

УДК 532.593.4

ВКЛАДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ В РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ АНОМАЛЬНО ВЫСОКИХ ВОЛН ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

© 2023 г. А. В. Слюняев^{a, b, c, *}

^aИнститут прикладной физики РАН, ул. Ульянова, 46, Нижний Новгород, БОКС-120, 603950 Россия

^bТихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
ул. Балтийская, 43, Владивосток, 690041 Россия

^cНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
ул. Большая Печерская, 25/12, Нижний Новгород, 603155 Россия

*e-mail: slunyaev@ipfran.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

После доработки 13.07.2023 г.

Принята к публикации 28.08.2023 г.

По результатам прямого численного моделирования нерегулярных нелинейных волн на поверхности глубокой воды в рамках трехмерных потенциальных уравнений гидродинамики определены вклады различных волновых компонент (второй, третьей и разностной гармоник) в формирование распределений вероятностей высот экстремальных волн, а также амплитуд гребней и ложбин. Проанализированы результаты моделирования с учетом 4- и 5-волновых нелинейных взаимодействий. Разные нелинейные гармоники участвуют в формировании распределений вероятностей сложным образом, существенно не поддающимся принципам линейного сложения и упорядочивания вклада по малому параметру нелинейности.

Ключевые слова: поверхностные морские волны, прямое численное моделирование, распределение вероятностей высот волн, амплитуд гребней и ложбин, пространственно-временной спектр волн

DOI: 10.31857/S000235152306010X, **EDN:** ORXADF

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи описания и прогноза динамики ветровых морских волн нацелены на обеспечение безопасности судоходства и использования прибрежных акваторий, а также являются составной частью проблемы моделирования погоды и климата. В частности, нормативы строительства судов и морских плавучих и стационарных сооружений основаны на представлениях о вероятностных распределениях волновых нагрузок. Из-за относительно небольшого числа надежных данных прямых измерений (см., например, обзор в [Слюняев и др., 2023]) для построения вероятностной картины ветровых волн, особенно редких экстремальных волн, полученные экспериментальные зависимости экстраполируются, либо предполагаются применимыми существующие вероятностные модели.

Статья подготовлена на основе устного доклада, представленного на IV Всероссийской конференции с международным участием “Турбулентность, динамика атмосферы и климата”, посвященной памяти академика А.М. Обухова (Москва, 22–24 ноября 2022 г.).

Связанной с этой проблемой задачей является оценка эффектов, не учитываемых в моделях баланса спектральной энергии волн, используемых практически во всех существующих системах прогноза ветрового волнения. Появившаяся возможность моделировать реалистичную динамику нерегулярных морских волн и накапливать статистические данные посредством прямого численного моделирования динамических уравнений подчеркивалась в работах [Такака, 2001a, 2001b]. Она стала результатом не только совершенствования компьютерной техники, но и возникновения новых методов решения «почти полных» уравнений потенциальной гидродинамики. Несомненным преимуществом использования численных экспериментов является контролируемость условий, обеспечение статистической однородности получаемых данных. Поскольку традиционное описание нелинейных морских волн основано на отдельной трактовке резонансных и нерезонансных волновых взаимодействий и рассмотрении разных порядков нелинейных взаимодействий волн, то наиболее удобны для интерпретации

подходы к прямому численному моделированию, позволяющие использовать эту же терминологию.

Псевдоспектральный алгоритм высокого порядка (High Order Spectral Method, HOSM) был сформулирован сразу в двух публикациях [Domermuth and Yue, 1987; West et al., 1987]. Последующее сравнение этих двух версий подхода показало преимущество второй [West et al., 1987]: она соответствует разложению исходного гамильтониана системы, согласованному по асимптотическому порядку в предположении слабой нелинейности [Tanaka, 2001a]. В настоящей работе использован именно второй подход, предложенный в [West et al., 1987]. В [Tanaka, 2001a; Onorato et al., 2007] обсуждалось, что метод HOSM совпадает по формулировке с динамическими спектральными уравнениями Захарова [Захаров, 1968] (когда оба подхода записаны с учетом не выше чем 4-волновых взаимодействий), но существенно быстрее их для моделирования на компьютере. Несмотря на существующую критику HOSM, связанную с невозможностью одинаково хорошо описывать волны очень широкого спектра (поскольку описание волн разных масштабов вблизи поверхности с помощью разложения в ряд Тейлора имеет разную точность, см. [Chalikov, 2016]), метод HOSM сейчас очень популярен. Отметим здесь только открытый для использования код HOSM, разработанный и постоянно улучшаемый группой из г. Нант (Франция) [Ducrozet et al., 2016]. В литературе можно найти многочисленные сравнения результатов численного моделирования методом HOSM с лабораторными измерениями, которые демонстрируют очень хорошее соответствие. Эффекты обрушения волн не могут описываться в рамках модели HOSM напрямую и должны учитываться посредством параметризации. Затухание волн и воздействие ветра могут описываться с помощью введения в уравнения неконсервативных слагаемых.

Сравнение результатов расчета эволюции нелинейных нерегулярных волн в [Annenkov and Shrira, 2018] выявило заметное расхождение между решением усредненных по фазам уравнений Хассельмана, динамических уравнений Захарова и расчетом исходных уравнений Эйлера методом HOSM (во всех случаях решение ограничивалось учетом не выше чем 4-волновых взаимодействий). В частности, расхождение проявилось в эволюции четвертого статистического момента для смещения поверхности, эксцесса. Это важное отличие, поскольку эксцесс контролирует долю больших отклонений поверхности от состояния равновесия и, тем самым, определяет степень экстремальности волнения. В недавней работе [Annenkov and Shrira, 2022] отмечается также значительное расхождение форм частотных спектров, получаемых по результатам расчета усред-

ненных по фазам кинетических уравнений и в рамках динамических уравнений Захарова.

Краткий обзор работ по прямому численному моделированию морских волн и результатов, относящихся к описанию вероятностных свойств аномально высоких волн, можно найти в [Слюняев и др., 2023], см. также книгу [Chalikov, 2016]. Прямое численное моделирование эволюции систем нерегулярных волн на двумерной поверхности глубокой жидкости в рамках модели HOSM с заданными начальными спектрами JONSWAP выполнялось нами ранее в работах [Sergeeva and Slunyaev, 2013; Slunyaev et al., 2016; Слюняев и Кокорина, 2020] и др. Было показано, что существует два класса волновых условий. В первом, соответствующем “классической” ситуации, предполагаемой в кинетической теории, вкладом когерентных состояний волн можно пренебречь. Такие условия реализуются при широком угловом спектре и сравнительно небольшой средней нелинейности волн. Во второй ситуации значительной нелинейности и относительно малой ширины углового спектра возможно образование долгоживущих когерентных волновых групп, изменяющих вероятностные распределения волн [Slunyaev and Kokorina, 2017; Slunyaev, 2020; Slunyaev, 2021]. В частности, значения динамического эксцесса для смещения взволнованной поверхности становятся сравнимыми со значениями эксцесса для связанных волн. Если для результатов расчета спектральных уравнений энергетического баланса вторые могут учитываться в рамках статистических моделей второго порядка, то динамический эксцесс при таком подходе не описывается совсем. Прямое численное моделирование является на сегодня единственным способом получить достоверную информацию о вероятностных свойствах волн в “неклассических” ситуациях (значительная средняя нелинейность волн и относительно узкий угловой спектр), которые связываются с условиями, благоприятными для появления неожиданно высоких волн, т.н. “волн-убийц” [Kharif et al., 2009; Слюняев и др., 2023].

В настоящем исследовании на основе прямого численного моделирования исходных уравнений гидродинамики для потенциальных потоков исследован вклад в вероятностные распределения компонент волн, соответствующих разным нелинейным гармоникам, с фокусом на нелинейные эффекты сверх квадратичных (третья гармоника и длинноволновая компонента), которые не учитываются классическими статистическими теориями, используемыми в инженерии. Численная схема и постановка вычислительных экспериментов совпадают с использованными в нашей работе [Слюняев и Кокорина, 2020]; они кратко описаны в разделе 2. Собственный метод выделения компонент волн (нелинейных гармоник), предложенный в работе [Slunyaev, 2020], форму-

лируется в разделе 3. Способ построения статистического ансамбля и референсные распределения вероятностей вводятся в разделе 4. Распределения вероятностей, наблюдающиеся в численных экспериментах, приводятся в разделе 5. В разделе 6 обсуждаются вклады разных волновых компонент в вероятности высоких волн, являющиеся основной целью исследования. Выводы формулируются в заключительном разделе 7.

2. ПОСТАНОВКА ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Система уравнений гидродинамики, решаемых методом HOSM, состоит из двух граничных условий (1) и (2) на свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$, уравнения Лапласа (3) в толще воды $-h \leq z \leq \eta(x, y, t)$ и условия непротекания на плоском дне $z = -h$ (4):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1)$$

$z = \eta,$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right], \quad (2)$$

$z = \eta,$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad z \leq \eta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (4)$$

Здесь $\Phi(x, y, z, t)$ есть потенциал скорости движения жидкости, а его значения на поверхности описываются функцией $\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y, z = \eta, t)$; g – ускорение свободного падения. Эффектами диссипации и ветровой накачки на временах расчета пренебрегалось.

Система уравнений (1)–(4) для полей на поверхности $\eta(x, y, t)$ и $\Phi(x, y, t)$ незамкнута из-за слагаемых вертикальной скорости $\partial \Phi / \partial z$, для вычисления которых требуется определение потенциала скорости в толще на каждом шаге итераций по времени. В методе HOSM используется разложение потенциала скорости в ряд Тейлора вблизи невозмущенной поверхности воды $z = 0$, что позволяет свести переменную область, занятую жидкостью, $-h \leq z \leq \eta$, к неизменной, $-h \leq z \leq 0$. В настоящей работе рассчитывались уравнения в предположении глубокой воды, $h \gg 1$. Потенциал скорости ищется в виде ряда из слагаемых разных порядков малости $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots + \Phi^{(M)}$. Вертикальная структура функций $\Phi^{(m)}(x, y, z, t)$ задается решением уравнения Лапласа и не изменяется на

каждом шаге интегрирования, что делает код быстрым. Аналогично раскладывается в ряд и функция вертикальной скорости на поверхности, $\partial \Phi / \partial z|_{z=\eta} = W^{(1)} + W^{(2)} + \dots + W^{(M)}$. Компоненты потенциала $\Phi^{(m)}$ по заданному потенциалу на поверхности Φ и затем компоненты вертикальной скорости $W^{(m)}$ на поверхности определяются итерационным способом, см. подробности в [West et al., 1987; Слюняев и Кокорина, 2020].

Существенно, что HOSM не является полностью нелинейным подходом; он позволяет учитывать до $M + 1$ нелинейных волновых взаимодействий, где M – параметр нелинейности численной схемы. Для расчета волн на глубокой воде чаще всего ограничиваются порядком $M = 3$, что позволяет учитывать доминирующие четырехволновые нелинейные процессы, включая модуляционную неустойчивость. В настоящей работе использовались значения $M = 3$, а также более высокий порядок нелинейности $M = 4$. Кубические ($M = 3$) и четвертичные ($M = 4$) нелинейности можно отнести к эффектам высокого порядка для существующей практики учета нелинейных эффектов в океанографии, которыми пренебрегают. Для расчета тестовых примеров также было выполнено моделирование для $M = 1$ (линейное приближение).

Начальные условия $\eta(x, y, t = 0)$ и $\Phi(x, y, t = 0)$ задавались периодичными вдоль горизонтальных осей координат Ox и Oy в виде линейной суперпозиции гармонических функций, согласно решению линеаризованных уравнений гидродинамики с дисперсионным соотношением для глубокой воды

$$\omega(k) = \sqrt{gk}, \quad k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (5)$$

Отметим, что для каждой гармоники Фурье (k_x, k_y) задавалась не только случайная фаза, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi)$, но и случайная абсолютная величина согласно нормальному распределению с амплитудой, соответствующей выбранному спектру частот $S(\omega)$ и углов $D(\chi)$. (Здесь и далее под спектрами будут подразумеваться спектры Фурье.) Начальные реализации волн могли несколько отличаться друг от друга формой спектра Фурье и энергией.

Для моделирования был использован модельный энергетический спектр JONSWAP

$$S(\omega) = \alpha \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right] \gamma \exp\left[\frac{1}{28^2} \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p}\right)^2\right], \quad (6)$$

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 0.07, & \omega < \omega_p \\ 0.09 & \omega > \omega_p \end{cases},$$

который является результатом параметризации данных интенсивных измерений в Северном море.

Таблица 1. Основные параметры численных экспериментов

Индивидуальный номер эксперимента	Ширина углового спектра, θ , град	Пиковатость γ	Значительная высота 4σ , м	Параметр нелинейности схемы, M
61	5	6	5	3
53	12	6	6	3
71	12	6	6	4
64	12	3	7	1
55	12	3	6	3
47	12	3	3.5	3
22	62	6	7	3
60	62	6	7	4
62	62	3	7	1
44	62	3	7	3
45	62	3	3.5	3

Он содержит 3 ключевых параметра: $T_p = 10$ с – пиковая частота волнения, связанная с циклической частотой $\omega_p = 2\pi/T_p$; H_s – значительная высота волн (определяющая в совокупности с другими параметрами величину α в (6)) и пиковатость γ (степень узости спектра вблизи пика). Согласно дисперсионному соотношению (5) волновое число, соответствующее пику спектра, равно $k_p = \omega_p^2/g \approx 0.040$ рад/м. Угловое распределение $D(\chi)$ энергетического спектра задавалось в соответствии с функцией \cos^2 по формуле

$$D(\chi) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} \cos^2\left(\frac{\pi\chi}{\theta}\right), & |\chi| \leq \frac{\theta}{2} \\ 0, & |\chi| > \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Согласно подходу, предложенному в [Domermuth, 2000], численное моделирование эволюции волн начиналось с медленного “включения” нелинейных частей уравнений (в течение 20 периодов волн, что соответствует 200 с физического времени), что позволяло изначально синусоидальным волнам адиабатически перестроиться в нелинейные несинусоидальные волны.

Начальные условия для набора параметров спектра задавались на площадке 50 на 50 длин волн (что в размерных величинах соответствует примерно 8 на 8 км) на равномерной сетке из $2^{10} \times 2^{10}$ точек в физическом пространстве и вдвое большем числе точек по каждому направлению в Фурье пространстве (для процедуры де-алейзинга, de-aliasing). Основные параметры экспериментов, использованных в настоящей работе, приведены в табл. 1. Для интегрирования уравнений по времени линейная часть уравнений (1) и (2) считалась с использованием точного аналитического решения, нелинейная часть решалась методом Рунге-Рутты 4-го порядка с фиксированным

шагом. Максимальная высота волн подбиралась таким образом, чтобы события обрушений, ведущих к неустойчивости численной схемы, были редки. Для купирования обрушений использовался спектральный фильтр, аналогичный использованному в [Xiao et al., 2013]. Более подробно о выборе условий численных экспериментов можно найти в [Slunyaev and Kokogina, 2020] и [Слюняев и Кокорина, 2020].

Для каждого набора параметров было выполнено по 7 расчетов для начальных условий с разными соотношениями фаз и амплитуд Фурье гармоник. Полное время расчета составляло 1400 с (140 периодов волн), включая 200 с предварительной стадии включения нелинейности и 1200 с расчетов с полной нелинейностью, используемых для исследования. Данные сохранялись каждые 0.5 с физического времени.

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НА КОМПОНЕНТЫ

Хорошо известно представление монохроматической волны на глубокой воде в виде решения Стокса: суммы первой и кратных нелинейных гармоник:

$$\frac{1}{k_0} \eta(x, t) = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \right) \cos \Theta + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos 2\Theta + \frac{3}{8} \varepsilon^3 \cos 3\Theta + O(\varepsilon^4). \quad (8)$$

Здесь фаза $\Theta = k_0 x - \omega t$, k_0 – волновое число, ω – циклическая частота с учетом нелинейной поправки, ε – мера крутизны волны (малый параметр нелинейности). Амплитуды каждой из гармоник этого решения хорошо разнесены в спектре (хоть временном, хоть пространственном), что позволяет использовать фильтрацию в пространстве Фурье для определения амплитуд каждой из гар-

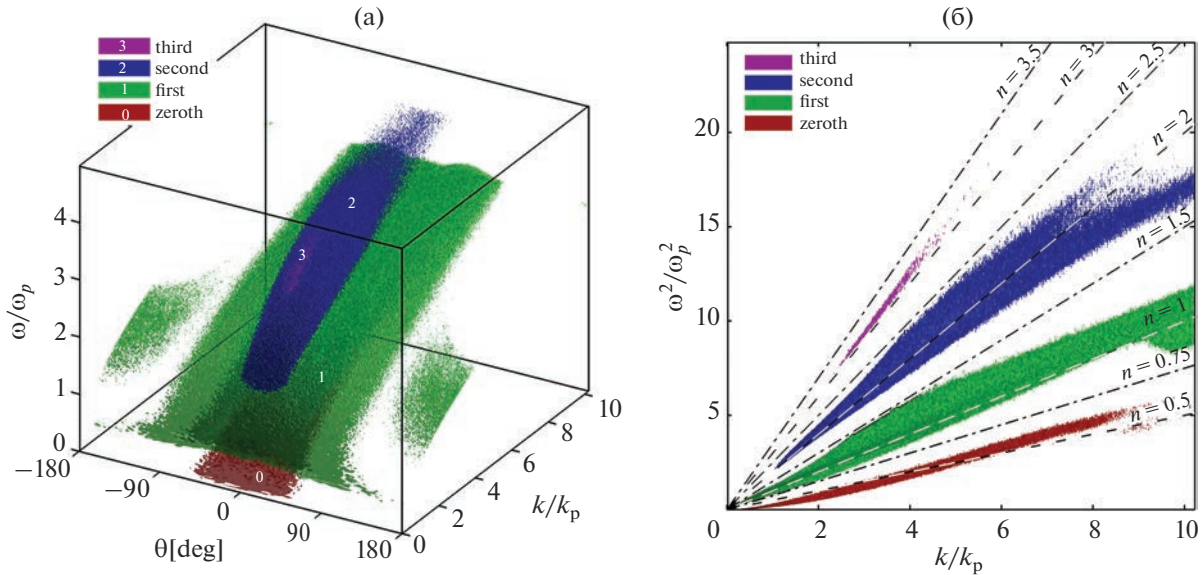


Рис. 1. Иллюстрация метода разделения волновых полей на компоненты для случая $\theta = 62^\circ$ и $H_s \approx 7$ м (эксперимент № 44). Закрашены поверхности амплитуд Фурье до уровня 10^{-3} от максимального значения; цветом различаются разные гармоники. Линиями на панели (б) построены условия (10) для разных n .

моник по данной записи $\eta(x_0, t)$ в какой-то точке x_0 или по моментальной поверхности $\eta(x, t_0)$ в фиксированный момент t_0 .

В случае волн с широким частотным спектром, таким как JONSWAP, спектральные области разных гармоник перекрываются во временном спектре $S(\omega)$ или пространственном спектре $S(k)$, но остаются довольно хорошо разнесенными в пространственно-временном спектре $S(k, \omega)$. Этот факт проиллюстрирован на рис. 1 на примере относительно широкого углового спектра $\theta = 62^\circ$ и большой средней крутизны волн $H_s \approx 7$ м (см. также в [Slunyaev, 2020]). На рис. 1а построены контуры областей амплитуд Фурье, не превышающих по абсолютной величине 1×10^{-3} от максимальной величины амплитуд гармоник Фурье, в нормированных осях модуля волнового вектора k , угла $\theta = \arctan k_y/k_x$ по отношению к направлению движения волн и частоты. Амплитуды Фурье посчитаны как $A(k, \theta, \omega, t) = |\hat{\eta}|$ после тройного преобразования поля смещения поверхности $\eta(x, y, t)$

$$\hat{\eta}(k_x, k_y, \omega, t) = F_x F_y F_\tau (M(\tau - t)\eta(x, y, \tau)), \quad (9)$$

где $F_r(\cdot)$ означает преобразование Фурье по переменной r . На рис. 1б эти же поверхности показаны “сбоку”, вдоль оси $\theta\omega$; по вертикальной оси теперь отложен квадрат частоты, что “линеаризует” связь между k и ω^2 согласно соотношению (5). Для снижения негативного эффекта неперIODичности по времени использованных в (9) полей смещений для временных интервалов $T_w = 256$ с применена сглаживающая маска Ханна $M(t) = 0.5(1 + \cos(2\pi t/T_w))$.

Соотношение для волновых векторов и частот кратных гармоник следует из дисперсионного соотношения для волн на глубокой воде (5):

$$\omega_n = n\Omega\left(\frac{\bar{k}}{n}\right), \quad \Omega(\bar{k}) \equiv \sqrt{g|\bar{k}|} \quad (10)$$

для целых $n \geq 1$. Как видно из рис. 1б, энергосодержащие области в пространстве Фурье сосредоточены вблизи локаций, построенных пунктирными линиями, соответствующих первой ($n = 1$) и кратным гармоникам ($n = 2, 3$). Разностная гармоника должна распространяться примерно с групповой скоростью порождающих ее волн, которая на глубокой воде равна половине фазовой скорости. Как следует из рис. 1б, длинноволновая нелинейная компонента хорошо соответствует выбору $n = 0.5$ в условии (10). В используемом нами спектральном фильтре $W_n(k_x, k_y, \omega)$ для выделения разных гармоник границы областей задаются условиями (10): $0 \leq \omega < \omega_{0.75}$ для разностной (нулевой гармоники); $\omega_{0.75} \leq \omega < \omega_{1.5}$ для первой гармоники; $\omega_{1.5} \leq \omega < \omega_{2.5}$ для второй гармоники и $\omega_{2.5} \leq \omega < \omega_{3.5}$ для третьей гармоники (показаны на рис. 1б штрихпунктирными линиями). Выделенные с помощью такого фильтра области пространственно-временного спектра окрашены на рис. 1 разными цветами. По иллюстрациям можно сделать вывод о хорошем качестве такого разделения гармоник.

При использовании оценки для крутизны $\epsilon = 0.1$ (в частности, для эксперимента на рис. 1 характерную крутизну можно оценить как $k_p H_s / 2 \approx 0.14$) выбор амплитуд показываемых на рис. 1 гармо-

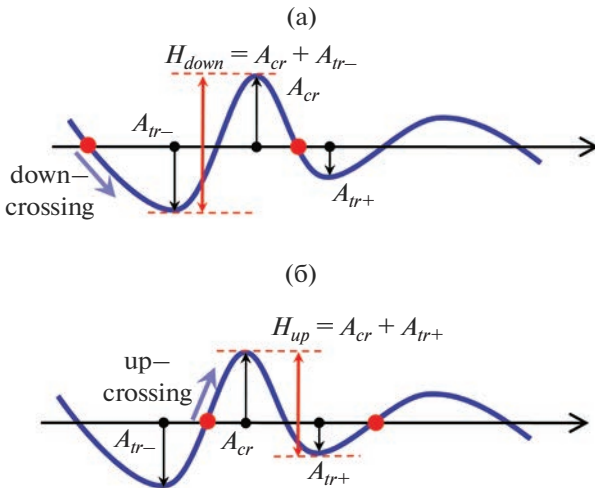


Рис. 2. Выделение индивидуальных волн методом пересечения вниз (down-crossing) (а) и пересечения вверх (up-crossing) (б). Индивидуальная волна заключена между красными точками на осях.

ник (до ϵ^{-3}) должен соответствовать отображению до 3-го порядка нелинейных гармоник включительно. Это заключение согласуется с данными на рисунке. Разностная компонента для волн на конечной глубине, соответствующая длинноволновой компоненте смещения поверхности, возникает во втором порядке по нелинейности $O(\epsilon^2)$. Для условий глубокой воды связанный с ней эффект создается модуляцией волн и становится на порядок меньше, $O(\epsilon^3)$ (см., например, [Слюняев, 2005]). Соответствующее наведенное течение проявляется в важных физических явлениях: таких как поправка к нелинейному сдвигу частоты, перекося формы групп волн, а также участвует в формировании вероятностных свойств поверхности, определяя вертикальное смещение волновых групп как целое. На рис. 1а также видны встречные волны (для углов $\theta = \pm 180^\circ$), возникающие в процессе нелинейной эволюции волновой системы. В настоящей работе они интерпретируются как волны, также принадлежащие первой гармонике; они имеют очень малые амплитуды.

Полученная после тройного преобразования (9) спектральная функция $\hat{\eta}(k_x, k_y, \omega, t)$ комплексная, и после выделения нужной n -ой компоненты волн с помощью соответствующего спектрального фильтра $W_n(k_x, k_y, \omega)$ само поле смещения может быть восстановлено с помощью обратного тройного преобразования Фурье:

$$\eta_n(x, y, t) = F_x^{-1} F_y^{-1} F_t^{-1} (W_n \hat{\eta}(k_x, k_y, \omega, t)), \quad (11)$$

что позволяет рассмотреть по отдельности вклад разных гармоник волн широкого спектра в веро-

ятностные распределения. Отметим, что для получения двумерного поля смещения n -ой гармоники $\eta_n(x, y)$ в один момент времени t требуется информация об исходном поле $\eta(x, y, t)$ на значительном интервале времен $[t - T_w/2, t + T_w/2]$. В настоящей работе использовались интервалы T_w длительностью около 25 периодов волн с разрешением 0.5 с; согласно тестовым примерам они обеспечивают и достаточно хорошее описание временных последовательностей в реальном пространстве, и достаточно большой интервал частот в Фурье пространстве, так что паразитный эффект переналожения образов Фурье несущественен.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫСОТ ВОЛН ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Различают два способа выделения индивидуальных волн по временному ряду смещений поверхности в одной точке пространства – функции времени $\eta(t)$ [Holthuijsen, 2007]. В первом случае индивидуальная волна определяется на интервале, левый край которого задается точкой пересечения последовательностью нулевого (невозмущенного) уровня поверхности вниз по ходу оси измерений до следующей подобной точки (*zero down-crossing*, см. рис. 2а). Во втором – начало и конец одной волны определяются по пересечению линии невозмущенной поверхности вверх (*zero up-crossing*, рис. 2б). В качестве основных характеристик интенсивности индивидуальных волн используют амплитуды, определенные по гребням и ложбинам волн (A_{cr} и A_{ir} соответственно), а также высоты волн H , которые для разных способов определения индивидуальных волн различаются: $H_{down} = A_{cr} + A_{ir-}$ и $H_{up} = A_{cr} + A_{ir+}$.

Традиционным для описания волн на морской поверхности первым приближением является их представление в виде линейной суперпозиции независимых случайных синусоидальных волн. Тогда в силу центральной предельной теоремы смещение поверхности в точке измерения $\eta(t)$ подчиняется гауссовой статистике, а в предположении достаточно узкого спектра (медленные модуляции, $H_{down} \approx H_{up}$) вероятность измерения волны с высотой не менее чем H описывается распределением Рэлея [Massel, 1996; Holthuijsen, 2007]:

$$P(H) = \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right), \quad (12)$$

где σ^2 – дисперсия смещений поверхности. Для не слишком узкого спектра распределение (12) переписывают в виде

$$P_R(H) = \exp\left(-2\frac{H^2}{H_s^2}\right), \quad (13)$$

где H_s – т. н. значительная высота волн, обычно определяемая как среднее от трети наиболее высоких волн в записи, $H_s = H_{1/3}$. Ее использование позволяет снизить вклад мелкомасштабных волн в оценку значения средней высоты и получить лучшее совпадение с результатами прямого моделирования или измерений. Для случая узкого спектра эта величина связана со среднеквадратичным смещением поверхности, $H_{1/3} \approx 4.004 \sigma$.

В качестве характеристики “неординарности” высокой волны часто вводят параметр превышения фонового волнения AI (от *amplification index* или *abnormality index*)

$$AI = \frac{H}{H_s}, \quad (14)$$

где значительная высота H_s определяется как $H_s = H_{1/3}$ или $H_s = 4\sigma$. Наиболее часто используемое в литературе определение, выделяющее класс аномально высоких или “волн-убийц”, задает минимальное необходимое превышение высоты волн $AI > 2$ [Kharif et al., 2009; Слюняев и др., 2023].

Распределения для амплитуд получаются из (12)–(14) заменой $H/H_s = A/A_s$, где для узкого спектра в первом приближении $A_{cr} = A_r$ и $A_s = 2\sigma$. В реалистичных для моря ситуациях широких спектров простая связь между амплитудами и высотами $H \approx 2A$ нарушается. Из-за асимметрии нелинейных волн амплитуды, определенные по гребням и ложбинам, также не совпадают, $A_{cr} \neq A_r$. Потому в проводимом нами далее анализе различаются амплитуды ложбин (A_r) и амплитуды гребней (A_{cr}), а также высоты, определенные по методам пересечения вниз (H_{down}) и вверх (H_{up}).

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫСОТ ВОЛН, АМПЛИТУД ГРЕБНЕЙ И ЛОЖБИН ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В настоящей работе для построения распределений вероятностей использовались данные численного моделирования, как описано в разделе 2, в интервалах времен от 200 с до 1400 с (120 периодов волн). Временные последовательности смещения поверхности брались во всех точках дискретной сетки по продольной координате (2^{10} “измерений”) в 64 равноудаленных по поперечной горизонтальной координате позициях (на расстоянии чуть менее характерной длины волны друг от друга). Такая конфигурация точек измерений соответствует скорее оценке вероятности под ориентированным вдоль направления волн отрезком, а не в одной точке пространства. Как обсуждается далее (см. также в нашей работе [Sergeeva and Slunyaev, 2013]), наблюдаемое при этом распределение вероятностей в линейном пределе хорошо согласуется со стандартным распределением Рэлея.

Также в [Sergeeva and Slunyaev, 2013] было показано, что в нелинейном моделировании пространственный масштаб корреляции между измерениями в близких точках уменьшается в сравнении с линейным случаем. С другой стороны, в [Slunyaev and Kokogina, 2017] описано, как благодаря нелинейности возможно возникновение долгоживущих когерентных волновых структур, из-за которых вероятностное распределение вдоль направления движения волн может сильно изменяться. Таким образом, выбор минимальной дистанции для измерений вдоль движения волн (чтобы собрать больше данных с одного численного эксперимента и при этом данные в разных точках измерений были бы независимыми) не является очевидным. Сопоставление полученных данных с модельным распределением Рэлея должно проводиться с учетом перечисленных выше оговорок. Всего для каждого из условий экспериментов, перечисленных в табл. 1, было собрано по более чем 60 млн индивидуальных волн.

Примеры распределений, построенных для тестовых расчетов линейных волн ($M = 1$) с относительно узким ($\theta = 12^\circ$) и более широким ($\theta = 62^\circ$) угловым спектром приведены на рис. 3. Универсальная форма теоретических распределений (13) удобна для представления результатов в полулогарифмических осях, где по вертикальной оси отложена вероятность, а по горизонтальной отложены нормированные на H_s и A_s высоты и амплитуды волн соответственно. В таком представлении распределения вероятностей превышения обычно строятся в нелинейной оптике, где квадрат нормированной амплитуды имеет смысл энергии. Для разных кривых на рис. 3 величина H_s выбиралась равной 4σ или $H_{1/3}$, см. кодировку линий на рисунке; значительная амплитуда бралась равной $A_s = 2\sigma$. Жирная прямая линия по диагонали соответствует теоретическому распределению Рэлея (13).

Из рис. 3 можно видеть, что полученные по результатам расчета распределения в полулогарифмических осях имеют характер прямых линий в широком интервале не слишком больших нормированных высот или амплитуд; они располагаются ниже распределения Рэлея. Такое расхождение может быть компенсировано поправкой нормирующей величины H_s (или A_s). В частности, видно, что при использовании $H_s = H_{1/3}$ соответствие распределений высот закону Рэлея (13) значительно лучше, чем при выборе $H_s = 4\sigma$. Схожие заключения делались и в наших предыдущих работах по моделированию коллинеарных волн [Sergeeva and Slunyaev, 2013; Slunyaev et al., 2016]. Распределения амплитуд совпадают с распределением Рэлея лучше, поскольку распределение для высот получается из распределения для амплитуд с использованием соотношения $H = 2A$,

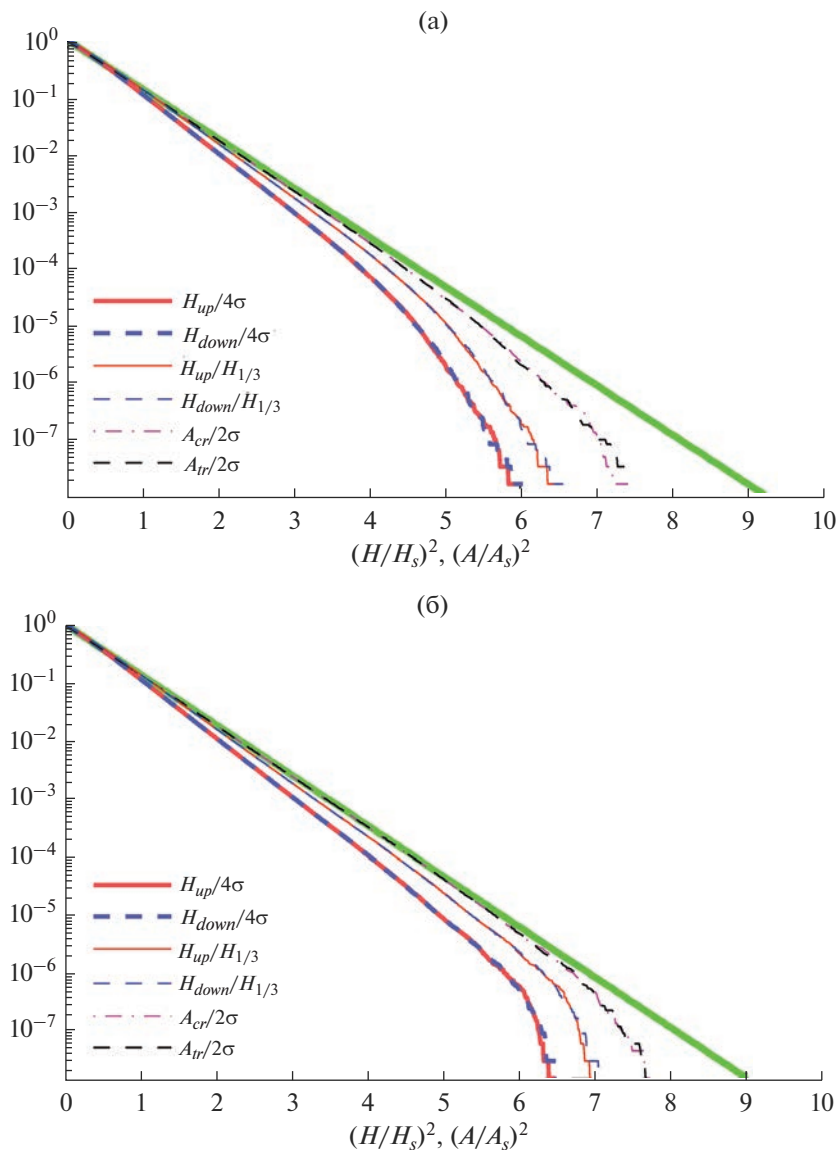


Рис. 3. Распределения вероятностей по данным численного моделирования линейных волн с относительно узким угловым спектром $\theta = 12^\circ$ (эксперимент № 64) (а) и для более широкого углового спектра $\theta = 62^\circ$ (эксперимент № 62) (б). Жирной прямой зеленой линией построено распределение Рэлея.

которое в случае волн с широким спектром нарушается.

Для больших превышений высот (или амплитуд) характер построенных на рис. 3 зависимостей меняется качественно: вероятность начинает падать с ростом H/H_s (A/A_s) очень быстро, что, очевидно, связано с конечностью статистического ансамбля. Для случая узкого углового спектра это происходит уже после $H/(4\sigma) \approx 4$, а для широкого спектра — для заметно больших величин, $H/(4\sigma) > 5$. Это отличие может быть объяснено тем, что в представлении Фурье высокие волны возникают в результате софазности гармоник. Можно легко получить, что для заданной полной

энергии волновой системы в ограниченном пространстве максимальная волна достигается при как можно более равномерном распределении энергии между как можно большим числом пространственных гармоник (аналог дельта-функции Дирака, см. обсуждение в [Slunyaev and Kocogina, 2017]). Таким образом, конечные выборки волн с более широким спектром должны демонстрировать большие максимальные усиления волн над среднеквадратичным значением.

Попарные совпадения распределений на рис. 3 для H_{up} и H_{down} , а также для A_{cr} и A_{tr} свидетельствуют о полной вертикальной и горизонтальной симметрии волн, естественной для случаев модели-

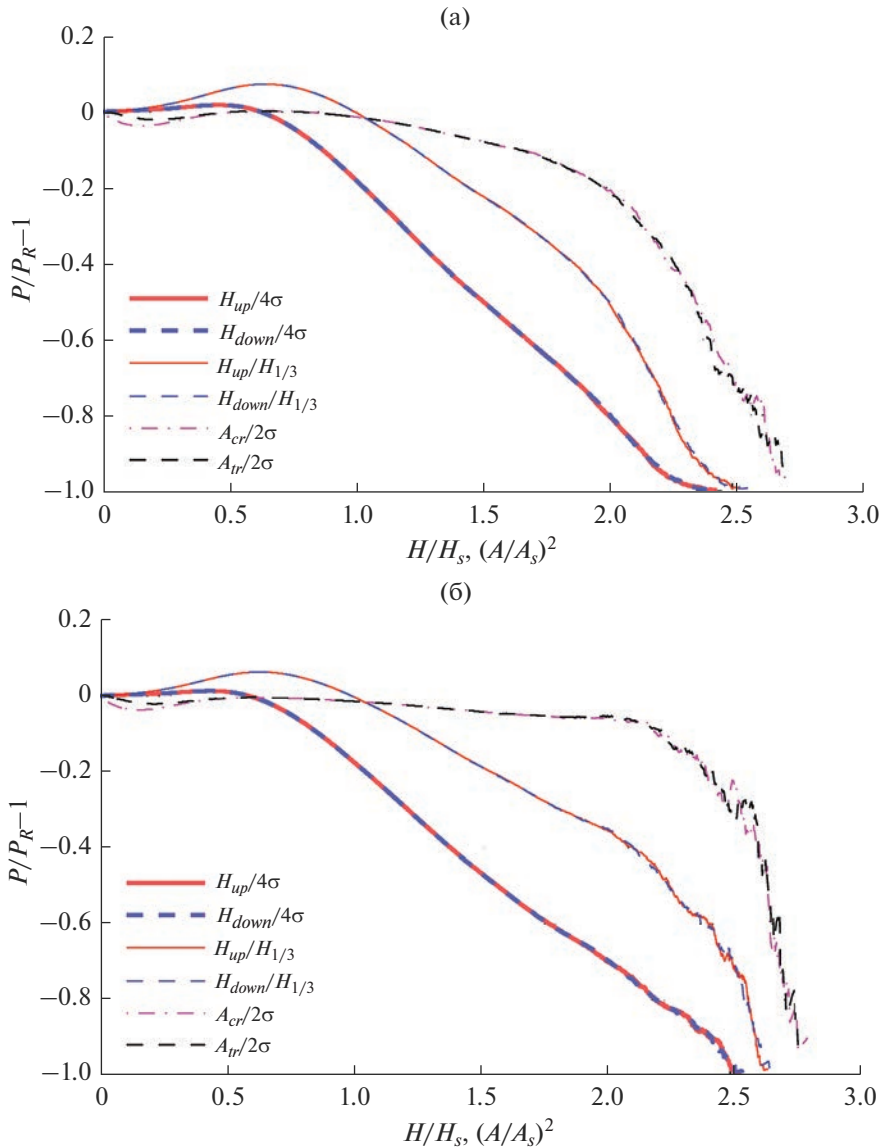


Рис. 4. Относительные отличия распределений на рис. 3 от распределения Рэлея. По горизонтали отложены нормированные высоты (амплитуды).

рования в рамках линейных уравнений гидродинамики.

На рис. 4 построены относительные отличия численно построенных распределений $P(H)$ и $P(A)$, приведенных на рис. 3, от соответствующих распределений Рэлея P_R . Эти графики подтверждают выводы, сделанные по рис. 3 относительно “хвостов” распределений вероятностей, и демонстрируют умеренные отличия от распределения Рэлея в области небольших высот, зависящие от последних немонотонно. В частности, видно, что при выборе $H_s = H_{1/3}$ имеется интервал небольших высот с превышением распределения Рэлея до порядка 10%. А распределения для совсем ма-

лых амплитуд волн A_{cr} , A_{tr} располагаются ниже распределения Рэлея.

Таким образом, даже в случае линейных волн распределение Рэлея может использоваться лишь как первая аппроксимация для распределений вероятностей высот и амплитуд волн. Отличия от него связаны с рядом причин: не узким спектром, конечностью размера моделируемой области, конечностью статистического ансамбля.

Другой предельный случай, соответствующий интенсивным волнам с очень узким угловым спектром $\theta = 5^\circ$ и большой пиковатостью $\gamma = 6$, когда ожидается большая вероятность anomalously высоких волн, показан на рис. 5. Видно, что распределение Рэлея остается разумной первой ап-

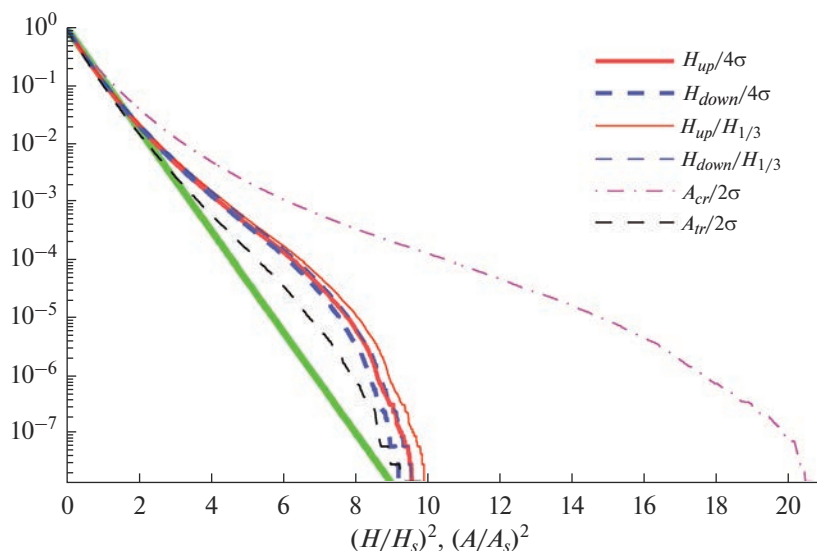


Рис. 5. Распределения вероятностей по данным численного моделирования интенсивных волн с очень узким угловым спектром $\theta = 5^\circ$ (эксперимент № 61). Жирной прямой зеленой линией построено распределение Рэлея.

проксимацией лишь в области малых высот; вероятность возникновения высоких волн в области $(H/H_s)^2 \approx 8$ превышает оценку по распределению Рэлея на 1–2 порядка; при этом использование $H_s = 4\sigma$ или $H_s = H_{1/3}$ существенно ситуацию не изменяет. Данные численных экспериментов не следуют прямым линиям, что говорит о нарушении характера зависимости рэлеевского распределения. Для $(H/H_s)^2 > 8$ наблюдается быстрый “завал” зависимостей вниз, очевидно связанный с конечностью статистического ансамбля. Распределения для H_{up} и H_{down} близки, хотя кривая для H_{up} располагается немного выше в области очень высоких волн. Распределения для A_{cr} и A_{tr} различаются радикально благодаря более высоким гребням нелинейных волн по сравнению с ложбинами, как и следовало ожидать из формы решения для волн Стокса (8). Функция распределения вероятностей амплитуд гребней имеет форму, характерную для степенной зависимости, и демонстрирует огромное максимальное превышение $A_{cr}/(2\sigma) \approx 4.5$. Распределение для амплитуд ложбин располагается выше распределения Рэлея.

Две пары численных экспериментов для умеренных условий проиллюстрированы на рис. 6 (относительно узкий угловой спектр $\theta = 12^\circ$) и рис. 7 (более широкий угловой спектр $\theta = 62^\circ$), пиковатость во всех случаях $\gamma = 3$. Такие ширины углового спектра выбраны вслед за работой [Xiao et al., 2013]. Две панели на рисунках соответствуют случаям умеренной $H_s \approx 3.5$ м и сильной нелинейности $H_s \approx 6$ –7 м (см. табл. 1). Сравнение результатов для экспериментов с узким спектром и разной интенсивностью волн на рис. 6 приводит к

отчасти неожиданному выводу, что хотя в случае умеренной крутизны волн наблюдается сильное превышение распределения вероятности для самых высоких волн, с ростом средней нелинейности вероятность волн с высотами, в 2.5–3 раза превышающими H_s , уменьшается. Ожидается, что эффект обрушения волн должен приводить к ограничению максимальных волн, и этот механизм должен проявляться сильнее, когда средняя крутизна волн большая. Но параметры численных экспериментов выбирались такими, чтобы события опрокидывания волн были редкими. Их регуляризация в рамках потенциальных уравнений выполнена посредством введения спектрального фильтра на очень коротких масштабах, который в терминах потери полной энергии системы действует на систему очень слабо (для эксперимента № 55 на рис. 6б потеря энергии на интервале времени от 200 с до 1400 с не превышает 0.04%). Потому в проведенных экспериментах механизм приближения распределения вероятности к распределению Рэлея с ростом средней высоты волн не вполне понятен.

Поведение распределений вероятностей относительно референсного распределения Рэлея в области не очень больших высот лучше видно на рис. 8–9, где построены относительные отклонения. В случае более узкого спектра (рис. 8) при увеличении интенсивности волнения вероятность событий с умеренным превышением H_s ($H/H_s = 1 \dots 2$) вырастает, так что при выборе $H_s = H_{1/3}$ распределение для большей крутизны волн становится даже ближе к распределению Рэлея. Очень слабое изменение распределений для высот при увели-

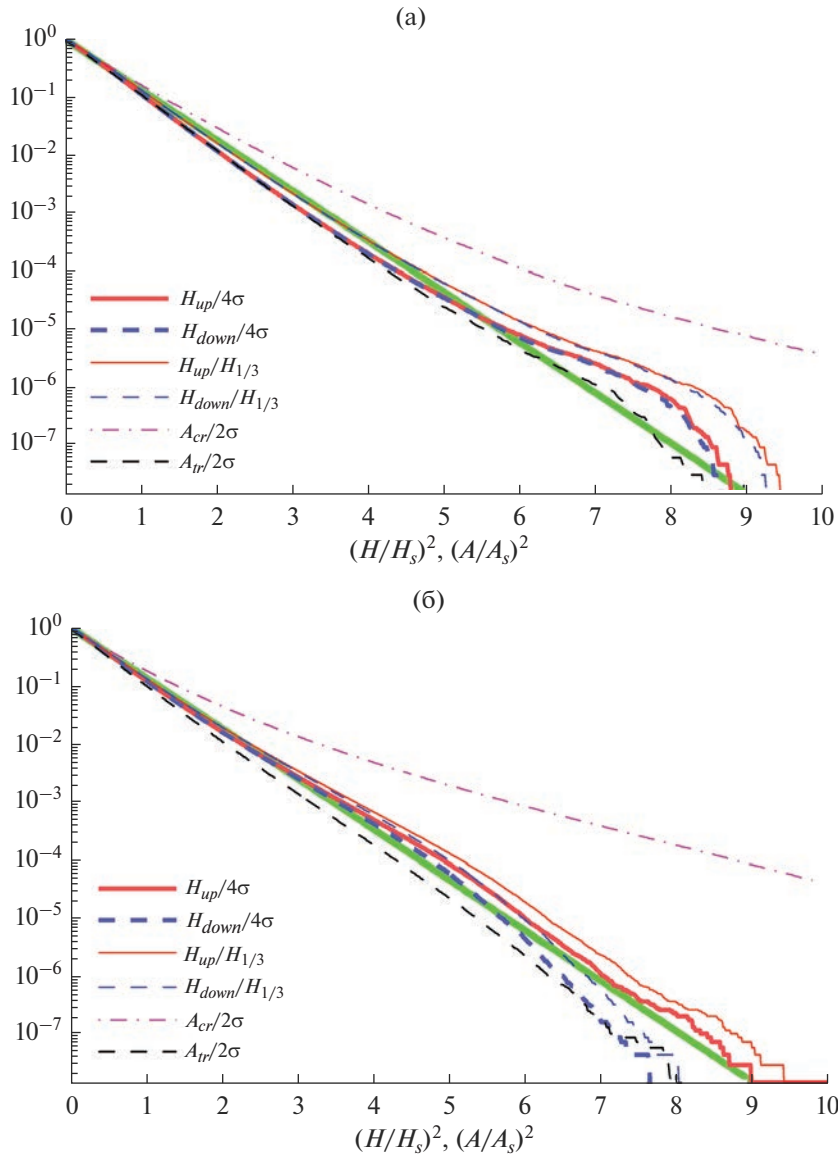


Рис. 6. Распределения вероятностей превышения высот и амплитуд гребней и ложбин для волн с узким угловым спектром $\theta = 12^\circ$ с умеренной (эксперимент № 47) (а) и большой (эксперимент № 55) (б) нелинейностью.

чении H_s почти в 2 раза наблюдается в случае широкого спектра (рис. 9).

Отметим, что распределения для вероятностей высот, определенных по признакам пересечения нулевого уровня вниз и вверх, значительно отличаются в области интенсивных волн в случаях большой нелинейности волн (рис. 8б, 9б): вероятность высоких волн по методу *up-crossing* в разы превышает вероятность волн *down-crossing*. Этот эффект (преобладают аномально высокие волны, определенные по временным реализациям методом *up-crossing*) отмечался нами ранее по результатам моделирования коллинеарных волн на большой и промежуточной глубине, а также волн с разбросом направлений распространения

[Sergeeva and Slunyaev, 2013; Slunyaev et al, 2016; Слюняев и Кокорина, 2020].

При увеличении пиковатости начального спектра до $\gamma = 6$ вероятность высоких волн продолжает расти для обоих случаев интенсивных волн с параметрами $\theta = 12^\circ$ и $\theta = 62^\circ$. Так что для относительно узкого углового спектра $\theta = 12^\circ$ (эксперимент № 53) вероятности превышения для A_{tr} примерно следуют распределению Рэля, а вероятностные распределения для A_{cr} , H_{down} и H_{up} уверенно превышают его. Сделанные на основе расчетов со значением параметра нелинейности схемы $M = 3$ выводы применимы и для аналогичных, выполненных с учетом следующего порядка нелинейности $M = 4$ (эксперименты №№ 71 и 60).

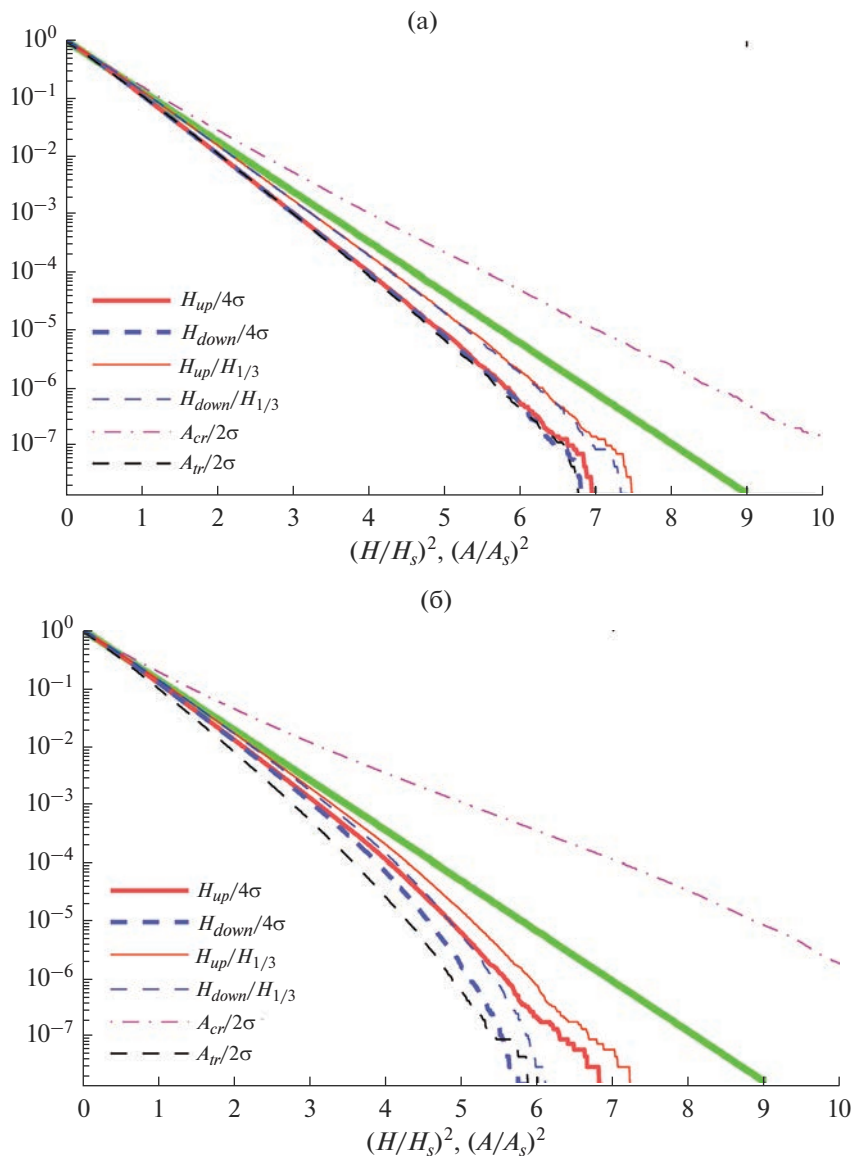


Рис. 7. Аналогично рис. 6, но для волн с относительно широким угловым спектром $\theta = 62^\circ$ с умеренной (эксперимент № 45) (а) и большой (эксперимент № 44) (б) нелинейностью.

6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ СМЕЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

В этом разделе рассматриваются вклады разных гармоник в распределения вероятностей рассчитанных численно нерегулярных волн; гармоники выделяются посредством спектральной фильтрации в пространстве Фурье, описанной в разделе 3. Подчеркнем, что имеются в виду не гармоники монохроматического поля, а обширные спектральные области в пространстве волновых векторов и частот, которые будут условно соотноситься с классическими гармониками узкополосного сигнала. Поскольку для расчета компонент полей в каждый момент времени тре-

буется использовать большой объем данных (массив из $2^9 \times 2^{10} \times 2^{10}$ величин), для которого 6 раз применяется преобразование Фурье, то вместо временных последовательностей $\eta(t)$ были проанализированы “моментальные снимки” 64 равноудаленных по поперечной координате продольных разрезов поверхности $\eta(x)$. Для каждой реализации нерегулярных волн было обработано по 72 “моментальных снимка” в интервале времен от 200 с до 1400 с, что соответствует периодичности виртуальных измерений 16 с (ок. 1.5 периода волны). Для каждого из волновых условий, приведенных в табл. 1, статистический ансамбль состоял из ок. 3 млн индивидуальных волн. На тестовом примере эволюции линейных волн ($M = 1$)

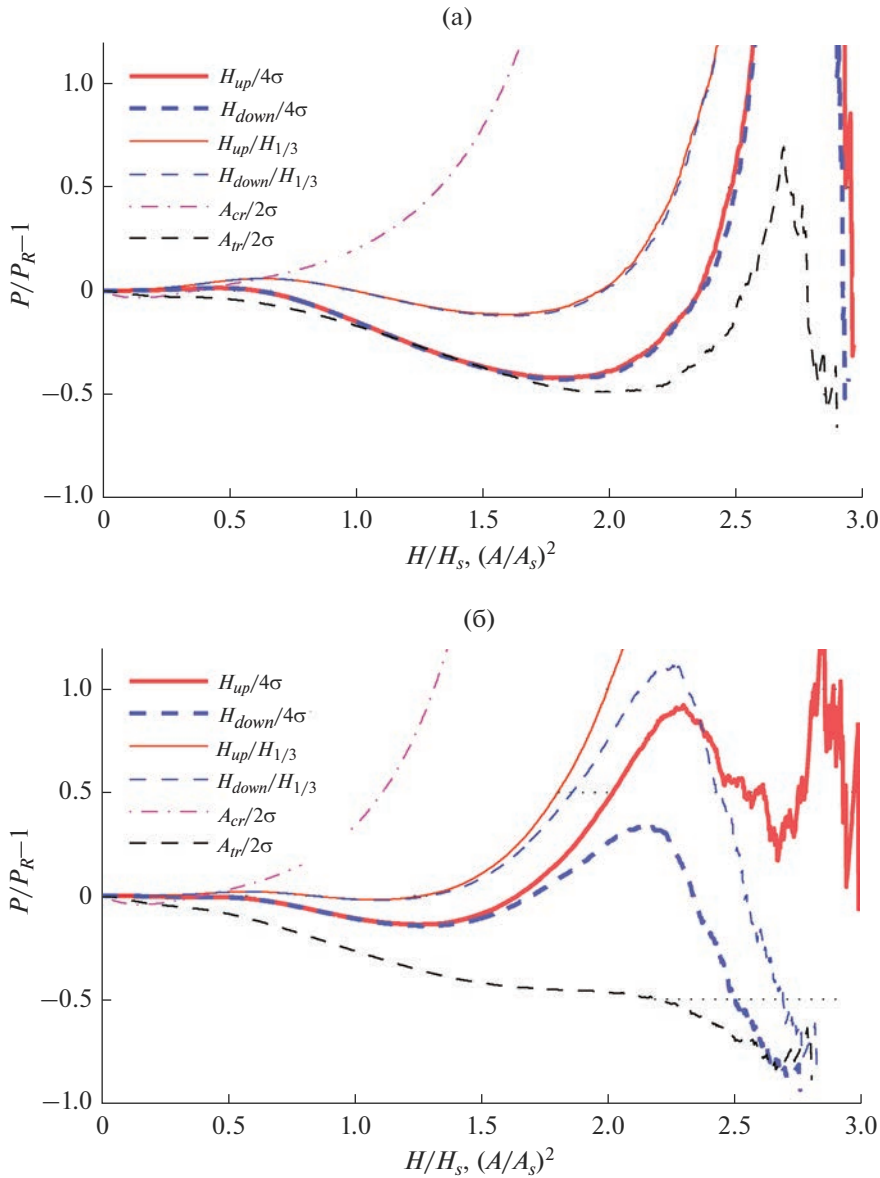


Рис. 8. Относительное отличие распределений на рис. 6 от распределения Рэля. По горизонтали отложены нормированные высоты (амплитуды).

было проверено, что восстановленная первая гармоника с высокой точностью совпадает с полным полем смещения поверхности.

Нужно отметить, что распределения вероятностей, построенные на основе временных последовательностей и по моментальным профилям волн, не вполне эквивалентны. В частности, из-за дисперсии для волн на глубокой воде спектр частот имеет относительную ширину вдвое меньше, чем спектр волновых чисел, потому моментальные профили волн более изрезанные, и по признаку пересечения нулевого уровня выделяется большее количество коротких волн малой амплитуды. В этом разделе для нормирования высот ис-

пользовалась значительная высота, определенная через среднеквадратичное смещение поверхности, $H_s = 4\sigma$.

На рис. 10 и 11 построены распределения вероятностей высот волн для пар экспериментов различной интенсивности волн для разных ширин углового спектра: $\theta = 12^\circ$ и $\theta = 62^\circ$ соответственно. Распределения для полного поля (жирные линии) аналогичны приведенным на рис. 6 и 7, только теперь они построены на основе “моментальных снимков” смещения поверхности. Как следует из рис. 10б, и при таком способе определения индивидуальных волн вероятности высот, выделенных в исходных полях, могут превышать референтное

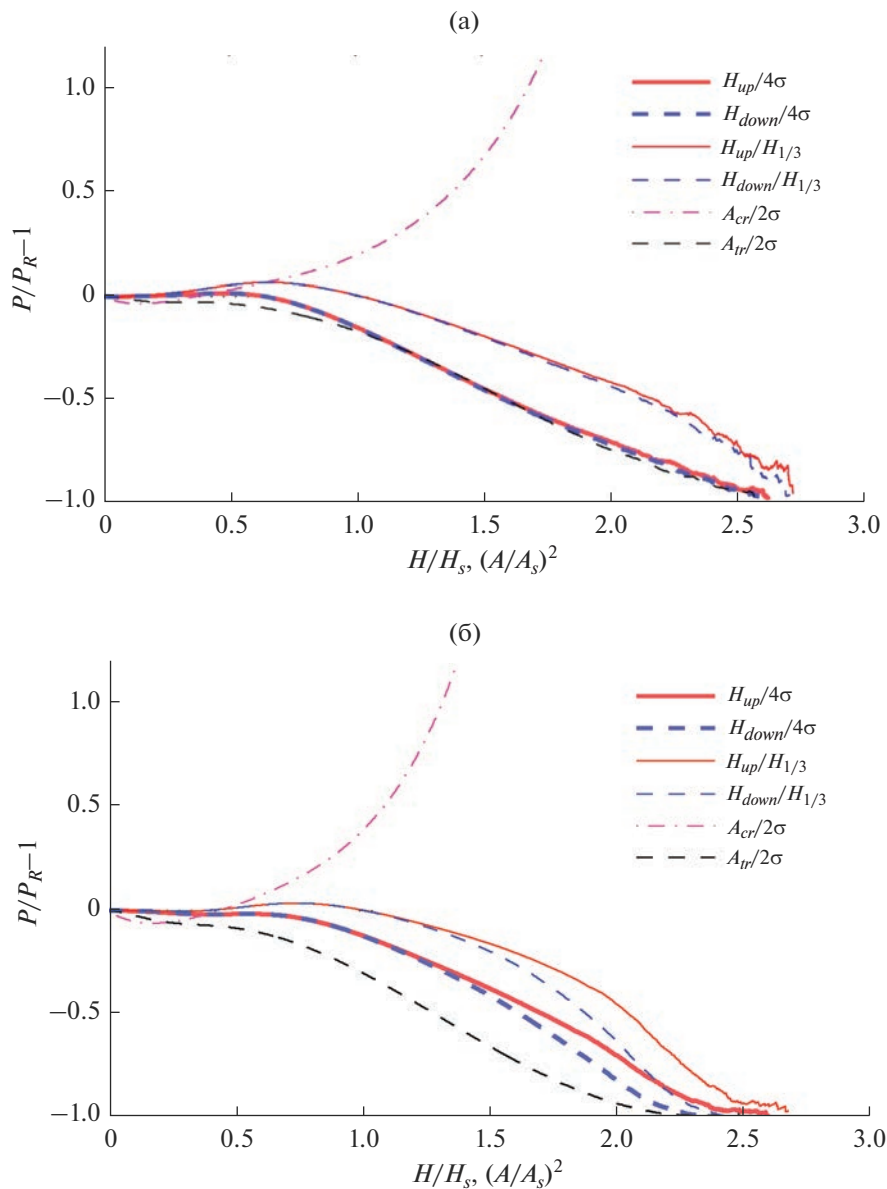


Рис. 9. Относительное отличие распределений на рис. 7 от распределения Рэлея. По горизонтали отложены нормированные высоты (амплитуды).

распределение Рэлея в ситуации узкого углового спектра и большой средней интенсивности волн. В случае интенсивного волнения наблюдаются различия между распределениями для H_{cr} и H_{tr} . Связь между временной последовательностью смещений в одной точке $\eta(t)$ и моментальной формой поверхности как функций координаты $\eta(x)$ задается в первом приближении уравнением переноса (на рис. 2 оси t меняются на $-x/C_{gr}$, где C_{gr} — некоторая эффективная групповая скорость волн доминирующей длины). Потому волны up-crossing во временной записи соответствуют волнам down-crossing на “моментальном снимке” и наоборот. По этой причине на распределениях

вероятностей, построенных на основе “моментальных снимков”, взаимное расположение линий для H_{up} и H_{down} обратно обсуждавшимся в разделе 5.

Распределения для выделенной компоненты первой гармоники построены на рис. 10 и 11 более тонкими линиями. Для условий небольшой крутизны они практически совпадают с результатом для полных полей, а для большей крутизны лежат существенно ниже них. Для состоятельности сравнения в качестве нормировки распределений для первой гармоники использовано среднеквадратичное смещение, рассчитанное не для полного поля (σ), а только для первой гармоники (σ_1). Та-

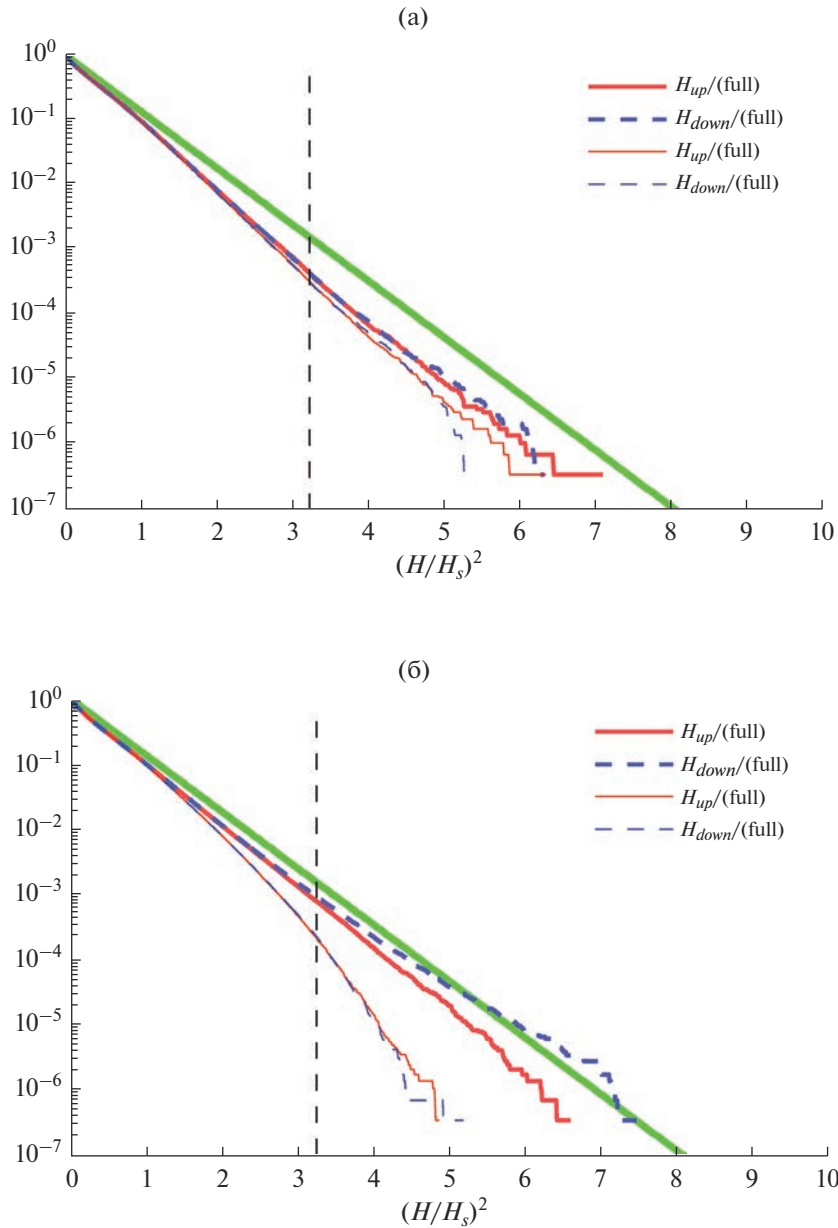


Рис. 10. Распределения вероятностей превышения высот волн по “моментальным снимкам” поверхности для полного поля и для первой гармоники поля для волн с узким угловым спектром $\theta = 12^\circ$ с умеренной (эксперимент № 47) (а) и большой (эксперимент № 55) (б) нелинейностью.

ким образом, на основе рис. 10, 11 можно заключить, что нелинейные гармоники приводят к повышению вероятности высоких волн. Сравнивая эксперименты с одинаковой шириной углового спектра, но разной интенсивностью волн (ср. рис. 10а и 10б, а также рис. 11а и 11б), интересно отметить, что хотя вероятности высоких волн растут с увеличением средней нелинейности волн, распределения вероятностей высот для первых гармоник наоборот оказываются ниже таковых в случае небольшой нелинейности. Значимого разделения кривых для высот первых гармо-

ник, определенных методами up-crossing и down-crossing, не наблюдается.

Как обсуждалось выше, сопоставление полученных распределений с кривой Рэля носит скорее условный характер. Для оценки вклада разных волновых компонент в распределения вероятностей для высот волн будем сопоставлять соответствующие им вероятности $P(AI)$, вычисленные для определенного превышения $AI = H/H_s$, где $H_s = 4\sigma$, с вероятностью для первой гармоники, $P_1(AI)$. В случаях амплитуд гребней и ложбин аналогичное сопоставление будет производиться для

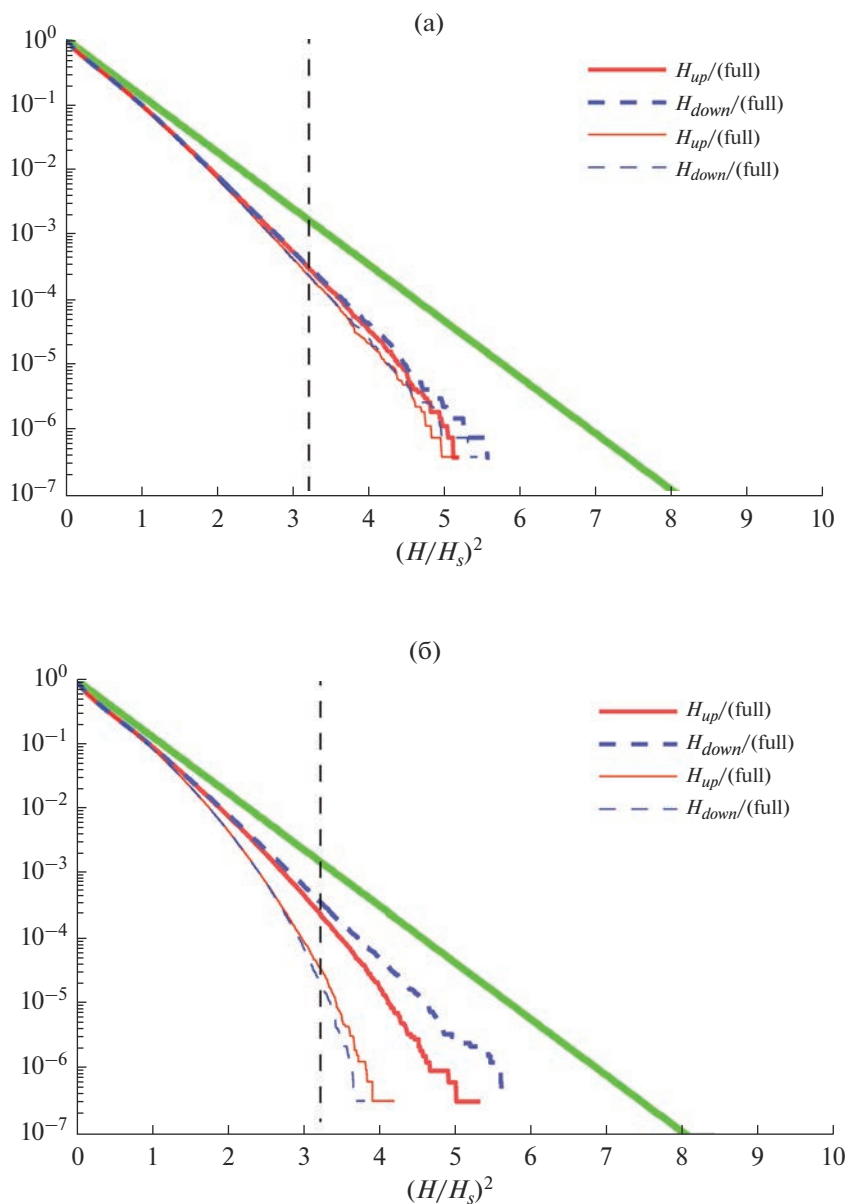


Рис. 11. Аналогично рис. 10, но для экспериментов с относительно широким угловым спектром $\theta = 62^\circ$ с умеренной (эксперимент № 45) (а) и большой (эксперимент № 44) (б) нелинейностью.

выбранного $AI = A/A_s$, где $A_s = 2$. Наиболее интересен случай т.н. аномально высоких волн с $AI > 2$. Поскольку число событий с превышением $AI > 2$ для высот, определенных по первой гармонике, в имеющихся данных мало (а то и вовсе ноль, см. тонкие линии на рис. 11б), то для сравнения будет использован несколько меньший уровень превышения, $AI = 1.8$. Штриховые вертикальные линии на рис. 10 и 11 соответствуют этому выбору AI .

Вклады разных гармоник в формирование вероятностей для H_{down} и H_{up} проиллюстрированы на рис. 12, 13 для такого же набора характерных условий, что и прежде: относительно узкий и от-

носительно широкий угловые спектры (рис. 12 и рис. 13 соответственно) для случаев умеренной и большой крутизны волн. На рисунках прямоугольники охватывают гармоники, учитываемые для расчета данного распределения вероятностей (см. номера на горизонтальной оси). Высоты прямоугольников отвечают добавкам к вероятности $P_1(AI)$, оцененной на основе первой гармоники (ее величина указана над рисунками). Разные прямоугольники соответствуют разным комбинациям гармоник, см. кодировку на рисунках. В частности, серым цветом отложены значения для полных полей без применения спектральной фильтрации (Full). Красным цветом построено

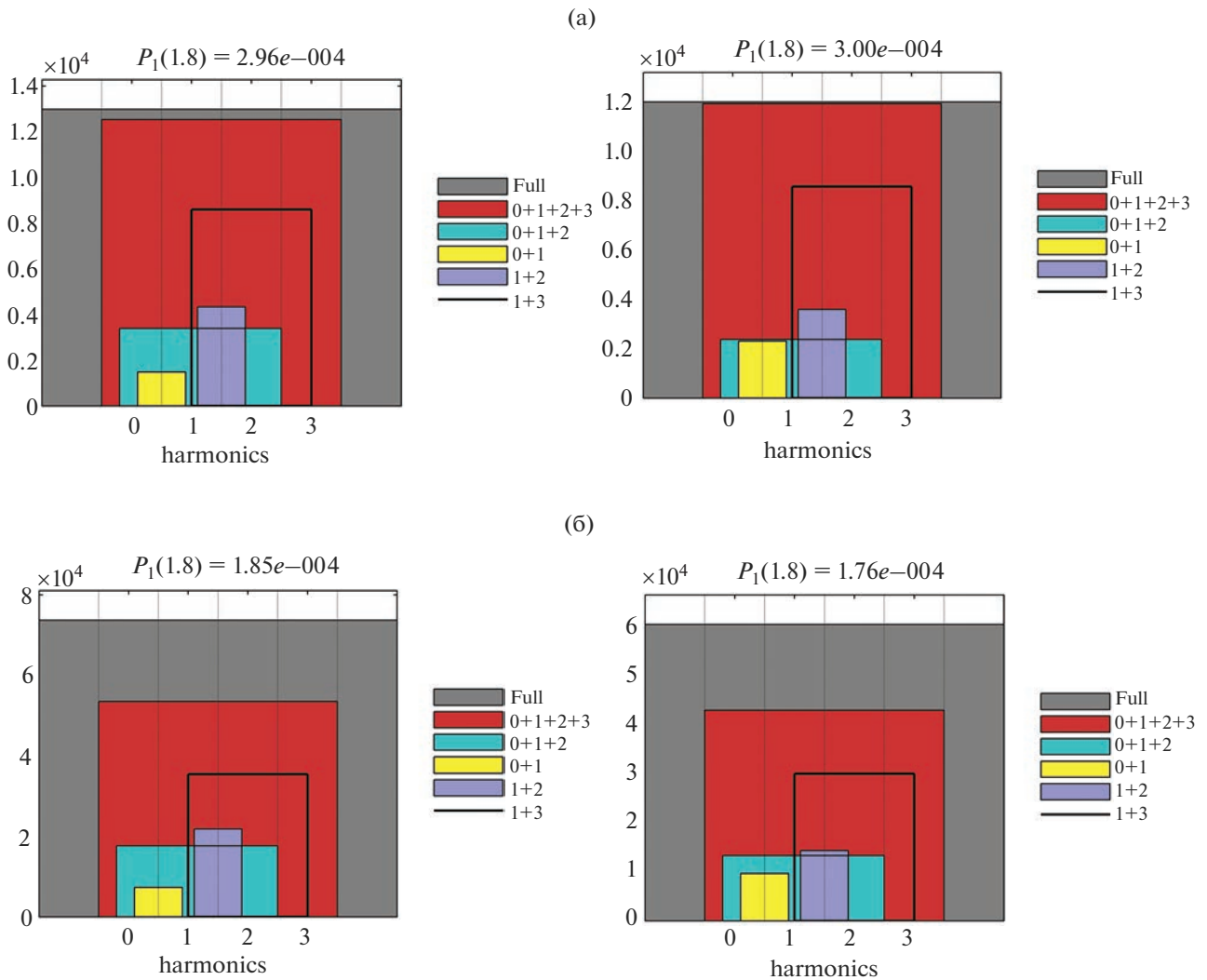


Рис. 12. Добавки к вероятностям превышения $H_{down}/(4\sigma) = 1.8$ (слева) и $H_{up}/(4\sigma) = 1.8$ (справа), связанные с учетом разных гармоник для экспериментов с относительно узким спектром $\theta = 12^\circ$ и умеренной (эксперимент № 47) (а) и большой (эксперимент № 55) (б) нелинейностью. Распределения построены по “моментальным снимкам” поверхности. За базовое значение взята вероятность, определенная для первой гармоники (указана в параметре $P_1(AI)$).

значение для поля, состоящего из нулевой, первой, второй и третьей гармоник (0 + 1 + 2 + 3), выделенных с помощью фильтра (11).

Из рис. 12, 13 следует, что для умеренной крутизны учет первых четырех гармоник (0 + 1 + 2 + 3) практически достаточен для аккуратного описания наблюдаемой в прямом численном моделировании вероятности высот с превышением $AI = 1.8$ (рис. 12а, 13а). Для большей крутизны значительный прирост к вероятности высоких волн осуществляется за счет еще более высоких гармоник Фурье; этот эффект особенно силен для случая широкого углового спектра $\theta = 62^\circ$: на рис. 13б вероятность для полного поля в полтора раза выше.

Во всех случаях учет третьей гармоники (1 + 3) оказывается более важным, чем квадратичные по

нелинейности эффекты второй (1 + 2) и разностной (0 + 1) гармоник. Разумным объяснением этого обстоятельства может быть то, что для примера однородных волн четные гармоники не дают вклада в величину высоты волны, см. (8). Потому более неожиданным результатом кажется значительный совместный вклад в вероятностное распределение высот от разностной и второй гармоники (0 + 1 + 2) – до порядка половины вклада от третьей гармоники (1 + 3). В целом можно сказать, что для относительно узкого углового спектра эффект второй гармоники (1 + 2) преобладает над разностной гармоникой (0 + 1), особенно для высот, выделенных методом down-crossing (рис. 12). Но для волн небольшой крутизны с широким угловым спектром может реализоваться и обратный баланс вкладов (рис. 13б справа).

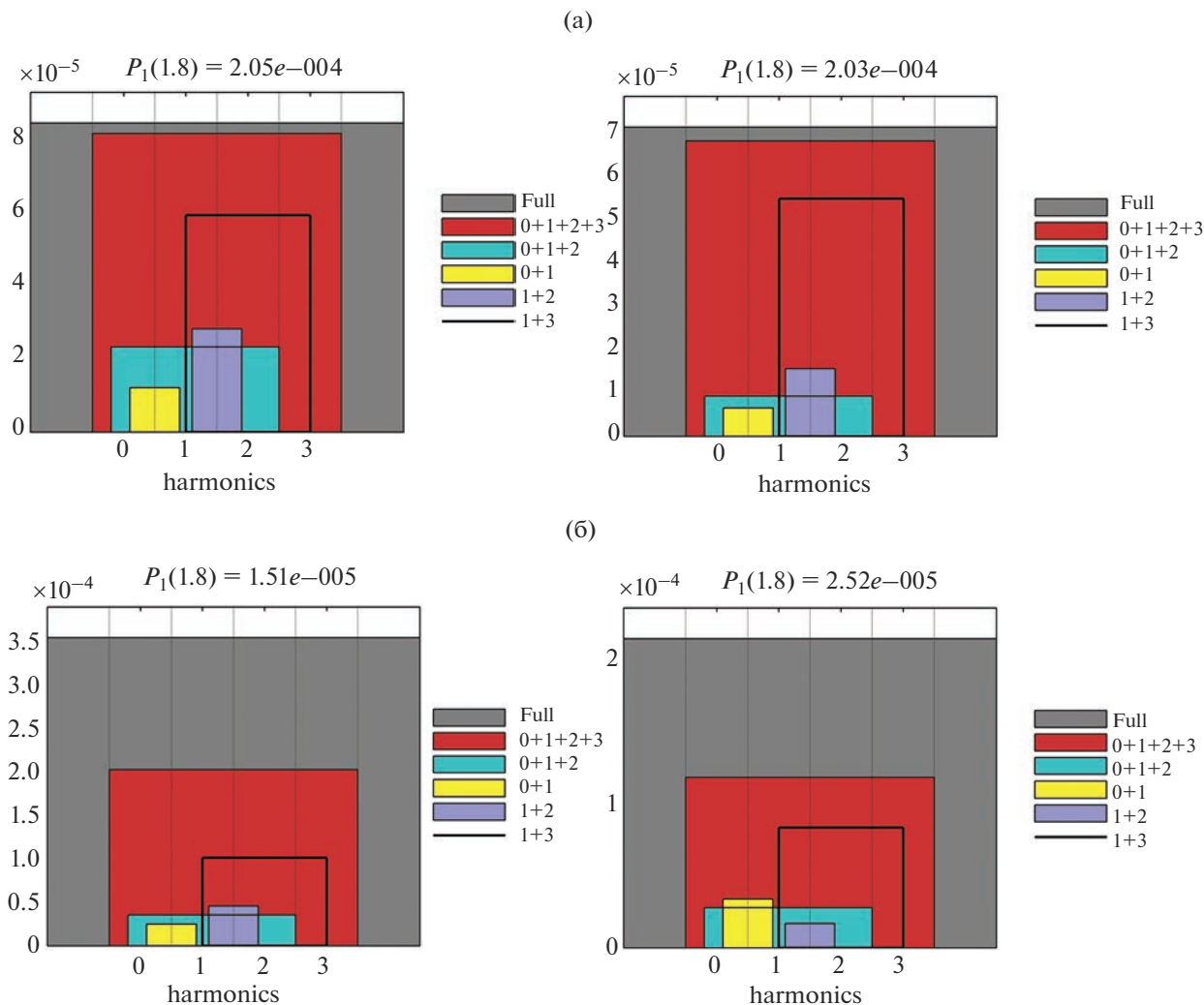


Рис. 13. Аналогично рис. 12, но для экспериментов с относительно широким угловым спектром $\theta = 62^\circ$ с умеренной (эксперимент № 45) (а) и большой (эксперимент № 44) (б) нелинейностью.

Интересно отметить нелинейный характер комбинации вкладов от разных компонент: например, на рис. 12а вклад от трех гармоник ($0 + 1 + 2$) оказывается меньше, чем сумма вкладов от добавления разностной и второй гармоник по отдельности ($0 + 1$ и $1 + 2$), причем все эти комбинации гармоник увеличивают вероятность событий с $AI > 1.8$ по сравнению с распределением вероятностей для первой гармоники.

Для исследования вкладов волновых компонент в вероятностные распределения амплитуд гребней и ложбин рассмотрим величину разности вероятностей превышения для гребней и ложбин, определенных для заданного уровня: $P_{cr}(A/(2\sigma)) - P_{tr}(A/(2\sigma))$ для $A/(2\sigma) = 1.8$. Вероятностные свойства для разных комбинаций гармоник будем сравнивать с соответствующим распределением вероятностей для первой гармоники. На рис. 14 собраны иллюстрации для четырех ранее рас-

смотренных базовых экспериментов. Поскольку референсным случаем выступает первая гармоника, для которой показана вертикальная симметрия, то указанные на рисунках сверху величины разности вероятностей для первой гармоники $\Delta P_1(AI) = P_{1, cr}(AI) - P_{1, tr}(AI)$ фактически имеют шумовые значения.

Естественно огромная роль в различии между вероятностными распределениями для A_{cr} и A_{tr} второй гармоники, очевидная из выражения (8); именно этот эффект учитывается статистическими моделями второго порядка. На рис. 14 второй гармонике соответствует самый большой положительный вклад ($1 + 2$). Интересно отметить, что согласно полученным данным учет только второй гармоники приводит к заметной переоценке поправки к разностному распределению вероятностей для всех ситуаций кроме очень ин-

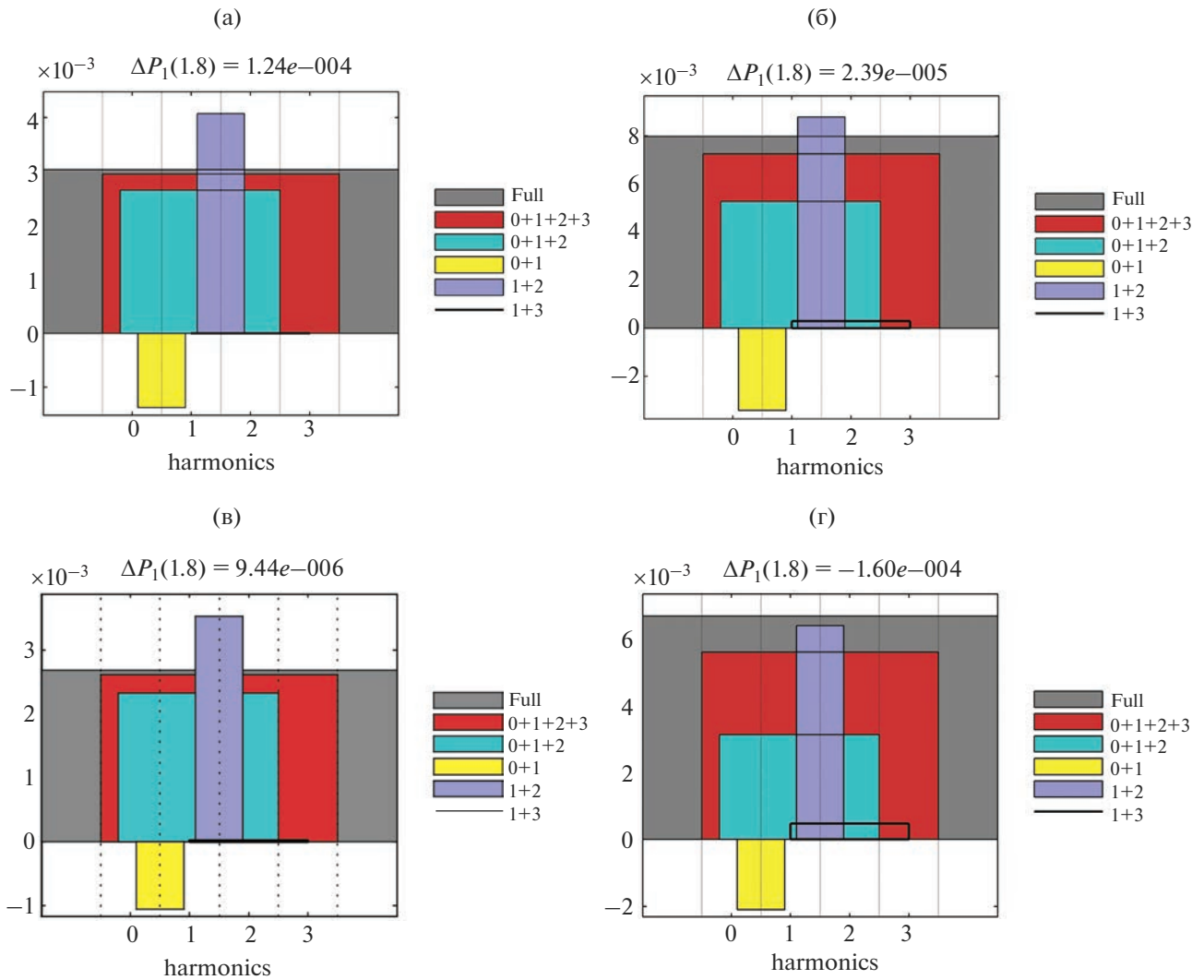


Рис. 14. Добавки к разностям вероятностей превышения $A_{cp}/(2\sigma) = 1.8$ и $A_{lp}/(2\sigma) = 1.8$, связанные с учетом разных гармоник для экспериментов с параметрами: $\theta = 12^\circ$, $H_s = 3.5$ м (№ 47) (а); $\theta = 12^\circ$, $H_s = 6$ м (№ 55) (б); $\theta = 62^\circ$, $H_s = 3.5$ м (№ 45) (в) и $\theta = 62^\circ$, $H_s = 7$ м (№ 44) (г). Распределения построены по “моментальным снимкам” поверхности. За базовое значение взята разностная вероятность, определенная для первой гармоники ΔP_1 .

тенсивного волнения с широким угловым спектром (рис. 14г).

Эффект от разностной гармоники (0 + 1) противоположного знака, он смягчает различие между распределениями для A_{cp} и A_{lp} . Его наличие согласуется с представлением о “приседании” интенсивных волновых групп, известном в рамках слабонелинейной теории для огибающей волн; его величина определяется не только крутизной волн, но и глубиной модуляции волн [Слюняев, 2005]. Известно, что смещение интенсивных волновых групп может становиться обратного знака (вверх) в случае взаимодействия волн под углом (в частности, в системе встречных волн), см. например, в [Adcock et al., 2011; Slunyaev et al., 2017]. Из диаграмм на рис. 14 изменения баланса вкладов от второй и разностной гармоник для рас-

смотренного набора условий волнения прослеживается.

Учет только третьей гармоники (1 + 3) дает очень малый вклад в результат, но ее недоучет в комбинации со второй и разностной гармониками значителен (ср. 0 + 1 + 2 и 0 + 1 + 2 + 3), особенно для случаев сильной нелинейности, когда недоучет оказывается схожей величины с эффектом от разностной компоненты. Для всех приведенных на рис. 14 случаев учет четырех гармоник (0 + 1 + 2 + 3) почти полностью описывает наблюдаемое различие в вероятностях амплитуд гребней и ложбин с превышением $AI = 1.8$.

Случаи моделирования условий с большей пиковатостью, а также с учетом более высокого порядка нелинейности $M = 4$ (эксперименты №№ 53, 71, 22, 60) не продемонстрировали заметных от-

личий от уже обсужденных в этом разделе результатов моделирования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прямое численное моделирование ансамблей нерегулярных волн является эффективным способом получения аккуратных статистических данных о редких экстремальных событиях на морской поверхности в контролируемых условиях. Для этого могут использоваться «почти» полные уравнения гидродинамики, обеспечивающие быстрый расчет реалистичной нелинейной динамики поверхностных волн с высокой точностью. Примененный в настоящем исследовании подход к моделированию потенциальных уравнений гидродинамики методом HOSM является одним из наиболее подходящих для подобного стохастического моделирования. Проанализированы результаты моделирования с учетом 4-волновых нелинейных взаимодействий (наиболее часто используемый вариант HOSM, формально аналогичный 4-волновым уравнениям Захарова), а также с учетом более высокого порядка нелинейности, разрешающего 5-волновые эффекты. Использованный для задания начальных условий спектр JON-SWAP является общепризнанным модельным спектром для условий глубокого моря.

Предложенный в [Slunyaev, 2020] метод разделения разных компонент волн (нелинейных гармоник) на основе фильтра в пространственно-временной области Фурье позволяет эффективно выделять компоненты волн, соответствующие первой, второй и третьей нелинейным гармоникам, а также разностную (длинноволновую) компоненту для случаев однопикового спектра JON-SWAP со средней крутизной волн вплоть до начала обрушений. Этот подход позволяет оценить вклады разных волновых компонент в распределения вероятностей высот волн, амплитуд гребней и амплитуд ложбин непосредственно по данным прямого численного моделирования, без каких-либо дополнительных предположений. Представление о вкладах разных гармоник важно для построения аналитических вероятностных моделей поверхностного волнения.

Альтернативно, подобное исследование можно было бы выполнить на основе численного моделирования спектральных уравнений Захарова. В этом случае динамические уравнения описывают эволюцию “нормальных” волновых переменных с исключенными из гамильтониана нерезонансными слагаемыми. Связанные (нерезонансные) волновые компоненты, описывающие нелинейные гармоники, вычисляются на основе полученного решения для свободных волн. Но выражения для реконструкции исходных физических полей имеют чрезвычайно сложную форму, с точностью до третьего порядка по слабой нелинейности они

получены только для 4-волновых взаимодействий [Dyachenko et al., 2016; Kachulin et al., 2019]. Кроме того, скорость расчета самих уравнений Захарова медленнее, чем потенциальных уравнений Эйлера методом HOSM [Tanaka, 2001a]. Квадратичные поправки для синусоидальных волн были также получены в [Dalziel, 1999].

Следуя типичному подходу, вероятностные распределения, построенные по результатам выполненного прямого численного моделирования, нами сравнивались со стандартным распределением Рэлея. Нужно при этом иметь в виду очевидные нарушения ряда предположений, используемых при выводе этого теоретического распределения: узости спектра, независимости волновых компонент и последовательностей записей, бесконечности размера области и числа волн. В большинстве случаев не слишком узкого углового спектра, умеренной пиковатости и средней крутизны волн распределения вероятностей для нормированных высот волн имеют зависимость, близкую к распределению Рэлея с использованием модифицированной величины значительной высоты, что согласуется с выводами ряда экспериментальных и численных работ [Christou and Ewans, 2014; Fedele et al., 2016; Chalikov and Bulgakov, 2017]. Построенные на основе прямого численного моделирования распределения демонстрируют уверенное отличие от кривой Рэлея с большей вероятностью в интервале больших высот только в случаях узкого углового спектра, большой пиковатости и большой средней интенсивности волн.

Вполне естественно, что распределения для амплитуд гребней и ложбин отличаются от рэлеевского очень сильно. Распределение для амплитуд гребней имеет качественно отличное от распределения Рэлея поведение, – скорее степенное по параметру нормированной амплитуды. Подтверждена значительная асимметрия между экстремальными волнами, определяемыми по признаку пересечения нуля вниз или вверх (down-crossing и up-crossing), отмечавшаяся нами ранее по результатам других вычислительных кампаний [Sergeeva and Slunyaev, 2013; Slunyaev et al., 2016; Слюняев и Кокорина, 2020]. Среди волн большой высоты преобладают такие, где глубокая ложбина следует за высоким гребнем, а не перед ним.

На основе исследования набора представительных случаев показано, что спектральные области, соответствующие разным нелинейным гармоникам, участвуют в формировании распределений вероятностей сложным образом, существенно не подпадающим принципу линейного сложения. Для распределений высот волн в первую очередь важен учет главной нечетной – третьей – гармоники, но сопоставимый по величине вклад дает и одновременный учет четных

второй и разностной гармоник. Для большой средней крутизны волн учета первых четырех гармоник становится недостаточно, особенно в случае широкого углового спектра, где недоучет вероятности оценивается примерно в 1.5 раза для событий с превышением $H/H_s = 1.8$.

Нелинейные гармоники обеспечивают различие между амплитудами гребней и ложбин. Их вклад в разницу распределений вероятностей для этих характеристик разного знака: вторая и третья гармоники приводят к усилению разницы распределений для A_{cr} и A_{lr} , а разностная нелинейная компонента приводит к уменьшению этой величины. Учет только второй гармоники (стандартный для статистических теорий второго порядка) приводит к существенной переоценке доминирования вероятности высоких гребней над вероятностью глубоких ложбин, особенно в случаях волн небольшой крутизны. Учет первых четырех гармоник приводит к довольно аккуратному описанию различия распределений вероятностей для амплитуд гребней и ложбин.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Лаборатории нелинейной гидрофизики и природных катастроф ТОИ ДВО РАН, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1127 от 01.07.2022 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. Т. 9. С. 86–94.
- Слюняев А.В.* Нелинейное уравнение высокого порядка для огибающей гравитационных волн на воде конечной глубины // ЖЭТФ. 2005. V. 128. P. 1061–1077.
- Слюняев А.В., Кокорина А.В.* Численное моделирование “волн-убийц” на морской поверхности в рамках потенциальных уравнений Эйлера // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. С. 210–223.
- Слюняев А.В., Пелиновский Д.Е., Пелиновский Е.Н.* Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика // Успехи физических наук. 2023. Т. 193. С. 155–181.
- Adcock T.A.A., Taylor P.H., Yan S., Ma Q.W., Janssen P.A.E.M.* Did the Draupner wave occur in a crossing sea? // Proc. R. Soc. A. 2011. V. 467. P. 3004–3021.
- Annenkov S.Y., Shrira V.I.* Effects of finite non-Gaussianity on evolution of a random wind wave field // Phys. Rev. E. 2022. V. 106. L042102.
- Annenkov S.Y., Shrira V.I.* Spectral evolution of weakly nonlinear random waves: kinetic description versus direct numerical simulations // J. Fluid Mech. 2018. V. 844. P. 766–795.
- Chalikov D.V.* Numerical modeling of sea waves. Springer, 2016. 306 p.
- Chalikov D., Bulgakov K.* Estimation of wave height probability based on the statistics of significant wave height // J. Ocean Eng. Mar. Energy. 2017. V. 3. P. 417–423.
- Christou M., Ewans K.* Field measurements of rogue water waves // J. Phys. Oceanogr. 2014. V. 44. P. 2317–2335.
- Dalzell J.F.* A note on finite depth second-order wave-wave interactions // Appl. Ocean Res. 1999. V. 21. P. 105–111.
- Dommermuth D.* The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme // Wave Motion. 2000. V. 32. P. 307–317.
- Dommermuth D., Yue D.K.P.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 267–288.
- Ducrozet G., Bonnefoy F., Touzé D.Le, Ferrant P.* HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method // Computer Physics Communications. 2016. V. 203. P. 245–254.
- Dyachenko A.I., Kachulin D.I., Zakharov V.E.* Freak-waves: compact equation versus fully nonlinear one / In “Extreme ocean waves” Eds.: *Pelinovsky E., Kharif C.* Springer, 2016. P. 23–44.
- Fedele F., Brennan J., Ponce de León S., Dudley J., Dias F.* Real world ocean rogue waves explained without the modulational instability // Sci. Rep. 2016. V. 6. P. 27715.
- Holthuijsen L.H.* Waves in oceanic and coastal waters. Cambridge Univ. Press. 2007. 387 p.
- Kachulin D., Dyachenko A., Gelash A.* Interactions of coherent structures on the surface of deep water // Fluids. 2019. V. 4. P. 83.
- Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 216 p.
- Massel S.R.* Ocean surface waves: Their physics and prediction. World Scientific Publ., Singapore, 1996. 491 p.
- Onorato M., Osborne R., Serio M.* On the relation between two numerical methods for the computation of random surface gravity waves // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2007. V. 26. P. 43–48.
- Sergeeva A., Slunyaev A.* Rogue waves, rogue events and extreme wave kinematics in spatio-temporal fields of simulated sea states // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2013. V. 13. P. 1759–1771.
- Slunyaev A., Klein M., Claus G.F.* Laboratory and numerical study of intense envelope solitons of water waves: generation, reflection from a wall and collisions // Physics of Fluids. 2017. V. 29. P. 047103.
- Slunyaev A., Kokorina A.* Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem // Water Waves. 2020. V. 2. P. 243–262.
- Slunyaev A.V.* Effects of coherent dynamics of stochastic deep-water waves // Phys. Rev. E. 2020. V. 101. P. 062214.
- Slunyaev A.V.* Persistence of hydrodynamic envelope solitons: detection and rogue wave occurrence // Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 036606.
- Slunyaev A.V., Kokorina A.V.* Soliton groups as the reason for extreme statistics of unidirectional sea waves // J. Ocean Eng. Marine Energy. 2017. V. 3. P. 395–408.

- Slunyaev A.V., Sergeeva A.V., Didenkulova I.* Rogue events in spatiotemporal numerical simulations of unidirectional waves in basins of different depth // *Natural Hazards*. 2016. V. 84. P. 549–565.
- Tanaka M.* A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation // *Fluid Dyn. Res.* 2001a. V. 28. P. 41–60.
- Tanaka M.* Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations // *J. Fluid Mech.* 2001b. V. 444. P. 199–221.
- West B.J., Brueckner K., Janda R.S., Milder D.M., Milton R.L.* A new numerical method for surface hydrodynamics // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 11803–11824.
- Xiao W., Liu Y., Wu G., Yue D.K.P.* Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 720. P. 357–392.

Contributions of Nonlinear Spectral Components to the Probability Distribution of Rogue Waves Based on the Results of Numerical Simulation of the Euler Equations

A. V. Slunyaev^{1, 2, 3, *}

¹*Institute of Applied Physics RAS, Ulyanova Street, 46, Nizhny Novgorod, Box-120, 603950 Russia*

²*Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch RAS, Baltijskaya Street, 43, Vladivostok, 690041 Russia*

³*National Research University Higher School of Economics, Bolshaya Pechiorskaya Street, 25/12, Nizhny Novgorod, 603155 Russia*

**e-mail: slunyaev@ipfran.ru*

The contributions of various wave components (second, third and difference harmonics) to the formation of probability distributions of extreme wave heights, as well as amplitudes of crests and troughs, are evaluated based on the direct numerical simulation of irregular nonlinear deep water waves within three-dimensional potential equations of hydrodynamics. The simulation results taking into account 4- and 5-wave nonlinear interactions are analyzed. Different non-linear harmonics participate in the formation of the probability distributions in nontrivial way, essentially not satisfying the principles of linear superposition and ordering of the contribution by the parameter of weak nonlinearity.

Keywords: surface sea waves, direct numerical simulation, probability distribution of wave heights, wave crests and wave troughs, spatio-temporal wave spectrum