) общую дисперсию скоростей $\sigma^2(m)$ можно определить по формуле

$$\sigma^2(m) = \sigma_{bm}^2(m) + \sigma_{dm}^2(m), \quad (58)$$

где $\sigma_{bm}^2(m)$ — составляющая БМ дисперсии скоростей и определяется равенством (55), а $\sigma_{dm}^2(m)$ — составляющая ТМ и совпадает с одним из выражений (57) или (58) дисперсии скоростей.

Таким образом, нами определена дисперсия скоростей ЭГ как трехосного слоисто-неоднородного эллипсоида, состоящего либо только из БМ, либо одновременно из БМ и ТМ, с соответствующими законами распределения плотности. При необходимости, положив в соответствующих равенствах $m = m_e = R_e/q = R_e/\sqrt[3]{abc}$, можно определить значение дисперсии скоростей на расстоянии эффективного радиуса R_e галактики. Кроме того, эти формулы применимы и для ЭГ, имеющей форму слоисто-неоднородного сжатого ($a = b > c$) и вытянутого ($a > b = c$) сфероидов. Для таких сфероидов только параметры m , q , μ и $\bar{\mu}$ определяются иначе, а именно:

$$\begin{aligned} 1) \quad a = b > c, \quad m^2 &= \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \\ q &= q_o = \sqrt[3]{a^2 c}, \\ \mu &= \frac{q_o}{r_s}, \quad \bar{\mu} = \frac{q_o}{a}; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a > b = c, \quad m^2 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2}, \\ q &= q_p = \sqrt[3]{ac^2}, \\ \mu &= \frac{q_p}{r_s}, \quad \bar{\mu} = \frac{q_p}{a} \end{aligned} \quad (60)$$

соответственно.

В заключение рассмотрим частный случай $a = b = c = R$, при котором галактика представляет собой неоднородный шар (шаровое скопление) радиуса $\bar{R}$ с профилем $\rho(r)$. Полагаем, что данная галактика (см. выше): 1) состоит только из БМ, 2) состоит из БМ и ТМ. Тогда в качестве профиля $\rho(r)$ для БМ и ТМ возьмем либо “астрофизический закон”, либо один из профилей NFW, Хернквиста. Аналогичные выражения массы $M(r)$ промежуточного шара и дисперсии скоростей $\sigma_s^2(r)$ в зависимости от профиля $\rho(r)$ неоднородного шарового скопления можно получить из соответствующих выражений $M(r)$ и $\sigma_s^2(r)$, положив в них

$$\beta = 1, \quad m = \bar{r} = \frac{r}{a},$$

$$\begin{aligned} \mu m = \tilde{r} &= \frac{r}{r_s}, \quad \bar{\mu} m = \bar{r}, \\ q &= r_s \quad (q = \bar{a}). \end{aligned}$$

Для краткости эти выражения здесь не приводятся.

6. НЕКОТОРЫЕ СЦЕНАРИИ ОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИК

В обзорной и достаточно информативной статье [10] подробно описаны сценарии образования галактик. Рассмотрены три сценария эволюции галактик: 1) большое слияние (major merger), 2) механизм активного ядра и 3) множественное малое слияние (minor merger).

Согласно сценарию большого слияния, гигантские ЭГ формируются слиянием двух спиральных галактик близких масс. При этом радиус звездной системы растет пропорционально массе. Последние открытия в 2007–2009 гг. показали неожиданно быструю эволюцию размеров гигантских ЭГ. Это привело к отказу от сценария большого слияния.

Сценарий активного ядра (квазара в центре) работает только в сочетании со вспышкой звездообразования (которого на момент $z = 2$ не обнаружено в рассматриваемых далеких галактиках) и порождает из-за этого антикорреляцию значений “размер—возраст” звездного населения на фиксированной массе. Это тоже не наблюдается.

Множественное малое слияние представляет собой двухстадийный сценарий, в котором на раннем этапе формируется компактная звездная “затравка”, а потом происходит быстрое “распухание” ЭГ в результате множественного бездиссипативного малого слияния.

Все три сценария (или механизма) образования ЭГ рассмотрены в работе [11], согласно которой предпочтение дается множественному малому слиянию, которое приводит к росту размера звездной системы пропорционально квадрату массы. При большом слиянии рост размера галактики происходит линейно — пропорционально массе.

В работе [12] установлена степенная зависимость “эффективный радиус—звездная масса” $R_{eff} \propto M_*^\alpha$, вписываемая в расчетную эволюцию модели ЭГ раннего типа. При сценарии большого слияния (отношение масс 1 : 1) имеет место ограничение $\alpha \leq 1$, а при сценарии малого слияния (отношение масс 1 : 10) — $\alpha > 2$. При этом допускается, что звездное тело галактики погружено в протяженное темное гало.

Степенная зависимость “эффективная дисперсия скоростей—звездная масса” $M_* \propto \sigma_{eff}^\beta$, установленная в работе [13], соответствует сценарию большого слияния при $3.3 \leq \beta \leq 5.1$.

В работе [14] приведен степенной закон относительно красного смещения z , $0 < z < 3$, для эволюции размеров галактик на фиксированной звездной массе: $R_{eff}(z) \propto (1+z)^{-1.48}$ для галактик без звездообразования (для ЭГ) и $R_{eff}(z) \propto (1+z)^{-0.75}$ для галактик со звездообразованием. При всех красных смещениях изменение зависимости “размер—масса” составляет $R_{eff} \propto M_*^{0.22}$ для галактик позднего типа со звездной массой $M_* > 3 \times 10^9 M_\odot$ и $R_{eff} \propto M_*^{0.75}$ для раннего типа галактик со звездной массой $M_* > 2 \times 10^{10} M_\odot$.

В работе [15] показано, что рост эффективного радиуса R_e звездной системы происходит синхронно с ростом радиуса темного гало.

В разделе “Примеры” приведены соответствующие степенные зависимости согласно нашим моделям I, II и III.

7. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДИНАМИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ГАЛАКТИКИ. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе [16] приведены зависимости трех динамических параметров 260 галактик раннего типа по проекту ATLAS-3D. Эта зависимость в фундаментальной плоскости “размер—дисперсия скоростей звезд—поверхностная яркость” имеет вид

$$\begin{aligned} \log R_e &= a_0 + b_0 \log \sigma_e + c_0 \log \Sigma_e, \\ b_0 &= 1.063 \pm 0.041, \\ c_0 &= -0.765 \pm 0.023. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь a_0 — ошибка, σ_e — эффективная дисперсия скоростей звезд в км/с, R_e — эффективный радиус в кпк, а Σ_e — эффективная поверхностная яркость в единицах Вт/м².

В работе [17] приведена зависимость динамических параметров на фундаментальной плоскости “размер—дисперсия скоростей звезд—поверхностная яркость”, полученная на основе исследований около 9000 галактик раннего типа с красным смещением $0.01 \leq z \leq 0.3$ по проекту SDSS (Sloan Digital Sky Survey), в виде

$$\begin{aligned} \log R_e &= a_0 \log \sigma_e + b_0 \log I_e + c_0, \\ I_e &= \frac{L}{2\pi R_e^2}, \end{aligned} \quad (62)$$

где R_e — эффективный радиус в кпк, σ_e — эффективная дисперсия скоростей в км/с, I_e — эффектив-

ная поверхностная яркость в единицах Вт/м², а L — полная светимость галактики. Кроме того, для коэффициентов a_0 , b_0 , c_0 можно взять средние значения: по ортогональной аппроксимации $a_0 = 1.515$, $b_0 = -0.760$, $c_0 = -8.790$, а по прямой аппроксимации $a_0 = 1.165$, $b_0 = -0.760$, $c_0 = -8.047$.

В работе [18] приведена зависимость динамических параметров на фундаментальной плоскости “размер—дисперсия скоростей звезд—светимость”, полученная на основе исследований 560 галактик раннего типа по проекту SAMI в виде

$$\log \left(\frac{L}{L_\odot} \right) = a_0 \log \sigma_e + b_0 \log R_e + c_0, \quad (63)$$

где $L/L_\odot$ — светимость галактики, выраженная в единицах солнечной светимости, σ_e — эффективная дисперсия скоростей звезд в км/с, R_e — эффективный радиус в кпк. Кроме того,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.294 \pm 0.039, \\ b_0 &= 0.912 \pm 0.025, \\ c_0 &= 7.067 \pm 0.078. \end{aligned} \quad (64)$$

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ в динамическом соотношении,

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{a}S + \tilde{b}R + \tilde{c}, \quad \Phi = \log L, \\ S &= \log \sigma_e, \quad R = \log R_e, \end{aligned} \quad (65)$$

методом наименьших квадратов. Коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ являются параметрами, подлежащими определению. Положим, что точные значения параметров $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ отличаются от известных значений a_0 , b_0 , c_0 на величины поправок

$$\tilde{a} = a_0 + \Delta a, \quad \tilde{b} = b_0 + \Delta b, \quad \tilde{c} = c_0 + \Delta c. \quad (66)$$

Эти поправки подлежат определению, а коэффициенты a_0 , b_0 , c_0 определены выше.

Пусть величины Φ_i , S_i и R_i определяются согласно нашей модели (варианты (а) и (б) моделей I, II и III) для $m = 64$ ЭГ, а Φ_i^0 , S_i^0 , R_i^0 — значения этих же величин, определенных по одному из проектов SAMI, ATLAS-3D и SDSS, считающиеся опорными моделями. Обозначим

$$\Delta F_i = \Delta \Phi_i + a_0 \Delta S_i + b_0 \Delta R_i, \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_i &= \Phi_i - \Phi_i^0, \\ \Delta S_i &= S_i^0 - S_i, \\ \Delta R_i &= R_i^0 - R_i. \end{aligned} \quad (68)$$

Величина

$$\delta_i = \Delta F_i - \Delta a S_i - \Delta b R_i - \Delta c \quad (69)$$

является невязкой условных уравнений и, согласно методу наименьших квадратов, наша задача сводится к определению минимального значения функции $H \equiv H(\Delta a, \Delta b, \Delta c)$,

$$H = \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m (\Delta F_i - S_i \Delta a - R_i \Delta b - \Delta c)^2, \quad (70)$$

для всех m галактик. Подробности см. в монографиях [19, 20].

Согласно этому методу, получаем систему нормальных уравнений (систему неоднородных линейных алгебраических уравнений) относительно поправок Δa , Δb , Δc . Решение этой системы в векторной форме можно записать в виде

$$W \Delta p = d, \quad \Delta p = W^{-1} d, \quad (71)$$

где

$$\Delta p = \{\Delta a, \Delta b, \Delta c\}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

а W^{-1} — обратная матрица от $W = \|w_{ik}\|$, ($i, k = 1, 2, 3$). Элементы матрицы W и вектора d вычисляются по формулам:

$$w_{11} = \sum_{i=1}^m S_i^2, \quad (73)$$

$$w_{12} = w_{21} = \sum_{i=1}^m S_i R_i,$$

$$w_{13} = w_{31} = \sum_{i=1}^m S_i,$$

$$w_{22} = \sum_{i=1}^m R_i^2,$$

$$w_{23} = w_{32} = \sum_{i=1}^m R_i, \quad (74)$$

$$w_{33} = \sum_{i=1}^m 1 = m,$$

$$d_1 = \sum_{i=1}^m S_i \Delta F_i,$$

$$d_2 = \sum_{i=1}^m R_i \Delta F_i, \quad (75)$$

$$d_3 = \sum_{i=1}^m \Delta F_i.$$

Кроме того, для $m = 64$ уравнений и $n = 3$ неизвестных следует определить величины

$$d_0 = \sum_{i=1}^m (\Delta F_i)^2, \quad (76)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{m-n} [d_0 - (d \Delta p)],$$

где $\bar{\sigma}^2$ — средняя квадратическая ошибка вычислений, а

$$d \Delta p = d_1 \Delta a + d_2 \Delta b + d_3 \Delta c. \quad (77)$$

Качество согласования опорной и базовых моделей (в основном согласования теории с наблюдениями) характеризуется величиной $\bar{\sigma}^2$.

Если элементы обратной матрицы W^{-1} обозначить через $\|w_{kj}\|$, то решение $\Delta p = W^{-1} d$ можно записать в явном виде так:

$$\Delta a = w_{11} d_1 + w_{12} d_2 + w_{13} d_3,$$

$$\Delta b = w_{21} d_1 + w_{22} d_2 + w_{23} d_3, \quad (78)$$

$$\Delta c = w_{31} d_1 + w_{32} d_2 + w_{33} d_3.$$

Следовательно, искомые значения параметров $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ будут определяться равенством (66), в котором коэффициенты a_0 , b_0 , c_0 считаются известными и берутся из опорной модели (см. выше), а поправки Δa , Δb , Δc определяются равенством (78).

8. ПРИМЕРЫ

В качестве примера взяты 64 модельных эллиптических галактики, имеющих форму либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида. При этом значения всех параметров модельных галактик точно совпадают с соответствующими значениями реально существующих галактик. Нужные параметры последних взяты из следующих источников: проект ATLAS-3D [16], проект SDSS [17], SAMI [18] и каталог [21].

В табл. 1 приведены значения эффективного радиуса R_e в кпк, эффективной поверхностной яркости μ_e в mag/arcsec^2 , эффективной светимости L_e в единицах $10^{10} L_\odot$ светимости Солнца, а также дисперсии скоростей σ_e в км/с на расстоянии эффективного радиуса, вычисленные по различным моделям для трех галактик.

В табл. 2, 3 и 4 приведены значения коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и среднеквадратической ошибки $\bar{\sigma}^2$, определяемые по базовым моделям I, II и III соответственно в зависимости от профиля $\rho(m)$. Определяемые в базовых моделях коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ фигурируют в динамических соотношениях следующим образом. В соотношении

$$\log R_e = \tilde{a} + \tilde{b} \log \sigma_e + \tilde{c} \log \Sigma_e \quad (79)$$

Таблица 1. Значения динамических параметров эллиптических галактик, вычисленные по моделям I ($a > b > c$), II ($a = b > c$) и III ($a > b = c$). Для сравнения приведены аналогичные значения, полученные в проектах ATLAS-3D и SDSS

ЭГ, NGC	Модели и проекты	R_e	$\log(L_e/L_\odot)$	σ_e	μ_e
4374 E1 (M 84)	1)	5.394	10.59949	219.65	21.09
	I 2)	5.275	11.00619	232.22	19.46
	3)	5.225	11.20261	212.05	19.09
	1)	5.385	10.00314	222.35	21.05
	II 2)	5.275	10.99091	232.22	19.51
	3)	5.221	11.19056	209.53	19.12
	1)	5.403	10.59584	216.94	21.12
	III 2)	5.275	11.02142	232.22	19.41
	3)	5.231	11.21468	214.50	19.07
	ATLAS-3D	5.492	10.76901	258.23	20.74
	SDSS	5.057	10.32012	258.20	21.69
4406 E3 (M 86)	1)	9.952	10.62525	148.16	22.50
	I 2)	10.028	10.99771	180.28 (280.28)	20.29
	3)	9.936	11.29485	147.31	20.02
	1)	9.921	10.63221	152.21	22.44
	II 2)	10.028	10.95846	180.28	20.39
	3)	9.921	11.26657	143.75	20.08
	1)	9.954	10.61828	142.65	22.57
	III 2)	10.028	11.03627	180.28	20.18
	3)	9.952	11.32327	151.37	19.96
	ATLAS-3D	10.136	10.84602	190.55	21.88
	SDSS	9.920	10.37012	190.51	23.02
ЭГ, NGC	Модели и проекты	R_e	$\log(L_e/L_\odot)$	σ_e	μ_e
4472 E2 (M 49)	1)	8.494	10.84649	204.57	21.46
	I 2)	8.429	11.22957	216.28 (286.28)	19.68
	3)	8.345	11.46856	202.28	19.35
	1)	8.473	10.85197	208.35	21.42
	II 2)	8.429	11.20572	214.18	19.75
	3)	8.335	11.45047	198.76	19.39
	1)	8.503	10.84445	203.22	21.48
	III 2)	8.429	11.23848	214.45 (286.28)	19.66
	3)	8.349	11.47537	203.63	19.34
	ATLAS-3D	8.661	11.02901	250.03	21.08
	SDSS	8.196	10.02010	250.01	23.49?

Примечание. Эффективный радиус R_e выражен в кпк, эффективная светимость L_e — в единицах светимости Солнца, дисперсия скоростей σ_e на расстоянии эффективного радиуса — в км/с, а эффективная поверхностная яркость μ_e — в mag/arcsec^2 . Для каждой модели I, II и III приведены по три значения этих параметров: значение 1) соответствует случаю «астрофизического» профиля, 2) — аналогу профиля NFW, 3) — аналогу профиля Хернквиста.

Таблица 2. Значения коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и среднеквадратической ошибки $\bar{\sigma}^2$, вычисленные по варианту (а) базовой модели I ($a > b > c$) в зависимости от профиля плотности $\rho(m)$ и опорной модели (проекта)

Профиль $\rho(m)$	Проекты	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	$\bar{\sigma}^2$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	ATLAS-3D	7.5150	1.1731	-0.7277	0.0031
	SAMI	1.7212	0.9386	7.2716	0.0215
	SDSS-1	1.8222	-0.6759	-8.5876	0.0144
	SDSS-2	1.4602	-0.6736	-7.8172	0.0135
$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	ATLAS-3D	7.1495	1.2264	-0.7797	0.0171
	SAMI	1.5076	0.9253	7.6807	0.0195
	SDSS-1	1.7501	-0.5732	-8.3454	0.0124
	SDSS-2	1.3849	-0.6571	-7.3618	0.0122
$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}m(1 + \bar{\mu}m)^3}$	ATLAS-3D	7.1547	1.0293	-0.8568	0.0025
	SAMI	1.0948	1.1096	7.9571	0.0153
	SDSS-1	1.6037	-0.6821	-7.6502	0.0213
	SDSS-2	1.3283	-0.7226	-7.3506	0.0177

Примечание. По опорной модели (проекту) SDSS приведены два значения коэффициентов, вычисленные по базовой модели I: 1 соответствует ортогональной, 2 — прямой аппроксимации.

Таблица 3. Значения коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и среднеквадратической ошибки $\bar{\sigma}^2$, вычисленные по варианту (а) базовой модели II ($a = b > c$) в зависимости от профиля плотности $\rho(m)$ и опорной модели (проекта)

Профиль $\rho(m)$	Проекты	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	$\bar{\sigma}^2$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	ATLAS-3D	7.5150	1.1677	-0.7296	0.0031
	SAMI	7.0008	0.9465	7.2716	0.0215
	SDSS-1	1.8110	-0.6820	-8.6131	0.0146
	SDSS-2	1.4508	-0.6789	-7.8370	0.0135
$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	ATLAS-3D	7.1285	1.2128	-0.7801	0.0159
	SAMI	1.4982	0.9292	6.8685	0.0196
	SDSS-1	1.1996	-0.6014	-8.3656	0.0124
	SDSS-2	1.1852	-0.6117	-7.3947	0.0122
$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}m(1 + \bar{\mu}m)^3}$	ATLAS-3D	7.1388	1.0195	-0.8588	0.0023
	SAMI	1.0715	1.1237	8.1535	0.0149
	SDSS-1	1.6025	-0.6842	-7.6598	0.0230
	SDSS-2	1.3272	-0.7272	-7.3816	0.0176

по аналогии с формулой (61) проекта ATLAS-3D. В соотношении

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = \tilde{a}\log\sigma_e + \tilde{b}\log R_e + \tilde{c} \quad (80)$$

по аналогии с формулой (62) проекта SDSS. Наконец, в соотношении

$$\log R_e = \tilde{a}\log\sigma_e + \tilde{b}\log I_e + \tilde{c} \quad (81)$$

по аналогии с формулой (63) проекта SAMI.

Теперь установим степенные зависимости “эффективный радиус—звездная масса” $R_{eff} \propto M_*^\alpha$ [12] и “эффективная дисперсия скоростей—звездная масса” $M_* \propto \sigma_{eff}^\beta$ [13]. Эти соотношения вписываются в расчетную эволюцию модели ЭГ согласно варианту (а) наших моделей I, II и III (см. выше). Такие зависимости позволят установить эволюционные сценарии образования ЭГ по сценарию большого или малого слияния согласно этим моделям.

Таблица 4. Значения коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и среднеквадратической ошибки $\bar{\sigma}^2$, вычисленные по варианту (а) базовой модели III ($a > b = c$) в зависимости от профиля плотности $\rho(m)$ и опорной модели (проекта)

Профиль $\rho(m)$	Проекты	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{c}$	$\bar{\sigma}^2$
$\frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}}$	ATLAS-3D	7.5150	1.1798	-0.7254	0.0032
	SAMI	1.7352	0.9331	6.9961	0.0212
	SDSS-1	1.8333	-0.6716	-8.5739	0.0141
	SDSS-2	1.4711	-0.6691	-7.8047	0.0134
$\frac{K}{\mu m(1 + \mu m)^2}$	ATLAS-3D	7.2389	1.2255	-0.7744	0.0193
	SAMI	1.5146	0.9226	6.8542	0.0197
	SDSS-1	1.8512	-0.6573	-8.3281	0.0124
	SDSS-2	1.1858	-0.6498	-8.3084	0.0122
$\frac{M}{2\pi\bar{a}^3} \frac{1}{\bar{\mu}m(1 + \bar{\mu}m)^3}$	ATLAS-3D	7.1937	1.0443	-0.8531	0.0028
	SAMI	1.1231	1.0930	8.1792	0.0158
	SDSS-1	1.6031	-0.6817	-7.6475	0.0170
	SDSS-2	1.3290	-0.7175	-7.3155	0.0176

Согласно моделям I, II и III, значения параметра α заключены в следующем промежутке: $\alpha_{\min} = 0.266 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = 0.371$. Минимальное значение $\alpha_{\min}$ относится к ЭГ NGC 5845, а максимальное $\alpha_{\max}$ — к ЭГ NGC 4406. Для β получено: $\beta_{\min} = 4.369 \leq \beta \leq \beta_{\max} = 5.857$, причем минимальное значение $\beta_{\min}$ относится к ЭГ NGC 5845, а $\beta_{\max}$ — к ЭГ NGC 4733.

Для сравнения, соответствующие значения параметров α и β по проекту ATLAS-3D таковы: $\alpha_{\min} = 0.267 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = 0.350$ и $\beta_{\min} = 4.449 \leq \beta \leq \beta_{\max} = 5.752$, причем $\alpha_{\min}$ относится к NGC 5845, а $\alpha_{\max}$ — к NGC 4406, $\beta_{\min}$ — к NGC 5845, а $\beta_{\max}$ — к NGC 4733.

По проекту SDSS: $\alpha_{\min} = 0.268 \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = 0.349$ и $\beta_{\min} = 4.450 \leq \beta \leq \beta_{\max} = 5.753$, причем $\alpha_{\min}$ относится к NGC 5845, а $\alpha_{\max}$ — к NGC 4406, $\beta_{\min}$ — к NGC 5845, а $\beta_{\max}$ — к NGC 4733.

Таким образом, исходя из степенных зависимостей $R_{\text{eff}} \propto M_*^\alpha$ и $M_* \propto \sigma_{\text{eff}}^\beta$, мы нашли максимальные и минимальные значения параметров α и β согласно нашим моделям I, II и III, а также с учетом проектов ATLAS-3D и SDSS. Эти значения показывают, что сценарии образования ЭГ по нашим моделям и по проектам ATLAS-3D и SDSS больше соответствуют большому слиянию.

Заметим также, что модели I, II и III могут быть использованы для изучения анизотропии дисперсии скоростей в эллиптических галактиках (см. подробнее [22, 23]).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены несколько моделей неоднородной эллиптической галактики (ЭГ) как динамической системы, имеющей форму либо

трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероида. При этом полагается, что ЭГ состоит из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ) с разными законами распределения плотности — профилями. Во всех моделях в качестве профиля БМ берется “астрофизический закон” распределения плотности, а в качестве профиля ТМ — один из аналогов профилей NFW, Хернквиста.

На основе этих моделей найдены явные выражения для следующих ключевых параметров галактики: полной гравитационной (потенциальной) энергии и кинетической энергии вращения ЭГ, суммарной поверхностной яркости и полной светимости галактик в зависимости от профиля, а также дисперсии скоростей в зависимости от расстояния до центра ЭГ. Определены значения: эффективного радиуса и соответствующего значения параметра семейства эллипсоидальных поверхностей, центральной и эффективной поверхностной яркости. Установлены соотношения между важными динамическими параметрами галактики: “масса—размеры”, “масса—дисперсия скоростей”, “размер—дисперсия скоростей—светимость” (поверхностная яркость). Исследованы эволюционные сценарии образования ЭГ согласно этим моделям.

Полученные результаты применены к шестидесяти четырем модельным ЭГ, имеющим формы либо трехосного эллипсоида, либо сжатого или вытянутого сфероидов с параметрами, точно совпадающими с параметрами реально существующих галактик, и приведены в виде таблиц для некоторых E-галактик. Также проведено сравнение этих результатов с соответствующими данными, полученными другими авторами в проектах ATLAS-3D, SAMI и SDSS.

Данные результаты могут быть также применены при исследовании анизотропии дисперсии скоростей в ЭГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.А. Гасанов, Астрон. журн. **98**, 39 (2021).
2. С.А. Гасанов, Астрон. журн. **99**, 91 (2022).
3. J.F. Navarro, C.S. Frenk and S.D.M. White, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **275**, 720 (1995).
4. L. Hernquist, **356**, 359 (1990).
5. Б.П. Кондратьев. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями, (Мир, М., 2007).
6. E. Hubble, **71**, 231 (1930).
7. Б.П. Кондратьев, Потенциалы и динамические модели эллипсоидальных гравитирующих систем. Диссертация кандидата физико-математических наук (Москва, 1981).
8. J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics: Second Edition* (Princeton, NJ USA: Princeton University Press, 2008).
9. Ph. Prugniel and F. Simien, Astron. and Astrophys. **321**, 111 (1997).
10. О.К. Сильченко, Успехи физ. наук **192**, 1313 (2022).
11. R. Bezanson, P.G. van Dokkum, T. Tal, D. Marchesini, M. Kriek, M. Franx, and P. Coppi, **697**(2), 1290 (2009).
12. M. Hilz, T. Naab, J. P. Ostriker, J. Thomas, A. Burkert, and R. Jesseit, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **425**(4), 3119 (2012).
13. M. Boylan-Kolchin, C. Ma, and E. Quataert, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **362**(1), 184 (2005).
14. A. van der Wel, M. Franx, P. G. van Dokkum, R.E. Skelton, et al., **788**(1), id. 28 (2014).
15. L. Zanisi, F. Shankar, H. Fu, A. Rodriguez-Puebla, et al., Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **505**(3), 4555 (2021).
16. M. Cappellari, N. Scott, K. Alatalo, L. Blitz, et al., Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **432**(3), 1709 (2013).
17. M. Bernardi, R. K. Sheth, J. Annis, S. Burles, et al., Astron. J. **125**(4), 1866 (2003).
18. F. D'Eugenio, M. Colless, N. Scott, A. van der Wel, et al., Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **504**(4), 5098 (2021).
19. П.Е. Эльясберг, *Определение движения по результатам измерений* (М.: Наука, 1976).
20. Н.В. Емельянов, *Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений* (Фрязино: Век 2, 2019).
21. G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H.G. Corwin, R.J. Buta, G. Paturel, and P. Fouque, *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies. V. II, III* (New York, USA: Springer-Verlag, 1991).
22. Е.Н. Киреева, Б.П. Кондратьев, Астрон. журн. **96**(9), 707 (2019).
23. B.P. Kondratyev and E.N. Kireeva, Astrophys. Space Sci. **365**(1), id. 15 (2020).

PROFILES AND SOME DYNAMIC PARAMETERS OF A LAYERED INHOMOGENEOUS ELLIPTICAL GALAXY

S. A. Gasanov^a

^aLomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia

Several new models of a layered inhomogeneous elliptical galaxy (EG) having the shape either a triaxial ellipsoid or an oblate or prolate spheroid and consisting of baryonic mass and dark matter with different laws of density distribution — profiles. Based on these models, some key dynamic parameters of the EG were determined: gravitational (potential) energy and rotational kinetic energy, total surface brightness, total luminosity, and velocity dispersion depending on the distance to the EG center. The relationships between the important dynamic parameters of the galaxy have been established: “mass-dimensions”, “mass-velocity dispersion”, “size-dispersion speeds–luminosity” (surface brightness). Evolutionary scenarios for the formation of EG were studied according to these models. The results obtained were applied to sixty model EGs with parameters exactly matching those that actually exist and are presented in the form of tables.

Keywords: elliptical galaxies, formation scenarios, fundamental parameters, relationships between parameters of galaxies