

ISSN 0002-3388

Номер 6

Ноябрь - Декабрь 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 6, 2023

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости
для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление
Д. Н. Ибрагимов, А. Н. Сиротин 3
- Синтез робастных линейных стационарных динамических систем
на основе улучшения управляемости и наблюдаемости расчетной модели объекта
А. М. Аббясов, А. А. Анисимов, С. В. Тарарыкин 33
- Синтез разрывного закона управления для понижающего преобразователя напряжения
С. А. Кочетков, О. С. Ткачева, А. В. Уткин 50
-

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

- Наведение беспилотного летательного аппарата
с тепловизионным корреляционно-контрастным алгоритмом автосопровождения
в условиях информационного противодействия
В. А. Болдинов, В. А. Бухалёв, А. А. Скрынников, Б. Л. Шапиро 60
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Оптимальное подавление колебаний в задаче раскручивания двухмассовой системы
С. А. Васенин, С. А. Решмин 67
- О предотвращении вибраций в задаче оптимального по времени управления системой
с двумя степенями свободы
Ю. Д. Селюцкий, А. М. Формальский 81
-

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

- Оптимизация продольных движений упругого стержня
с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил
А. А. Гавриков, Г. В. Костин 93
-

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

- Структурные модели для обнаружения неисправностей конечных автоматов Мура
В. В. Соловьев 110
-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Теоретико-игровая специфика конкурентного распределения частотного спектра
В. С. Каплан, Н. М. Новикова, И. И. Поспелова 124
- Анализ узловых мультипотоков в многопользовательской системе
при уравнивательных стратегиях управления
Ю. Е. Малащенко, И. А. Назарова 137
-

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Нейросетевые подходы для рекомендательных систем

М. А. Жарова, В. И. Цурков

150

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Управление процессом формирования научно-технологического задела
в авиастроении на основе оценки дефицита функциональных свойств
перспективных летательных аппаратов

*К. С. Анисимов, В. Н. Евдокименков, М. Н. Красильщиков,
К. И. Сытало, Н. Б. Топоров*

166

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ
ОГРАНИЧЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ
ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ¹

© 2023 г. Д. Н. Ибрагимов^{a,*}, А. Н. Сиротин^{a,**}

^aМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: rikk.dan@gmail.com

**e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача построения множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат за фиксированное время, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат за фиксированное время, для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление. Доказано представление множеств достижимости и 0-управляемости в виде линейных преобразований суперэллипсоидальных множеств конечной и бесконечной размерности. Предложен конструктивный метод описания искомых множеств на основе аппарата опорных полуплоскостей, в том числе и для предельных множеств достижимости и управляемости. В случае евклидовых пространств описание получено в явном виде. Приведены примеры. Для трехмерной системы управления движением спутника на околокруговой орбите произведено моделирование множеств достижимости.

DOI: 10.31857/S0002338823050086, EDN: OHKBDH

Введение. При исследовании динамических систем зачастую приходится учитывать различные ограничения, наложенные на управляющие воздействия, что приводит к тому, что далеко не все терминальные состояния являются достижимыми из заданного начального даже за бесконечное время. В результате классических условий управляемости Калмана оказывается недостаточно, чтобы сделать вывод о достижимости того или иного терминального состояния. В связи с чем представляется актуальной разработка методов, позволяющих формировать конструктивное описание множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат, за конечное число шагов, а также оценки предельных множеств достижимости и 0-управляемости [1]. Процедура построения произвольных множеств управляемости, для которых терминальное состояние не фиксировано, может быть за счет сдвига системы координат сведена к задаче построения множеств 0-управляемости. Множества 0-управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления для систем с дискретным временем [2–4].

На данный момент известны результаты построения множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [2]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [5], а в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [6, 7] или принципа максимума [8]. Также к новым результатам относится описание предельных множеств достижи-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-01014).

мости и 0-управляемости в виде многогранников для систем с ограничениями на функцию управления в смысле l_1 -нормы [9].

Однако для более общего случая l_p -нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ известные результаты являются неприменимы, что связано в первую очередь со строгой выпуклостью ограничений и невозможностью представления искомых множеств в полиэдральной форме. Напротив, эффективным оказывается их описание на основе аппарата суперэллипсоидальных множеств конечной [10, 11] и бесконечной размерностей, что тесно связано со строго выпуклым анализом [12, 13], выпуклым программированием [14], теорией нормированных пространств [15] и линейных операторов [16].

В статье изучаются вопросы построения множеств достижимости и 0-управляемости с суммарным ограничением на управление в смысле l_p -нормы. Удастся в явном виде описать опорное полупространство и точку касания для произвольного множества достижимости или 0-управляемости за конечное или бесконечное число шагов. Это позволяет применить аппарат полиэдральной аппроксимации [17–19] для описания внутренних и внешних оценок искомых множеств в виде многогранников и использовать их для решения различных задач управления дискретными системами.

В разд. 1 производится постановка задачи. В разд. 2 изучаются различные свойства образов конечномерных и бесконечномерных суперэллипсоидальных множеств при линейном отображении в $\mathbb{R}^n$. В разд. 3 доказывается, что каждое множество 0-управляемости и достижимости представимо в виде образа суперэллипсоидального множества при линейном невырожденном преобразовании, что позволяет сформулировать их свойства на основе результатов разд. 2 и конструктивно описать опорную гиперплоскость для произвольного опорного вектора. Существенным является доказательство необходимых и достаточных условий ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости. В разд. 4 для частного случая евклидовых пространств описание множеств достижимости и 0-управляемости построено явно в виде эллипсоидальных множеств. В разд. 5 приведены примеры, демонстрирующие полученные теоретические результаты. В разд. 6 рассмотрена система управления движением спутника на околокруговой орбите, для которой построены множества достижимости на основе разработанных методов.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная система с дискретным временем и ограниченным скалярным управлением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(0) &= x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^p \leq 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ – матрицы системы, $p \in (1; +\infty)$ – параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление.

В ряде случаев будет использовано предположение о том, что система (1.1) управляема по Калману, т.е. выполнено условие

$$\text{rank}(b|Ab|\dots|A^{n-1}b) = n. \quad (1.2)$$

Хотя некоторые свойства будут также справедливы и для систем (1.1), не удовлетворяющих (1.2).

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{Y}_p(N)$ множество достижимости системы (1.1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_p(N) = \left\{ \begin{aligned} &x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1, \quad N \in \mathbb{N}, \\ &\{0\}, \quad N = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.3)$$

Аналогично для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{X}_p(N)$ обозначим множество 0-управляемости системы (1.1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Цель статьи — построить множества (1.3) и (1.4) и описать их свойства. В том числе интерес представляют предельные свойства множеств (1.3) и (1.4), т.е. необходимо изучить свойства предельных множеств $\mathcal{Y}_{p,\infty}, \mathcal{X}_{p,\infty} \subset \mathbb{R}^n$ достижимости и 0-управляемости системы (1.1) соответственно. Здесь $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ — множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_p(N). \quad (1.5)$$

Аналогично $\mathcal{X}_{p,\infty}$ — множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_p(N). \quad (1.6)$$

2. Дополнительные построения. Предельные множества $\mathcal{X}_{p,\infty}$ и $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ могут быть представлены с точностью до замыкания в виде проекции шара из нормированного пространства l_p на конечномерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Пространство числовых последовательностей l_p и норма в нем определяются следующим образом [15, разд. 1, §2, Гл. III]:

$$l_p = \left\{ (u_1, u_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty \right\}, \quad p \in (1; +\infty),$$

$$\|u\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

Числа p и q являются двойственными по Гельдеру:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пространство $\mathbb{R}^N$ будем полагать евклидовым, наделенным скалярным произведением по формуле:

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Линейную, выпуклую и коническую оболочки произвольного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $\text{Lin } \mathcal{U}$, $\text{conv } \mathcal{U}$ и $\text{cone } \mathcal{U}$ соответственно. Под $\dim \mathcal{U}$, $\partial \mathcal{U}$, $\text{int } \mathcal{U}$ и $\overline{\mathcal{U}}$ будем понимать размерность, множество граничных точек, множество внутренних точек и замыкание $\mathcal{U}$. Для произвольного линейного подпространства $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $\mathbb{L}^\perp$ его ортогональное дополнение, т.е. множество всех векторов из $\mathbb{R}^N$, ортогональных каждому вектору из $\mathbb{L}$. Также для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ под $\ker A \subset \mathbb{R}^N$ будем понимать ее ядро:

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = 0\}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_p(N) \subset \mathbb{R}^N$ суперэллипсоидальное множество размерности N :

$$\mathcal{E}_p(N) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N : \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Для произвольной последовательности $\{b_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного $N \in \mathbb{N}$ определим матрицу $B_N = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ и множество $\mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{U}_p(B_N) = \left\{ \sum_{j=1}^N u_j b_j : (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathcal{E}_p(N) \right\}.$$

Л е м м а 1. Пусть $p_2 > p_1 > 1$. Тогда

$$\mathcal{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathcal{U}_{p_2}(B_N).$$

Доказательство леммы 1 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

По построению $\mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой образ $\mathcal{E}_p(N)$ при воздействии линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{U}_p(B_N) = B_N \mathcal{E}_p(N). \quad (2.1)$$

Л е м м а 2. $\mathcal{U}_p(B_N)$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. Если $\text{rank } B_N = n$, то $\mathcal{U}_p(B_N)$ строго выпукло.

Лемма 2 является следствием более общего свойства выпуклых множеств: при любом линейном преобразовании относительно внутренние точки выпуклого множества преобразуются в относительно внутренние точки образа выпуклого множества. В случае если линейное отображение является сюръекцией (т.е. описывается матрицей полного ранга), а исходное множество имеет непустую внутренность, то относительно внутренние точки заменяются в утверждении на внутренние [12, теорема 6.6].

Вектор $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ называется опорным к выпуклому множеству $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial \mathcal{U}$ [13, 1.8, Гл. 1], если

$$\mathcal{U} \subset \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : (f, \tilde{x}) \leq (f, x)\}, \quad (f, x) = \sup_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (f, \tilde{x}).$$

Нормальным конусом $\mathcal{N}(x, \mathcal{U})$ выпуклого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial \mathcal{U}$ называется множество всех векторов, опорных к $\mathcal{U}$ в x :

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \sup_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (f, \tilde{x}) = (f, x) \right\}.$$

Для произвольной внутренней точки $x \in \text{int } \mathcal{U}$ нормальный конус представляет собой пустое множество:

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Согласно определению нормального конуса, справедлив критерий принадлежности некоторой точки $x \in \mathcal{U}$ внутренности выпуклого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: включение $x \in \text{int } \mathcal{U}$ верно тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(x, \mathcal{U}) = \emptyset$.

Л е м м а 3. Пусть $\text{rank } B_N = n$. Тогда для любого $x \in \partial \mathcal{U}_p(B_N)$ верно, что:

1) $\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{U}_p(B_N)) = 1$;

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{U}_p(B_N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N |f, b_i|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^N b_i |f, b_i|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_i).$$

Леммы 1–3 определяют основные свойства множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4), такие, как строгая выпуклость, гладкость границы и монотонность. Более того, при помощи леммы 3 можно восстановить произвольную точку на границе множества и гиперплоскость, опорную к множеству в данной точке, чего достаточно для построения сколь угодно точных внутренних и внешних полиэдральных оценок исследуемого множества [17]. Однако в случае описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости данные утверждения оказываются неэффективны. Принципиальным вопросом в изучении множеств (1.5) и (1.6) являются необходимые и достаточные условия их ограниченности.

Пусть $\mathcal{E}_p(\infty)$ — шар радиуса 1 с центром в 0 в l_p :

$$\mathcal{E}_p(\infty) = \left\{ u \in l_p : \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}.$$

Рассмотрим последовательность векторов $B' = (b_1, b_2, \dots)$ из $\mathbb{R}^n$ в качестве линейного оператора $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$B'u = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j.$$

Вообще говоря, оператор B' может быть определен не на всем пространстве l_p . Через $\mathcal{D}_{B'} \subset l_p$ обозначим множество всех векторов, на которых B' определен. В ряде случаев будет существенно наличие свойства сюръекции B' , для выполнения которого достаточно предположить аналогичное условию (1.2) равенство

$$\operatorname{rank}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = n. \quad (2.2)$$

Последовательность B' можно рассмотреть в качестве упорядоченного набора n числовых последовательностей $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots)$, $i = \overline{1, n}$:

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Поэтому B' является элементом пространства $\mathbb{R}^\infty \times \dots \times \mathbb{R}^\infty$. Исследование ограниченности оператора B' связано со свойствами последовательностей $y^1, \dots, y^n$, его формирующих. В частности, важен класс всех B' , удовлетворяющих представлению (2.3), в котором для каждого $i = \overline{1, n}$ справедливо условие $y^i \in l_q$. Такой класс обозначим через l_q^n , а через $\mathcal{U}_p(B')$ — образ шара $\mathcal{E}_p(\infty)$ при воздействии отображения B' :

$$\mathcal{U}_p(B') = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j : u \in \mathcal{E}_p(\infty) \cap \mathcal{D}_{B'} \right\}. \quad (2.4)$$

Лемма 4. Допустим, что $\mathcal{U}_p(B')$ определяется соотношениями (2.4). Тогда множество $\mathcal{U}_p(B')$ ограничено тогда и только тогда, когда верно включение $B' \in l_q^n$.

Лемма 5. Пусть $B' \in l_q^n$. Тогда справедливо включение

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)} \subset \mathcal{U}_p(B').$$

В общем случае множества $\mathcal{U}_p(B')$ и $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$ не совпадают. Покажем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $B' = (b_1, b_2, \dots) \in l_q$ – произвольная нефинитная последовательность. Рассмотрим $x = \|B'\|_{l_q}$. Тогда

$$(B')^{-1}(\{x\}) = \left\{ u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j = \|B'\|_{l_q} \right\} \subset l_p.$$

В силу неравенства Гельдера гиперплоскость $(B')^{-1}(\{x\})$ является опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество, то существует единственная точка касания $\tilde{u} \in (B')^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{E}_p(\infty)$:

$$\tilde{u} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} (|b_1|^{q-1} \text{sign} b_1, |b_2|^{q-1} \text{sign} b_2, \dots).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j &= \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-1} b_j \text{sign} b_j = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = \|B'\|_{l_q}^{q-q/p} = \|B'\|_{l_q}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{u}_j|^p &= \left(\frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \right)^p \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-1} |\text{sign} b_j|^p = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^q} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{qp-p} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^q} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = 1, \\ \{\tilde{u}\} &= (B')^{-1}(x) \cap \mathcal{E}_p(\infty). \end{aligned}$$

Тогда $x \in \mathcal{U}_p(B')$, но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности B' и $\tilde{u}$ по построению не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\mathcal{U}_p(B') \neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Существенным в примере 1 является свойство строгой выпуклости множества $\mathcal{E}_p(\infty)$, из которого следует единственность точки касания любой опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$ гиперплоскости. Аналогичные рассуждения для $p \in \{1, \infty\}$ некорректны.

Результат примера 1 справедлив для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 6. Пусть

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots \end{pmatrix} \in l_q^n.$$

Тогда для всех $i = \overline{1, n}$, таких, что $y^i \in l_q$ не финитна, верно включение

$$\begin{aligned} \tilde{x} = B' \tilde{u} &\in \mathcal{U}_p(B') \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N), \\ \tilde{u} &= \frac{1}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} (|b_{i1}|^{q-1} \text{sign} b_{i1}, |b_{i2}|^{q-1} \text{sign} b_{i2}, \dots). \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть справедливы предположения леммы 6. Тогда равенство

$$\mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда последовательности $y^1, \dots, y^n \in l_q$ финитны.

Л е м м а 7. Допустим, что $B' \in l_q^n$. Тогда равенство

$$\text{int} \mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\dim \text{Lin}\{b_N, b_{N+1}, \dots\} = n.$$

Л е м м а 8. Пусть выполнено условие (2.2), $B' \in l_q^n$. Тогда для любого $x \in \partial \mathcal{U}_p(B')$ верно, что:

1) $\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{U}_p(B')) = 1$;

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{U}_p(B')),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, b_i)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{\infty} b_i |(f, b_i)|^{q-1} \text{sign}(f, b_i).$$

Лемма 4 определяет необходимые и достаточные условия того, чтобы предельное множество $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$ оказалось ограниченным. Следствие 1 и лемма 7 вместе предлагают необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на последовательность B' , чтобы данное предельное множество оказалось замкнутым или открытым. При этом лемма 5 гарантирует, что с точностью до замыкания оно будет совпадать с $\mathcal{U}_p(B')$, а лемма 8 позволяет восстановить произвольную точку на границе этого множества и гиперплоскость, опорную к нему в данной точке, чего достаточно для построения внутренних и внешних полиэдральных аппроксимаций $\mathcal{U}_p(B')$.

3. Свойства множеств достижимости и 0-управляемости. На основе результатов разд. 0 имеется возможность описать структуру множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4).

Л е м м а 9. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются соотношениями (1.3) и (1.4) соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если $B_N = (b, Ab, \dots, A^{N-1}b) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, то справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N);$$

2) если $\det A \neq 0$, $B_N = (A^{-1}b, A^{-2}b, \dots, A^{-N}b) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, то верно равенство

$$\mathcal{X}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N).$$

Т е о р е м а 1. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются, согласно (1.3) и (1.4) соответственно. Тогда:

1) если $N_2 > N_1$, то $\mathcal{Y}_p(N_1) \subset \mathcal{Y}_p(N_2)$;

2) если $p_2 > p_1$, то $\mathcal{Y}_{p_1}(N) \subset \mathcal{Y}_{p_2}(N)$, $N \in \mathbb{N}$;

3) $\mathcal{Y}_p(N)$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество;

4) если выполнено условие (1.2) и $N \geq n$, то для любых $x \in \partial \mathcal{Y}_p(N)$ и $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{Y}_p(N)) = 1,$$

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{Y}_p(N)),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{N-1} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{N-1} A^i b |(f, A^i b)|^{q-1} \text{sign}(f, A^i b);$$

5) если $\det A \neq 0$, то пункты 1–4 также справедливы и для семейства множеств $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^\infty$. В п. 4 граничная точка $x^*(f) \in \partial \mathcal{X}_p(N)$ определяется соотношениями

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{X}_p(N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N |(f, A^{-i} b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^N A^{-i} b |(f, A^{-i} b)|^{q-1} \text{sign}(f, A^{-i} b).$$

Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов $h_1, \dots, h_n \subset \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A в ее вещественную жорданову каноническую форму [20, разд. 3.4, Гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых множителей и порядка векторов $h_1, \dots, h_n$, и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A . Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{=1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| = 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

Теорема 2. Пусть множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.5). Тогда $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$b \in \mathbb{L}_{<1}.$$

Если $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

1) $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ строго выпукло;

2) для любых $x \in \partial \mathcal{Y}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = 1;$$

3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{Y}_{p,\infty}),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{\infty} A^i b |(f, A^i b)|^{q-1} \text{sign}(f, A^i b);$$

4) опорная функция $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ имеет вид

$$s(f, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. Пусть множество $\mathcal{X}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.6). Тогда $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{L}_{>1}.$$

Если $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

- 1) $\mathcal{X}_{p,\infty}$ строго выпукло;
- 2) для любых $x \in \partial \mathcal{X}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{X}_{p,\infty}) = 1;$$

- 3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{X}_{p,\infty}),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, A^{-i}b)|^q \right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}b |(f, A^{-i}b)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, A^{-i}b);$$

- 4) опорная функция $\mathcal{X}_{p,\infty}$ имеет вид

$$s(f, \mathcal{X}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, A^{-i}b)|^q \right)^{1/q}.$$

Следствие 2. Пусть множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}, \mathcal{X}_{p,\infty}$ определяются соотношениями (1.5) и (1.6) соответственно. Тогда:

- 1) если все собственные значения матрицы A меньше по модулю, чем 1, то $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено;
- 2) если все собственные значения матрицы A больше по модулю, чем 1, то $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено.

Хотя теоремы 2 и 3 предлагают необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (1.5) и (1.6), использование данных утверждений может быть затруднено в связи с необходимостью построения жорданова базиса A . В свою очередь следствие 2, будучи лишь достаточным условием ограниченности, позволяет обойтись исключительно вычислением собственных значений матрицы A . Также применение теорем 2 и 3 для построения опорных полупространств к множествам (1.5) и (1.6) проблематично в общем случае, так как требует вычисления точной суммы ряда. С другой стороны, теоремы 2 и 3 определяют опорные функции множеств (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности явным образом.

4. Частный случай евклидовых пространств. Рассмотрим случай $p = 2$. Данное допущение позволяет описать множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ и $\mathcal{U}_2(B')$ в терминах скалярного произведения. С учетом (2.1) и (2.4) верно равенство $\mathcal{U}_2(B_N) = (B_N, 0, \dots) \mathcal{E}_2(\infty)$, откуда в силу леммы 9 следует, что каждое из множеств (1.3)–(1.6) является линейным преобразованием шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$, что позволяет явным образом описать их структуру.

Лемма 10. Пусть справедливо (2.2), $N \geq n$, $H_N = (B_N B_N^T)^{-1}$. Тогда верно представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_N x) \leq 1\}.$$

С учетом леммы 9 лемма 10 позволяет описать множества достижимости $\mathcal{Y}_2(N)$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_2(N)$ системы (1.1), удовлетворяющей условию (1.2), явно в виде эллипсоидальных множеств для любого $N \geq n$. Также процедуру их построения благодаря лемме 9 можно проводить рекуррентно.

Лемма 11. Пусть $\det A \neq 0$, выполнено условие (1.2) и $N \geq n$. Тогда существуют положительно определенные и симметрические матрицы $H_{\mathcal{X},N}, H_{\mathcal{Y},N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},N} x) \leq 1\}, \\ \mathcal{X}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},N} x) \leq 1\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$H_{\mathcal{Y},N+1} = (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} - \frac{(A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1}}{1 + b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b},$$

$$H_{\mathcal{X},N+1} = A^T H_{\mathcal{X},N} A - \frac{A^T H_{\mathcal{X},N} b b^T H_{\mathcal{X},N} A}{1 + b^T H_{\mathcal{X},N} b}.$$

Согласно леммам 9 и 5, множества (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности, необходимые и достаточные условия которой определяются теоремами 2 и 3, с точностью до замыкания совпадают с образом шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$ при некотором линейном преобразовании, т.е. являются эллипсоидальными множествами. При этом их структура может быть вычислена в результате решения алгебраического дискретного уравнения Риккати [21].

Т е о р е м а 4. Пусть $\det A \neq 0$ и выполнено условие (1.2). Тогда:

1) если $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{Y}_{2,\infty}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},\infty} x) \leq 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{Y},\infty} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{Y},\infty} = (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} - (b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1})^T (1 + b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} b)^{-1} (b^T (A^{-1})^T H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1});$$

2) если $\mathcal{X}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{X}_{2,\infty}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},\infty} x) \leq 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{X},\infty} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{X},\infty} = A H_{\mathcal{X},\infty} A - (b^T H_{\mathcal{X},\infty} A)^T (1 + b^T H_{\mathcal{X},\infty} b)^{-1} (b^T H_{\mathcal{X},\infty} A).$$

5. Примеры. В данном разделе приведены примеры множеств 0-управляемости и достижимости для различных систем. В качестве иллюстраций множеств используются их внутренние полиэдральные оценки, построенные на основе п. 4, 5 теоремы 1:

$$\text{conv}\{y^*(f_1), \dots, y^*(f_m)\} \subset \mathcal{Y}_p(N), f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

В случае $pn = 2$ искомые множества будут построены точно при помощи лемм 10 и 11.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 \cos(2) & 0.9 \sin(2) \\ -0.9 \sin(2) & 0.9 \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

На базе п. 4 теоремы 1 построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты проиллюстрированы на рис. 1–4.

П р и м е р 3. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Согласно п. 4 теоремы 1, построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты представлены на рис. 5–8.

П р и м е р 4. С учетом леммы 9 и условий (5.1) на рис. 1–4 приведены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) - \sin(2) \\ \cos(2) + \sin(2) \end{pmatrix}.$$

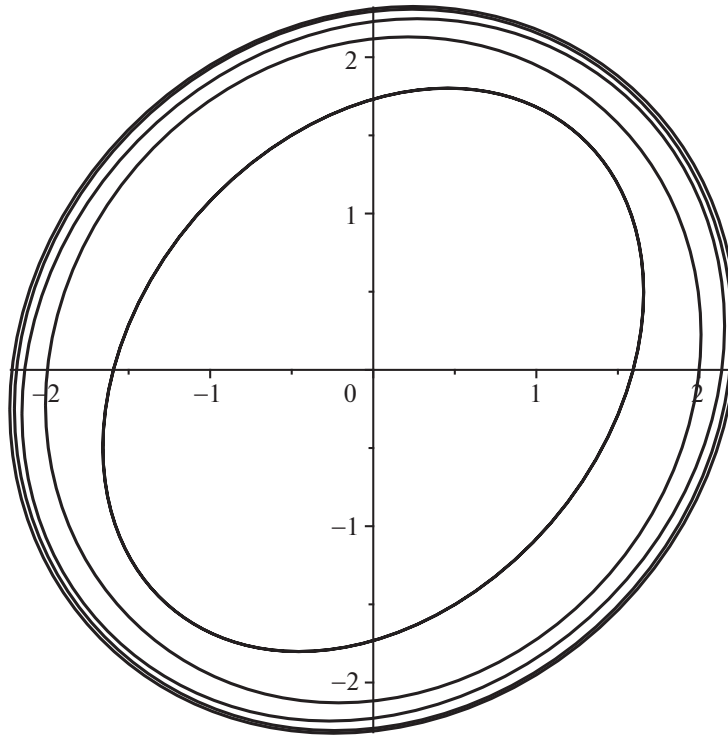


Рис. 1. Множества $\mathcal{Y}_2(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Аналогично, в силу леммы 9 и условий (5.2), на рис. 5–8 изображены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{100}{81} \begin{pmatrix} 0.9 & -1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{100}{81} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

6. Система управления спутником. Рассмотрим систему управления движением спутника, расположенного на околокруговой орбите, представленную в [22]. Предполагается, что коррекция орбиты осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы направлены по касательной к траектории движения и исполняются без ошибок через равные промежутки времени. На энергетические ресурсы двигателей наложены суммарные ограничения.

Круговая орбита, на которой должен находиться спутник, описывается значениями радиуса орбиты r_0 , радиальной скорости v_{R0} и трансверсальной скорости v_{T0} . Обозначим отклонения реальных значений радиуса орбиты и составляющих скорости от номинальных параметров движения следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r - r_0, \\ \Delta v_R &= v_R - v_{R0}, \\ \Delta v_T &= v_T - v_{T0}. \end{aligned}$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений, представляющая движение спутника, согласно [22], имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r} &= \Delta v_R, \\ \Delta \dot{v}_R &= \Delta r + 2\Delta v_T, \\ \Delta \dot{v}_T &= -\Delta v_R. \end{aligned} \tag{6.1}$$

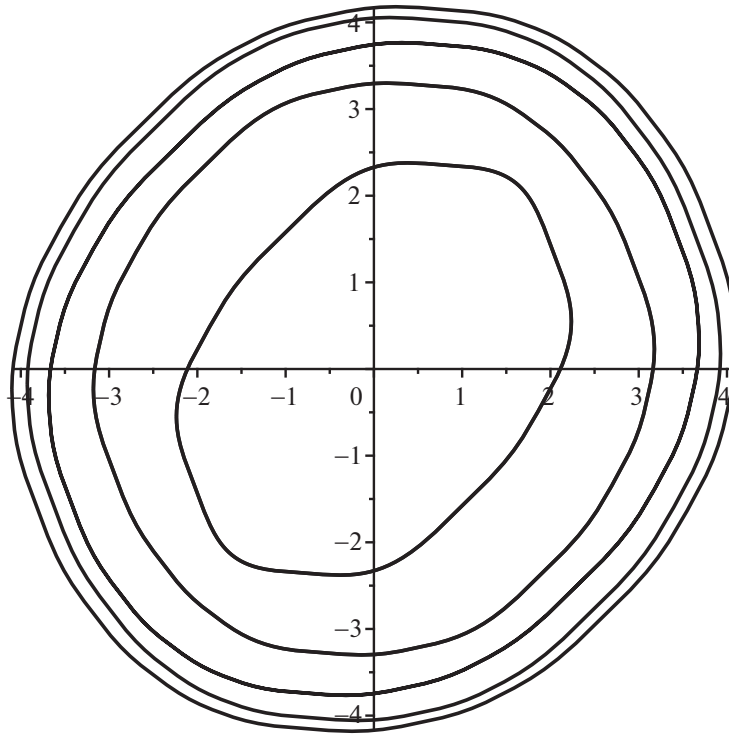


Рис. 2. Множества $\mathcal{U}_4(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Поскольку управление подается импульсно через равные промежутки времени $t_0 > 0$, то можно рассматривать в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(kt_0), \Delta v_R(kt_0), \Delta v_T(kt_0))^T$ в моменты времени kt_0 , т.е. непосредственно перед выполнением $(k+1)$ -го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет решить систему линейных дифференциальных уравнений (6.1) явно и перейти к конечно-разностным соотношениям вида (1.1) с матрицами системы:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos t_0 + 2 & \sin t_0 & -2\cos t_0 + 2 \\ \sin t_0 & \cos t_0 & 2\sin t_0 \\ \cos t_0 - 1 & -\sin t_0 & 2\cos t_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\cos t_0 + 2 \\ 2\sin t_0 \\ 2\cos t_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Для исследования на ограниченность предельных множеств управляемости и достижимости построим жорданов базис матрицы A и вычислим ее собственные значения:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm it_0}.$$

Отсюда следует, что $b \in \mathbb{L}_{=1} = \mathbb{R}^3$, и, согласно теоремам 2 и 3, рассматриваемая система управления обладает неограниченными предельными множествами достижимости и управляемости. Если предположить, что на мощность корректирующих импульсов наложены суммарные квадратичные ограничения, т.е. $p = 2$, то возможно построить множество достижимости, согласно леммам 9 и 10. При выборе $N = 20$ и $t_0 = 0.25$ множество $\mathcal{U}_2(20)$, изображенное на рис. 9, представляет собой эллипсоид, описываемый следующей матрицей квадратичной формы:

$$H_{20} = \begin{pmatrix} 0.1210 & -0.0151 & 0.1686 \\ -0.0151 & 0.0247 & -0.0217 \\ 0.1686 & -0.0217 & 0.2486 \end{pmatrix}.$$

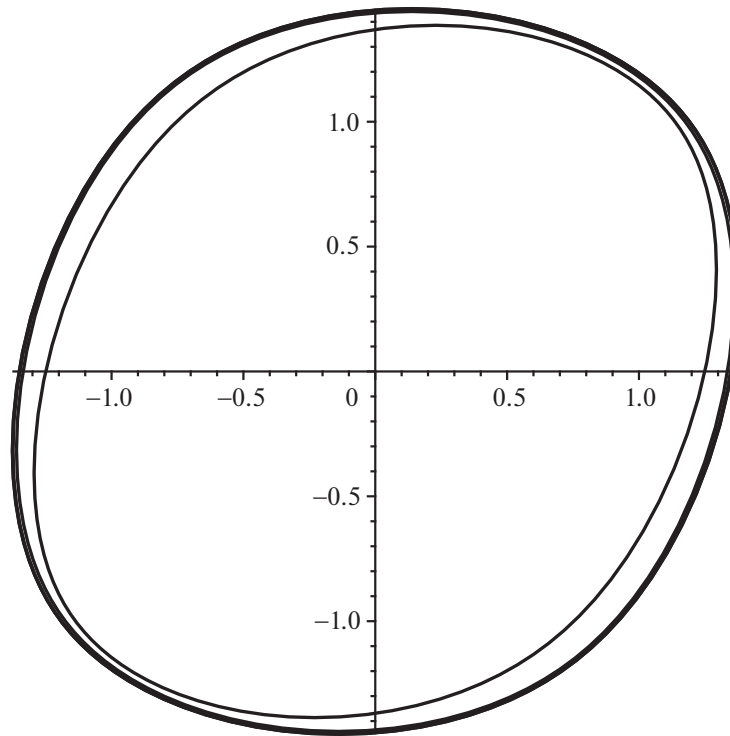


Рис. 3. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Заключение. Обсуждаются некоторые свойства множеств достижимости и 0-управляемости для стационарной линейной дискретной системы с суммарным ограничением на управление.

Представлены общие свойства образов суперэллипсоидальных множеств при линейных преобразованиях. В частности, получено конструктивное описание этих множеств через аппарат опорных полупространств в виде леммы 3. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности, замкнутости или открытости предельных множеств достижимости и 0-управляемости (леммы 4–7).

Продemonстрировано, что множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов могут быть описаны в виде образа суперэллипсоидального множества при фиксированном линейном преобразовании, а их предельные аналоги представляют собой с точностью до замыкания образ шара из l_p при линейном отображении в $\mathbb{R}^n$. Данный факт позволяет воспользоваться общими свойствами для описания множеств достижимости и 0-управляемости. Приведено точное описание множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидальных множеств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого тела $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащего 0 в качестве внутренней точки, обозначим через $\mu(x, \mathcal{U})$ функционал Минковского [15, разд. 3, §2, Гл. III]:

$$\mu(x, \mathcal{U}) = \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\}.$$

Произвольное замкнутое выпуклое тело $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащее 0 в качестве внутренней точки, в силу теоремы Минковского [15, теорема 3, разд. 3, §2, Гл. III] допускает представление

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}) \leq 1\}. \quad (\text{П.1})$$

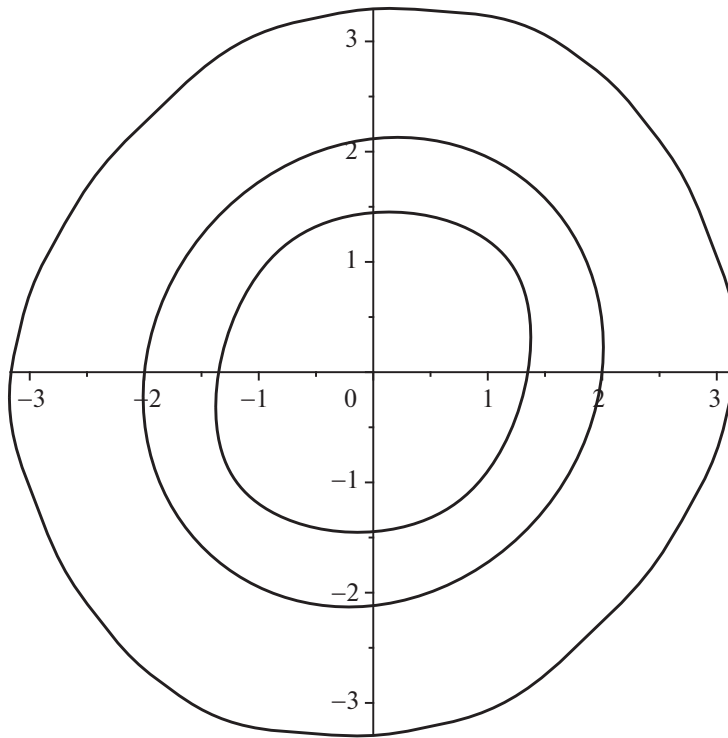


Рис. 4. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(8)$, $\mathcal{U}_2(8)$, $\mathcal{U}_4(8)$ для системы (1.1), (5.1)

Л е м м а 12. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. Включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 12. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению функционала Минковского

$$x \in \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_1 \subset \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_2,$$

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}_2\} = \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Допустим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Тогда в силу (П.1)

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_1) \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_2) \leq 1\} = \mathcal{U}_2.$$

Лемма 12 доказана.

Л е м м а 13. Пусть $p_2 > p_1 > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

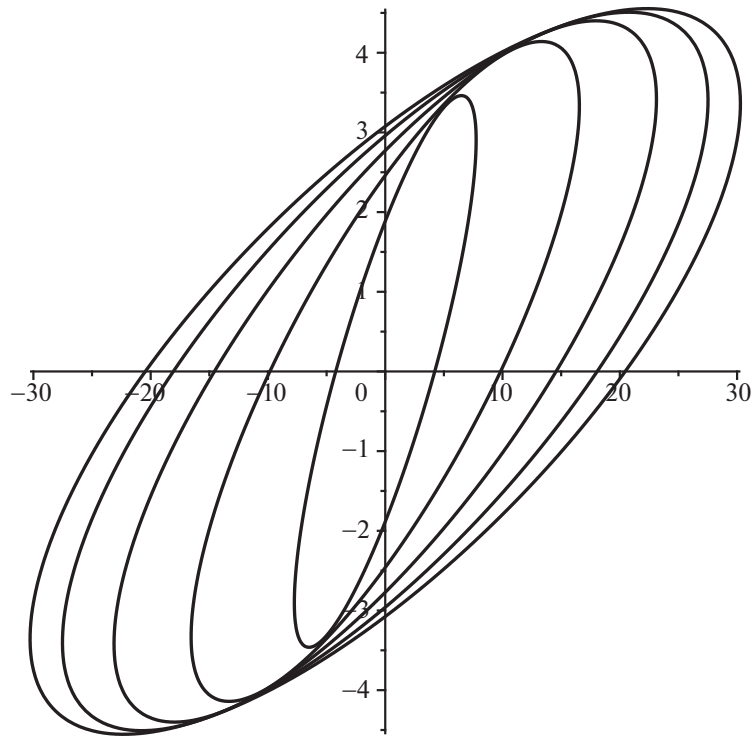


Рис. 5. Множества $\mathcal{Y}_2(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Доказательство леммы 13. Для произвольного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ рассмотрим функцию $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(p) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Функция f на области определения является непрерывно дифференцируемой. Тогда для доказательства леммы 13 достаточно показать, что $f'(p) \leq 0$ для всех $p > 0$. Обозначим через $\overline{\ln}|t|$ функцию следующего вида:

$$\overline{\ln}|t| = \begin{cases} \ln|t|, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\exp \left\{ \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \right\} \right) = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \right\} \left(-\frac{1}{p^2} \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) + \frac{\sum_{i=1}^n (|x_i|^p \overline{\ln}|x_i|)}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \left(-\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) + \sum_{i=1}^n (|x_i|^p \overline{\ln}|x_i|^p) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^n \left[|x_i|^p \left(\overline{\ln}|x_i|^p - \ln \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right) \right) \right] \leq 0, \end{aligned}$$

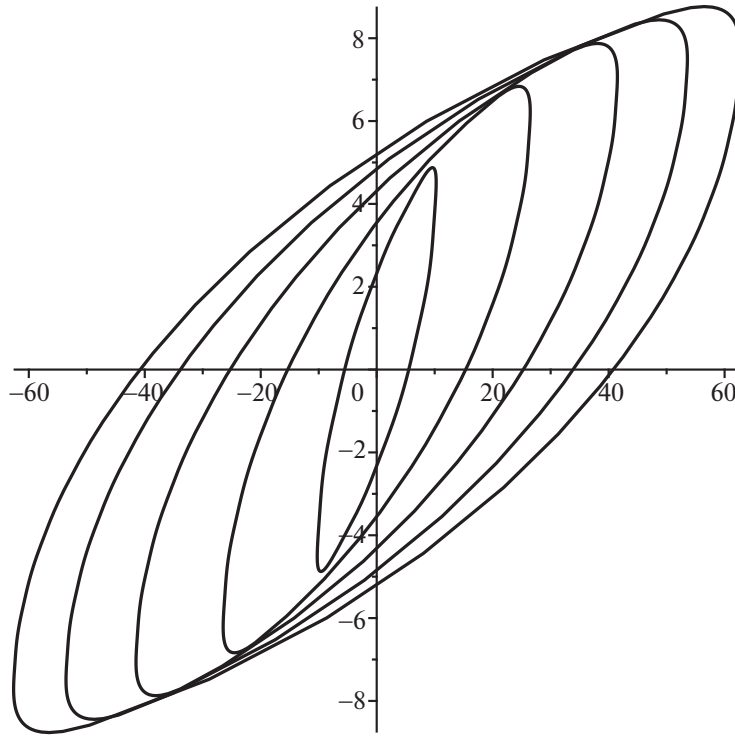


Рис. 6. Множества $\mathcal{U}_4(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

так как для всех $i = \overline{1, n}$

$$\overline{\ln|x_i|^p} \leq \ln\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right).$$

Лемма 13 доказана.

Доказательство леммы 1. В силу леммы 13 для каждого $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^N |u_j|^{p_1}\right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

Поскольку для произвольного $p \in (1; +\infty)$

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^p\right)^{1/p},$$

то, согласно лемме 12, верно включение $\mathcal{E}_{p_1}(N) \subset \mathcal{E}_{p_2}(N)$. С учетом представления (2.1) также справедливо включение $\mathcal{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathcal{U}_{p_2}(B_N)$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $x^1, x^2 \in \mathcal{U}_p(B_N)$, $\lambda \in (0; 1)$. В силу (2.1) существуют $u^1, u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$, такие, что $x^1 = B_N u^1$, $x^2 = B_N u^2$. Поскольку $\mathcal{E}_p(N)$ выпукло, то $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$. С учетом (2.1)

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = B_N(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \in B_N \mathcal{E}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\mathcal{U}_p(B_N)$ выпукло.

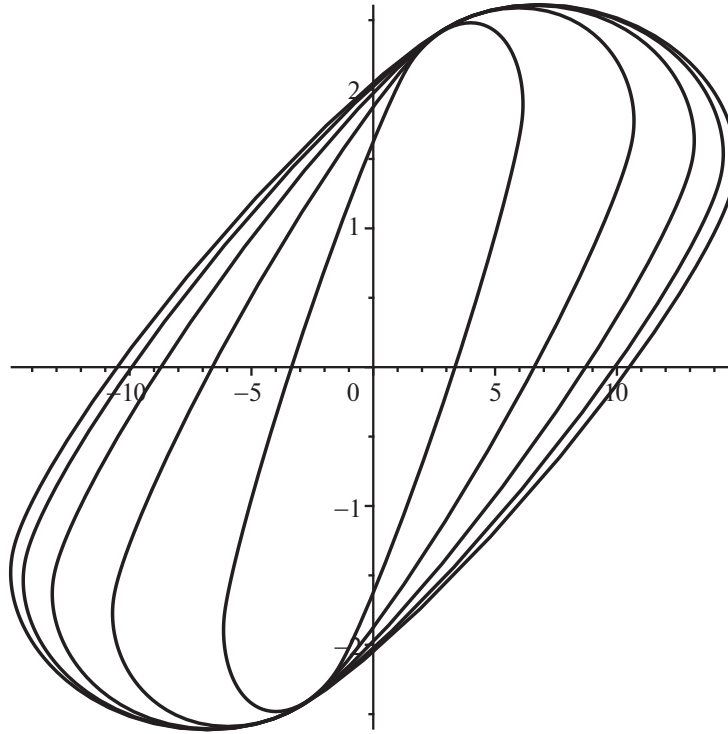


Рис. 7. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Предположим, что $\text{rank } B_N = n$. Поскольку при $p \in (1; +\infty)$ множество $\mathcal{E}_p(N)$ строго выпукло, то $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$, т.е. существует открытый шар $O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1)

$$B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N).$$

Так как $\text{rank } B_N = n$, существует открытый шар

$$O_\delta(B_N(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2)) \subset B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \text{int } \mathcal{U}_p(B_N)$. Следовательно, $\mathcal{U}_p(B_N)$ по определению строго выпуклое.

Замкнутость и ограниченность следует из того факта, что по определению $\mathcal{U}_p(B_N)$ представляет собой образ замкнутого и ограниченного множества $\mathcal{E}_p(N)$ под действием непрерывного линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ [15, разд. 2, §5, Гл. IV].

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Как показано в [4], лемма 5 для произвольного выпуклого и компактного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, линейного ограниченного оператора $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ и точки $u \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}(Au, A\mathcal{U}) = (A^T)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{U})) \cup (\ker A^T \setminus \{0\}).$$

Если в данном равенстве положить $A = B_N$, $\mathcal{U} = \mathcal{E}_p(N)$, то получим соотношения

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) = (B_N^T)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N))) \cup (\ker B_N^T \setminus \{0\}). \quad (\text{П.2})$$

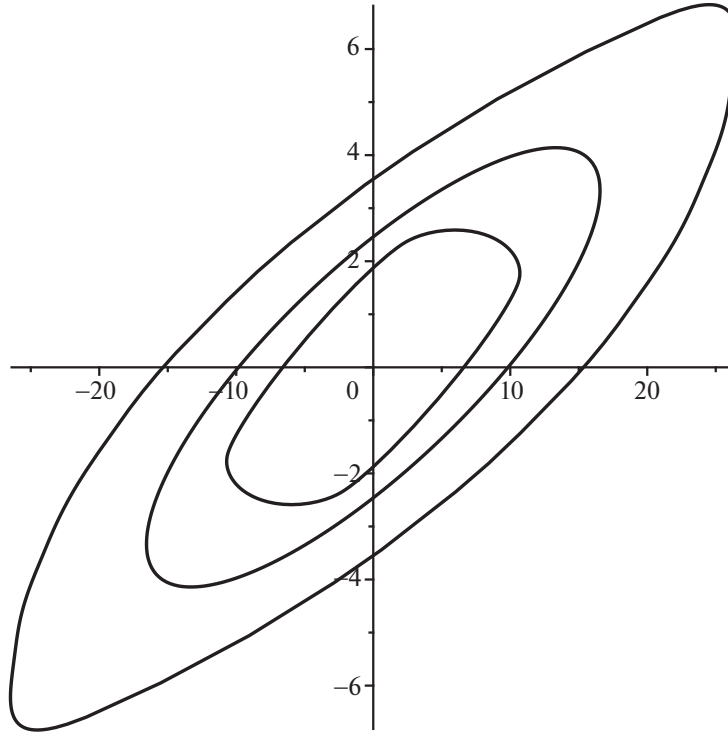


Рис. 8. Множества $\mathcal{U}_{4/3}(8)$, $\mathcal{U}_2(8)$, $\mathcal{U}_4(8)$ для системы (1.1), (5.2)

Так как при $p \in (1; +\infty)$ функционал Минковского множества $\mathcal{E}_p(N)$ является гладкой функцией по первому аргументу:

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^N |u_j|^p \right)^{1/p},$$

то нормальный конус множества $\mathcal{E}_p(N)$ в любой граничной точке $u \in \partial \mathcal{E}_p(N)$ представляет собой коническую оболочку градиента функционала Минковского в точке u [12, теорема 25.6]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N)) = \text{cone} \{ \nabla_u \mu(u, \mathcal{E}_p(N)) \} \setminus \{0\} = \left\{ \alpha (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T : \alpha > 0 \right\}.$$

С учетом того, что $\text{rank} B_N = n$ и $\ker B_N^T = \{0\}$, в силу (П.2) верны равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) &= (B_N^T)^{-1} (\{ \alpha (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T : \alpha > 0 \}) = \\ &= \bigcup_{\alpha > 0} (B_N^T)^{-1} (\{ \alpha (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T \}) = \\ &= \text{cone} \{ f \in \mathbb{R}^n : B_N^T f = (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T \} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{rank} B_N = \text{rank} B_N^T = n$, то уравнение

$$B_N^T f = (|u_1|^{p-1} \text{sign} u_1 \dots |u_N|^{p-1} \text{sign} u_N)^T$$

имеет либо одно, либо нуль решений. Иначе говоря,

$$\dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \leq 1.$$

При этом в случае $B_N u \in \partial \mathcal{U}_p(B_N)$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \neq \emptyset, \quad \dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \geq 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 3.

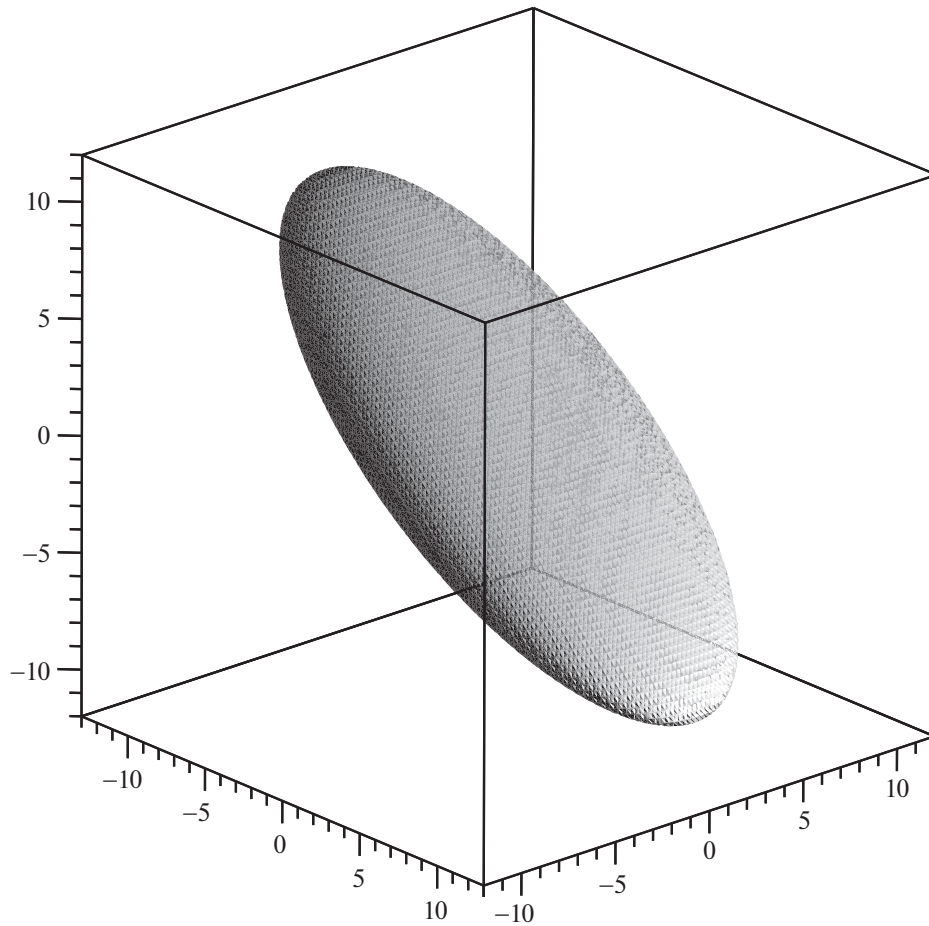


Рис. 9. Множество $\mathcal{U}_2(20)$ для системы управления движением спутника

Для доказательства второго утверждения леммы 3, согласно определению опорного вектора, достаточно показать, что $x^*(f)$ является точкой максимума (f, x) при условии $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$.

Учитывая, что

$$B_N^T f = ((f, b_1) \dots (f, b_N))^T,$$

получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \arg \max_{x \in \mathcal{U}_p(B_N)} (f, x) &= B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (f, B_N u) = B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (B_N^T f, u) = \\ &= \frac{(b_1 \dots b_N)}{\left(\sum_{i=1}^N |(f, b_i)|^q \right)^{1/p}} \begin{pmatrix} |(f, b_1)|^{q-1} \text{sign}(f, b_1) \\ \vdots \\ |(f, b_N)|^{q-1} \text{sign}(f, b_N) \end{pmatrix} = x^*(f). \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы 3 доказано.

Доказательство леммы 4. Представим B' следующим образом:

$$B' u = \left((y^1, u), \dots, (y^n, u) \right)^T, \quad u \in l_p,$$

где $y^1, \dots, y^n$ — некоторые линейные функционалы.

Пусть верно включение $B' \in l_q^n$. В силу [15, разд. 3, §3, Гл. IV] для всех $i = \overline{1, n}$ функционалы $y^i : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ являются ограниченными и определенными на всем l_p , т.е.

$$\sup_{\|u\|_{l_p} \leq 1} |(y^i, u)| = C_i < \infty, \quad \mathcal{D}_{B'} = l_p.$$

Отсюда, согласно определению ограниченного оператора [15, разд. 2, §5, Гл. IV], следует ограниченность множества $\mathcal{U}_p(B')$ в $\mathbb{R}^n$ в смысле нормы

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i|.$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ — конечномерное пространство, то все нормы в нем эквивалентны [15, разд. 3, Гл. III], а следовательно, $\mathcal{U}_p(B')$ ограничено в $\mathbb{R}^n$ в смысле любой нормы.

Пусть $B' \notin l_q^n$, что равносильно существованию $j = \overline{1, n}$, такого, что $y^j \notin l_q$. Согласно [15, разд. 3, §2, Гл. IV], y^j не является ограниченным функционалом в l_p , что с учетом [15, разд. 2, §1, Гл. IV] предполагает его неограниченность на $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда найдется последовательность $\{u^{(N)}\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_p(\infty)$, на которой функционал y^j определен, но при этом неограничен, т.е. для всех $C > 0$ можно подобрать число $N_C \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|(y^j, u^{(N_C)})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| > 2C.$$

С другой стороны, в силу сходимости ряда существует $K_C \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left| \sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| < C.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{K_C} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| - \left| \sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)} \right| > C. \quad (\text{П.3})$$

Пусть

$$\tilde{u}^{(M)} = (u_1^{(N_M)}, \dots, u_{K_M}^{(N_M)}, 0, \dots).$$

Тогда верно включение $\{\tilde{u}^{(M)}\}_{M \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_p(\infty) \cap \mathcal{D}_{B'}$, так как для каждого $M \in \mathbb{N}$ последовательность $\tilde{u}^{(M)}$ финитна. Однако с учетом (П.3) справедливы соотношения

$$\|B' \tilde{u}^{(M)}\|_\infty = \max_{i=\overline{1, n}} |(y^i, \tilde{u}^{(M)})| \geq |(y^j, \tilde{u}^{(M)})| = \left| \sum_{k=1}^{K_M} y_k^j u_k^{(N_M)} \right| > M.$$

Поскольку $\{B' \tilde{u}^{(M)}\}_{M \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_p(B')$, согласно (2.4), то множество $\mathcal{U}_p(B')$ неограничено в смысле нормы $\|\cdot\|_\infty$, а следовательно, неограничено в $\mathbb{R}^n$ в смысле любой нормы в силу их эквивалентности.

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть $x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$, т.е. существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, такой, что $x \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$. Откуда в силу (2.1) существует $(u_1, \dots, u_{\tilde{N}})^T \in \mathcal{E}_p(\tilde{N})$, удовлетворяющий равенству

$$x = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} u_j b_j.$$

Но тогда $(u_1, \dots, u_{\tilde{N}}, 0, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, что в силу (2.4) равносильно включению $x \in \mathcal{U}_p(B')$. Отсюда следует, что

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathcal{U}_p(B').$$

Поскольку по условию $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ является ограниченным оператором, то с учетом (2.4) множество $\mathcal{U}_p(B')$ замкнуто, так как является образом замкнутого множества $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)} \subset \overline{\mathcal{U}_p(B')} = \mathcal{U}_p(B').$$

Произвольный $x \in \mathcal{U}_p(B')$ – предельная точка множества $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$. Согласно (2.4), найдется $u = (u_1, u_2, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такой, что $x = B'u$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим $u^{(N)} \in \mathbb{R}^N$:

$$u^{(N)} = (u_1, \dots, u_N)^T.$$

По построению $u^{(N)} \in \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1) верно включение

$$\{B_N u^{(N)}\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n.$$

При этом в смысле любой нормы в $\mathbb{R}^n$ с учетом неравенства Гельдера справедливы соотношения

$$\|B'u - B_N u^{(N)}\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k u_k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|b_k\| |u_k| \leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \|b_k\|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость выполняется, потому что оба сомножителя являются остатками сходящихся рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III], где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\|^q$ сходится, поскольку $B' \in l_q^n$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p$ сходится, так как $u \in \mathcal{E}_p(\infty)$. Получаем

$$\mathcal{U}_p(B') \subset \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots) \in l_q$ не финитна для некоторого $i = \overline{1, n}$. Вычислим норму $\tilde{u} \in l_p$:

$$\|\tilde{u}\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|b_{ij}|^{q-1} \text{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} \right|^p \right)^{1/p} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^{qp(1-1/q)} \right)^{1/p}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^q \right)^{1/q \cdot q/p}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = 1.$$

Тогда по определению $\tilde{u} \in \mathcal{E}_p(\infty)$ и в силу (2.4)

$$\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B').$$

Рассмотрим следующую гиперплоскость:

$$\mathcal{H}_i = \left\{ u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} u_j = \|y^i\|_{l_q} \right\} \subset l_p.$$

По построению

$$\tilde{x}_i = (y^i, \tilde{u}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{ij}|^{q-1} b_{ij} \text{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{ij}|^q}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \|y^i\|_{l_q}^{q-q/p} = \|y^i\|_{l_q}.$$

В силу неравенства Гельдера [15, разд. 2, §1, Гл. IV]

$$\max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (y^i, u) \leq \max_{\|u\|_{l_p} \leq 1} \|y^i\|_{l_q} \|u\|_{l_p} \leq \|y^i\|_{l_q} = (y^i, \tilde{u}).$$

Тогда гиперплоскость $\mathcal{H}_i$ является опорной к множеству $\mathcal{E}_p(\infty)$ в точке $\tilde{u} \in \partial \mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество при $p \in (1; +\infty)$, то $\tilde{u}$ — единственная точка касания [4, лемма 3]:

$$\{\tilde{u}\} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{E}_p(\infty).$$

Другими словами, для любой $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{\tilde{u}\}$ верно неравенство $(B'u)_i = (y_i, u) < (y_i, \tilde{u}) = \tilde{x}_i$. Следовательно, $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B')$ имеет единственный прообраз при отображении B' , но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности y^i и $\tilde{u}$ по условию не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\tilde{x} \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 1. Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из леммы 6 и того факта, что в случае финитности всех $y^1, \dots, y^n \in l_q$ существует $N_0 \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\mathcal{U}_p(B_{N_0}) = \mathcal{U}_p(B_N) = \mathcal{U}_p(B'), \quad N \geq N_0.$$

Лемма 14 ([3]). Для любого $f \in l_q \setminus \{0\}$ вектор

$$u^* = \frac{1}{\|f\|_q^{q/p}} (|f_1|^{q-1} \text{sign} f_1, |f_2|^{q-1} \text{sign} f_2, \dots)$$

является единственным решением оптимизационной задачи

$$(f, u) \rightarrow \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)}.$$

Доказательство леммы 7. Рассмотрим произвольный

$$\tilde{x} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть для всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\dim \text{Lin}\{b_N, b_{N+1}, \dots\} = n$. Тогда существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$, что в силу (2.1) и (2.4) эквивалентно существованию $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{N}}, 0, \dots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такого, что верно равенство

$$\tilde{x} = B_{\tilde{N}}(\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{N}})^T = B'\tilde{u}.$$

Рассмотрим произвольный $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда с учетом леммы 14

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) &= \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (f, B'u) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(f, b_j)|^q \right)^{1/q}, \\ u^* &= \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |(f, b_j)|^q \right)^{1/p}} (|f, b_1|^{q-1} \text{sign}(f, b_1), |f, b_2|^{q-1} \text{sign}(f, b_2), \dots). \end{aligned}$$

При этом u^* — единственная точка максимума, т.е. для всех $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{u^*\}$ верны соотношения

$$(f, B'u^*) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j^* > \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = (f, B'u). \quad (\text{П.4})$$

Следовательно, не существует $u \in \mathcal{E}_p(\infty) \setminus \{u^*\}$, такого, что $B'u^* = B'u$. Равенство $B'u^* = B'\tilde{u}$ верно тогда и только тогда, когда $u^* = \tilde{u}$. Это эквивалентно следующим условиям:

$$\begin{aligned} (f, b_j) &= 0, \quad j > \tilde{N}, \\ f &\in \text{Lin}^\perp \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\}, \end{aligned}$$

что в силу условия $f \neq 0$ равносильно неравенствам

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Lin}^\perp \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\} &\geq 1, \\ \dim \operatorname{Lin} \{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \dots\} &< n.\end{aligned}$$

Получили противоречие. Иначе говоря, равенство $u^* = \tilde{u}$ невозможно, что с учетом (П.4) и определения нормального конуса означает, что для всех $f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) = (f, B' u^*) > (f, B' \tilde{u}) = (f, \tilde{x}),$$

$$\mathcal{N}(\tilde{x}, \mathcal{U}_p(B')) = \emptyset.$$

Тогда из определения нормального конуса $\tilde{x} \in \operatorname{int} \mathcal{U}_p(B')$, т.е.

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \operatorname{int} \mathcal{U}_p(B'),$$

что с учетом леммы 5 приводит к равенству

$$\operatorname{int} \mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\dim \operatorname{Lin} \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} < n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} &\geq 1, \\ \operatorname{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} \setminus \{0\} &\neq \emptyset.\end{aligned}$$

Выберем произвольный $f \in \operatorname{Lin}^\perp \{b_{N+1}, b_{N+2}, \dots\} \setminus \{0\}$ и построим $u^* \in \mathcal{C}_p(\infty)$ следующего вида:

$$\begin{aligned}u^* &= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f, b_j|^q\right)^{1/p}} \left(|f, b_1|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_1), |f, b_2|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_2), \dots\right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^N |f, b_j|^q\right)^{1/p}} \left(|f, b_1|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_1), \dots, |f, b_N|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_N), 0, \dots\right).\end{aligned}$$

В силу леммы 14

$$(f, B' u^*) = \max_{u \in \mathcal{C}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \max_{u \in \mathcal{C}_p(\infty)} (f, B' u) = \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x).$$

Поскольку с учетом (2.4) $B' u^* \in \mathcal{U}_p(B')$, то, согласно определению нормального конуса, $f \in \mathcal{N}(B' u^*, \mathcal{U}_p(B'))$, откуда следует, что

$$B' u^* \in \partial \mathcal{U}_p(B').$$

Однако по построению u^* финитна и $B' u^* \in \mathcal{U}_p(B_N)$. Тогда

$$B' u^* \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \setminus \operatorname{int} \mathcal{U}_p(B'),$$

$$\operatorname{int} \mathcal{U}_p(B') \neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 8. В силу [15, разд. 3, §2, Гл. IV] $B' : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ является линейным и ограниченным оператором. Согласно [4], лемма 5, для строго выпуклого множества $\mathcal{E}_p(\infty)$ и произвольного $u \in \mathcal{E}_p(\infty)$ верно равенство

$$\mathcal{N}(B'u, B'\mathcal{E}_p(\infty)) = (B'^*)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(\infty))) \cup (\ker B'^* \setminus \{0\}),$$

где через $B'^* : \mathbb{R}^n \rightarrow l_q$ обозначен оператор, сопряженный к B' [15, разд. 5, §5, Гл. IV]. В силу (2.2) справедливо условие $\ker B'^* = \{0\}$. Так же, как продемонстрировано в [4], пример 1,

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(\infty)) = \text{cone}\{(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\} \setminus \{0\}.$$

Тогда с учетом представления (2.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) &= (B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots) : \alpha > 0\right\}\right) = \\ &= \bigcup_{\alpha > 0} (B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\right\}\right) = \\ &= \text{cone}\{f \in \mathbb{R}^n : B'^* f = (|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)\} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку справедливо условие (2.2), уравнение

$$B'^* f = (|u_1|^{p-1}\text{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\text{sign}u_2, \dots)$$

имеет либо одно, либо нуль решений, т.е.

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \leq 1.$$

При этом в случае $B'u \in \partial \mathcal{U}_p(B')$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \neq \emptyset,$$

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \geq 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 8.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \arg \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) &= B' \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (f, B'u) = B' \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (B'^* f, u) = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, b_i)|^q\right)^{1/p}} B' \left(|(f, b_1)|^{q-1} \text{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1} \text{sign}(f, b_2), \dots\right). \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 14.

С учетом определения B' второе утверждение леммы 8 доказано.

Доказательство леммы 9. Доказательство леммы вытекает непосредственно из определений (1.3), (1.4) и определения множеств $\mathcal{E}_p(N)$ и $\mathcal{U}_p(B_N)$.

Доказательство теоремы 1. Пункт 1 следует из определения множеств достижимости (1.3) и управляемости (1.4) пункт 2 — из лемм 1 и 9, пункт 3 — из леммы 2, пункт 4 — из лемм 2 и 3 и п. 1 леммы 9. Аналогично пункт 5 вытекает из тех же лемм при использовании п. 2 леммы 9.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим ограниченность $\mathcal{U}_{p, \infty}$. Пусть $h_1, \dots, h_n \subset \mathbb{R}^n$ — жорданов базис матрицы A , а вектор b допускает разложение $b = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$. Обозначим че-

рез $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невырожденную матрицу, задающую преобразование подобия A к ее вещественной жордановой форме [20, разд. 3.4, Гл. 3]:

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \quad (\text{П.5})$$

где каждый блок J_i соответствует либо вещественному собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (\text{П.6})$$

либо соответствует паре комплексно-сопряженных собственных значений $re^{\pm i\varphi} \in \mathbb{C}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_i A_{\varphi_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что в случае (П.7) n_i четное. Также в силу представления (П.5) включения $(b, Ab, A^2b, \dots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \dots) \in l_q^n$ равносильны.

Согласно определению жорданова базиса, $S^{-1}b = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Сгруппируем координаты вектора $S^{-1}b$ в соответствии с размерностями и расположением жордановых клеток в разложении (П.5) и введем следующие обозначения:

$$S^{-1}b = (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \dots, \alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,n_m})^T, \\ J^k S^{-1}b = (\alpha_{1,1}(k), \dots, \alpha_{1,n_1}(k), \dots, \alpha_{m,1}(k), \dots, \alpha_{m,n_m}(k))^T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом разложения (П.5) для любых $i = \overline{1, m}$ верно соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i} \end{pmatrix}.$$

1. В случае (П.6) для всех $k \geq n_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & C_k^2 \lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-2} \lambda_i^{k-n_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{n_i-3} \lambda_i^{k-n_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_k^j обозначено число сочетаний из k по j :

$$C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Получим представление

$$\alpha_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{n_i} \alpha_{i,l} C_k^{l-j} \lambda_i^{k-l+j}, \quad j = \overline{1, n_i}.$$

Если $|\lambda_i| < 1$ и $k > 2(n_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,j}(k)| &\leq \sum_{l=j}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{l-j} |\lambda_i|^{k-l+j} \leq \sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)! (k - n_i + 1)!} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i - 1)!} k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) \in l_q$.

Пусть $|\lambda_i| \geq 1$ и существует $j = \overline{1, n_i}$, такой, что $\alpha_{i,j} \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = n_i$ или $\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\alpha_{i,j}(k) = \alpha_{i,j} \lambda_i^k,$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) \notin l_q$.

Если $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.6) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \dots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $|\lambda_i| < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

2. В случае (П.7) учтем, что n_i четное, и введем обозначения

$$\tilde{n}_i = \frac{n_i}{2}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1} \\ \alpha_{i,2j} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1}(k) \\ \alpha_{i,2j}(k) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Для всех $k \geq \tilde{n}_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} r_i^k A_{k\varphi} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & C_k^2 A_{(k-2)\varphi} r_i^{k-2} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} A_{(k-\tilde{n}_i+1)\varphi} \\ 0 & r_i^k A_{k\varphi} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-2} r_i^{k-\tilde{n}_i+2} A_{(k-\tilde{n}_i+2)\varphi} \\ 0 & 0 & r_i^k A_{k\varphi} & \dots & C_k^{\tilde{n}_i-3} r_i^{k-\tilde{n}_i+3} A_{(k-\tilde{n}_i+3)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i^k A_{k\varphi} \end{pmatrix},$$

Следовательно, получим представление

$$\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Если $r_i < 1$ и $k > 2(\tilde{n}_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max\{|\alpha_{i,2j-1}(k)|, |\alpha_{i,2j}(k)|\} &\leq \|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| \leq \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} \|A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i - 1)! (k - \tilde{n}_i + 1)!} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \leq \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i - 1)!} k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots) \in l_q$ и $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots) \in l_q$.

Пусть $r_i \geq 1$ и существует $j = \overline{1, \tilde{n}_i}$, такой, что $\|\tilde{\alpha}_{i,j}\| \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = \tilde{n}_i$ или $\|\tilde{\alpha}_{i,j+1}\| = \dots = \|\tilde{\alpha}_{i,\tilde{n}_i}\| = 0$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| = \|A_{k\varphi} \tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k = \|\tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k,$$

т.е. $(\|\tilde{\alpha}_{i,j}\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(1)\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(2)\|, \dots) \notin l_q$. Отсюда с учетом неравенства Минковского следует, что хотя бы одна последовательность $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \dots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \dots)$ не принадлежит l_q .

Если $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $r_i \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \dots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.7) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \dots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $r_i < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

Окончательно, включения $(b, Ab, A^2b, \dots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \dots) \in l_q^n$, равносильные, согласно (П.5), справедливы тогда и только тогда, когда $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$ для всех $i = \overline{1, m}$, которые соответствуют собственным значениям матрицы A по модулю не меньшим 1, т.е. $b \in \mathbb{L}_{<1}$. В силу лемм 4, 5 и п. 1 леммы 9 данный факт эквивалентен ограниченности $\mathcal{U}_{p,\infty}$.

С учетом определения (1.5) и леммы 5 множество $\mathcal{U}_{p,\infty}$ с точностью до замыкания совпадает с $\mathcal{U}_p(B')$, если $B' = (b, Ab, A^2b, \dots)$. Тогда остальные свойства $\mathcal{U}_{p,\infty}$ следуют из леммы 8. А выражение для опорной функции вытекает непосредственно из ее определения:

$$s(f, \mathcal{U}_{p,\infty}) = \sup_{x \in \mathcal{U}_{p,\infty}} (f, x) = (f, y^*(f)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q \right)^{1/q}.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим вопросы ограниченности $\mathcal{X}_{p,\infty}$. Если $\det A = 0$, то у матрицы A существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Тогда, согласно (1.4) верно включение $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_p(1)$, что с учетом (1.6) приводит к включению $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_{p,\infty}$, откуда следует, что $\mathcal{X}_{p,\infty}$ неограничено. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица A^{-1} , собственные значения которой взаимнообратны собственным значениям A [20, Гл. I]. Отсюда ясно, что доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, если заменить A на A^{-1} .

Доказательство следствия 2. Доказательство следствия 2 вытекает из теорем 2, 3 и того факта, что $\det A \neq 0$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A отличны от нуля [20, утверждение 1.1.7].

Обозначим через $H^* : l_2 \rightarrow l_2$ оператор, сопряженный к линейному и ограниченному оператору $H : l_2 \rightarrow l_2$ [15, разд. 6, §5, Гл. IV].

Лемма 15. Пусть линейные и ограниченные операторы $H_{11} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H_{12} : \mathbb{R}^n \rightarrow l_2$, $H_{22} : l_2 \rightarrow l_2$, такие, что $H : l_2 \rightarrow l_2$ является линейным, ограниченным, положительно определенным и самосопряженным оператором, где

$$Hu = (H_{11}(u_1, \dots, u_n) + H_{12}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots), H_{12}(u_1, \dots, u_n) + H_{22}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots)),$$

$$Pu = (u_1, \dots, u_n)^T,$$

$$\mathcal{U} = \{u \in l_2 : (u, Hu) \leq 1\}.$$

Тогда

$$P^0\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \leq 1\}.$$

Доказательство леммы 15. В силу положительной определенности и самосопряженности оператора H оператор H_{22} также является положительно определенным и самосопряженным. Тогда $(u, H_{22}u) > 0$ для всех $u \in l_2 \setminus \{0\}$, H_{22} обратим [16, разд. 4, гл. X]. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} P^0\mathcal{U} &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : ((x_1, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots), H(x_1, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots)) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : (x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} ((x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u)) \leq 1\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} ((x, H_{11}x) - (H_{22}^{-1} H_{12}x, H_{12}x) + (u + H_{22}^{-1} H_{12}x, H_{22}(u + H_{22}^{-1} H_{12}x))) \leq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{11}x) - (x, H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12}x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Лемма 15 доказана.

Доказательство леммы 10. Для случая $N > n$ выберем $B' = (B_N, 0, \dots) : l_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, определим матрицу $\hat{B}_N = (b_{n+1}, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^{n \times (N-n)}$ и оператор $\tilde{B} : l_p \rightarrow l_p$:

$$\tilde{B}u = (B'u, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots).$$

В силу (2.2) оператор $\tilde{B}$ обратим. Тогда

$$\tilde{B}^0\mathcal{E}_2(N) = \{u \in l_2 : (\tilde{B}^{-1}u, \tilde{B}^{-1}u) \leq 1\} = \{u \in l_2 : (u, (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}u) \leq 1\}.$$

Поскольку

$$\tilde{B}^{-1}u = (B_n^{-1}(u_1, \dots, u_n) - B_n^{-1}B(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots), u_{n+1}, u_{n+2}, \dots),$$

где $B = (0, 0, \dots)$ для $N = n$ и $B = (\hat{B}_N, 0, \dots)$ для $N > n$, положительно определенный и самосопряженный оператор $H = (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}$ допускает представление, описанное в лемме 15:

$$\begin{aligned} H_{11} &= (B_n^{-1})^T B_n^{-1} = H_n, \\ H_{12} &= -B^*(B_n^{-1})^T B_n^{-1} = -B^* H_n, \\ H_{22} &= B^*(B_n^{-1})^T B_n^{-1} B + I = B^* H_n B + I. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно лемме 15, представление множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ для случая $N = n$ следует непосредственно. Для случая $N > n$ при учете того, что в силу финитности последовательности B справедливо соотношение

$$Bu = \hat{B}_N (u_{n+1} \dots u_N)^T,$$

вытекает представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_n - H_n \hat{B}_N (\hat{B}_N^T H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^T H_n)x) \leq 1\}.$$

При этом, согласно тождеству Шермана–Моррисона–Вудбери [24, §5.1, Гл. 5], верно равенство

$$H_n - H_n \hat{B}_N (\hat{B}_N^T H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^T H_n = (B_N B_N^T)^{-1} = H_N.$$

Лемма 10 доказана.

Л е м м а 16. Пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметрическая и положительно определенная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – эллипсоид:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x \leq 1\}.$$

Тогда

$$\mathcal{Y} = \left\{ \alpha_1 b + \alpha_2 x : x \in \mathcal{X}, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T \left(H - \frac{Hbb^T H}{1 + b^T Hb} \right) x \leq 1 \right\}.$$

Доказательство леммы 16. По построению $\mathcal{Y}$ является выпуклым множеством и $0 \in \text{int } \mathcal{Y}$. Построим функционал Минковского $\mu(y, \mathcal{Y})$. Согласно определению, вычисление функционала Минковского сводится к решению следующих эквивалентных оптимизационных задач:

$$\begin{aligned} \mu(y, \mathcal{Y}) &= \min\{\gamma > 0 : y = \alpha_1 b + \alpha_2 x, x^T Hx = 1, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \gamma^2\} = \\ &= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : \alpha_2 x = \alpha_1 b - y, (\alpha_2 x)^T H(\alpha_2 x) = \alpha_2^2\} = \\ &= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : (\alpha_1 b - y)^T H(\alpha_1 b - y) = \alpha_2^2\} = \min_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{\alpha_1^2 + (\alpha_1 b - y)^T H(\alpha_1 b - y)} = \\ &= \min_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{\alpha_1^2 (1 + b^T Hb) - 2\alpha_1 b^T Hy + y^T Hy} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{b^T Hy}{1 + b^T Hb} \right)^2 (1 + b^T Hb) - 2 \frac{b^T Hy}{1 + b^T Hb} b^T Hy + y^T Hy} = \\ &= \sqrt{y^T Hy - \frac{y^T Hbb^T Hy}{1 + b^T Hb}} = \sqrt{y^T \left(H - \frac{y^T Hbb^T Hy}{1 + b^T Hb} \right) y}. \end{aligned}$$

С учетом (П.1)

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n : \mu(y, \mathcal{Y}) \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : (\mu(y, \mathcal{Y}))^2 \leq 1\}.$$

Лемма 16 доказана.

Доказательство леммы 11. Представления (4.1) корректны в силу лемм 9 и 10. С учетом (2.1) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(N+1) &= \left\{ \sum_{k=0}^N A^k bu_k : \sum_{k=0}^N u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_0 b + A \sum_{k=0}^{N-1} A^k bu_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^N u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_0 b + \alpha x : x \in A\mathcal{Y}_2(N), u_0^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (y, H_{y, N+1} y) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 16 и равенством

$$A\mathcal{Y}_2(N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (A^{-1})^T H_{y, N} A^{-1} x) \leq 1\}.$$

В силу леммы 9 описание $\mathcal{X}_2(N+1)$ строится аналогично при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$.

Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Представление $\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty}$ и $\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ в форме эллипсоидальных множеств в случае их ограниченности следует из леммы 15 с учетом леммы 9 и предположения (1.2).

Согласно лемме 9, и представлению (2.4), верны равенства

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty} &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} A^k bu_k : \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_0 b + A \sum_{k=0}^{\infty} A^k bu_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_0 b + \alpha x : x \in A\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty}, u_0^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\}, \\ \overline{\mathcal{X}}_{2,\infty} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} bu_k : \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \left\{ u_1 A^{-1} b + A^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} bu_{k+1} : u_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ u_1 A^{-1} b + \alpha x : x \in A^{-1}\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty}, u_1^2 + \alpha^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Откуда в силу леммы 16 следуют представления для $H_{\mathcal{Y},\infty}$ и $H_{\mathcal{X},\infty}$ через соответствующие алгебраические дискретные уравнения Риккати.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ*. 2015. № 9. С. 3–30.
3. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32.
4. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25.
5. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ*. 2003. № 12. С. 17–32.
6. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2022. № 126. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>.
7. Костоусова Е.К. О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии*. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
8. Gayek J.E., Fisher M.E. Approximating Reachable Sets for n-Dimensional Linear Discrete Systems // *IMA J. Mathematical Control and Information*. 1987. V. 4. № 2. P. 149–160.
9. Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И. О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 4. С. 3–21.
10. Tobler W.R. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // *IEEE-CGA*. 1981. V. 1. № 1. P. 11–23.
11. Tobler W.R. The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // *J. Geophysical Research*. 1973. V. 78. № 11. P. 1753–1759.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
13. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 440 с.
14. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. 716 p.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012. 570 с.
16. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 663 с.
17. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010. 119 с.
18. Sonnevend G. Asymptotically Optimal, Sequential Methods for the Approximation of Convex, Compact Sets in R^n in the Hausdorff Metrics // *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai*. 1980. V. 35. № 2. P. 1075–1089.
19. Gainanov D.N., Chernavin P.F., Rasskazova V.A. Convex Hulls in Solving Multiclass Pattern Recognition Problem // *Lecture Notes in Computer Science*. 2020. V. 12096. P. 390–401.
20. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 667 с.
21. Lancaster P., Rodman L. The Algebraic Riccati Equation. Oxford: Clarendon Press, 1995. 477 p.
22. Мальшиев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез и управление. М.: МАИ, 2000. 568 с.
23. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981. 544 с.
24. Householder A.S. The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Waltham: Blaisdell, 1964. 257 p.

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.013

**СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ УЛУЧШЕНИЯ
УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ
РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА¹**

© 2023 г. А. М. Аббясов*, А. А. Анисимов^а, С. В. Тарарыкин

^аИвановский государственный энергетический ун-т им. В.И. Ленина (ИГЭУ) Иваново, Россия

*e-mail: alexx.bit@mail.ru

Поступила в редакцию 07.02.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Разрабатывается итерационный метод синтеза систем управления низкой параметрической чувствительности с динамическими (полиномиальными) регуляторами, на каждом шаге которого целенаправленно изменяются сингулярные числа грамианов управляемости и наблюдаемости, формируется предрегулятор, преобразующий структуру расчетной модели объекта в направлении повышения управляемости и наблюдаемости с учетом имеющихся возможностей и ограничений. Методом полиномиального модального управления рассчитываются параметры основного регулятора и выполняется оценка робастных свойств синтезированной системы в заданных интервалах изменения внутренних параметров.

DOI: 10.31857/S0002338823050025, EDN: OFQVCR

Введение. Возрастание требований к качеству управления современными технологическими объектами делает актуальным применение соответствующих автоматических систем на базе безынерционных и интегрирующих регуляторов состояния (РС) полного порядка [1, 2]. Когда получение оперативной информации о значениях всех основных координат состояния объекта является затруднительным, необходимое качество управления может обеспечиваться путем использования динамических регуляторов с дробно-рациональным представлением их передаточных функций (ПФ) полиномами повышенного порядка, получивших название полиномиальных регуляторов (ПР) [3–5].

Однако, являясь во многих случаях равноценной альтернативой РС, ПР и системы автоматического управления (САУ) на их основе оказываются такими же, а иногда и более чувствительными к вариациям внутренних параметров объекта управления (ОУ). В итоге практическая реализация таких систем существенно осложняется проблемой робастности (параметрической грубости) из-за недостаточной параметрической определенности и стабильности большинства реальных ОУ.

Несмотря на значительные успехи в области решения проблемы [6–8] универсальных и высокоэффективных методов синтеза робастных САУ, даже в линейной постановке пока не выработано, что делает актуальным продолжение исследований в этом направлении. Выполненные ранее работы [5, 9, 10] позволили установить, что значительные возможности повышения робастных свойств линейных и линеаризованных САУ имеют классические методы модального управления (МУ), реализуемого как на базе РС, так и на основе ПР.

Исследованиями, проведенными в [11], было показано, что улучшение робастных свойств синтезируемых САУ может достигаться предварительным повышением степени управляемости состояния ОУ. На этой базе в [11] разработан эффективный итерационный метод структурно-параметрического синтеза робастных систем с РС с помощью грамианов управляемости ОУ, коррекции их сингулярных чисел предварительным регулятором (предрегулятором) и последующего синтеза основного РС для скорректированного объекта методом МУ.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ № 075-03-2023-025 (1/23).

Очевидно, подобный подход может быть использован и при синтезе робастных САУ на базе ПР. Однако при этом следует учитывать, что для эффективного управления состоянием динамических ОУ на основе ПР потребуется предварительное повышение не только степени управляемости объекта, но и степени наблюдаемости, приводящих в итоге к снижению его вырожденности.

В качестве наиболее эффективных для оценки степени управляемости и наблюдаемости следует указать алгебраические критерии [9, 10] в виде норм матриц преобразования расчетной модели объекта к каноническим формам управляемости и наблюдаемости (КФУ и КФН), а также диагональные формы грамианов управляемости и наблюдаемости [12, 13]. При этом первые позволяют получить более точные количественные оценки системных свойств объекта, но не указывают пути их улучшения. Вторые дают менее точные оценки, но могут использоваться для формирования моделей ОУ с желаемыми свойствами управляемости и наблюдаемости.

В работе предлагается итерационный метод синтеза робастных САУ с ПР “входа-выхода”, на каждом шаге которого целенаправленно изменяются сингулярные числа грамианов управляемости или наблюдаемости, формируется предрегулятор, преобразующий структуру расчетной модели объекта в направлении повышения управляемости и наблюдаемости с учетом имеющихся возможностей и ограничений, рассчитываются параметры основного регулятора и выполняется оценка робастных свойств синтезированной системы в заданных интервалах изменения внутренних параметров.

Исследование сопровождается конкретными числовыми примерами синтеза параметрически грубых систем управления, обеспечивающими наглядную иллюстрацию полученных результатов. Расчетная часть работы выполняется средствами программного комплекса MatLab.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать одноканальные системы управления с ПР, имеющие общую структуру (в изображениях сигналов), представленную на рис. 1. Здесь приняты следующие обозначения: s — переменная Лапласа; g, y — входной (задающий) и выходной скалярные сигналы; u — скалярное управляющее воздействие на объект, x — вектор координат состояния с размерностью n ; A, B и C — постоянные матрицы состояния, входа и выхода объекта с размерностями $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно. Здесь n — порядок объекта; A', B' и C' — матрицы предрегулятора, согласованные по размерностям с соответствующими матрицами объекта; $B(s)$ — гурвицев полином числителя ПФ объекта; $R(s), C(s)$ — полиномы ПФ технически реализуемого регулятора минимального порядка, для которого $\deg R(s) = \deg C(s) = n - 1$. ПР реализует обратную связь по выходу ОУ, согласно операторному уравнению

$$u(s) = (g(s)B^{-1}(s)R^{-1}(s) - y(s))R(s)C^{-1}(s).$$

При этом контурная часть ПР обеспечивает желаемое распределение полюсов системы, а его внеконтурная часть (префильтр) компенсирует влияние нулей объекта и контурной части регулятора.

Соответствующее дифференциальное описание ОУ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

где в общем случае матрицы A и B носят интервальный характер.

Компоненты матриц A, B и C , которые можно изменять введением дополнительных каналов управления и связей координат для повышения управляемости и наблюдаемости, отмечаются единичными значениями соответствующих элементов двоичных матриц-масок E_1, E_2 и E_3 , согласованных с ними по размерностям, на фоне нулевых значений остальных элементов. Так, например, при

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

имеем

$$A' \circ E_1 = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix},$$

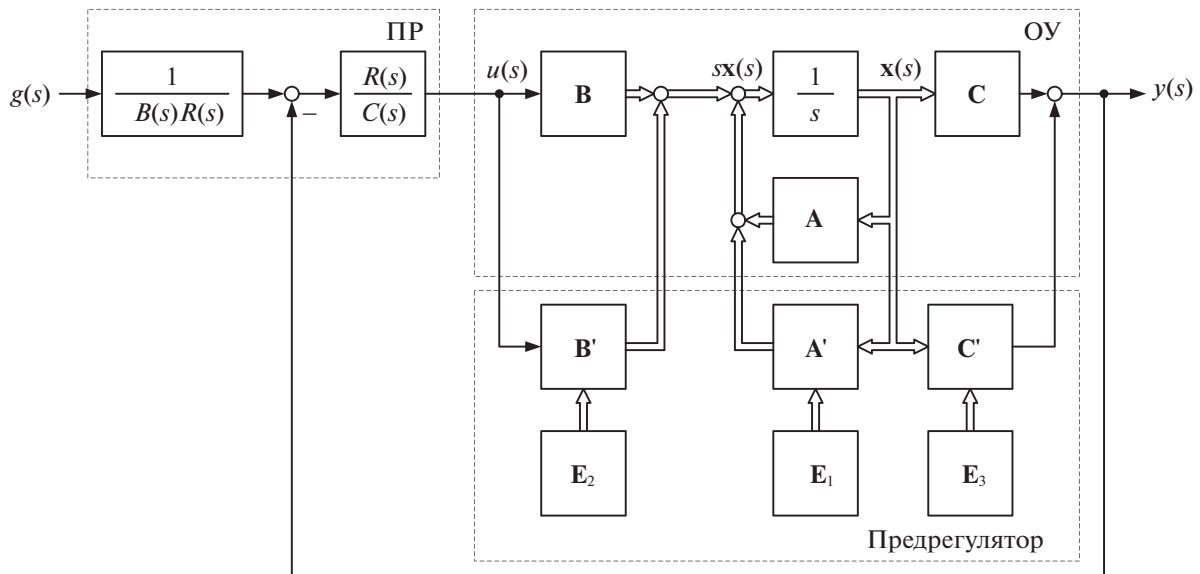


Рис. 1. Общая структурная схема САУ с ПР

где $\circ$ — символ покомпонентного матричного произведения Адамара. В итоге матрица-маска $\mathbf{E}_1$ скрывает элементы a'_{12} и a'_{21} матрицы $\mathbf{A}'$, сохраняя элементы a'_{11} и a'_{22} , которые можно использовать для формирования новой матрицы $(\mathbf{A} + \mathbf{A}' \circ \mathbf{E}_1)$ улучшенной расчетной модели ОУ, предназначенной для синтеза ПР.

Будем проводить синтез робастной системы управления с ПР методом полиномиального модального управления [3–5] при номинальных значениях параметров ОУ путем решения полиномиального уравнения синтеза:

$$A(s)C(s) + B(s)R(s) = D(s),$$

где $A(s)$ — гурвицев полином знаменателя ПФ объекта $H(s) = \mathbf{C}(\mathbf{I} - s\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, $D(s)$ — желаемый характеристический полином (ХП) ПФ замкнутой системы.

Требуется синтезировать робастную САУ, сохраняющую устойчивость и заданные показатели качества при вариациях параметров ОУ и ПР в определенных пределах. Предполагается, что заданный ОУ обладает свойствами управляемости и наблюдаемости, а интервальная матрица $\mathbf{A}$ является гурвицевой, что обеспечивает возможность вычисления грамианов.

Будем решать задачу путем повышения степени управляемости и степени наблюдаемости объекта за счет преобразования подобия матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ к виду, приближающему структуру объекта соответственно к КФУ и КФН. При этом для определения матриц преобразования координатного базиса объекта используем математический аппарат грамианов управляемости, наблюдаемости и их сингулярных разложений.

2. Улучшение системных свойств объектов управления с помощью грамианов. Рассмотрим возможности преобразования структуры ОУ в направлениях повышения его управляемости и наблюдаемости. Для этого предлагается использовать математический аппарат грамианов управляемости $\mathbf{G}_c$ и наблюдаемости $\mathbf{G}_o$ [13–16], определяемых выражениями:

$$\mathbf{G}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad \text{и} \quad \mathbf{G}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt,$$

где t — время. Для одномерного объекта грамианы представляют собой матрицы размерностью $n \times n$.

С целью количественной оценки системных свойств ОУ применяя процедуры сингулярного разложения, приводящие грамианы к виду

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{U}_c \mathbf{\Sigma}_c \mathbf{U}_c^T, \quad \mathbf{G}_o = \mathbf{V}_o \mathbf{\Sigma}_o \mathbf{V}_o^T, \quad (2.1)$$

где $\Sigma_c = \text{diag}\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \dots, \sigma_{cn}\}$, $\Sigma_o = \text{diag}\{\sigma_{o1}, \sigma_{o2}, \dots, \sigma_{on}\}$ – диагональные матрицы, состоящие из выстроенных в порядке убывания сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости; U_c и V_o – матрицы преобразования грамианов к диагональной форме. Относительно малые значения сингулярных чисел являются признаками плохой управляемости или плохой наблюдаемости координат состояния объекта.

В качестве более точной оценки системных свойств ОУ удобно использовать [9, 10] нормы матриц преобразования координат состояния из КФУ и КФН, согласованных с объектом по входу и выходу, в исходный координатный базис:

$$\|P_U\|_1 = \max_{k=1,n} \sum_{j=1}^n |u_{kj}|, \quad \|P_V\|_1 = \max_{k=1,n} \sum_{j=1}^n |v_{kj}|,$$

где u_{ij} и v_{ij} – элементы матриц преобразования координат $P_U = \bar{U}U^{-1}$ и $P_V = \tilde{V}V^{-1}$, находящиеся на пересечении строки i и столбца j ; $\bar{U}$ и $\tilde{V}$ – матрицы управляемости и наблюдаемости соответственно в КФУ и КФН; U и V – матрицы управляемости и наблюдаемости в собственных координатах объекта. По мере приближения объекта к КФУ и КФН соответствующие значения $\|P_U\|_1$ и $\|P_V\|_1$ стремятся к единице.

Количественной оценкой степени вырожденности ОУ может служить норма матрицы преобразования координат из КФУ в КФН $\|P_{\bar{U}\tilde{U}}\|_1 = \|\bar{U}\tilde{V}^{-1}\|_1$ или норма матрицы обратного преобразования $\|P_{\tilde{V}\bar{U}}\|_1 = \|\tilde{V}\bar{U}^{-1}\|_1$, величины которых неограниченно возрастают при сближении нулей и полюсов ПФ объекта.

Помимо проведения системного анализа математический аппарат грамианов позволяет решать и обратные задачи, т.е. формировать математические модели объектов с заданными значениями степеней управляемости и наблюдаемости. Примерами таких задач является получение сбалансированной формы модели ОУ с одинаковыми управляемостью и наблюдаемостью [12, 14, 15], для которой соответствующие грамианы совпадают: $G_c'' = G_o'' = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, а также формирование оптимальной структуры наблюдателей состояния [17] с определенным соотношением свойств управляемости и наблюдаемости для повышения их параметрической грубости. Подобный подход, основанный на целенаправленном итерационном изменении сингулярных чисел грамиана управляемости с последующим вычислением соответствующих матриц $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ улучшенной расчетной модели, был успешно использован в [11] для решения задач синтеза робастных САУ с РС.

Руководствуясь [11], можно дополнить предложенный алгоритм коррекции степени управляемости модели ОУ аналогичным алгоритмом коррекции степени ее наблюдаемости и сформировать на этой основе комплексную итерационную процедуру улучшения системных свойств модели объекта, предназначенной для синтеза ПР.

Сущность процедуры заключается в том, что для исходной матричной модели объекта принудительно увеличивают малые значения сингулярных чисел грамиана управляемости и грамиана наблюдаемости:

$$\hat{\Sigma}_c = \Sigma_c + \Delta\Sigma_c, \quad \hat{\Sigma}_o = \Sigma_o + \Delta\Sigma_o.$$

Затем определяют матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, а также $\hat{U}_c$ и $\hat{V}_o$ модели объекта, переведенной в новую систему координат путем преобразования подобия с использованием соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT, \\ \hat{G}_c &= T^{-1}G_cT^{-T}, \quad \hat{G}_o = T^TG_oT. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Руководствуясь аналогиями с [14], а также результатами [11], получаем следующие выражения для определения матриц преобразования T через исходные и новые значения матриц диагонального разложения грамианов управляемости и наблюдаемости:

$$T = U_c \Sigma_c^{1/2} \hat{\Sigma}_c^{-1/2} \hat{U}_c^{-1}, \quad (2.3)$$

или

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}_o^{-T} \boldsymbol{\Sigma}_o^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_c^{1/2} \hat{\mathbf{V}}_o^T. \quad (2.4)$$

Справедливость этих выражений для матриц $\mathbf{T}$ может быть показана их подстановкой в матричные уравнения, соответствующие сингулярным представлениям грамианов управляемости и наблюдаемости в исходной и преобразованной системах координат:

$$\hat{\mathbf{G}}_c = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}_c \boldsymbol{\Sigma}_c \mathbf{U}_c^T \mathbf{T}^{-T} = \hat{\mathbf{U}}_c \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_c \hat{\mathbf{U}}_c^T,$$

$$\hat{\mathbf{G}}_o = \mathbf{T}^T \mathbf{V}_o \boldsymbol{\Sigma}_o \mathbf{V}_o^T \mathbf{T} = \hat{\mathbf{V}}_o \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_o \hat{\mathbf{V}}_o^T.$$

Для определения значений матриц преобразования $\mathbf{T}$, согласно (2.3), (2.4), требуются новые значения матриц $\hat{\mathbf{U}}_c$ и $\hat{\mathbf{V}}_o$, точные значения которых могут быть получены только после сингулярных разложений грамианов в новой системе координат. В качестве выхода из этой ситуации предлагается организация пошаговой итерационной процедуры, согласно которой изменениями структуры объекта в пределах одного (малого) шага коррекции сингулярных чисел грамианов пренебрегают, полагая $\hat{\mathbf{U}}_c = \mathbf{U}_c$ и $\hat{\mathbf{V}}_o = \mathbf{V}_o$, но изменяя значения обеих матриц после завершения преобразования подобия (2.2) и сингулярного разложения (2.1) на следующем шаге расчета.

Предлагаемая процедура коррекции системных свойств объекта реализуется путем изменения его параметров или введения в его структуру дополнительных прямых и обратных связей, формируемых предрегулятором, который описывается соответствующими матрицами:

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}' = \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}' = \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}.$$

Новая версия ПР рассчитывается по скорректированной предрегулятором ПФ объекта, определяемой следующим образом

$$\hat{H}(s) = \hat{\mathbf{C}}'(\mathbf{I} - s\hat{\mathbf{A}}')^{-1}\hat{\mathbf{B}}' = \hat{B}(s)/\hat{A}(s),$$

где $\hat{\mathbf{A}}' = \mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{E}_1$, $\hat{\mathbf{B}}' = \mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{E}_2$, $\hat{\mathbf{C}}' = \mathbf{C} + \mathbf{C}'\mathbf{E}_3$; $\hat{B}(s)$, $\hat{A}(s)$ – новые полиномы ПФ скорректированной модели ОУ.

Поскольку в расчете не накладывается ограничение на изменение передаточной функции $H(s)$ и матриц $\mathbf{U}_c$, $\mathbf{V}_o$ исходного объекта, то для получения желаемых сингулярных чисел $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_c$ и $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_o$ можно варьировать только часть элементов матриц $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{C}'$, задаваемых соответствующими двоичными матрицами-масками $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ путем поэлементного умножения.

С учетом особенностей ОУ следует проанализировать возможность воздействия не на все, а только на одну или две из указанных матриц для минимизации структуры синтезируемого предрегулятора. Разработанная процедура формирует основу для синтеза основного ПР, позволяющего обеспечить существенное улучшение робастных свойств создаваемых САУ.

3. Структурно-параметрический синтез робастных систем с ПР. На базе предложенной комплексной процедуры улучшения системных свойств управляемого объекта был разработан и реализован алгоритм автоматизированного синтеза робастных систем управления с динамическими регуляторами, содержащий этапы анализа, преобразования матричной модели объекта и синтеза основного ПР методом полиномиального модального управления, поясняемый блок-схемой на рис. 2.

На начальном этапе (блок 1) задаются матрицы объекта и интервалы их варьирования, формируется желаемый ХП синтезируемой САУ и двоичные матрицы-маски, определяющие допустимые вариации элементов матриц расчетной модели ОУ. Затем (блок 2) определяются передаточная функция “входа-выхода” объекта, ее нули и полюсы; оцениваются степени управляемости, наблюдаемости и вырожденности ОУ, вычисляются грамианы управляемости и наблюдаемости, а также выполняются сингулярные разложения грамианов. Далее (блок 3) осуществляется первая попытка синтеза ПР по исходной модели ОУ, т.е. рассчитываются параметры полиномов регулятора, и методом вычислительных экспериментов определяются матричные интервалы сохранения робастной устойчивости и желаемых показателей качества синтезированной САУ.

На первом этапе основного итерационного цикла (блок 4) проверяется условие достижения требуемых робастных свойств системы. При его выполнении процедура синтеза САУ завершается

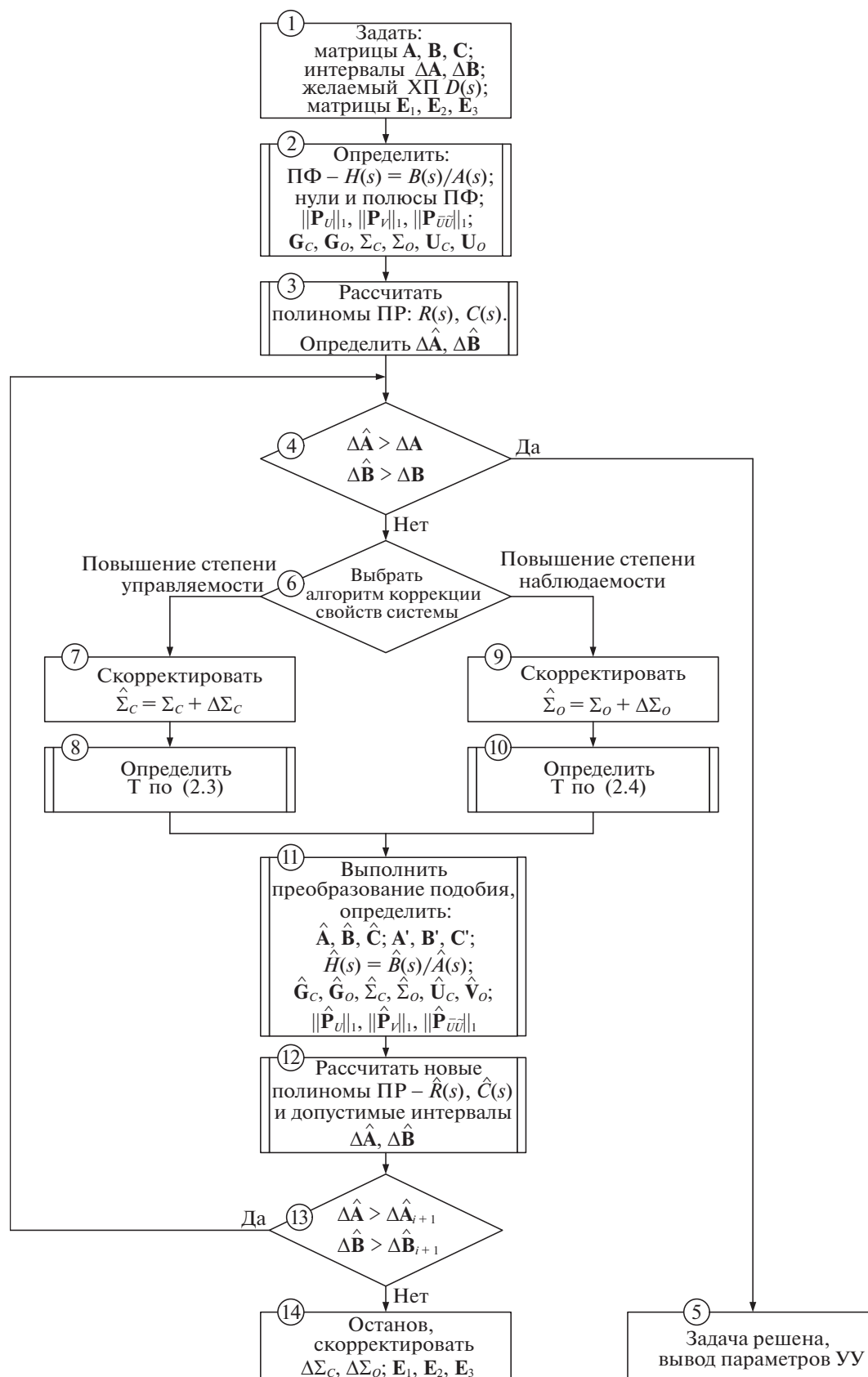


Рис. 2. Алгоритм структурно-параметрического синтеза робастной системы управления

(блок 5), и задача считается решенной. В противоположном случае инициируется алгоритм коррекции системных свойств объекта.

На этом этапе автоматизированного синтеза САУ (блок 6) разработчик, основываясь на результатах анализа свойств ОУ и предыдущих расчетов, должен задать направление коррекции системных свойств объекта (повышение управляемости или наблюдаемости). При этом в первом случае корректировке подвергаются сингулярные числа грамиана управляемости (блок 7), более подробно описанной в [11], после чего по формуле (2.3) определяется соответствующее численное выражение матрицы преобразования координат (блок 8). Во втором случае аналогичным образом корректируются сингулярные числа грамиана наблюдаемости (блок 9), а нахождение матрицы преобразования подобия (блок 10) осуществляется по формуле (2.4).

На основе полученной любым из методов матрицы координатного преобразования в блоке 11 определяют новые (преобразованные) выражения матриц объекта, его передаточной функции, корректирующих матриц предрегулятора, грамианов управляемости и наблюдаемости, а также элементов их сингулярных разложений. Затем (блок 12) по полученным выражениям полиномов преобразованной ПФ рассчитывают новые выражения полиномов ПР и методом вычислительного эксперимента определяют допустимые матричные интервалы сохранения заданных свойств синтезированной САУ.

В завершение каждого шага основного итерационного цикла (блок 13) осуществляется оценка его успешности и целесообразности последующих итераций или необходимости останова для корректировки условий задачи, прежде всего назначением новых значений ступеней изменений сингулярных чисел или выражений двоичных матричных масок. При этом решение о прекращении расчетов принимается в том случае, если значения матричных интервалов, обусловленных вариациями параметров ОУ, оказываются меньшими их значений, полученных на предыдущем итерационном шаге, и задача робастного синтеза оказывается нерешенной.

Для продолжения расчета осуществляется возврат к началу основного итерационного цикла (блок 4) с последующим повтором расчетных процедур в случае малых значений робастных интервалов или переходу к заключительному этапу (блок 15) при достижении требуемых робастных свойств синтезированной САУ с выводом параметров синтезированного управляющего устройства (УУ).

Следует отметить, что при синтезе систем с ПР, в отличие от САУ с РС, имеются два пути улучшения робастных свойств – через повышение управляемости и наблюдаемости, что расширяет функциональные возможности разработчика. Однако у таких систем, как правило, не все координаты состояния ОУ являются доступными для измерения, что затрудняет коррекцию его системных свойств и требует решения проблемы формирования корректирующих предрегуляторов.

Для иллюстрации разработанного метода синтеза робастных САУ с ПР и определения путей преодоления указанных трудностей рассмотрим конкретные примеры его применения для объектов различной степени сложности, использованных ранее в [11, 18, 19].

П р и м е р. Рассмотрим процедуру синтеза робастной САУ с ПР для двухканального объекта третьего порядка [11], матрицы которого с учетом возможных вариаций параметров имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} \pm \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \pm 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1].$$

Примем в качестве желаемого ХП полином Ньютона $D(s) = (s + 15.5)^3$, определяющий требования к быстродействию и качеству переходных процессов синтезируемой САУ при номинальных значениях параметров ОУ. Требуется обеспечить сохранение апериодического характера переходных процессов с изменениями быстродействия не более 10% в заданных интервалах вариаций параметров объекта и 20%-ных вариациях собственных параметров регулятора.

Предположим, что для управления данным ОУ доступны первая и третья координаты состояния и возможно дополнительное воздействие по второму каналу. В этом случае двоичные

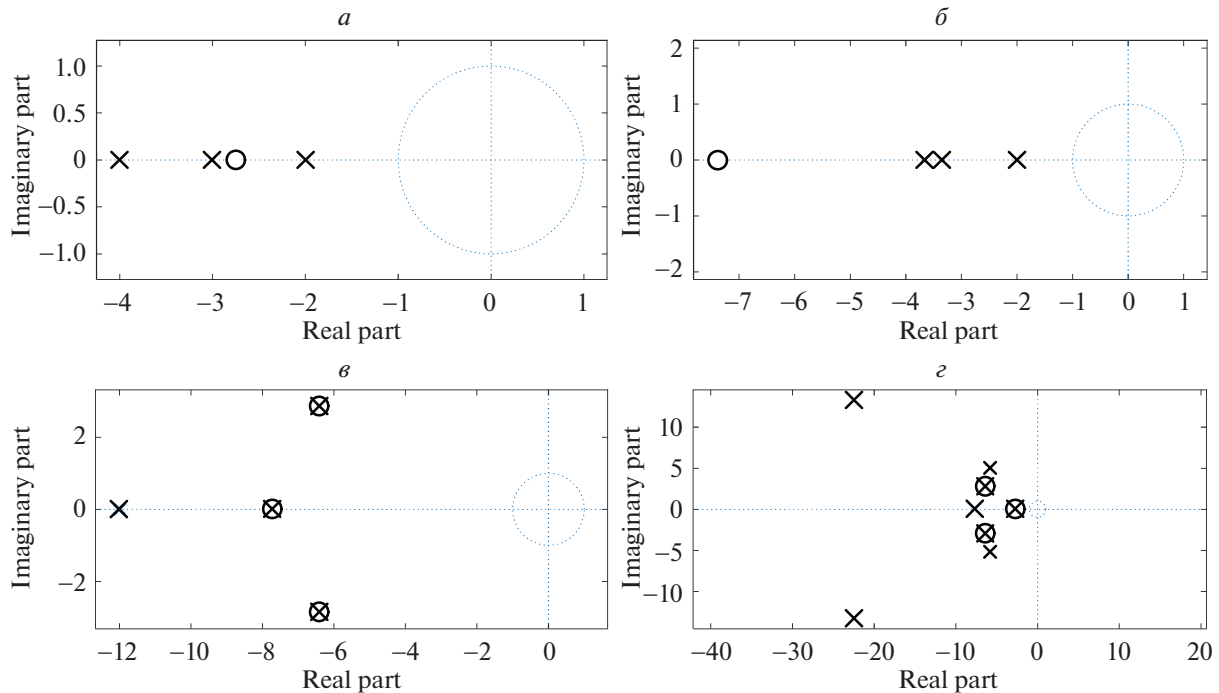


Рис. 3. Распределение нулей и полюсов: *a* – исходного ОУ; *б* – скорректированного ОУ; *в* – синтезированной САУ; *г* – САУ после отключения предрегулятора

матричные маски $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$, определяющие доступные для коррекции элементы матрицы $\mathbf{A}$ (матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ не меняются), задаются как

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчет передаточной функции заданного ОУ приводит к следующим выражениям ее полиномов с соответствующими значениями нуля и полюсов, представленными на рис. 3, *a*:

$$B(s) = 1.6s + 4.4, \quad A(s) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24.$$

Количественные показатели управляемости, наблюдаемости и вырожденности ОУ приобретают следующие числовые значения: $\|\mathbf{P}_U\|_1 = 31.5$, $\|\mathbf{P}_V\|_1 = 33.5$, $\|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 220.17$, свидетельствуя о низком уровне системных свойств заданного объекта и проблемах достижения робастного управления.

Расчет и последующее сингулярное разложение грамианов дают результаты:

$$\mathbf{\Sigma}_c = \text{diag}\{2.43, 1.37 \times 10^{-2}, 1.28 \times 10^{-4}\},$$

$$\mathbf{\Sigma}_o = \text{diag}\{0.126, 1.63 \times 10^{-3}, 1.47 \times 10^{-5}\};$$

$$\mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} -0.963 & 0.115 & -0.244 \\ -0.257 & -0.664 & 0.703 \\ -0.081 & 0.739 & 0.669 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} -0.067 & -0.818 & -0.571 \\ -0.058 & -0.568 & 0.821 \\ -0.996 & 0.088 & -0.009 \end{bmatrix}.$$

Полученные распределения сингулярных чисел грамианов с многократным отличием их меньших значений также подтверждают тенденцию объекта к вырождению с потерей управляемости и наблюдаемости.

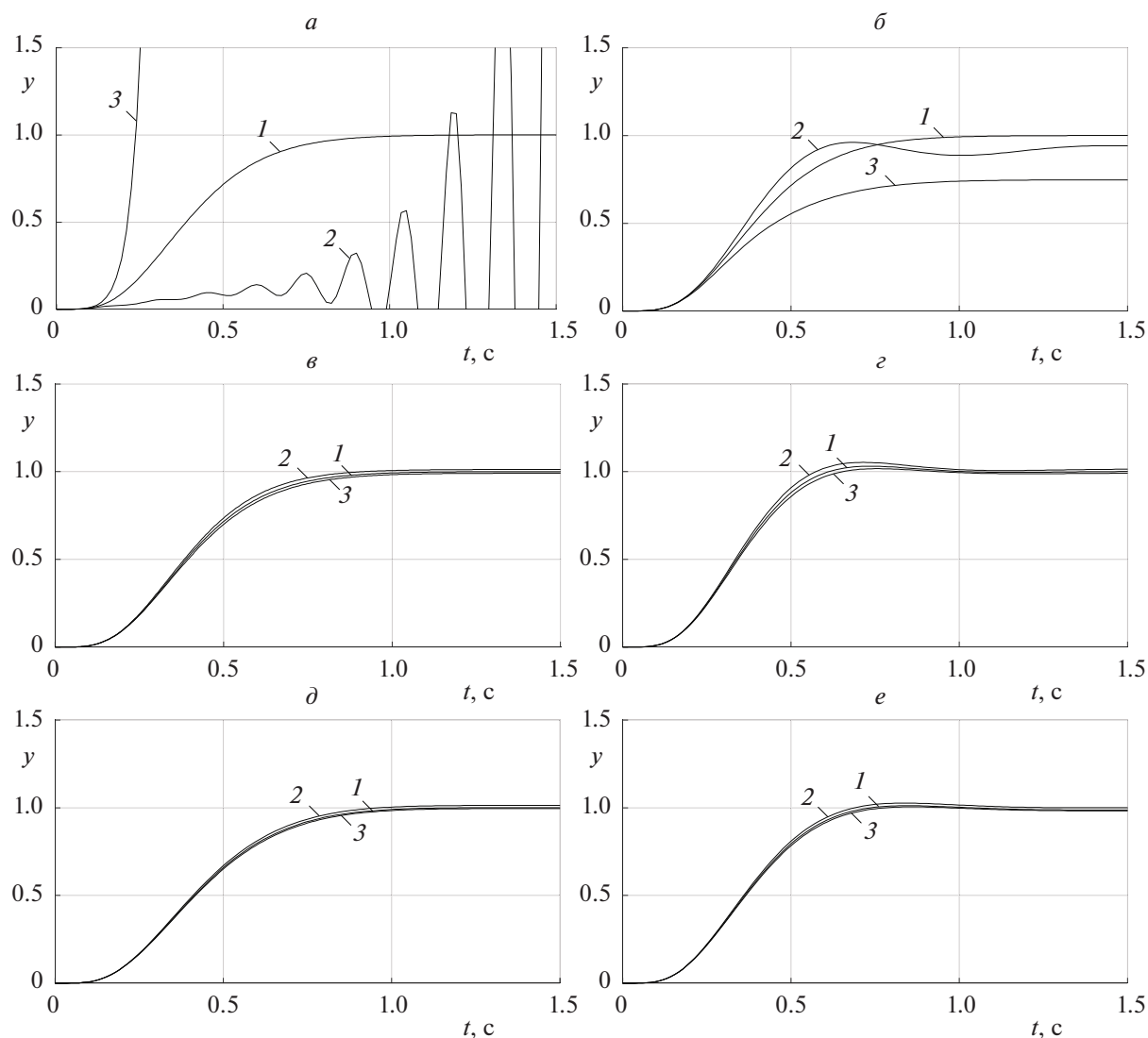


Рис. 4. Переходные характеристики систем 1–3 соответственно при номинальных параметрах ОУ и при их максимальных отклонениях в положительном и отрицательном направлениях: *a* – исходной САУ с ПР; *б* – САУ после коррекции минимального сингулярного числа грамиана наблюдаемости; *в* – синтезированной САУ; *г* – САУ при вариации параметров регулятора в пределах $\pm 20\%$; *д* – САУ после отключения предрегулятора; *е* – САУ после отключения предрегулятора при вариации параметров регулятора в пределах $\pm 20\%$

Как следствие, полученные при синтезе выражения полиномов регулятора

$$R(s) = 1.811 \times 10^5 s^2 + 1.136 \times 10^6 s + 1.632 \times 10^6,$$

$$C(s) = s^2 + 51s - 2.888 \times 10^5$$

приобретают коэффициенты разного знака, что придает ему неминимально-фазовый (неустойчивый) характер и, как свидетельствуют переходные характеристики на рис. 4, *a*, не позволяет обеспечить желаемые робастные свойства системы при заданных вариациях параметров.

Итерационная коррекция минимального сингулярного числа грамиана наблюдаемости по изложенной методике с шагом $\Delta \Sigma_o = 1.34 \times 10^{-5}$ позволяет в определенной мере улучшить системные свойства ОУ и робастные свойства полученной САУ за счет формирования нового распределения сингулярных чисел обоих грамианов соответствующим предрегулятором, изменения ПФ объекта и синтеза новой версии ПР:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_c &= \text{diag}\{3.59, 1.69 \times 10^{-1}, 3.64 \times 10^{-5}\}, \\
\hat{\Sigma}_o &= \text{diag}\{0.126, 3.9 \times 10^{-3}, 6.84 \times 10^{-5}\}, \\
\|\mathbf{P}_U\|_1 &= 90.34, \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = 19.58, \quad \|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 189.62, \\
\hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 2.255 & -9.684 & 0.267 \\ 2.289 & -7.159 & 0.096 \\ -1.118 & 4.516 & -4.095 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 4.255 & -9.684 & 0.267 \\ 2.289 & -4.159 & 0.096 \\ -1.518 & 4.116 & -0.095 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}' \circ \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.289 & 0 & 0.096 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\hat{B}(s) &= 1.6s + 7.2, \quad \hat{A}(s) = s^3 + 9s^2 + 25.96s + 23.92, \\
\hat{R}(s) &= 9.967 \times 10^3 s^2 + 4.976 \times 10^4 s + 8.499 \times 10^4, \\
\hat{C}(s) &= s^2 + 51s - 1.499 \times 10^4.
\end{aligned}$$

Однако, как показывают переходные характеристики на рис. 4, б, поставленную задачу синтеза робастной САУ с ПР нельзя признать решенной.

Дополнительная коррекция минимального сингулярного числа грамиана управляемости с шагом $\Delta \Sigma_c = 1.25 \times 10^{-4}$ позволяет существенно улучшить системные свойства ОУ и окончательно сформировать управляющее устройство, позволяющее обеспечить требуемое качество САУ:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_c &= \text{diag}\{9.59, 0.541, 2.54 \times 10^{-3}\}, \\
\hat{\Sigma}_o &= \text{diag}\{0.127, 1.14 \times 10^{-2}, 1.17 \times 10^{-4}\}, \\
\|\mathbf{P}_U\|_1 &= 10.15, \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = 16.13, \quad \|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 13.97, \\
\hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} -2.152 & 0.081 & -0.119 \\ 6.608 & -3.101 & -0.612 \\ -0.914 & 0.913 & -3.074 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0.152 & 0.081 & -0.119 \\ 6.608 & -0.101 & -0.612 \\ -1.314 & 0.513 & 0.926 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}' \circ \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6.608 & 0 & -0.612 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\hat{B}(s) &= 1.6s + 12.33, \quad \hat{A}(s) = s^3 + 9s^2 + 26.24s + 24.48, \\
\hat{R}(s) &= 397.16s^2 + 5.09 \times 10^3 s + 1.95 \times 10^4, \\
\hat{C}(s) &= s^2 + 51s + 319.31.
\end{aligned}$$

Новые распределения нуля и полюсов скорректированного объекта и синтезированной САУ представлены соответственно на рис. 3, б, в. Приведенные на рис. 4, в переходные характеристики синтезированной системы при номинальных и варьированных значениях параметров ОУ иллюстрируют полное решение поставленной задачи. Сохранение достигнутого результата при вариациях собственных параметров регулятора в пределах $\pm 20\%$, превышающих возможные погрешности как при его цифровой, так и при аналоговой реализации, подтверждают соответствующие переходные характеристики на рис. 4, в.

Таким образом, возможность коррекции как управляемости, так и наблюдаемости ОУ позволяет в данном примере достичь желаемого уровня робастности САУ, даже при отсутствии возможности контроля одной из трех координат состояния.

Аналогичный пример успешного синтеза более сложной робастной системы полиномиального управления натяжением упругого длинномерного материала в составе технологического

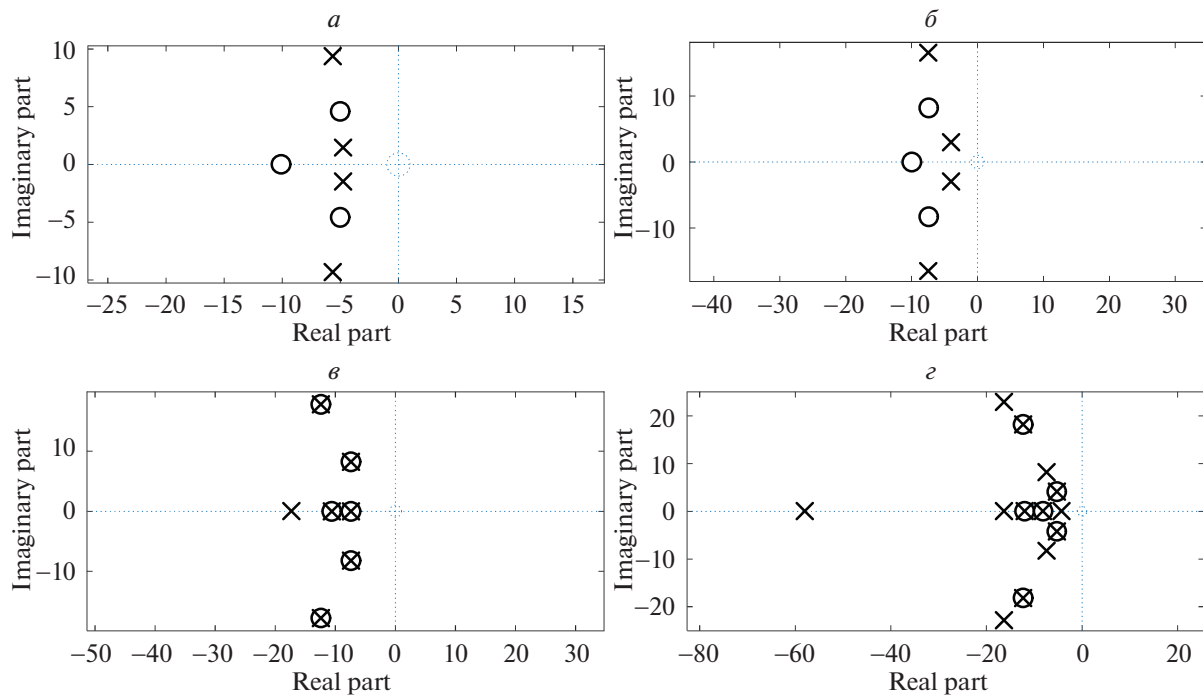


Рис. 5. Распределение нулей и полюсов: *a* — исходного ОУ; *б* — скорректированного ОУ; *в* — синтезированной САУ; *г* — САУ после отключения предрегулятора

агрегата приведен в Приложении. Однако во всех случаях остается открытым вопрос о том, как обеспечить необходимое улучшение системных свойств ОУ в наиболее типичном для САУ с ПР “входа-выхода” в случае контроля только одной — выходной (регулируемой) координаты объекта.

4. Синтез робастных САУ с ПР по улучшенной расчетной модели объекта. Попытки улучшения робастных свойств САУ с динамическими регуляторами, использующими ограниченный состав переменных состояния ОУ или только одну — выходную координату без применения полноразмерных наблюдателей состояния, которые направили бы разработчика в другой класс систем с новой проблематикой, привели к довольно неожиданному результату. Была выявлена возможность исключения из состава робастной САУ, синтезированной разработанным методом, отдельных связей, формируемых предрегулятором, или полного отключения последнего с незначительным изменением достигнутого результата, т.е. сохранением требуемых показателей качества в заданных интервалах робастности.

В качестве иллюстрации, в дополнение к примеру 1, на рис. 3, *г* приведено новое распределение полюсов синтезированной САУ, формируемое после отключения предрегулятора, а на рис. 4, *д*, *е* — соответствующие переходные характеристики системы в заданных интервалах изменения параметров ОУ и ПР. Важно отметить, что нуль системы возвращается при этом в исходное состояние, определяемое нулем объекта.

Сравнительный анализ полученных результатов показывает, что система, синтезированная по улучшенной в отношении управляемости, наблюдаемости и вырожденности расчетной модели объекта, в значительной мере сохраняет достигнутые показатели качества даже без использования в ее реальной структуре того предрегулятора, который обеспечил улучшение системных свойств модели объекта при синтезе САУ.

Для оценки степени общности выявленного эффекта были проведены аналогичные вычислительные эксперименты с объектом и системами из Приложения. Результаты, полученные при формировании управлений объектом более высокого порядка с более сложным распределением нулей и полюсов, представленные на рис. 5, также подтверждают наличие указанной закономерности.

Кроме этого, были проведены аналогичные исследования в отношении синтезированных ранее [11, 17, 18] робастных систем с безынерционными регуляторами состояния, которые также

показали возможность в значительной степени сохранять достигнутые результаты при исключении корректирующих модели ОУ предрегуляторов из реальных систем управления.

Однако кажущийся парадоксальным результат имеет тем не менее вполне логичные объяснения. Действительно, при синтезе регуляторов робастных систем расчет обычно ведется по исходной модели ОУ с номинальными значениями параметров. Но при успешном решении задачи система оказывается способной обеспечить требуемые показатели качества при значительных параметрических вариациях реального ОУ, и это не считается парадоксальным. В разработанном методе синтез основного регулятора осуществляется по модели ОУ с предрегулятором, т.е. по улучшенной расчетной модели объекта. В таком случае достижение робастных свойств полученной САУ также допускает значительные изменения расчетной модели, в том числе частичное или полное исключение из нее корректирующего предрегулятора при переходе к управлению реальным объектом.

Выявленной закономерности можно дать и соответствующее “энергетическое” объяснение. При синтезе робастных САУ улучшение системных свойств ОУ достигается коррекцией меньших сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости, т.е. относительно малыми энергетическими воздействиями на объект, формируемыми предрегуляторами. Однако этого оказывается вполне достаточно для сохранения робастных свойств системы при малых энергетических изменениях в объекте относительно расчетной модели, вызываемых отключением корректирующего предрегулятора.

Следует также отметить, что выявленные закономерности вполне согласуются с результатами более ранних исследований в области робастного модального управления. Так при формировании оптимального управления мехатронными системами по обобщенному критерию точности, быстродействия, робастности и энергетических затрат на управление [19] было показано, что близкие переходные характеристики САУ могут наблюдаться при существенно различных параметрах регулятора и показателей робастности. В [20] значительное улучшение робастных свойств мехатронных систем как с безынерционными РС, так и с ПР достигалось принудительными изменениями отдельных параметров регуляторов, синтезированных по номинальным параметрам объекта, и сопровождалось малыми вариациями переходных характеристик САУ. А в исследованиях [21], посвященных выявлению взаимосвязи степени вырожденности ОУ с робастными свойствами САУ, было установлено, что при повышении различий близких нулей и полюсов (размеров диполей) всего лишь до 10–15% вырожденность объектов резко снижается, что существенно облегчает достижение заданных робастных свойств синтезируемых систем малыми структурно-параметрическими воздействиями на исходный ОУ.

Синтез САУ по улучшенной модели объекта можно рассматривать как одну из версий более общего метода М.М. Лаврентьева, разработанного в [22] для решения некорректных задач путем замены исходного уравнения близким ему корректным уравнением и использованного позднее, например в [23, 24].

Таким образом, полученные результаты работы согласуются с логикой и свойствами робастного управления и являются вполне закономерными. Более того, они предоставляют разработчику САУ новые творческие возможности улучшения их робастных свойств за счет использования виртуальных каналов управления и связей, т.е. таких корректировок матриц **A**, **B** и **C**, которые могут присутствовать только в расчетной модели объекта для улучшения ее системных свойств, но не применяться в реальной системе.

Так, в расчетном примере может быть сделано допущение об использовании в предрегуляторе всех координат состояния объекта. Применение разработанного метода позволяет получить следующие результаты расчета:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = [0 \ 0 \ 0].$$

$$\hat{\Sigma}_c = \text{diag}\{2.77, 1.08 \times 10^{-3}, 2.89 \times 10^{-3}\},$$

$$\hat{\Sigma}_o = \text{diag}\{0.145, 2.48 \times 10^{-3}, 3.81 \times 10^{-5}\},$$

$$\|\mathbf{P}_U\|_1 = 5.04, \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = 24.43, \quad \|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 30.99,$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2.005 & 0.008 & 0.014 \\ 3.689 & -9.382 & -10.943 \\ 0.383 & 0.414 & -3.926 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.008 & 0.014 \\ 3.689 & -6.382 & -10.943 \\ -0.017 & 0.014 & 0.074 \end{bmatrix},$$

$$A' \circ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.689 & -6.382 & -10.943 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}(s) = 1.6s + 12.88, \quad \hat{A}(s) = s^3 + 12.38s^2 + 50.66s + 59.79,$$

$$\hat{R}(s) = 309.63s^2 + 4.41 \times 10^3 s + 1.79 \times 10^4,$$

$$\hat{C}(s) = s^2 + 47.62s + 304.37.$$

Соответствующие переходные характеристики синтезированной САУ, полученные как при наличии, так и при отсутствии в ее структуре корректирующего предрегулятора, оказываются аналогичными приведенным на рис. 4, в, г, что также свидетельствует об успешном решении поставленной задачи робастного управления.

В результате анализа разработанного метода синтеза управления по улучшенной модели объекта, условно названного методом СУМО, неизбежно возникает вопрос о целесообразности его наполнения итерационной грамианной коррекцией модели ОУ с помощью достаточно сложных матричных вычислений.

Казалось бы, для успешного синтеза эффективного ПР можно использовать метод модально-го управления, задав желаемое распределение полюсов, которое формируется в системе после отключения предрегулятора (рис. 3, з и 5, з). Однако при этом остается неясным, как отыскать это распределение и с какими значениями нулей его применять при синтезе регулятора, ведь информация о них оказывается утраченной после отключения предрегулятора.

Безусловно, можно организовать процедуру оптимального поиска такого распределения нулей и полюсов, но это потребует разрешения соответствующей проблематики: формирование обобщенного критерия оптимальности с определенной схемой компромиссов между частными критериями, поиск эффективного метода оптимизации с хорошей сходимостью и возможностью надежного отыскания глобального экстремума и др. Попытки обойти эти трудности применением регулярного сканирования с полным перебором возможных значений как нулей, так и полюсов в довольно широкой области действительных и комплексных чисел с малым значением шага потребуют больших вычислительных затрат при повышении порядка ОУ. Кроме того, в этом случае будут утрачены потенциальные возможности улучшения качества управления редуцированным предрегулятором с использованием доступных координат реального объекта.

Попытки заменить поиск желаемых нулей и полюсов непосредственным поиском соответствующих параметров ПР порождают аналогичные проблемы и могут приводить к определенным потерям качества управления.

В то же время с помощью разработанного грамианного подхода, дополненного возможностями метода СУМО, можно осуществлять целенаправленное улучшение системных свойств объекта с контролем степени управляемости, наблюдаемости и вырожденности на каждом этапе расчета и обеспечивать более оперативное решение задач робастного управления с заданными показателями качества. Применение разработанного программного обеспечения, реализующего автоматизацию расчетных процедур с использованием стандартных матричных библиотек, а также наглядное представление результатов позволяют выполнять структурно-параметрический синтез робастных САУ за несколько секунд машинного времени на обычном персональном компьютере средней вычислительной мощности.

Безусловно, для успешного решения задачи синтеза робастной САУ разработанным методом в расчетной модели ОУ должны содержаться потенциальные возможности необходимого повышения степени управляемости и наблюдаемости, которые выявляются и эффективно используются в ходе выполняемых матрично-грамианных и полиномиальных расчетов.

Заключение. Успешное решение задачи структурно-параметрического синтеза робастных систем управления с полиномиальными регуляторами, способных обеспечивать и сохранять желаемые показатели качества в заданных пределах изменения параметров объекта и регулятора, может быть достигнуто разработанным методом путем предварительной итерационной коррекции

сингулярных чисел грамианов управляемости и наблюдаемости, формирования соответствующего предрегулятора, преобразующего структуру и параметры расчетной модели объекта в направлении улучшения системных свойств, синтеза основного регулятора по улучшенной модели ОУ и редуцирования корректирующего предрегулятора исходя из имеющихся возможностей управления реальным объектом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проведем синтез робастной системы управления натяжением упругого длинномерного материала в зоне транспортирования поточной линии с помощью ПР.

Матрицы объекта управления, аналогичные использованным ранее в [11], имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} \pm \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -0.1 \pm 0.02 \\ 0.667 & -0.667 & -0.667 & 0.033 \pm 0.007 \\ -7.5 & -7.5 & -8 & 0 \\ 750 \pm 150 & 750 \pm 150 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1500 \ 1500 \ 0 \ 0].$$

В качестве желаемого ХП, определяющего требования к быстродействию и качеству управления синтезируемой САУ при номинальных параметрах ОУ, примем полином Ньютона $D(s) = (s + 17.3)^4$. Требуется обеспечить сохранение апериодического характера переходных процессов с допустимым отклонением быстродействия в пределах 10% при заданных вариациях параметров объекта и 20%-ных изменениях собственных параметров регулятора.

Предположим, что кроме выходного сигнала для измерения доступны все координаты состояния и возможны дополнительные воздействия на производные первой, второй и третьей координат. Таким образом, двоичные матричные маски могут быть заданы в виде

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Расчет ПФ объекта управления дает следующие выражения ее полиномов:

$$B(s) = 10^3 s^3 + 2 \times 10^4 s^2 + 1.46 \times 10^5 s + 4.6 \times 10^5,$$

$$A(s) = s^4 + 20.667 s^3 + 249.33 s^2 + 1.397 \times 10^3 s + 2.91 \times 10^3$$

с соответствующим распределением нулей и полюсов, представленным на рис. 5, а.

Значения показателей управляемости, наблюдаемости и вырожденности ОУ будут следующими:

$$\|\mathbf{P}_U\|_1 = 1.5, \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = 245.5, \quad \|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 1958.9.$$

В результате расчета и сингулярного разложения грамианов управляемости и наблюдаемости получаем

$$\hat{\Sigma}_c = \text{diag}\{134.21, 4.92 \times 10^{-2}, 1.24 \times 10^{-2}, 8.64 \times 10^{-4}\},$$

$$\hat{\Sigma}_o = \text{diag}\{3.88 \times 10^5, 1.29 \times 10^4, 8.64 \times 10^2, 1.56 \times 10^{-1}\}.$$

Найденные результаты дают основания прогнозировать низкую параметрическую грубость синтезируемой системы.

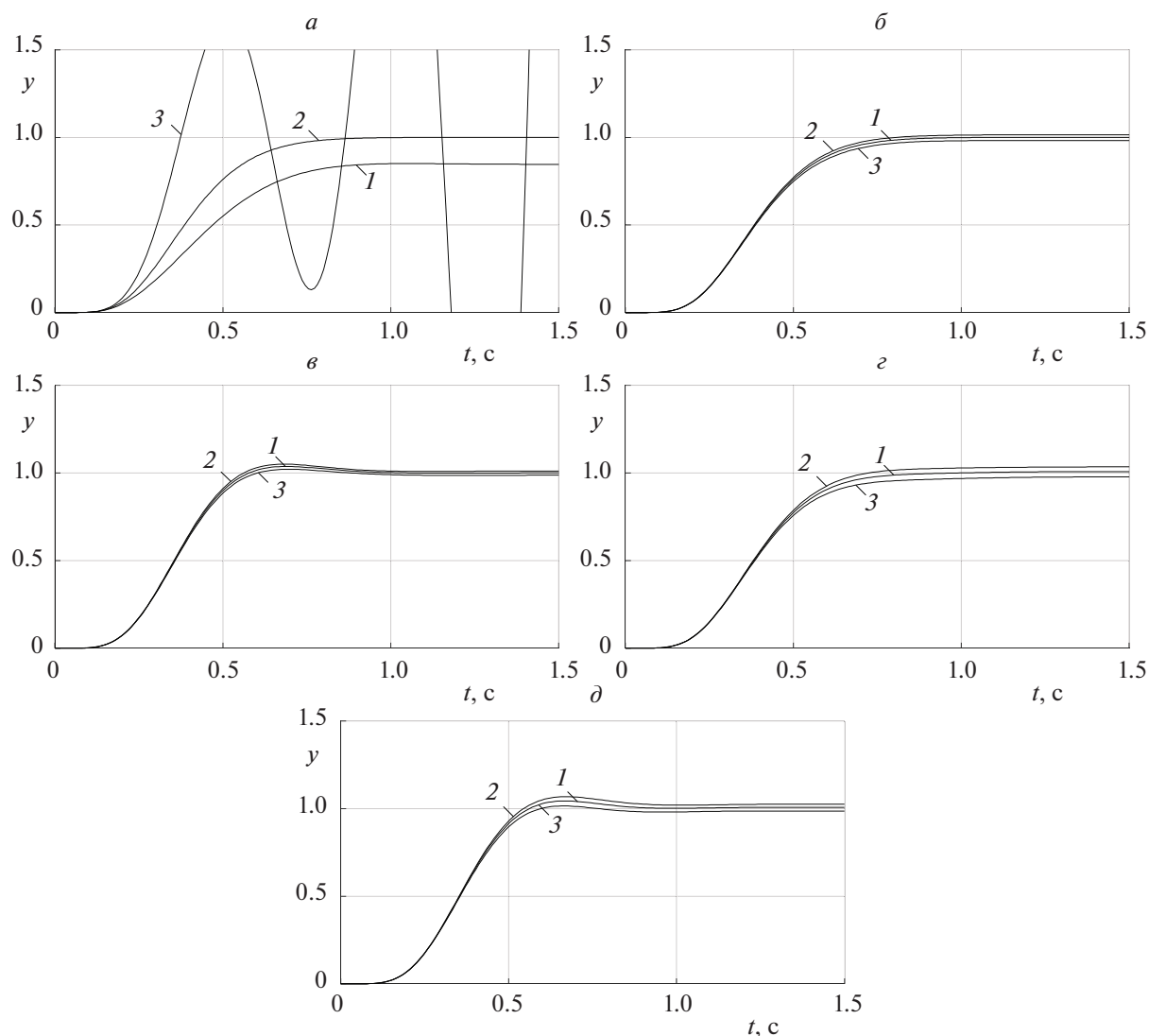


Рис. 6. Переходные характеристики для систем 1–3 соответственно при номинальных параметрах ОУ и при их максимальных отклонениях в положительном и отрицательном направлениях: *а* – исходной САУ с ПР; *б* – синтезированной САУ; *в* – САУ при вариации параметров регулятора в пределах $\pm 20\%$; *г* – САУ после отключения предрегулятора; *д* – САУ после отключения предрегулятора при вариации параметров регулятора в пределах $\pm 20\%$

Действительно, расчет полиномов ПР свидетельствует о его неминимально-фазовом (неустойчивом) характере:

$$R(s) = 1.77s^3 + 30.68s^2 + 338.97s + 1577.04,$$

$$C(s) = s^3 - 1.67 \times 10^3 s^2 - 2.55 \times 10^4 s - 8.69 \times 10^4,$$

что, как показывают соответствующие переходные характеристики на рис. 6, *а*, не позволяет обеспечить желаемые робастные свойства синтезированной САУ.

Итерационная коррекция сингулярных чисел обоих грамианов, выполненная разработанным методом, дает возможность существенно улучшить системные свойства объекта:

$$\hat{\Sigma}_e = \text{diag}\{109.49, 4.4 \times 10^{-2}, 9.51 \times 10^{-3}, 4.29 \times 10^{-3}\},$$

$$\hat{\Sigma}_o = \text{diag}\{2.54 \times 10^5, 2.81 \times 10^4, 2.65 \times 10^3, 0.903\},$$

$$\|\mathbf{P}_U\|_1 = 1.5, \quad \|\mathbf{P}_V\|_1 = 60.98, \quad \|\mathbf{P}_{UV}\|_1 = 1889.57,$$

за счет использования соответствующего предрегулятора:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -3.332 & 6.638 & 4.937 & -0.339 \\ -2.204 & -4.69 & -1.258 & 0.037 \\ -7.478 & 7.502 & -4.89 & 0.001 \\ 748.188 & 750.111 & -0.198 & -10.001 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1.332 & 6.638 & 2.937 & -0.239 \\ -2.871 & -4.023 & -0.591 & 0.004 \\ 0.022 & 15.002 & 3.11 & 0.001 \\ -1.812 & 0.111 & -0.198 & -0.001 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}' \circ \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -1.332 & 6.64 & 2.937 & -0.239 \\ -2.87 & -4.022 & -0.591 & 0.07 \\ 0 & 0 & 3.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это позволяет изменить расчетную модель ОУ:

$$\hat{A}(s) = s^4 + 22.91s^3 + 471.95s^2 + 3.01 \times 10^3 s + 8.25 \times 10^3,$$

$$\hat{B}(s) = 1000s^3 + 2.49 \times 10^4 s^2 + 2.71 \times 10^5 s + 1.23 \times 10^6,$$

распределение нулей и полюсов (рис. 5, б) и сформировать новое управляющее устройство с полиномами ПФ:

$$\hat{R}(s) = 9.5 \times 10^{-2} s^3 + 3.07s^2 + 63.66s + 352.24,$$

$$\hat{C}(s) = s^3 + 3.53s^2 + 304.94s + 3.78 \times 10^3,$$

обеспечивающее полное решение поставленной задачи в отношении распределения полюсов (рис. 5, в) и достижения заданных робастных свойств синтезированной САУ (рис. 6, б, в).

Принимая во внимание сложность измерения координат состояния ОУ и ориентируясь на возможности метода СУМО, исключим из состава синтезированной САУ сформированный предрегулятор. Новое распределение нулей и полюсов системы, образующееся после отключения предрегулятора, показано на рис. 5, г.

Из анализа соответствующих переходных характеристик САУ (рис. 6, г, д), полученных при заданных вариациях параметров объекта и самого регулятора, синтезированного по улучшенной модели ОУ, следует, что, несмотря на редуцирование управляющего устройства, система в значительной мере сохраняет достигнутые показатели качества и обеспечивает решение поставленной задачи робастного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
2. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.
3. Крутько П.Д. Полиномиальные уравнения и обратные задачи динамики управляемых систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1986. № 1. С. 125–133.
4. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) / М.: Физматлит, 2012. 360 с.
5. Тарарыкин С.В., Тютиков В.В. Робастное модальное управление динамическими системами // Изв. РАН. АиТ. 2002. № 5. С. 41–55.
6. Поляк Б.Т. Международный симпозиум “Робастность в идентификации и управлении” // А и Т. 1999. № 8. С. 185–193.
7. Подкучаев В.А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
8. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

9. Анисимов А.А., Котов Д.Г., Тарарыкин С.В. и др. Анализ параметрической чувствительности и структурная оптимизация систем модального управления с регулятором состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 58–72.
10. Анисимов А.А., Тарарыкин С.В. Особенности синтеза параметрически грубых систем модального управления с наблюдателем состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 5. С. 3–14.
11. Анисимов А.А., Тарарыкин С.В. Итерационный метод структурно-параметрического синтеза робастных систем с регулятором состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 42–55.
12. Бойченко В.А., Курдюков А.П., Тимин В.Н., Чайковский М.М., Ядыкин И.Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами. 2007. Вып. 19. С. 23–126.
13. Мироновский Л.А., Соловьев Т.Н. Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // А и Т. 2013. № 4. С. 59–79.
14. Бирюков Д.С., Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Контроль вырождения динамических систем: грамианный подход // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. № 4. С. 34–37.
15. Oder R., McFarlen D. Balanced Canonical Forms for Minimal System: A Normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. 1989. V. 122. P. 23–64.
16. Moore B.C. Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC–26. P. 17–32.
17. Tararykin S.V., Anisimov A.A., Gerasimov A.A. Synthesizing Parametrically Robust Control Systems with State Controllers and Observers Based on Gramian Method // Int. J. Control Autom. Syst. 2019. V. 17. P. 2490–2499.
18. Анисимов А.А., Соколов К.Е., Тарарыкин С.В. Разработка робастной системы управления манипуляционным роботом с использованием аппарата грамианов // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 162–176.
19. Анисимов А.А., Тарарыкин С.В. Структурно-параметрический синтез; оптимизация и настройка систем управления технологическими объектами. Иваново: ФГБОУ ВПО “Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина”, 2015. 296 с.
20. Аполонский В.В., Тарарыкин С.В. Методы структурно-параметрического синтеза робастных систем управления состоянием линеаризуемых динамических объектов. Иваново: ФГБОУ ВО “Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина”, 2018. 168 с.
21. Тютиков В.В., Тарарыкин С.В. Робастное модальное управление технологическими объектами. Иваново: ГОУВ ПО “Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина”, 2006. 256 с.
22. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.
23. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, Физматлит, 1979. 285 с.
24. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность системы управления. М.: Наука. Физматлит, 1981. 464 с.

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-501.2

**СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ ПОНИЖАЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ**

© 2023 г. С. А. Кочетков^{а,*}, О. С. Ткачева^{а,**}, А. В. Уткин^{а,***}

^аИПУ РАН, Россия, Москва

*e-mail: kos@ipu.ru

**e-mail: tkolga17@gmail.com

***e-mail: utkin-av@rambler.ru

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.

После доработки 21.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Разработан нелинейный разрывной закон управления, позволяющий стабилизировать выходное напряжение понижающего преобразователя напряжения в условиях, когда входное напряжение и ток нагрузки неизвестны. Основная идея базируется на использовании так называемых вихревых алгоритмов, обеспечивающих инвариантность по отношению к внешним несогласованным возмущениям. Эффективность разработанных алгоритмов показана с помощью численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0002338823060070, EDN: GRRYVZ

Введение. Преобразователи напряжения широко применяются в технике в качестве источников питания и стабилизаторов напряжения [1–5]. С развитием современных технологий производства электроэнергии на основе ветрогенераторов, солнечных батарей, приливных электростанций их эволюция получила новый виток. Конструкция преобразователя напряжения состоит из накопителя реактивной энергии (индуктивные и емкостные элементы) и коммутационного устройства. С развитием полупроводниковой техники можно исключить механические коммутационные устройства и использовать полупроводниковые диоды, транзисторы и тиристоры с частотой коммутации до нескольких сотен килогерц [1, 6].

Основной проблемой, связанной с управлением полупроводниковыми преобразователями напряжения, является стабилизация выходного напряжения в зависимости от входного напряжения и переменной потребляемой мощности нагрузки [1].

В статье приводится проблема управления выходным напряжением понижающего преобразователя в указанных условиях. Следует отметить, что управляющий вход преобразователя может принимать только два дискретных значения, что соответствует включенному/выключенному состоянию переключающего элемента. Кроме того движения токов в разных контурах в подобных устройствах имеют разнотемповый характер. По этим причинам при синтезе алгоритмов управления можно использовать теорию разрывного управления и принципы разделения движений [7, 8].

Рассматривается синтез нелинейного разрывного закона управления. Разработанный алгоритм управления обеспечивает стабилизацию выходного напряжения при воздействии неизвестных входного напряжения и выходного тока нагрузки. Главная идея основана на так называемом вихревом алгоритме, обеспечивающем свойство инвариантности по отношению к внешним несогласованным возмущениям. Теоретические результаты могут быть реализованы с использованием современных преобразователей широтно-импульсной модуляции. Результаты моделирования показывают эффективность представленных алгоритмов.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводится математическая модель объекта управления и формулируется постановка задачи. Раздел 2 посвящен синтезу нелинейного закона управления, позволяющий стабилизировать выходное напряжение в условиях неизвестных входного напряжения и выходного тока нагрузки. В разд. 3 описываются результаты численного моделирования в среде MATLAB/Simulink, демонстрирующие работоспособность предложенных алгоритмов.

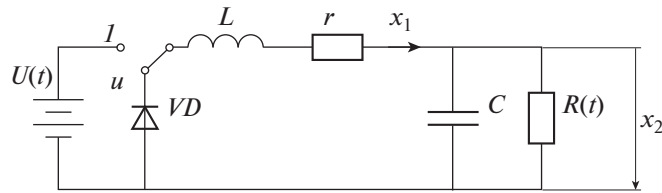


Рис. 1. Упрощенная схема понижающего преобразователя

1. Математическая модель объекта управления. Постановка задачи. Основные конструктивные элементы понижающего преобразователя показаны на рис. 1, где L — индуктивность преобразователя, C — конденсатор, r — электрическое сопротивление обмотки индуктивности, $U(t)$ — входное напряжение (в общем случае функция времени), x_1 — ток в обмотке индуктивности, x_2 — выходное напряжение, $R(t)$ — неизвестная переменная величина электрического сопротивления нагрузки, VD — “защелкивающийся диод”, с помощью которого предотвращается разряд конденсатора через катушку индуктивности и обеспечивается ток только в направлении, указанном на рис. 1.

Математическая модель преобразователя описывается следующей системой дифференциальных уравнений [9]:

$$\dot{x}_1 = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{U(t)}{L}u, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R(t)C}x_2, \quad (1.1)$$

где управление $u(t)$ может принимать значения из дискретного множества $\{0, 1\}$.

В статье для объекта управления сделаны нижеперечисленные допущения.

1. Для неизвестной функции сопротивления нагрузки и ее первых двух производных справедливы следующие ограничения:

$$R(t) \geq R_0, \quad |\dot{R}(t)| \leq R_1, \quad |\ddot{R}(t)| \leq R_2, \quad (1.2)$$

где здесь и далее $|\cdot|$ означает абсолютное значение числа, R_1, R_2 — известные положительные константы.

2. Для входного и желаемого выходного напряжений выполняются неравенства:

$$U_0 \leq U \leq U_1, \quad |\dot{U}(t)| \leq \bar{U}, \quad x_{2d} < \frac{U_0}{1 + (r/R_0)}, \quad (1.3)$$

где $U_0, U_1, \bar{U}$ — известные положительные константы.

3. Помимо защиты от обратного тока имеется схема защиты, принудительно ограничивающая значение тока в катушке преобразователя, и для переменной $x_1(t)$ можно записать неравенство:

$$0 \leq x_1 \leq x_{1\max}, \quad x_{1\max} > \frac{x_{2d}}{R_0}. \quad (1.4)$$

В предположении, что переменная $x_2(t)$ доступна для измерения, в статье ставится задача стабилизации невязки (рассогласования) по выходному напряжению:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}_2(t)| = 0, \quad \bar{x}_2(t) = x_2(t) - x_{2d}, \quad (1.5)$$

где $\bar{x}_2(t)$ — невязка по напряжению, $x_{2d} = \text{const} > 0$ — желаемое значение выходного напряжения.

2. Синтез алгоритма управления. Параметры полупроводникового преобразователя выбирают таким образом, чтобы в системе (1.1) происходило разделение движений по скоростям сходимости. Так, ток в дросселе можно достаточно быстро изменить до нужных значений в отличие от величины выходного напряжения конденсатора, который является достаточно инертным элементом, предназначенным для фильтрации пульсаций выходного напряжения. В силу этих особенностей поставленная задача может быть решена соответствующим изменением тока в обмотке индуктивности. Необходимо отметить, что такой подход используется в связи с проблемой несогласованных возмущений [10].

Согласно (1.1), (1.5), можно записать уравнения системы относительно ошибок:

$$\dot{\bar{x}}_2 = -\frac{\bar{x}_2}{R(t)C} + \frac{1}{C}x_1 - \frac{x_{2d}}{R(t)C}, \quad \dot{x}_1 = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{1}{L}\bar{x}_2 - \frac{1}{L}x_{2d} + \frac{U}{L}u.$$

Для дальнейшего синтеза закона управления рассмотрим новые координаты, в которых удобно исследовать процесс при максимальной нагрузке. Введем новую переменную $\bar{x}_1 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{x_{2d}}{R(t)C}$.

Подставив ее в последнюю систему, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= -\frac{\bar{x}_2}{R(t)C} + \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_1 &= -\frac{r}{L}\bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_2}{LC} - \left(1 + \frac{r}{R_0}\right)\frac{x_{2d}}{LC} + \frac{U}{LC}u + \xi(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\xi(t) = \left(L \frac{\dot{R}}{R^2(t)} + \frac{r}{R_0} - \frac{r}{R(t)} \right) \frac{x_{2d}}{LC}.$$

Для реализации одного из вариантов “вихревого алгоритма” [11, 12] выбираем управляющий вход в виде разрывной функции:

$$u = \frac{1}{2}[1 - \text{sign } \bar{x}_2]. \quad (2.2)$$

Уравнения замкнутой системы, согласно (2.1), (2.2), имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= -\frac{\bar{x}_2}{R(t)C} + \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_1 &= -\frac{r}{L}\bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_2}{LC} - \left(1 + \frac{r}{R_0}\right)\frac{x_{2d}}{LC} + \frac{U}{2LC}[1 - \text{sign } \bar{x}_2] + \xi(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Т е о р е м а. Пусть параметры преобразователя, нагрузки, входного и выходного напряжения выбраны так, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} M^- - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C}\right)\Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} &> 0, \\ M^+ - \frac{\bar{U}}{\alpha LC} - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C}\right)\Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} &> 0, \\ \alpha > \frac{1}{2\gamma R_0 C} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \gamma \right), \quad \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} &> 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M^- &= \left(1 + \frac{r}{R_0}\right)\frac{x_{2d}}{LC}, \quad M^+ = \frac{U_0}{LC} - \left(1 + \frac{r}{R_0}\right)\frac{x_{2d}}{LC}, \quad \Sigma = \left(L \frac{R_1}{R_0^2} + \frac{r}{R_0} \right)\frac{x_{2d}}{LC}, \\ \bar{\Sigma} &= \left(L \frac{R_2 + 2R_1^2}{R_0^3} + \frac{R_1 r}{R_0^2} \right)\frac{x_{2d}}{LC}, \quad \alpha = \frac{r}{2L}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}. \end{aligned}$$

Тогда переменные замкнутой системы (2.3) асимптотически стремятся к нулю, что гарантирует решение поставленной задачи (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем замену переменных

$$y_1 = \gamma \bar{x}_2, \quad y_2 = \alpha \bar{x}_2 + \bar{x}_1, \quad (2.5)$$

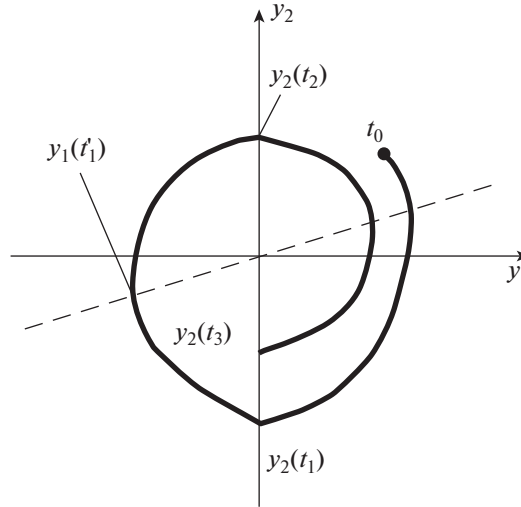


Рис. 2. Фазовый портрет замкнутой системы

с помощью которой систему (2.3) можно представить как

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\left(\frac{1}{R(t)C} + \alpha\right)y_1 + \gamma y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\left(\gamma + \frac{\alpha}{R(t)C}\right)y_1 - \alpha y_2 - \left(1 + \frac{r}{R_0}\right)\frac{x_{2d}}{LC} + \frac{U}{2LC}[1 - \text{sign}(y_1)] + \xi(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя выражения (1.2), (2.1), запишем ограничения для возмущения $\xi(t)$ и его производную:

$$|\xi(t)| \leq \Sigma, \quad |\dot{\xi}(t)| \leq \bar{\Sigma}.$$

Согласно условиям теоремы, $M^+ > \Sigma$, $M^- > \Sigma$. Рассматривая уравнения замкнутой системы (2.6), получим фазовый портрет, изображенный на рис. 2. Каждой полуплоскости графика (справа и слева от вертикальной оси) соответствует разный знак переменной y_1 . Необходимо отметить, что траектории системы не могут принадлежать многообразию $y_1(t) = 0$, так как на этой поверхности не выполняются условия существования скользящего режима [13, 14]. Обозначив t_0 в качестве начального момента времени, без ограничения общности в доказательстве приведем случай, когда $y_1(t_0) > 0$. Учитывая, что точки разрыва правой части дифференциальных уравнений (2.6) принадлежат множеству нулевой меры, то его решение понимается в смысле Каратеодори [15].

Для анализа сходимости переменных замкнутой системы используется метод на основе функций Ляпунова совместно с анализом фазового портрета системы (2.6). Введем в рассмотрение моменты времени t_i , $i = \overline{1, \infty}$, такие, что $y_1(t_i) = 0$, а интервал между ними обозначим как $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$.

Рассмотрим сначала движение в первом и четвертом квадранте фазового портрета (см. рис. 2). Зададим положительную полуопределенную функцию

$$V_1 = M^- \frac{|y_1|}{\gamma} - \frac{\xi}{\gamma} y_1 + \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}, \quad y_1 > 0. \quad (2.7)$$

Для ее производной можем записать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{M^-}{\gamma} \left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) |y_1| - \left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) \frac{\xi}{\gamma} y_1 - \frac{\dot{\xi}}{\gamma} y_1 - \left[\left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) y_1^2 + \frac{\alpha}{R(t)C\gamma} y_1 y_2 \right] - \alpha y_2^2 \leq \\ &= -\frac{\alpha M^-}{\gamma} |y_1| + \left(\alpha + \frac{1}{R_0 C} \right) \frac{\bar{\Sigma}}{\gamma} |y_1| + \frac{\bar{\Sigma}}{\gamma} |y_1| - y^T Q(t) y \leq -\bar{\alpha}_1 |y_1| - \frac{1}{M^-} \lambda_{\min Q(t)} [y_1^2 + y_2^2], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha}{\gamma} \left(M^- - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C} \right) \Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} \right), \quad y^T = (y_1, y_2), \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{R(t)C} & \frac{\alpha}{2R(t)C\gamma} \\ \frac{\alpha}{2R(t)C\gamma} & \alpha \end{pmatrix},$$

а $\lambda_{\min Q(t)}$ — минимальное собственное значение матрицы $Q(t)$.

Выражение для минимального собственного значения матрицы $Q(t)$ равно

$$\lambda_{\min Q(t)} = \alpha + \frac{1}{2\gamma R(t)C} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}) = \alpha + \frac{1}{2\gamma R(t)C} \left(\gamma - \frac{1}{\sqrt{LC}} \right),$$

а нижняя граница минимального собственного значения —

$$\lambda_{\min Q(t)} \geq \alpha - \frac{1}{2\gamma R_0 C} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \gamma \right) = \lambda_0. \quad (2.9)$$

Согласно последнему из условий (2.4) теоремы и (2.9), гарантируется выполнение неравенства

$$\lambda_{\min Q(t)} = \lambda_0 > 0$$

при движении системы (2.6) в первом и четвертом квадрантах фазового портрета (см. рис. 2).

Согласно (2.7), выпишем следующее неравенство:

$$V_1 \leq |y_1| \frac{M^- + \Sigma}{\gamma} + \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) \leq c_{01} (|y_1| + y_1^2 + y_2^2), \quad (2.10)$$

где

$$c_{01} = \max \left\{ \frac{M^- + \Sigma}{\gamma}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Используя соотношения (2.9), (2.10), можно переписать (2.8) в виде:

$$\dot{V}_1 \leq -\bar{\alpha}_1 |y_1| - \lambda_0 [y_1^2 + y_2^2] \leq -c_{11} (|y_1| + y_1^2 + y_2^2) \leq -v_1 V_1, \quad (2.11)$$

где $v_1 = \frac{c_{11}}{c_{01}}$, $c_{11} = \min \{\bar{\alpha}_1, \lambda_0\}$.

Для анализа движения во втором и третьем квадранте (см. рис. 2) рассмотрим положительную полуопределенную функцию

$$V_2 = \bar{M} \frac{|y_1|}{\gamma} - \frac{\xi}{\gamma} y_1 + \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}, \quad y_1 < 0, \quad (2.12)$$

где

$$\bar{M} = \frac{U}{LC} - \left(1 + \frac{r}{R_0} \right) \frac{x_{2d}}{LC}.$$

По аналогии, приводя случай $y_1 < 0$, получим производную функции V_2 в силу системы с учетом (1.3), (2.9):

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\frac{\bar{M}}{\gamma} \left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) |y_1| - \bar{M} y_2 + \frac{\dot{U}}{LC\gamma} |y_1| - \left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) \frac{\xi}{\gamma} y_1 - y_2 \xi - \frac{\xi}{\gamma} y_1 + \\ & + y_1 \left(-\left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) y_1 + y_2 \right) + y_2 \left(-\left(\gamma + \frac{\alpha}{R(t)C\gamma} \right) y_1 - \alpha y_2 + \bar{M} + \xi \right) \leq -\frac{M^+}{\gamma} \left(\alpha + \frac{1}{R(t)C} \right) |y_1| + \\ & + \frac{\bar{U}}{LC\gamma} |y_1| + \left(\alpha + \frac{1}{R_0 C} \right) \frac{\Sigma}{\gamma} |y_1| + \frac{\bar{\Sigma}}{\gamma} |y_1| - y^T Q(t) y \leq -\bar{\alpha}_2 |y_1| - \lambda_0 [y_1^2 + y_2^2], \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha}{\gamma} \left(M^+ - \frac{\bar{U}}{\alpha LC} - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C} \right) \Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} \right).$$

Согласно (1.3), (2.12), для V_2 можем записать:

$$V_2 \leq \frac{|y_1|}{\gamma} (M_{\max} + \Sigma) + \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) \leq c_{02} (|y_1| + y_1^2 + y_2^2), \quad (2.14)$$

где

$$M_{\max} = \frac{U_1}{LC} - \left(1 + \frac{r}{R_0} \right) \frac{x_{2d}}{LC}, \quad c_{02} = \max \left\{ \frac{M_{\max} + \Sigma}{\gamma}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Используя выражения (2.15), соотношение (2.14) можно записать в виде

$$\dot{V}_2 \leq -\bar{\alpha}_2 |y_1| - \lambda_0 [y_1^2 + y_2^2] \leq -c_{12} (|y_1| + y_1^2 + y_2^2) \leq -v_2 V_2, \quad (2.15)$$

где

$$v_2 = \frac{c_{12}}{c_{02}}, \quad c_{12} = \min \{ \bar{\alpha}_2, \lambda_0 \}.$$

Рассматривая фазовый портрет (см. рис. 2), с помощью (2.10)–(2.11), (2.14)–(2.15) получим следующие оценки:

$$V_1(t_1) = \frac{y_2^2(t_1)}{2} \leq V_1(t_0) e^{-v_1 \Delta_0} \leq c_0 [|y_1(t_0)| + y_1^2(t_0) + y_2^2(t_0)] e^{-v_1 \Delta_0} \Rightarrow y_2^2(t_1) \leq Y_0 e^{-v \Delta_0},$$

где $c_0 = \max \{ c_{01}, c_{02} \} = c_{02}$, $v = \min \{ v_1, v_2 \}$, $\Delta_0 = t_1 - t_0$, $Y_0 = 2c_0 [|y_1(t_0)| + y_1^2(t_0) + y_2^2(t_0)]$.

После исследования фазового портрета во втором квадранте с помощью функции $V_2(t)$ из (2.12), (2.15) запишем мажоранту:

$$V_2(t_2) = \frac{y_2^2(t_2)}{2} \leq V_2(t_1) e^{-v_2 \Delta_1} \leq \frac{y_2^2(t_1)}{2} e^{-v \Delta_1} \Rightarrow y_2^2(t_2) \leq y_2^2(t_1) e^{-v \Delta_1} \leq Y_0 e^{-v(\Delta_0 + \Delta_1)}.$$

Зададим неравенство по аналогии в некоторый момент времени t_i :

$$y_2^2(t_i) \leq Y_0 e^{-v \sum_{k=0}^{i-1} \Delta_k}.$$

Учитывая колебательный характер переходного процесса и последнее соотношение, можно сделать вывод, что переменная $y_2(t)$ ограничена мажорантой

$$|y_2(t)| \leq \sqrt{Y_0} e^{-\frac{v}{2}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (2.16)$$

Очевидно, что колебания переменной $|y_1(t)|$ достигают максимума при условии $\dot{y}_1(t) = 0$ в моменты времени t , для которых

$$y_1(t) = \gamma \left(\frac{1}{R(t)C} + \alpha \right)^{-1} y_2(t).$$

Пусть это равенство выполняется в моменты времени t'_i ($t_i < t'_i < t_{i+1}$) (см. рис. 2). Тогда для значения $y_1(t'_i)$ с учетом (1.2) справедливы оценки:

$$|y_1(t'_i)| \leq \frac{\gamma}{\alpha} |y_2(t_i)|.$$

Таким образом, с учетом выражения (2.16) амплитуда колебаний (максимумы) переменной $|y_1(t)|$ затухают экспоненциально, а переменные системы (2.6) стремятся к нулю со временем, стремящимся к бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_2(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t)| = 0.$$

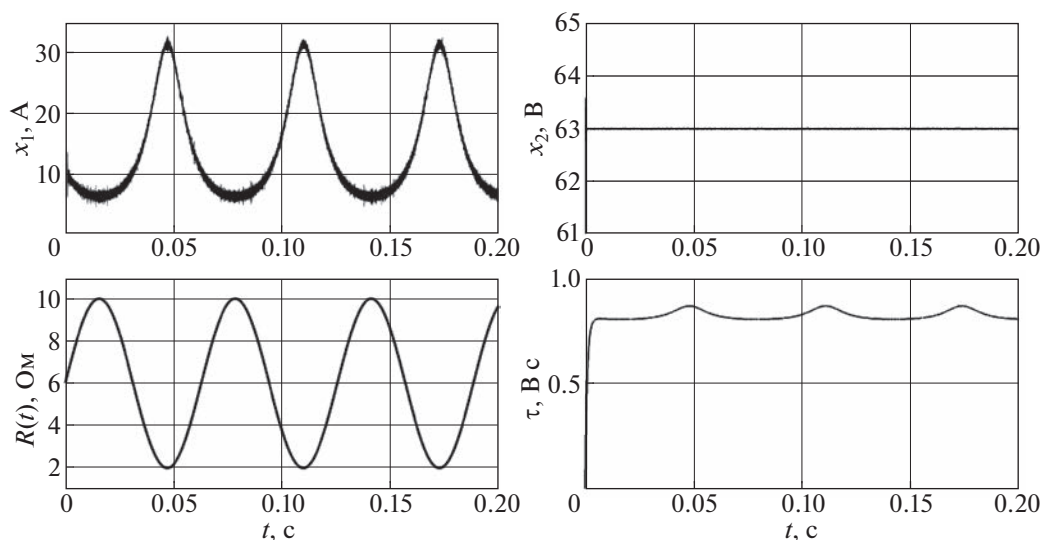


Рис. 3. Результаты моделирования первого эксперимента

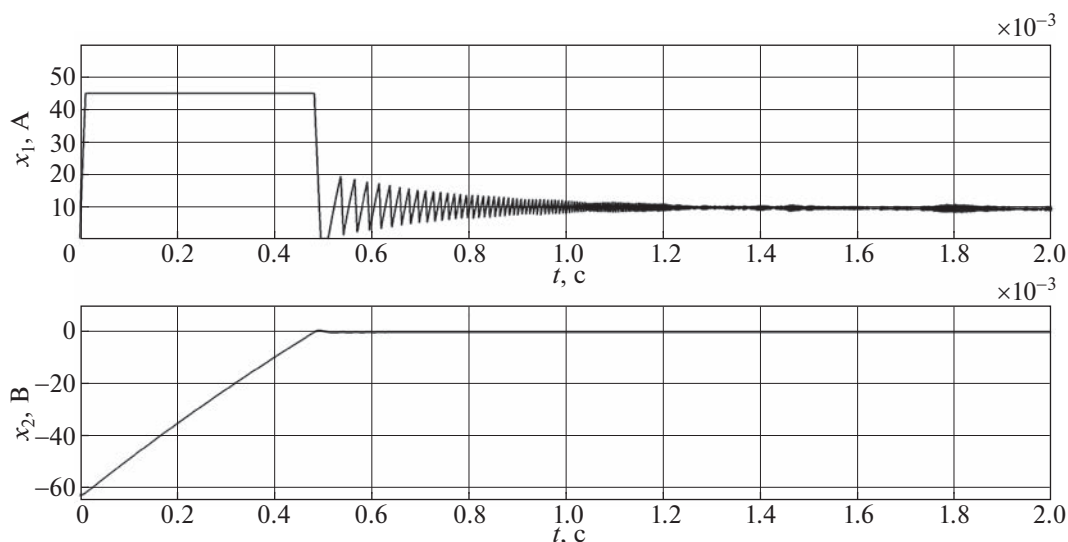


Рис. 4. Переходная характеристика системы

Из последних соотношений и выражений (2.5) следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}_2(t)| = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что переходный процесс для замкнутой системы (2.3) может происходить, в общем случае, при отрицательных значениях тока x_1 через индуктор. Модель системы не учитывает физические ограничения, которые были предусмотрены в предположении (1.4). В соответствии с этими ограничениями в переходном процессе ток будет ограничен определенным диапазоном, который задается при проектировании. Однако даже если траектории системы дойдут до указанных ограничений, через некоторый промежуток времени они попадут в область, где справедливо приведенное выше доказательство. Кривая переходного процесса в реальном устройстве в этом случае будет другой, и фазовый портрет, показанный на рис. 2, будет “обрезан” по величинам, входящим в неравенство (1.4).

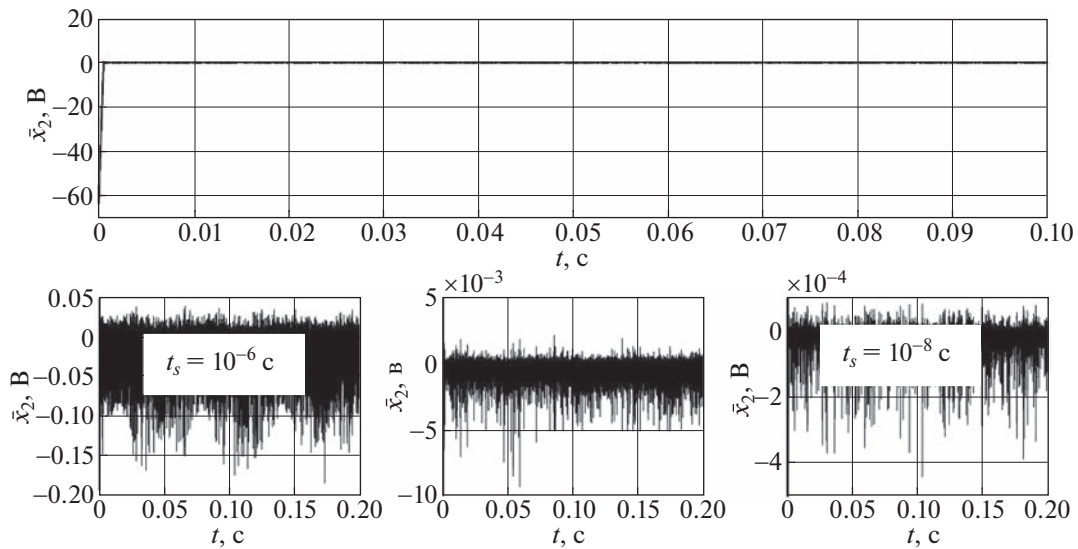


Рис. 5. Установившаяся ошибка на различных шагах интегрирования

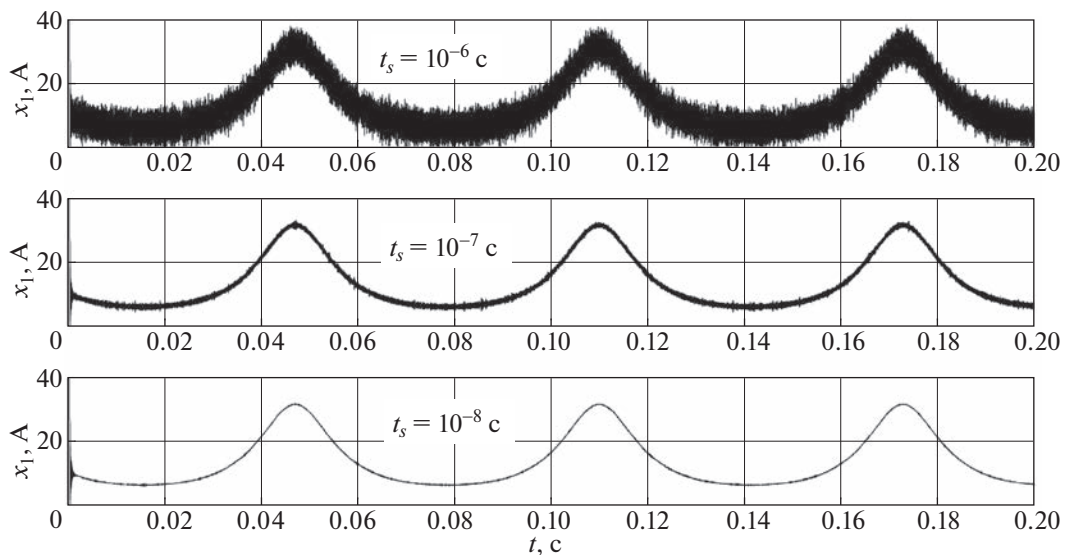


Рис. 6. Графики тока на различных шагах интегрирования

3. Численное моделирование. Рассмотрим результаты моделирования для следующих параметров полупроводникового преобразователя: $L = 2 \times 10^{-5}$, Гн, $C = 3 \times 10^{-4}$, Ф, $r = 0.2$, Ом. Входное напряжение и ограничения для него, согласно (1.3), равны

$$U(t) = 90 + 10 \cos(10t), \quad \text{В}, \quad U_0 = 80, \quad \text{В}, \quad U_1 = 100, \quad \text{В}, \quad \bar{U} = 100, \quad \text{В/с}.$$

Значение желаемого выходного напряжения $x_{2d} = 63$, В. Неизвестная нагрузка моделируется периодической функцией

$$R(t) = 6 - 4 \sin(100t), \quad \text{Ом}.$$

Согласно постановке задачи, для этой неизвестной функции известны только ограничения, указанные в (1.2). Проведя несложные вычисления, можно получить

$$R_0 = 2, \text{ Ом}, \quad R_1 = 400, \text{ Ом/с}, \quad R_2 = 4 \times 10^4, \text{ Ом/с}^2. \quad (3.1)$$

Для численного моделирования согласно неравенству (1.4) были выбраны следующие физические ограничения на ток: $0 \leq x_1 \leq 35$, А. Рассчитывая приведенные в теореме значения в соответствии с параметрами преобразователя и функцией нагрузки (3.1), можно получить следующие константы:

$$M^- = 1.155 \times 10^{10}, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi), \quad M^+ = 1.783 \times 10^9, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi), \quad \Sigma = 1.071 \times 10^9, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi), \\ \bar{\Sigma} = 1.155 \times 10^{10}, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi \cdot \text{с}), \quad \gamma = 1.19 \times 10^4, \text{ рад/с}, \quad \alpha = 5 \times 10^3, \text{ с}^{-1}.$$

Справедливость параметров закона управления согласно условиям теоремы, можно проверить следующими вычислениями:

$$M^- - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C}\right) \Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} = 10^{10}, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi), \\ M^+ - \frac{\bar{U}}{\alpha LC} - \left(1 + \frac{1}{\alpha R_0 C}\right) \Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha} = 3.077 \times 10^8, \text{ В}/(\text{Гн} \cdot \Phi), \\ \alpha > \frac{1}{2\gamma R_0 C} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \gamma\right) = 70.54, \text{ с}^{-1}, \quad \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} = 1.42 \times 10^8 \text{ рад}^2/\text{с}^2 > 0.$$

Для демонстрации медленной составляющей закона управления (2.2), соответствующей скважности переключающего элемента [1], вводится новая переменная, фактически являющаяся выходом фильтра нижних частот:

$$\mu \dot{\tau} = -\tau + u(t),$$

где μ – постоянная времени фильтра.

На рис. 3, 4 представлены результаты моделирования разработанного закона управления в среде MATLAB/Simulink. В первом эксперименте для численного интегрирования используется метод Дормана-Принса (ode5) с фиксированным шагом интегрирования $t_s = 10^{-7}$, с.

Во втором эксперименте, результаты которого приведены на рис. 5, 6, используется несколько шагов интегрирования:

$$t_s = 10^{-6}, \text{ с}, \quad t_s = 10^{-7}, \text{ с} \quad \text{и} \quad t_s = 10^{-8}, \text{ с}.$$

Следствием доказанного теоретического результата является то, что частота переключения управляющего входа со временем стремится к бесконечности. На практике частота коммутации ограничена, что приводит к установившейся ошибке управления. Из рис. 5, 6 видно, что эта ошибка зависит от частоты коммутации (шага интегрирования): чем выше частота, тем меньше ошибка и наоборот. Такие ограничения необходимо учитывать при реализации описанного подхода на практике, однако этот вопрос требует дальнейшего изучения и в данной статье этот случай не рассматривается.

Заключение. Изучен новый алгоритм управления полупроводниковым понижающим преобразователем. В предположении, что функция нагрузки может быть описана непрерывной ограниченной функцией с двумя ограниченными первыми производными, решалась задача стабилизации заданного выходного напряжения. Для практической реализации разработанного алгоритма в дальнейших исследованиях необходимо изучить адаптацию полученного закона управления для работы с преобразователями с широтно-импульсной модуляцией.

Работоспособность предложенного алгоритма подтверждена как аналитически, так и с помощью моделирования в среде MATLAB–Simulink.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромаш Э.М., Дробович Ю.И., Юрченко Н.Н., Шевченко П.Н. Высокочастотные транзисторные преобразователи. М.: Радио и связь, 1988, 288 с.
2. Shtessel Y.B., Zinober A., Shkolnikov I. Sliding Mode Control of Boost and Buck-boost Power Converters Using Method of Stable System Center // Automatica. 2003. V. 39. № 6. P. 1061–1067.
3. Olm J., Ros-Oton X., Shtessel Y. Stable Inversion of Abel Equations: Application to Tracking Control in DC–DC Non-minimum Phase Boost Converters // Automatica. 2011. V. 47. № 1. P. 221–226.
4. Stefanutti W., Mattavelli P., Saggini S., Ghioni M. Autotuning of Digitally Controlled DC-DC Converters Based on Relay Feedback // IEEE Transactions on Power Electronics. 2007. V. 22. № 1. P. 199–207.

5. *Kapat S.* Improved Time Optimal Control of a Buck Converter Based on Capacitor Current, // IEEE Trans. Power Electron. 2012. № 3 (27). P. 1444–1454.
6. *Kim B., Jrvenhaara J.K.* A Rapid Switch Bridge Selection Method for Fully Integrated DC-DC Buck Converters // IEEE Transactions on Power Electronics. 2015. V. 30. № 8. P. 4048–4051.
7. *Giaouris D., Banerjee S., Zahawi B., Pickert P.* Stability Analysis of the Continuous-conduction-mode Buck Converter via Filippov's Method // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 2008. V. 55. № 4. P. 1084–1096.
8. *Utkin V.A.* Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // Automation and Remote Control. 2001. V. 62. № 11. P. 1825–1843.
9. *Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.* Теоретические основы электротехники. Т. 1. 4-е изд. СПб.: Питер, 2004. 463 с.
10. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. N.-Y.: Springer Verlag, 1974.
11. *Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Invariance in Systems with Unmatched Perturbations // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. № 7. P. 1097–1127.
12. *Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Providing the Invariance Property on the Basis on Oscillation Modes // Doklady Mathematics. 2013. V. 88. № 2. P. 618–623.
13. *Utkin V.I.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. London: Taylor and Francis, 2009. 328 p.
14. *Sabanovic A., Sabanovic N., Ohnishi K.* Sliding Mode in Power Converters and Motion Control Systems // Intern. J. Control. 1993. V. 57. № 5. P. 1237–1259.
15. *Filippov A.F.* Differential Equations with Discontinuous Right Hand Sides. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 623.465.756

НАВЕДЕНИЕ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ТЕПЛОВИЗИОННЫМ КОРРЕЛЯЦИОННО-КОНТРАСТНЫМ АЛГОРИТМОМ АВТОСОПРОВОЖДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ¹

© 2023 г. В. А. Болдинов^{a,*}, В. А. Бухалёв^b, А. А. Скрынников^{a,c}, Б. Л. Шапиро^b

^aМосковский авиационный ин-т (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^bМосковский научно-исследовательский телевизионный ин-т, Москва, Россия

^cГосударственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, Москва, Россия

*e-mail: viktorboldinov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.05.2023 г.

После доработки 30.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Рассматривается задача построения алгоритма автосопровождения наземного объекта для системы наведения беспилотного летательного аппарата. В состав системы наведения входят следящий тепловизионный координатор цели с комбинированным корреляционно-контрастным алгоритмом пеленгации и бесплатформенная инерциальная навигационная система. Наведение происходит в условиях информационного противодействия, вызывающего случайные перерывы информации и случайные изменения мощности помех, которые фиксируются соответствующими индикаторами. Получен комбинированный помехоустойчивый алгоритм автосопровождения, использующий показания индикаторов перерывов информации и мощности помех и измерения углов пеленга и основанный на теории систем со случайной скачкообразной структурой. Приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма и демонстрирующий удовлетворительную точность автосопровождения.

DOI: 10.31857/S0002338823060045, EDN: GPTPAT

Введение. Алгоритмы автосопровождения в тепловизионных и телевизионных системах наведения (СН) беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) на наземные объекты можно разделить на два класса: контрастные и корреляционные.

В *контрастных* алгоритмах происходит выделение некоторых элементов изображения по контрасту с окружающим фоном, формирование из них объектов, которые могут рассматриваться в качестве гипотетических целей, выбор одного из них как цели наведения, формирование угла рассогласования между направлениями на цель и продольной оси следящего координатора для выполнения автосопровождения и наведения БПЛА [1].

В *корреляционных* алгоритмах угол рассогласования определяется по критерию максимального совпадения наблюдаемого изображения с эталоном, первоначально записанным в памяти компьютера и периодически обновляемым в процессе наведения. При этом совпадение текущего наблюдаемого изображения и эталона формируется на основе определения их взаимной корреляционной функции [2].

В состав СН входит бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), которая работает либо автономно, либо корректируется с командного пункта или системой спутниковой навигации. Информационное противодействие наведению БПЛА приводит к увеличению мощности помех в измерительных каналах вплоть до полного прекращения поступления информации об угловых координатах цели [2–4].

В статье рассматривается задача построения комбинированного корреляционно-контрастного алгоритма автосопровождения при наведении БПЛА на наземный объект по заданной траектории в условиях информационного противодействия.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

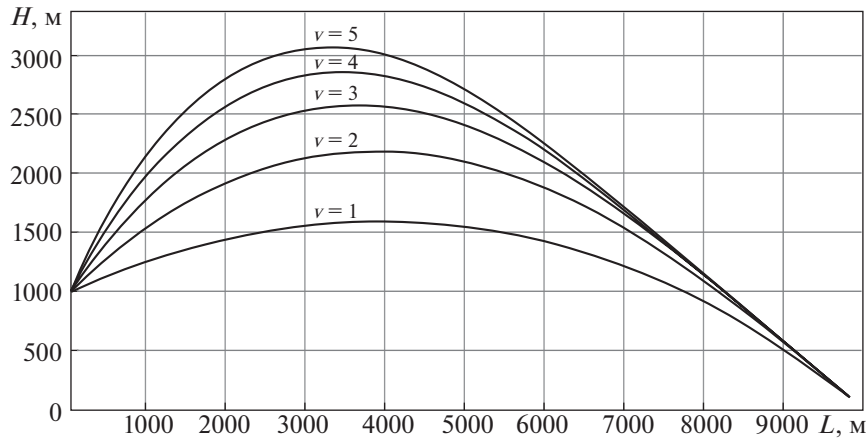


Рис. 1. Требуемые траектории наведения БПЛА в вертикальной плоскости

1. Постановка задачи. Математическая формулировка задачи имеет следующий вид. Требуемая траектория БПЛА в вертикальной плоскости описывается формулами [4]

$$\bar{\varepsilon}(t) = (\bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}_n) \left(\frac{\tau}{t_n} \right)^v + \bar{\varepsilon}_n, \quad \bar{\omega}(t) = \frac{v}{t_n} (\bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}_n) \left(\frac{\tau}{t_n} \right)^{v-1} \quad (1.1)$$

и проходит через две точки с углами наклона: $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}_0$ при $t = 0$ и $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}_n$ при $t = t_n$, где $\bar{\varepsilon}(t)$ и $\bar{\omega}(t)$ — требуемые угол и угловая скорость линии визирования; t_n — конечный момент времени наведения; $\tau = t_n - t$ — время, оставшееся до конца наведения; v — коэффициент крутизны траектории, $v = \text{const}$, $v > 1$, характеризующий форму кривой $\bar{\varepsilon}(t)$. В частности, при $v = 1$ $\bar{\omega}(t) = t_n^{-1}(\bar{\varepsilon}_n - \bar{\varepsilon}_0) = \text{const}$, что соответствует движению с постоянной угловой скоростью по траектории, близкой к баллистической (рис. 1).

Формулы (1.1) эквивалентны системе уравнений [4]:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(t) = \bar{\omega}(t), \quad \dot{\bar{\omega}}(t) = \tau^{-1}(t)(1 - v)\bar{\omega}(t), \quad (1.2)$$

$$\bar{\varepsilon}(0) = \bar{\varepsilon}_0, \quad \bar{\varepsilon}(t_n) = \bar{\varepsilon}_n, \quad \bar{\omega}(0) = t_n^{-1}v(\bar{\varepsilon}_n - \bar{\varepsilon}_0), \quad \bar{\omega}(t_n) = 0. \quad (1.3)$$

Реальная траектория отличается от требуемой и описывается уравнениями [4]

$$\dot{\varepsilon}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = \tau^{-1}(t)[2\omega(t) + u(t) + \xi(t)], \quad (1.4)$$

с начальными условиями $\varepsilon(0) = \bar{\varepsilon}_0$, $\omega(0) = \bar{\omega}(0)$, где $\xi(t)$ — центрированный гауссовский белый шум с интенсивностью $G(t)$; $u(t)$ — параметр управления БПЛА, определяемый формулой [4]

$$u(t) = -\left[\tau^{-1}(t)c_\varepsilon \hat{\varepsilon}^\circ(t) + c_\omega \hat{\omega}^\circ(t) + (v+1)\bar{\omega}(t) \right]. \quad (1.5)$$

В законе управления (1.5) c_ε и c_ω — параметрически оптимизированные постоянные коэффициенты, а $\hat{\varepsilon}^\circ(t)$ и $\hat{\omega}^\circ(t)$ — оценки переменных $\varepsilon^\circ(t) \triangleq \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t)$ и $\omega^\circ(t) \triangleq \omega(t) - \bar{\omega}(t)$.

В угломерных каналах следящего координатора цели измеряются сигналы $z^i(t)$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} z^1(t) &= \delta(s^{(1)}(t), 2)[\varepsilon(t) - \hat{\varepsilon}(t)] + \sqrt{Q^{(1)}(\sigma^{(1)}(t))} \zeta^{(1)}(t), \\ z^2(t) &= \delta(s^{(2)}(t), 2)[\varepsilon(t) - \hat{\varepsilon}(t)] + \tau^{-1} \sqrt{Q^{(2)}(\sigma^{(2)}(t))} \zeta^{(2)}(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $i = 1$ — номер контрастного пеленгатора, $i = 2$ — номер корреляционного пеленгатора; $\hat{\varepsilon}(t)$ — оценка угла $\varepsilon(t)$, совпадающая с углом продольной оси координатора, которая оценивается

в координаторе на основании априорных данных и текущих измерений мощности сигнала $z^{(i)}(t)$;

$$\delta(s^{(i)}(t), 2) = \begin{cases} 0 & \text{при } s^{(i)}(t) = 1, \\ 1 & \text{при } s^{(i)}(t) = 2 \end{cases}$$

— символ Кронекера, описывает перерывы поступления информации; $s^{(i)}(t)$ (или в дискретной форме $s_k^{(i)} = s^{(i)}(t_k)$, где t_k — моменты времени, соответствующие дискретным моментам при $k = \overline{0, n}$) — индекс структуры перерывов — марковская цепь [4, 5] с двумя альтернативными состояниями, заданная априорными вероятностями переходов из состояния $s_k^{(i)}$ в состояние $s_{k+1}^{(i)}$: $q_k^{(i)}(s_{k+1}^{(i)} | s_k^{(i)})$, $s_k^{(i)} = 1, 2$, где $s_k^{(i)} = 2$ — наличие, а $s_k^{(i)} = 1$ — отсутствие информации о координатах цели в сигнале измерения $z^{(i)}(t_k)$; $\zeta^{(i)}(t)$ — центрированный гауссовский белый шум с единичной интенсивностью; $\sqrt{Q^{(i)}(\sigma^{(i)}(t))}$ — коэффициент усиления белого шума $\zeta^{(i)}(t)$: $Q^{(i)}(\sigma^{(i)}(t) = j) = Q^{(ij)}$, $j = \overline{1, N^{(i)}}$; $\sigma^{(i)}(t)$ (или в дискретной форме $\sigma_k^{(i)} = \sigma^{(i)}(t_k)$, $\sigma_k^{(i)} = \overline{1, N^{(i)}}$) — марковская цепь с вероятностями переходов, равными $\varphi_k^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)} | \sigma_k^{(i)})$ при $\sigma_{k+1}^{(i)} \neq \sigma_k^{(i)}$ и

$$\varphi_k^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)} = j | \sigma_k^{(i)} = j) = 1 - \sum_{v=1, v \neq j}^{N^{(i)}} \varphi_k^{(i)}(v | j). \quad (1.7)$$

Структура $s^{(i)}(t)$ наблюдается с помощью индикатора, выходной сигнал которого $r^{(i)}(t)$ (или в дискретной форме $r_k^{(i)} = r^{(i)}(t_k)$) — условная марковская цепь, заданная условными вероятностями переходов при фиксированном $s_k^{(i)}$: $\pi_{k+1}^{(i)}(r_{k+1}^{(i)} | r_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)})$.

Разница в формулах для $z^{(1)}(t)$ и $z^{(2)}(t)$ в (1.6) объясняется различным характером ошибок измерения в контрастных и корреляционных пеленгаторах: в первых отношение “сигнал—шум” по мере приближения к цели увеличивается приблизительно прямо пропорционально квадрату дальности до цели, а в корреляционных пеленгаторах, наоборот, уменьшается обратно пропорционально квадрату дальности вследствие роста дисперсии ошибки измерения угла рассогласования $\epsilon(t) - \hat{\epsilon}(t)$, вызванной периодической перезаписью эталона изображения.

Структура $\sigma^{(i)}(t)$ наблюдается с помощью индикатора $\rho^{(i)}(t)$ (или в дискретной форме $\rho_k^{(i)} = \rho^{(i)}(t_k)$) — условная марковская цепь с $N^{(i)}$ состояниями: $\rho_k^{(i)} = \overline{1, N^{(i)}}$, заданная условными вероятностями переходов $\psi_{k+1}^{(i)}(\rho_{k+1}^{(i)} | \rho_k^{(i)}, \sigma_{k+1}^{(i)})$.

Вероятности переходов индикаторов перерыва информации и индикаторов мощности помех описываются формулами (верхний индекс i опущен для простоты записи):

$$\pi_{k+1}^r(r_{k+1} | r_k, s_{k+1}) = \begin{cases} 1 - \pi_{k+1}^r, & r_{k+1} \neq r_k, \\ \pi_{k+1}^r, & r_{k+1} = r_k, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\pi_{k+1}^r = \pi_k^r e^{-\Delta t / T_r} + (1 - e^{-\Delta t / T_r}) \bar{\pi}_{k+1}^r(r_{k+1} | s_{k+1}), \quad r_k, s_k = 1, 2,$$

$$\psi_{k+1}(\rho_{k+1} | \rho_k, \sigma_{k+1}) = \begin{cases} 1 - \pi_{k+1}^\rho, & \rho_{k+1} \neq \rho_k, \\ \pi_{k+1}^\rho, & \rho_{k+1} = \rho_k, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\pi_{k+1}^\rho = \pi_k^\rho e^{-\Delta t / T_\rho} + (1 - e^{-\Delta t / T_\rho}) \bar{\pi}_{k+1}^\rho(\rho_{k+1} | \sigma_{k+1}), \quad \rho_k, \quad \sigma_k = \overline{1, N},$$

где T_r, T_ρ — параметры инерционности индикаторов — постоянные времени (T_μ , $\mu = r, \rho$) аperiодических звеньев, описывающих переходный процесс в виде экспоненты при смене показаний

индикатора μ); $\bar{\pi}_{k+1}^r(\bullet)$ — установившиеся значения правильных (при $r_{k+1} = s_{k+1}$, $\rho_{k+1} = \sigma_{k+1}$) и ошибочных решений (при $r_{k+1} \neq s_{k+1}$, $\rho_{k+1} \neq \sigma_{k+1}$) индикатора.

Требуется построить алгоритм автосопровождения цели, основанный на измерениях угловых координат $z^{(i)}(t)$ и показаниях индикаторов перерывов информации $r^{(i)}(t)$ и индикаторов мощности помех $\rho^{(i)}(t)$ в контрастном ($i = 1$) и корреляционном ($i = 2$) пеленгаторах, а также на показаниях БИНС.

2. Алгоритм автосопровождения. Приближенно-оптимальный алгоритм, базирующийся на теории систем со случайной скачкообразной структурой (ССС) [4, 5] состоит из следующих блоков:

- 1) классификаторы перерывов информации, вычисляющие вероятности перерывов $\hat{p}_{k+1}^{(i)}(s_k^{(i)})$;
- 2) идентификаторы перерывов информации, определяющие оценки $\hat{s}^{(i)}(t)$ состояний $s^{(i)}(t)$;
- 3) классификаторы и идентификаторы мощности помех, рассчитывающие оценки $\hat{Q}^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$;
- 4) фильтр, вычисляющий оценку $\hat{\varepsilon}(t)$ угла визирования цели $\varepsilon(t)$.

Алгоритм описывается следующими уравнениями.

1. Классификатор перерывов информации:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k+1}^{(i)}(1) &= \left[1 + \frac{\tilde{p}_{k+1}^{(i)}(2) \pi_{k+1}^{(i)}(r_{k+1}^{(i)} | r_k^{(i)}, 2)}{\tilde{p}_{k+1}^{(i)}(1) \pi_{k+1}^{(i)}(r_{k+1}^{(i)} | r_k^{(i)}, 1)} \right]^{-1}, \quad \hat{p}_{k+1}^{(i)}(2) = 1 - \hat{p}_{k+1}^{(i)}(1), \\ \tilde{p}_{k+1}^{(i)}(1) &= q_k^{(i)}(1|1) \hat{p}_k^{(i)}(1) + q_k^{(i)}(1|2) \hat{p}_k^{(i)}(2), \quad \tilde{p}_{k+1}^{(i)}(2) = 1 - \tilde{p}_{k+1}^{(i)}(1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. Идентификатор перерывов информации:

$$\begin{aligned} s^{(i)}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{p}^{(i)}(1) \geq p_{\text{пор}}^{(i)}, \\ 2 & \text{при } \hat{p}^{(i)}(1) < p_{\text{пор}}^{(i)}, \end{cases} \\ \hat{p}^{(i)}(1) &= \hat{p}_{k+1}^{(i)}(1) + \frac{\hat{p}_k^{(i)}(1)}{2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $p_{\text{пор}}^{(i)}$ — пороговое значение вероятности.

3. Классификатор мощности помех:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1}^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)}) &= \frac{\tilde{P}_{k+1}^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)}) \Psi_{k+1}^{(i)}(\rho_{k+1}^{(i)} | \rho_k^{(i)}, \sigma_{k+1}^{(i)})}{\sum_{\sigma_{k+1}^{(i)}} \tilde{P}_{k+1}^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)}) \Psi_{k+1}^{(i)}(\rho_{k+1}^{(i)} | \rho_k^{(i)}, \sigma_{k+1}^{(i)})}, \\ \tilde{P}_{k+1}^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)}) &= \sum_{\sigma_k^{(i)}} \Phi_{k+1}^{(i)}(\sigma_{k+1}^{(i)} | \sigma_k^{(i)}) \hat{P}_k^{(i)}(\sigma_k^{(i)}), \quad \sigma_k^{(i)} = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. Идентификатор мощности помех:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k^{(i)} &= \sum_{\sigma_k^{(i)}} \hat{P}_k^{(i)}(\sigma_k^{(i)}) \hat{Q}_k^{(i)}(\sigma_k^{(i)}), \quad \sigma_k^{(i)} = \overline{1, N}, \\ \hat{Q}^{(i)}(t) &= \hat{Q}_{k+1}^{(i)} + \frac{\hat{Q}_k^{(i)}}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

5. Фильтр:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(t) &= \hat{\omega}(t) + \delta(\hat{s}^{(1)}(t), 2) k_{\varepsilon}^{(1)}(t) \tau^{-1} z^{(1)}(t) + \delta(\hat{s}^{(2)}(t), 2) k_{\varepsilon}^{(2)}(t) z^{(2)}(t), \\ \dot{\hat{\omega}}(t) &= \tau^{-1} [2\hat{\omega}(t) + u(t)] + \delta(\hat{s}^{(1)}(t), 2) k_{\omega}^{(1)}(t) \tau^{-2} z^{(1)}(t) + \delta(\hat{s}^{(2)}(t), 2) (k_{\omega}^{(2)}(t) + \tau^{-1} k_{\varepsilon}^{(2)}(t)) z^{(2)}(t), \\ k_{\varepsilon}^{(1)}(t) &= \sqrt{0.5(1 + \sqrt{1 + 16\gamma(t)})}, \quad k_{\omega}^{(1)}(t) = 0.5(1 + k_{\varepsilon}^{(1)}(t)) k_{\varepsilon}^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

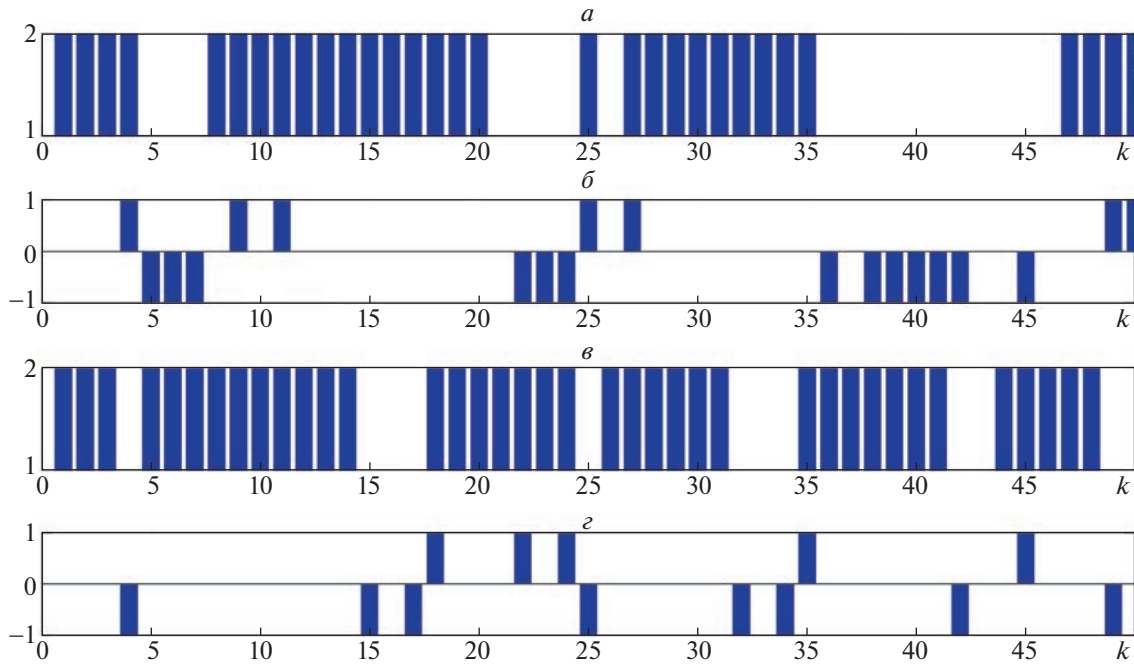


Рис. 2. Структура перерывов информации и их распознавание в контрастном и корреляционном пеленгаторах

$$k_{\varepsilon}^{(2)}(t) = \sqrt{2k_{\omega}^{(2)}(t)}, \quad k_{\omega}^{(2)}(t) = \sqrt{G^{(2)}(t)/\hat{Q}^{(2)}(t)},$$

$$\gamma(t) \triangleq G^{(1)}(t)\tau^2/\hat{Q}^{(1)}(t),$$

где $\delta(\bullet)$ – символ Кронекера, а $u(t)$ определяется формулами (1.1) и (1.5), где $\varepsilon^0(t) \triangleq \hat{\varepsilon}(t) - \bar{\varepsilon}(t)$; $\hat{\omega}^0(t) \triangleq \hat{\omega}(t) - \bar{\omega}(t)$.

3. Пример. Рассмотрим пример представленной задачи при следующих исходных данных: $\Delta f = 0.1$ Гц, $\Delta t = 0.1$ с, $s_k^{(i)} = 1, 2$, $\sigma_k^{(i)} = 1, 2$, $Q_k^{(i)} = [Q_{\min}^{(i)}, Q_{\max}^{(i)}]$.

Результаты имитационного математического моделирования представлены на рис. 2–5.

На графиках рис. 2 изображено: *а* – перерывы информации в контрастном пеленгаторе, где $s_k^{(1)} = 1$ – “есть перерыв”, а $s_k^{(1)} = 2$ – “нет перерыва”; *б* – распознавание перерывов информации $\Delta s_k^{(1)} = s_k^{(1)} - \hat{s}_k^{(1)}$, где $\Delta s_k^{(1)} = 0$ – “правильные решения”, $\Delta s_k^{(1)} = 1$ – “пропуск сигнала”, а $\Delta s_k^{(1)} = -1$ – “ложная тревога”; *в*, *г* – результаты, аналогичные *а* и *б*, только для второго (корреляционного) пеленгатора.

На графиках рис. 3 отображено: *а* – структура изменения мощности помех в контрастном пеленгаторе, где $\sigma_k^{(1)} = 1$ – “минимальная мощность помех $Q_{\min}^{(1)}$ ”, а $\sigma_k^{(1)} = 2$ – “максимальная мощность помех $Q_{\max}^{(1)}$ ”; *б* – распознавание мощности помех в контрастном пеленгаторе $\Delta \sigma_k^{(1)} = \sigma_k^{(1)} - \hat{\sigma}_k^{(1)}$, где $\Delta \sigma_k^{(1)} = 0$ – “правильные решения”, а $\Delta \sigma_k^{(1)} = 1$ – “ошибочные решения”; *в*, *г* – результаты, аналогичные *а* и *б*, только для корреляционного пеленгатора.

На графиках рис. 4 рассмотрены помехи (ошибок измерений) в контрастном ($\zeta_k^{(1)}$) и корреляционном ($\zeta_k^{(2)}$) пеленгаторах, представляющие собой центрированные гауссовские белые шумы с мощностью $Q_k^{(1)}$ и $Q_k^{(2)}$ соответственно.

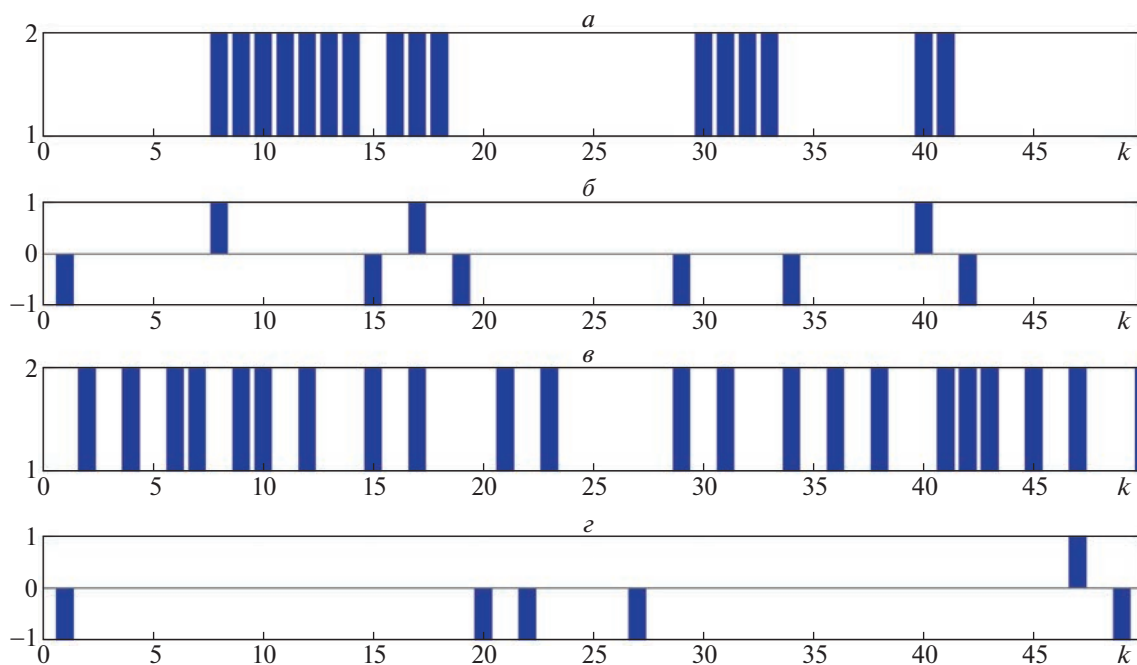


Рис. 3. Структура изменения мощности помех и распознавание изменения мощности помех в контрастном и корреляционном пеленгаторах

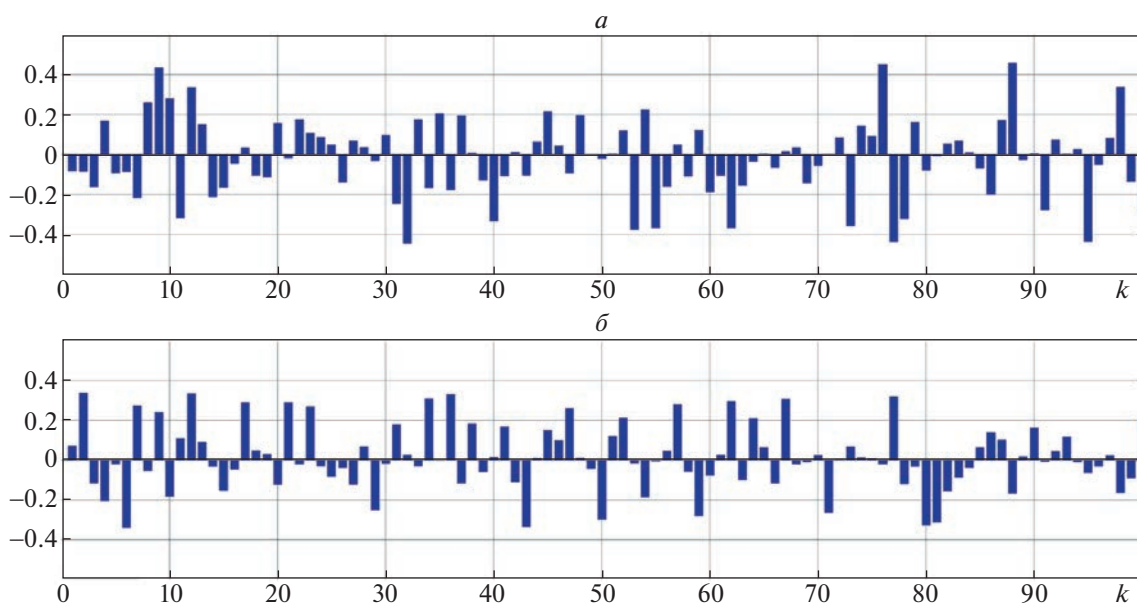


Рис. 4. Помехи в контрастном и корреляционном пеленгаторах

На рис. 5 приведены траектории полета БПЛА в вертикальной плоскости с углом пеленга цели ϵ_k (траектория 1) и его оценкой $\hat{\epsilon}_k$ (траектория 2), полученной разработанным корреляционно-контрастным алгоритмом автосопровождения цели тепловизионной СН БПЛА.

Заключение. Предложен метод построения приближенно-оптимального алгоритма автосопровождения неподвижного наземного объекта комбинированной СН БПЛА. СН включает в себя контрастный и корреляционный тепловизионные пеленгаторы и БИНС, которые могут

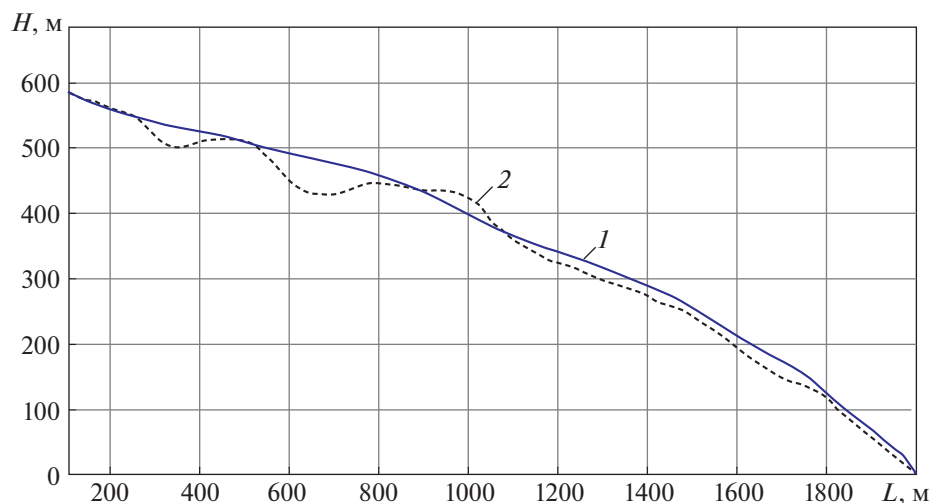


Рис. 5. Траектории наведения БПЛА с текущим углом пеленга и его оценкой

работать как вместе, так и по отдельности в зависимости от условий применения и характеристик информационного противодействия.

Противодействие приводит к значительному и неточно определяемому изменению отношения “сигнал—шум” вплоть до перерывов в поступлении информации о координатах объекта. Алгоритм автосопровождения, построенный на основе теории систем ССС, обладает свойством сходимости оценок угловых координат объекта в указанных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ллойд Дж. Системы тепловидения. М.: Мир, 1978.
2. Бухалёв В.А., Болдинов В.А., Сухачев А.Б., Шапиро Б.Л. Управление беспилотным летательным аппаратом с тепловизионным корреляционным координатором в условиях низкочастотных помех // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2019. № 7. Т. 17. С. 13–20.
3. Баханов Л.Е., Давыдов А.Н., Корниенко В.Н. и др. Системы управления вооружением истребителей. Основы интеллекта многофункционального самолета. Под ред. Федосова Е.А. М.: Машиностроение, 2005. 400 с.
4. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Алгоритмическая помехозащита беспилотных летательных аппаратов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 192 с.
5. Бухалёв В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1996. 287 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ РАСКРУЧИВАНИЯ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ¹

© 2023 г. С. А. Васенин^{a,*}, С. А. Решмин^a

^a ИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: stepan_vasenin@mail.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 17.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Рассматривается управляемая механическая система многих тел, состоящая из несущего диска, который вращается вокруг своей оси, закрепленной в пространстве, и несомого диска, присоединенного к нему при помощи невесомых упругих элементов. Представленные тела находятся в одной плоскости. Исследуется задача о минимизации амплитуды радиальных колебаний. Для решения данной задачи на достаточно большом интервале используются два численных метода: метод последовательных приближений в пространстве управлений и метод Ньютона. Изучены свойства фазовых траекторий системы в зависимости от начальных состояний дисков. Обнаружены различные режимы раскрутки дисков. С помощью процедуры сглаживания для оптимального управления построено непрерывное управление, уменьшающее амплитуду радиальных колебаний.

DOI: 10.31857/S0002338823060112, EDN: FNEJMB

Введение. Процессы раскрутки механических систем присутствуют во многих технических устройствах. Важность исследования данного явления обусловлена большим количеством механических объектов, процессы которых напрямую или косвенно связаны с разными модификациями процессов раскрутки и вращения. В работе рассматривается модель колеса, представляющая собой систему двух взаимосвязанных дисков, соединенных между собой невесомыми упругими пружинами. Для данной системы ставится задача о раскручивании с одновременным подавлением радиальных упругих колебаний (имеется в виду изменение расстояния между осями вращения дисков). Принимается во внимание нелинейность в модели упругого взаимодействия, обусловленная тем, что упругие элементы ориентированы по-разному, что позволяет влиять на амплитуду радиальных колебаний, применяя только управляющий крутящий момент. Для построения управления на большом интервале времени предлагается использовать метод последовательных приближений [1] и метод Ньютона, часто применяющийся для решения соответствующей краевой задачи принципа максимума Л.С. Понтрягина [2]. В предыдущей работе [3] была продемонстрирована эвристическая методика применения простейшего варианта метода последовательных приближений. Для построения управления на большом интервале времени предлагалось разбивать его на последовательность коротких интервалов и использовать на них метод последовательных приближений. В результате было получено субоптимальное управление на большом интервале времени, успешно минимизирующее амплитуду радиальных колебаний. Данный подход возник из-за отсутствия сходимости простейшего варианта метода последовательных приближений на длительном интервале времени.

Хочется также отметить, что управления, найденные разными способами применения метода последовательных приближений, имеют отличия. В работе было получено управление при помощи метода последовательных приближений с улучшенной сходимостью, которое быстрее минимизирует амплитуду радиальных колебаний механической системы.

Предполагается, что возможности прикладываемого к одному из дисков моментов велики, так что в процессе управления угол крутильной деформации, т.е. разность углов вращения дисков, может изменяться сколь угодно быстро в заданных пределах. Указанный угол кручения вы-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

бирается в качестве нового управления, которое гасит амплитуду радиальных колебаний. Выбором допустимого диапазона изменения управления (угла кручения) можно обеспечить дополнительно и требуемую раскрутку системы в целом.

Отметим, что существуют работы, например [4], численные методы расчета оптимального программного управления которых используют эволюционные алгоритмы, не основанные на решении краевой задачи принципа максимума. Ограничения на величину управляющего воздействия часто учитываются в задачах управления техническими системами. Поиск и оценка числа переключений релейного оптимального управления проводились в публикациях [5–8]. В [9] получено аналитическое оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором, причем задача рассматривалась на конечном интервале времени. Сложные задачи с ограничениями на управление были исследованы в [10, 11]. Отметим, что в работах [12, 13] рассматривались похожие по структуре механические системы, для которых присутствовала возможность влияния на центробежную силу инерции за счет вращения. В данной статье такая возможность отсутствовала. Оптимальное изменение ориентации двухмассовой системы проводилось в [14–17]. В [18] исследовалась динамика механического изотропного стержневого упругого подвеса. Многомерные осцилляторы с нелинейным затуханием рассматривались в [19, 20]. Задача построения общего ограниченного управления, приводящего системы из произвольного числа осцилляторов в заданное состояние, была представлена в [21, 22]. В [23] предлагается алгоритм стабилизации движения тросовой системы с квадратичным критерием оптимальности, как в данной работе, в окрестности местной вертикали, основанный на принципе динамического программирования Беллмана [24].

1. Постановка задачи управления двухмассовой системой. Рассматривается задача оптимального управления для механической системы, состоящей из двух дисков, расположенных в одной плоскости и соединенных между собой при помощи невесомых предварительно растянутых пружин, концы которых не заземлены шарнирно-неподвижными опорами (рис. 1). Радиус первого диска равен r_a . Радиус внутренней полости второго диска равен r_b . Углы поворотов дисков обозначены через α и β и отсчитываются от вертикали. Оси вращения параллельны, причем ось вращения первого диска жестко закреплена снизу кронштейном к неподвижному основанию, которое обозначено штриховкой. Положение центра масс второго характеризуется относительными координатами x , y в прямоугольной системе координат в плоскости, которая перпендикулярна осям вращения. Таким образом, при $x = 0$ и $y = 0$ оси вращения совпадают. Влияние силы тяжести на систему не учитывается.

Предполагается, что при малых x , y , $\alpha - \beta$ потенциальная энергия Π взаимодействия разложима в двумерный ряд Тейлора по переменным r^2 и φ^2 , где $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi^2 = (\alpha - \beta)^2$, и приближенно задается следующим выражением: $\Pi = \frac{1}{2}[k_r^0(x^2 + y^2) + k_\varphi^0(\alpha - \beta)^2] + \frac{1}{4}[k_r^r(x^2 + y^2)^2 + 2k_r^\varphi(x^2 + y^2)(\alpha - \beta)^2 + k_\varphi^\varphi(\alpha - \beta)^4] + \dots$, где k_r^0 , k_φ^0 , k_r^r , k_r^φ , k_φ^φ – заданные постоянные коэффициенты.

Определим коэффициенты k_r^0 , k_φ^0 , k_r^r , k_r^φ , k_φ^φ в случае, когда в качестве упругих элементов выступают линейные пружины, у которых график “нагрузка–деформация” представляет собой прямую линию. Рассмотрим систему из N пружин жесткости k , причем длина в свободном состоянии каждой из них равна $l < r_b - r_a$. Для расчета коэффициентов упругой модели будем использовать следующие соотношения, полученные в [25] для $N \geq 5$:

$$k_r^0 = kN \left(1 - \frac{l}{2(r_b - r_a)} \right), \quad k_\varphi^0 = kN \left(1 - \frac{l}{r_b - r_a} \right) r_b r_a, \quad k_r^r = \frac{kN l r_a r_b}{4(r_b - r_a)^3},$$

$$k_r^\varphi = -\frac{kN l}{16(r_b - r_a)^3}, \quad k_\varphi^\varphi = -\frac{kN}{6} \left(1 - \frac{l(r_a^2 + r_a r_b + r_b^2)}{(r_b - r_a)^3} \right) r_a r_b.$$

Введем обозначения радиальной и крутильной жесткости:

$$k_r = k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2) + k_r^\varphi(\alpha - \beta)^2, \quad k_\varphi = k_\varphi^0 + k_r^\varphi(x^2 + y^2) + k_\varphi^\varphi(\alpha - \beta)^2. \quad (1.1)$$

Отметим, что значение k_r^φ всегда принимает положительное значение и k_r^φ является единственным коэффициентом, присутствующим как в выражении для радиальной жесткости, так и

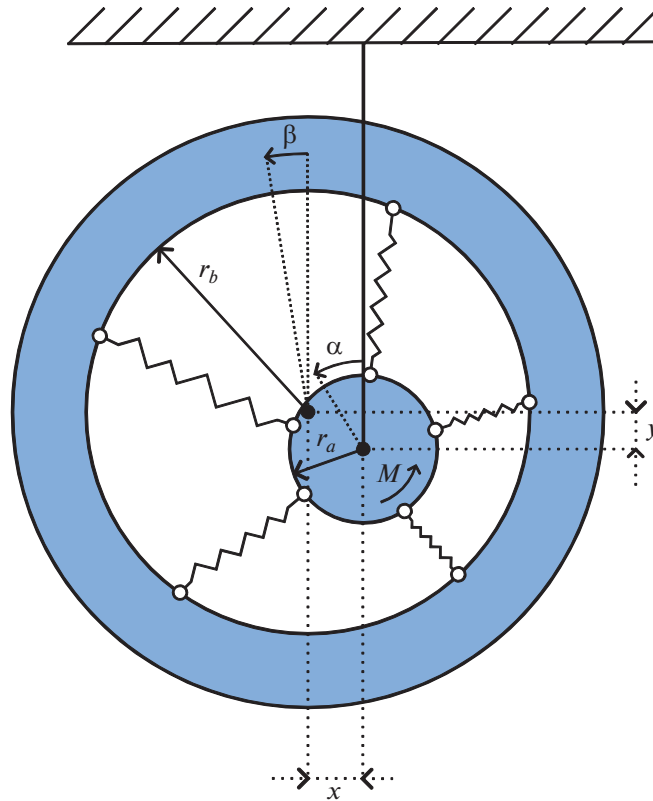


Рис. 1. Двухмассовая система

в выражении для крутильной жесткости. Опишем влияние, оказываемое данным коэффициентом на коэффициенты k_r и k_ϕ , с позиции физических соображений. При увеличении значений $|x|$, $|y|$ слагаемое в крутильной жесткости с коэффициентом k_r^ϕ вызывает рост значения k_ϕ , а при увеличении значения $|\alpha - \beta|$ слагаемое в радиальной жесткости с коэффициентом k_r^ϕ вызывает рост значения k_r . Фактически это означает, что из-за нарастания отклонений по одной из степеней свободы будет нарастать возвращающая сила, препятствующая нарастанию отклонений по иным степеням свободы.

Учитывая выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2}[I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)],$$

составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$I_a \ddot{\alpha} + k_\phi(\alpha - \beta) = M, \quad I_b \ddot{\beta} - k_\phi(\alpha - \beta) = 0, \quad m_b \ddot{x} + k_r x = 0, \quad m_b \ddot{y} + k_r y = 0.$$

Для данной системы ставится следующая задача: за счет выбора момента $M(t)$ требуется раскрутить систему, уменьшая, насколько это возможно, радиальные колебания в процессе управления.

Для определения крутящего момента $M(t)$, уменьшающего радиальные колебания системы, в данной работе предлагается ввести вспомогательную ограниченную управляющую функцию, представляющую собой разность углов поворотов:

$$u(t) = \alpha(t) - \beta(t), \quad 0 \leq u(t) \leq u_0,$$

где u_0 — заданная постоянная, которая должна быть достаточно мала, чтобы выполнялось сделанное ранее предположение о разложимости в многомерный ряд Тейлора потенциальной энергии Π .

Если допустить, что угол кручения $u(t)$, его вторая производная $\ddot{u}(t)$, а также координаты $x(t)$, $y(t)$ центра масс второго диска известны, то искомый момент может быть представлен в виде

$$M(t) = M(u(t), \ddot{u}(t), x(t), y(t)). \quad (1.2)$$

Подробная запись этой зависимости будет дана в разд. 6. Исходная система уравнений движения трансформируется в соотношения

$$\alpha(t) = \beta(t) + u(t), \quad I_b \ddot{\beta} = k_\varphi(u, x, y)u, \quad (1.3)$$

$$m_b \ddot{x} + k_r(u, x, y)x = 0, \quad m_b \ddot{y} + k_r(u, x, y)y = 0, \quad (1.4)$$

где в соответствии с (1.1) использованы следующие выражения для радиальной и крутильной жесткости:

$$k_r(u, x, y) = k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2) + k_r^\varphi u^2, \quad k_\varphi(u, x, y) = k_\varphi^0 + k_\varphi^r(x^2 + y^2) + k_\varphi^\varphi u^2. \quad (1.5)$$

Видно, что уравнения (1.4) не зависят явно от углов α и β . Поэтому задачу подавления колебаний системы (1.4) можно решать отдельно с использованием методов теории оптимального управления, выбрав подходящий терминальный функционал. Функция $u(t)$ предполагается кусочно-непрерывной. При этом неотрицательность вспомогательной управляющей функции, а следовательно, правой части второго уравнения (1.3) обеспечивает постепенное раскручивание системы. Задача управления рассматривается на конечном заданном интервале времени $t \in [0, T]$.

В результате для решения поставленной задачи оптимального управления будет построена вспомогательная управляющая функция, оптимально уменьшающая радиальные колебания системы. Однако при кусочно-непрерывном законе управления $u(t)$ выражение (1.2) не имеет смысла, так как вторая производная $\ddot{u}(t)$ не существует в точках разрыва. Применяя для $u(t)$ процедуру сглаживания (см. разд. 6) и используя выражение (6.2) для нахождения крутящего момента как функции от сглаженной вспомогательной управляющей функции $u(t)$, получим искомый крутящий момент $M(t)$.

Так как в данной задаче крутящий момент $M(t)$ будет найден через вспомогательную функцию $u(t)$, можно предполагать, что разность углов поворотов дисков является новым управлением для рассматриваемой системы. Из данного заключения следует, что на начальном этапе первые два уравнения (см. (1.3)) можно не рассматривать, а рассматривать только оставшиеся два (см. (1.4)).

Введем новые переменные: v_x — скорость изменения координаты x , v_y — скорость изменения координаты y . Перейдем к системе четырех уравнений первого порядка, описывающих двумерный осциллятор:

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{v}_x = \frac{-xk_r}{m_b}, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_y = \frac{-yk_r}{m_b}. \quad (1.6)$$

Коэффициенты k_r и k_φ заданы с помощью (1.5). Системе отвечают начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad y(0) = y_0, \quad v_y(0) = v_{y0}.$$

2. Методика применения метода последовательных приближений. В данном разделе описана методика применения метода последовательных приближений: простейшего варианта метода и метода с улучшенной сходимостью.

Пусть рассматривается задача оптимального управления механической системой на фиксированном интервале со свободным правым концом траектории. При постановке задачи необходимо, прежде всего, выписать дифференциальные уравнения движения, например уравнения Лагранжа второго рода. Далее для построения оптимального управления или экстремалей нужно, во-первых, составить соотношения принципа максимума, во-вторых, численно решить их с использованием метода последовательных приближений [1].

Для решения первой подзадачи (составления краевой задачи) следует ввести сопряженные переменные, составить гамильтониан, выписать сопряженную систему, найти общий вид управления, максимизирующего гамильтониан в каждый момент времени, добавить начальные условия для основных переменных и граничные условия для сопряженных переменных на правом конце траектории (условия трансверсальности).

Для решения второй подзадачи (численного решения краевой задачи) следует выбрать и использовать подходящую модификацию численного метода последовательных приближений в пространстве управлений для задачи оптимального управления со свободным правым концом [1]. Сначала изложим простейший вариант этого метода.

Управляемая система описывается уравнениями с начальными условиями и ограничениями:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \geq t_0. \quad (2.1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор фазовых координат, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — m -мерный вектор управляющих функций, t — время, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — заданная вектор-функция, x_0 — постоянный вектор, t_0 — начальный момент времени, U — замкнутое множество m -мерного пространства. Допустимыми управлениями будем называть кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению (2.1).

Поставим задачу об определении допустимого управления $u(t)$, минимизирующего линейный терминальный функционал:

$$J = (c, x(T)), \quad T > t_0. \quad (2.2)$$

Здесь T — заданный момент времени, $c = (c_1, \dots, c_n)$ — ненулевой постоянный вектор, скобками обозначено скалярное произведение векторов. Предположим, что поставленная задача имеет решение в классе допустимых управлений $u(t)$, это решение будем называть оптимальным управлением. К виду (2.2) приводится после введения дополнительных фазовых координат широкий класс интегральных функционалов [26].

Согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина [2, 26], введем n -мерный вектор $p = (p_1, \dots, p_n)$ сопряженных переменных, функцию Гамильтона H и запишем сопряженную систему и условия трансверсальности:

$$H(t, x, p, u) = (p, f(t, x, u)), \quad (2.3)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j(t, x, u)}{\partial x_i}, \quad p(T) = -c. \quad (2.4)$$

Согласно принципу максимума, искомое оптимальное управление доставляет функции H из (2.3) максимум по $u \in U$ при любом $t \in [t_0, T]$, если x и p удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (2.1) и (2.4).

В качестве начального приближения $u^1(t)$ зададим некоторое допустимое управление. Метод состоит из последовательных итераций; k -я итерация заключается в следующем ($k = 1, 2, \dots$):

1) решая задачу Коши (2.1) с управлением $u = u^k(t)$, определяем траекторию $x = x^k(t)$ на интервале $[t_0, T]$;

2) решая задачу Коши (2.4) “справа налево” от момента $t = T$ до $t = t_0$ при $u = u^k(t)$, $x = x^k(t)$, находим сопряженные переменные $p^k(t)$ на интервале $[t_0, T]$;

3) определяем управление $u^{k+1}(t)$ на интервале $[t_0, T]$ из условия

$$H(t, x^k(t), p^k(t), u^{k+1}(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^k(t), p^k(t), u) \quad (2.5)$$

и после этого переходим к следующей итерации.

Если процесс последовательных приближений сходится, то продолжаем его до тех пор, пока последующие приближения не будут отличаться друг от друга в пределах заданной точности. Полученное решение будет удовлетворять принципу максимума.

Описанный простейший вариант итерационного процесса не всегда сходится и в случае нашей системы такое произошло. Рассмотрим прием, позволяющий добиться сходимости итераций [1]. Обозначим через Φ оператор, который каждому допустимому управлению $u^k(t)$ ставит в соответствие новое приближение по схеме, приведенной выше (см. (2.5)):

$$u^{k+1}(t) = \Phi(u^k(t)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда новое приближение модифицированного метода определяется по следующей схеме:

$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} u^k(t), & t \notin [t', t''] \subset [t_0, T], \\ \Phi(u^k(t)), & t \in [t', t'']. \end{cases}$$

Здесь интервал $[t', t'']$, входящий в интервал $[t_0, T]$, выбирается так, чтобы обеспечить условие

$$J^{k+1} < J^k,$$

где J^k, J^{k+1} — значения функционала, отвечающие управлениям u^k, u^{k+1} .

Подбор чисел t', t'' на каждой итерации происходит следующим образом:

$$t' = t^* - \frac{h}{2}, \quad t'' = t^* + \frac{h}{2}, \\ t^* = \arg \max_{t \in [t_0, T]} [H(p^k(t), x^k(t), u^{k+1}(t), t) - H(p^k(t), x^k(t), u^k(t), t)],$$

где h — параметр, выбираемый произвольно. Процесс итераций заканчивается, когда для управления будет выполнен принцип максимума.

3. Методика применения метода Ньютона. Для построения оптимального управления или экстремалей нужно, во-первых, составить соотношения принципа максимума, во-вторых, численно решить их с использованием метода Ньютона.

Для решения первой подзадачи (составления краевой задачи) следует выполнить набор последовательных стандартных действий, а именно ввести сопряженные переменные, составить гамильтониан, выписать сопряженную систему, найти общий вид управления, максимизирующего гамильтониан в каждый момент времени, добавить начальные условия для основных переменных и граничные условия для сопряженных переменных на правом конце траектории (условия трансверсальности).

Для решения второй подзадачи (численного решения краевой задачи) следует использовать численный метод типа “пристрелки”. Начальные значения сопряженных переменных считаются варьируемыми параметрами. Исходная система интегрируется совместно с сопряженной системой в прямом времени при управлении, максимизирующем гамильтониан в каждый момент времени. Цель — обеспечить выполнение условий трансверсальности на правом конце траектории. Задача рассматривается формально как задача решения системы нескольких уравнений, заданных неявно. Число уравнений равно числу варьируемых параметров. Для выбора варьируемых параметров на следующей итерации и обеспечения сходимости к искомому решению используется метод Ньютона:

$$z = (p_1(0), \dots, p_n(0)), \quad F(z) = 0, \quad F = (F_1, \dots, F_n), \\ z^{k+1} = z^k - W^{-1}F, \quad W = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где z — вектор начальных значений сопряженных переменных, $F(z)$ — вектор из условий трансверсальности на правом конце, W — матрица Якоби. Так как условия трансверсальности на правом конце явно не зависят от начальных значений сопряженных переменных, то для определения матрицы Якоби применим выражение

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \approx \frac{F_i(z_1, z_2, \dots, z_j + \delta_j, \dots, z_n) - F_i(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n)}{\delta_j}.$$

Процесс итераций заканчивается, когда будут выполнены условия трансверсальности на правом конце.

4. Краевая задача принципа максимума. Введем вспомогательную переменную x_0 и выберем функционал типа Майера, соответствующий минимизации амплитуды радиальных колебаний системы в течение всего процесса:

$$J = x_0(T), \quad \dot{x}_0 = f_0 = \frac{1}{2} k_r^0 (x^2 + y^2), \quad x_0(0) = 0.$$

Данный функционал имеет вид (2.2), где $c = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Для решения задачи с таким функционалом используем принцип максимума. Введем соответствующие сопряженные переменные:

$$p_0(t), \quad p_1(t), \quad p_2(t), \quad p_3(t), \quad p_4(t),$$

причем $p_0(t) = \text{const} = -1$. Запишем гамильтониан:

$$H = (p, f) = -\frac{1}{2}k_r^0(x^2 + y^2) + p_1v_x - \frac{p_2x[k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2) + k_r^\Phi u^2]}{m_b} + \\ + p_3v_y - \frac{p_4y[k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2) + k_r^\Phi u^2]}{m_b}.$$

Здесь в скалярном произведении p – вектор сопряженных переменных, f – вектор-функция, у которой компоненты с ненулевым индексом задают правую часть системы. Сопряженная система имеет вид

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = k_r^0x + \frac{p_2[k_r^0u^2 + k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2)]}{m_b} + \frac{2k_r^r p_2x^2}{m_b} + \frac{2k_r^r p_4xy}{m_b}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -p_1, \\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial y} = k_r^0y + \frac{p_4[k_r^0u^2 + k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2)]}{m_b} + \frac{2k_r^r p_4y^2}{m_b} + \frac{2k_r^r p_2xy}{m_b}, \quad \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -p_3.$$

Граничные условия (условия трансверсальности) для полученной системы заданы на правом конце траектории:

$$p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0, \quad p_4(T) = 0.$$

Оптимальное управление должно максимизировать гамильтониан, поэтому полагаем

$$u(t) = \begin{cases} 0, & p_2x + p_4y > 0, \\ u_0, & p_2x + p_4y \leq 0. \end{cases}$$

5. Численное построение экстремалей при оптимальном управлении. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной скоростью и ненулевым начальным отклонением центра масс второго диска (его начальный угол и начальная угловая скорость равны нулю):

$$m_a = 1 \text{ кг}, \quad m_b = 1 \text{ кг}, \quad r_a = 0.621 \text{ м}, \quad r_b = 0.644 \text{ м}, \quad I_a = 0.193 \text{ кг м}^2, \quad I_b = 0.208 \text{ кг м}^2, \\ k = 10 \text{ Н/м}, \quad l = 0.012 \text{ м}, \quad N = 10, \quad T = 80 \text{ с}, \quad u_0 = 0.01 \text{ рад}, \\ x(0) = 0.02 \text{ м}, \quad v_x(0) = -0.01 \text{ м/с}, \quad y(0) = 0.02 \text{ м}, \quad v_y(0) = 0.01 \text{ м/с}.$$

Получены следующие коэффициенты упругой модели:

$$k_r^0 = 75 \text{ Н/м}, \quad k_\Phi^0 = 20 \text{ Н м}, \quad k_r^\Phi = 9375 \text{ Н/м}, \quad k_r^r = -5857 \text{ Н/м}^3, \quad k_\Phi^\Phi = 7500 \text{ Н м}.$$

Отметим, что параметры системы подбирались так, чтобы слагаемые большего порядка малости в разложении потенциальной энергии были малы по сравнению со слагаемыми меньшего порядка малости. Преобразуя потенциальную энергию следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)[2k_r^0 + k_r^r(x^2 + y^2) + k_r^\Phi(\alpha - \beta)^2] + \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2[2k_\Phi^0 + k_r^\Phi(x^2 + y^2) + k_\Phi^\Phi(\alpha - \beta)^2],$$

можно заметить, что если коэффициенты при квадратичных слагаемых рядах Тейлора будут в несколько раз больше, чем слагаемые в квадратных скобках преобразованной потенциальной энергии с коэффициентами k_r^r , k_r^Φ , k_Φ^Φ , то будет обеспечено выполнение нужного нам условия.

Варьируемыми параметрами для определения коэффициентов k_r^0 , k_Φ^0 , k_r^r , k_r^Φ , k_Φ^Φ будут r_a , r_b , l . Поэтому потребуется составить систему из трех уравнений, где также будет учтено соотношение

$l < r_b - r_a$. Для нахождения данных параметров системы были составлены следующие соотношения:

$$\begin{cases} k_r^0 = 80u_0^2, \\ k_r^0 = k_\phi^0 u_0, \\ l = 0.5(r_b - r_a). \end{cases}$$

Покажем, что при данных параметрах системы слагаемые четвертого порядка принимают меньшие значения, чем слагаемые второго порядка:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{1}{2}[k_r^0(x_{\max}^2 + y_{\max}^2) + k_\phi^0 u_{\max}^2] + \frac{1}{4}[k_r^r(x_{\max}^2 + y_{\max}^2)^2 + 2k_r^\phi(x_{\max}^2 + y_{\max}^2)u_{\max}^2 + k_\phi^0 u_{\max}^4], \\ \Pi_{\max} &= 0.031 + 0.0013, \quad |x_{\max}| = |y_{\max}| = 0.02, \quad |u_{\max}| = 0.01. \end{aligned}$$

Из закона сохранения кинетического момента и радиальности упругой силы следует, что фазовая траектория центра масс диска b будет стремиться к окружности, радиус которой может быть получен приближенно из следующих равенств:

$$m_b \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = m_b \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad |\vec{\omega}| = \sqrt{\frac{k_r^0}{m_b}}.$$

При вышеуказанных параметрах радиус окружности принял значение $|\vec{r}| = 0.0068$ м. Численным методом последовательных приближений и методом Ньютона было получено оптимальное управление, успешно минимизирующее амплитуду радиальных колебаний механической системы.

Для более быстрой сходимости численного метода последовательных приближений в качестве начального приближения было взято управление в виде обратной связи, имеющее следующий вид:

$$u_{\text{init}}(t) = \begin{cases} u_0, & (x\dot{x} > 0) \cap (y\dot{y} > 0), \\ 0, & (x\dot{x} \leq 0) \cup (y\dot{y} \leq 0). \end{cases}$$

Данное управление было выбрано из следующих физических соображений. Допустим, что начальные условия для x, v_x и y, v_y совпадают. Тогда из уравнений (1.6) следует, что x будет изменяться так же, как и y . Получается, что уравнение $m_b \ddot{x} + (k_r^0 + 2k_r^r x^2 + k_r^\phi u^2)x = 0$ совпадает с уравнением одномерного осциллятора с нелинейной пружиной и дополнительной управляющей силой. В работе данная дополнительная сила должна обеспечивать уменьшение энергии на участках, где произведение $x\dot{x}$ положительно, и не влиять на систему в ином случае. Обобщением на двумерный случай служит выражение $u_{\text{init}}(t)$, имеющее тенденцию к подавлению колебаний.

Для нахождения начального приближения метода Ньютона для решения краевой задачи принципа максимума использовалась следующая методика. Первоначально были найдены начальные значения сопряженных переменных для построения оптимального управления, как описано выше, на интервале времени длительностью ΔT . В качестве начального приближения для этого интервала были взяты нулевые начальные условия для сопряженных переменных. Далее происходил последовательный процесс увеличения длительности данного интервала времени с шагом по времени ΔT , где последующие начальные значения сопряженных переменных брались из предыдущего по длительности интервала времени. В таблице 1 представлены начальные приближения метода Ньютона для последовательности интервалов времени.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования. Сопряженная переменная p_1 сначала колеблется с убывающей амплитудой, а потом, когда колебания полностью пропадают, принимает нулевое терминальное значение. Поведение сопряженных переменных p_2, p_3, p_4 аналогично, поэтому графики для них не приводятся. Функционал J имеет в конце процесса раскрутки примерно следующее значение: 0.4239601. Для контроля точности представлен график для Гамильтониана (рис. 3) в течение процесса раскрутки. Из данного графика видно, что Гамильтониан является приблизительно постоянным, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

Таблица 1. Начальные приближения в методе Ньютона

Интервал времени	$p_1(0)$	$p_2(0)$	$p_3(0)$	$p_4(0)$
[0, 10]	0	0	0	0
[0, 20]	-6.2476149729	0.0558616915	-6.2514938495	-0.0636194428
[0, 30]	-10.7938393835	0.1378480362	-10.8035365526	-0.1572423726
[0, 40]	-13.7405216169	0.2605788340	-13.7492193386	-0.2779742774
[0, 50]	-15.8863496236	0.4296283883	-15.8951768600	-0.4472828611
[0, 60]	-17.4251969814	0.6755285405	-17.4349274146	-0.6949894072
[0, 70]	-18.4961040840	1.0140680430	-18.5058913761	-1.0336426276
[0, 80]	-19.2388848848	1.5026903304	-19.2486687961	-1.5222581530

Заметим из графиков, что частота колебаний $r(t)$ выше по сравнению с частотой колебаний $x(t)$ и $y(t)$. На рис. 4 демонстрируются графики для $x(t)$ (штриховая линия), $y(t)$ (штрих-пунктирная линия), $r(t)$ (сплошная линия). Частота колебаний у $r(t)$ больше примерно в 2 раза из-за того, что в момент максимума амплитуды $x(t)$ амплитуда $y(t)$ примерно равна 0. Верно данное утверждение и в обратном порядке.

Для оценивания эффективности построенного управления сравним его с другим управлением, определяемым по схеме:

$$FC(t) = \begin{cases} u_0, & x\dot{x} + y\dot{y} > 0, \\ 0, & x\dot{x} + y\dot{y} \leq 0. \end{cases}$$

Данное управление относится к классу управлений с обратной связью и отличается от управления $u_{\text{init}}(t)$, однако из-за примерно похожего принципа действия успешно минимизирует радиальные колебания. Для сравнения построим $u(t)$, $FC(t)$ на одном графике (см. рис. 5, где показан процесс в течение временного подынтервала, присутствуют отличия управлений). Аналогично поступим и с функцией $J(t)$, используя данные, полученные при интегрировании системы при двух управлениях $u(t)$, $FC(t)$. Сплошная линия на графиках соответствует управлению $u(t)$, штриховая — управлению $FC(t)$.

Было обнаружено, что управления $u(t)$, $FC(t)$ имеют относительно похожий характер переключения, но также существуют и отличия, присутствующие в конце рассматриваемого интервала времени (рис. 5). На графике $J(t)$ показано, что при оптимальном управлении $u(t)$ функционал J принимает меньшее значение, чем при управлении $FC(t)$. Однако значение, принимаемое функционалом J при управлении в виде обратной связи, не сильно больше и имеет примерно следующее значение: 0.4239731. Поэтому можно утверждать, что данное управление является квазиоптимальным управлением.

6. Процедура сглаживания оптимального управления. Функция оптимального управления представляет собой кусочно-постоянную функцию с некоторым приблизительно постоянным периодом переключения. Процедура сглаживания протекала следующим образом.

Для каждой точки, в которой происходит переключение управления, необходимо построить отрезок времени, в котором осуществляется устранение разрыва управления. Центром данных отрезков будут точки переключения, а концы отрезка находятся в точках, где управление принимает значения u_0 или 0. Отметим, что данный отрезок времени должен быть во много раз меньше периода переключения управления.

Далее из концов отрезка необходимо провести имеющие одинаковый по модулю, но разный по знаку главный коэффициент q ветви двух парабол следующего общего вида:

$$u = \pm q(t - t_i)^2 + b, \quad \text{где} \quad b = \begin{cases} 0, & q > 0, \\ u_0, & q < 0. \end{cases}$$

Нулевое значение коэффициента b соответствует положительному знаку перед коэффициентом q , а значение u_0 коэффициента b — отрицательному знаку перед коэффициентом q . Точкой соединения двух парабол выступают точки переключения оптимального управления (середины

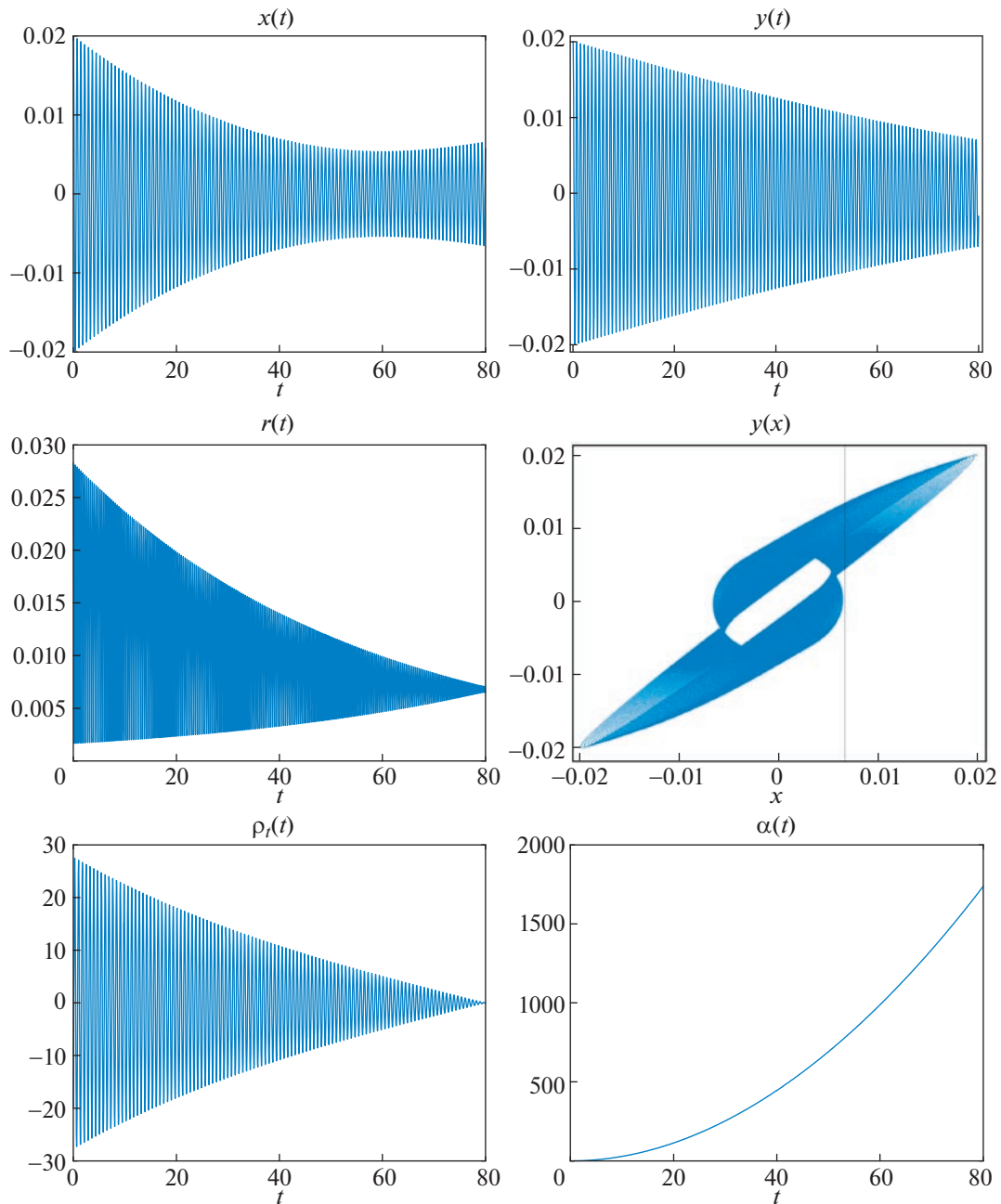


Рис. 2. Результаты численного моделирования при оптимальном управлении

отрезков), в которых управление принимает значение $u_0/2$. Предлагается следующая итерационная схема определения управления на интервалах времени (рис. 6):

$$u = \begin{cases} -q(t - t_i)^2 + u_0, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ q(t - t_{i+2})^2, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ 0, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}], \\ q(t - t_{i+3})^2, & t \in [t_{i+3}, t_{i+4}], \\ -q(t - t_{i+5})^2 + u_0, & t \in [t_{i+4}, t_{i+5}], \\ u_0, & t \in [t_{i+5}, t_{i+6}]. \end{cases}$$

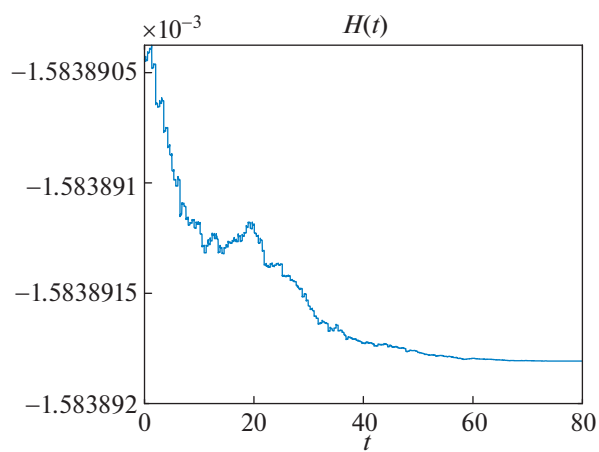


Рис. 3. Контроль точности полученных результатов

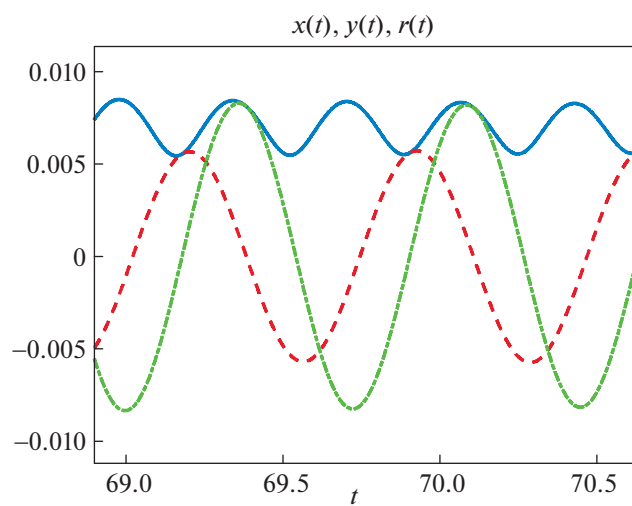
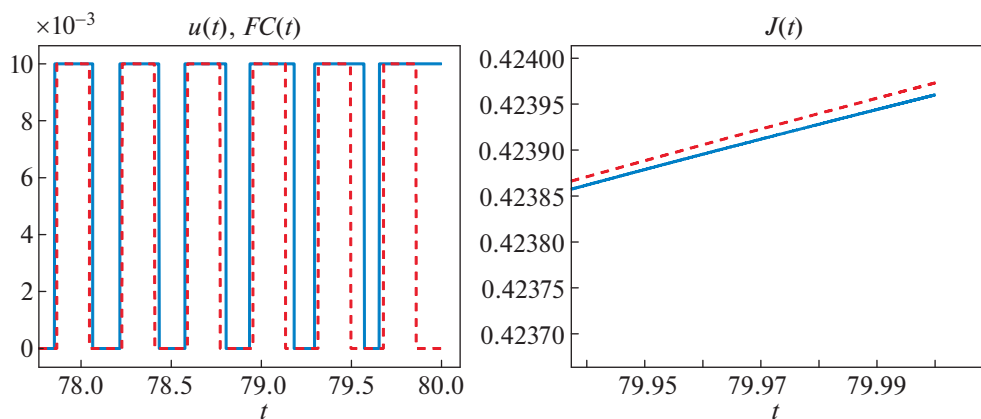
Рис. 4. Сравнение частот колебаний $x(t)$, $y(t)$, $r(t)$ 

Рис. 5. Сравнение управлений

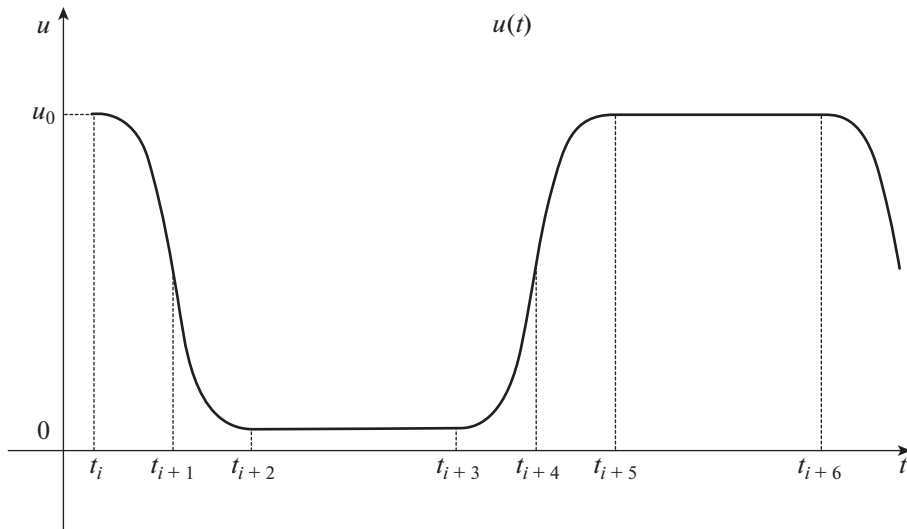


Рис. 6. Схема для процедуры сглаживания оптимального управления

Здесь t_{i+1} , t_{i+4} — моменты, когда оптимальное управление должно менять свое значение, t_i , t_{i+2} , t_{i+3} , t_{i+5} — вершины парабол. Получим выражение для определения крутящего момента на данных интервалах времени. Для этого рассмотрим следующие уравнения Лагранжа:

$$I_a \ddot{\alpha} + k_\phi(\alpha - \beta) = M, \quad I_b \ddot{\beta} - k_\phi(\alpha - \beta) = 0.$$

Вычитанием из первого уравнения второго уравнения, домноженного на коэффициент I_a/I_b , можно получить следующее выражение для определения крутящего момента:

$$M = I_a(\ddot{\alpha} - \ddot{\beta}) + k_\phi \left(1 + \frac{I_a}{I_b}\right)(\alpha - \beta). \quad (6.1)$$

Заметим, что выражение для определения крутящего момента может быть переписано следующим образом:

$$M = I_a \ddot{u} + \tilde{M}(u, x, y), \quad \text{где} \quad \tilde{M}(u, x, y) = [k_\phi^0 + k_r^\phi(x^2 + y^2) + k_\phi^\phi u^2] \left(1 + \frac{I_a}{I_b}\right) u. \quad (6.2)$$

Тогда итерационная схема определения крутящего момента на интервалах времени (рис. 6) примет следующий вид:

$$M = \begin{cases} -2I_a q + \tilde{M}(u, x, y), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 2I_a q + \tilde{M}(u, x, y), & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ 0, & t \in [t_{i+2}, t_{i+3}], \\ 2I_a q + \tilde{M}(u, x, y), & t \in [t_{i+3}, t_{i+4}], \\ -2I_a q + \tilde{M}(u, x, y), & t \in [t_{i+4}, t_{i+5}], \\ \tilde{M}(u, x, y), & t \in [t_{i+5}, t_{i+6}]. \end{cases}$$

7. Численное моделирование при непрерывном управлении. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной скоростью и ненулевым начальным отклонением центра масс второго диска (его начальный угол и начальная угловая скорость равны нулю):

$$m_a = 1 \text{ кг}, \quad m_b = 1 \text{ кг}, \quad r_a = 0.621 \text{ м}, \quad r_b = 0.644 \text{ м}, \quad I_a = 0.193 \text{ кг м}^2, \quad I_b = 0.208 \text{ кг м}^2,$$

$$k = 10 \text{ Н/м}, \quad l = 0.012 \text{ м}, \quad N = 10, \quad T = 80 \text{ с}, \quad u_0 = 0.01 \text{ рад}, \quad q = 10 \text{ рад/с}^2,$$

$$x(0) = 0.02 \text{ м}, \quad v_x(0) = -0.01 \text{ м/с}, \quad y(0) = 0.02 \text{ м}, \quad v_y(0) = 0.01 \text{ м/с}.$$

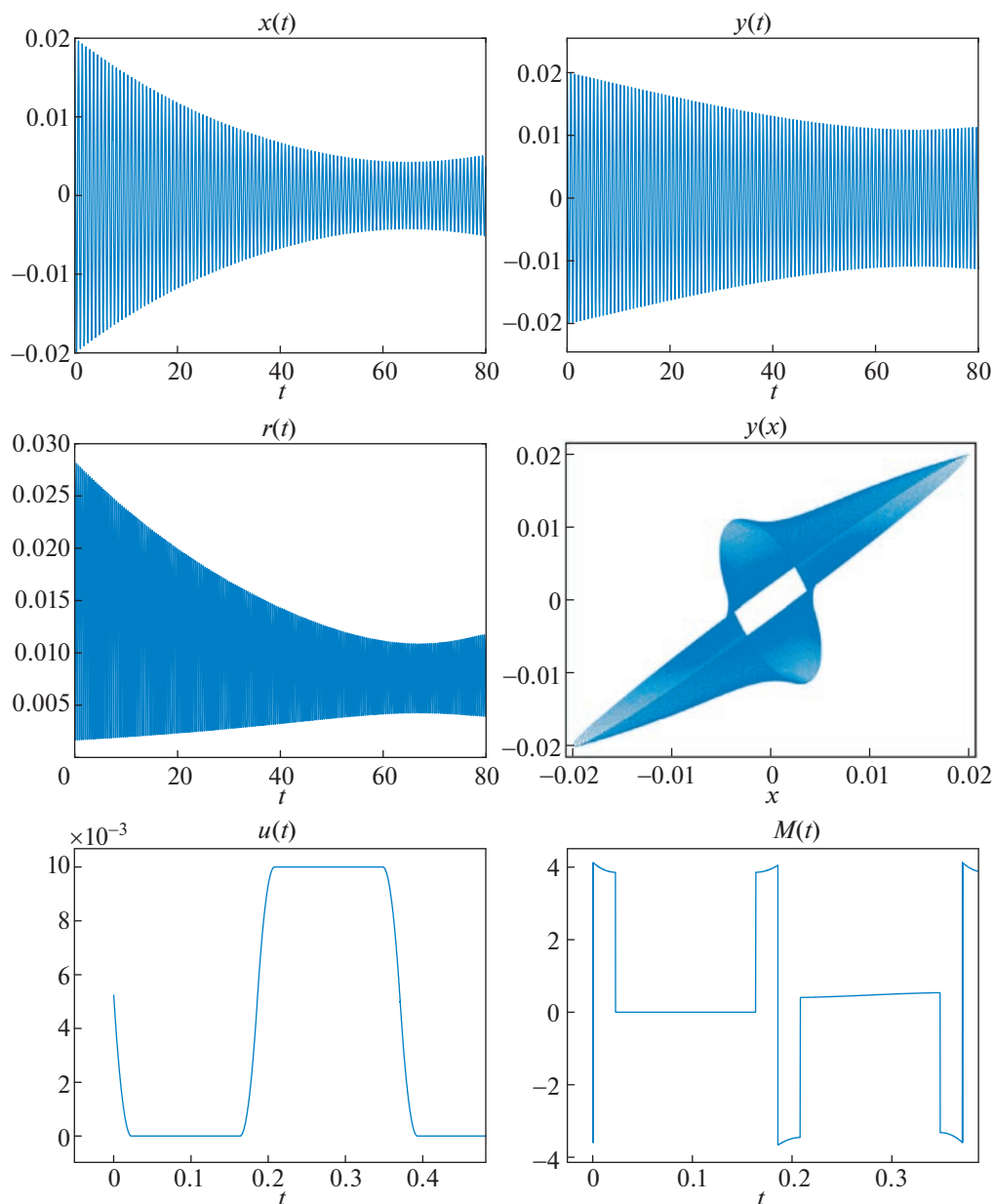


Рис. 7. Результаты моделирования при применении процедуры сглаживания

Получены следующие коэффициенты упругой модели:

$$k_r^0 = 75 \text{ Н/м}, \quad k_\phi^0 = 20 \text{ Н м}, \quad k_r^\phi = 9375 \text{ Н/м}, \quad k_r^r = -5857 \text{ Н/м}^3, \quad k_\phi^\phi = 7500 \text{ Н м},$$

а также следующие результаты (рис. 7). Функционал в конце процесса раскрутки принял примерное значение 0.4463841. Отметим, что при увеличении значения коэффициента q фазовая траектория центра масс диска b будет иметь вид окружности к концу процесса раскрутки.

Заключение. Описана постановка задачи оптимального подавления упругих колебаний, возникающих при раскрутке двухмассовой механической системы. Развита и проиллюстрирована алгоритм применения метода последовательных приближений с улучшенной сходимостью и метода Ньютона. Обнаружено квазиоптимальное управление в виде обратной связи, успешно минимизирующее амплитуду радиальных колебаний механической системы. Данный подход может быть использован в технических устройствах, минимизирующих амплитуду упругих колебаний раскручиваемых систем. Эффективность данного подхода заключается в том, что применение

данного управления в технических системах не требует затрат на численный расчет управления. С помощью процедуры сглаживания для оптимального управления построено непрерывное управление, уменьшающее амплитуду радиальных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
3. Решмин С.А., Васенин С.А. Применение метода последовательных приближений при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи управления раскручиванием двухмассовой системы // Modern European Researches. 2022. № 3 (Т. 1). С. 186–196.
4. Дивеев А.И., Константинов С.В. Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 80–106.
5. Garcia Almuzara J.L., Flügge-Lotz I. Minimum Time Control of a Nonlinear System // J. Differen. Equations. 1968. V. 4. № 1. P. 12–39.
6. Ovseevich A.I. Complexity of the Minimum-Time Damping of a Physical Pendulum // SIAM J. on Control and Optimization. 2014. V. 52. № 1. P. 82–96.
7. Решмин С.А. Бифуркация в задаче быстрогодействия для нелинейной системы второго порядка // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 562–572.
8. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
9. Галаев А.А., Лысенко П.В. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // АиТ. 2019. № 1. С. 21–37.
10. Лавровский Э.К. О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.
11. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение тележки с маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 30–41.
12. Решмин С.А. Применение метода Ньютона при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи об оптимальном раскручивании двухмассовой системы // Modern European Researches. 2021. № 2 (Т. 1). С. 114–122.
13. Каюмов О.Р. Оптимальный по быстродействию поворот пружинного маятника // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 43–56.
14. Розенблат Г.М. Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99.
15. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
16. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 10–23.
17. Наумов Н.Ю., Черноусько Ф.Л. Переориентация твердого тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 98–105.
18. Привалов Е.А., Жбанов Ю.К. Стержневая конструкция упругого подвеса инертной массы // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 19–28.
19. Журавлев В.Ф. Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
20. Журавлев В.Ф. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.
21. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Управление в форме синтеза для успокоения системы осцилляторов // АиТ. 2015. № 11. С. 3–17.
22. Ананьевский И.М., Овсеевич А.И. Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. Т. 5. № 5. С. 18–26.
23. Воеводин П.С., Заболотнов Ю.М. О стабилизации движения электродинамической тросовой системы на околоземной орбите // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 48–62.
24. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
25. Решмин С.А. Качественный анализ силы тяги при вращении ведущего колеса с невесомой шиной // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 211–221.
26. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I // АиТ. 1959. Т. 20. Вып. 10. С. 1320–1334.

О ПРЕДОТВРАЩЕНИИ ВИБРАЦИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2023 г. Ю. Д. Селюцкий^{a,*}, А. М. Формальский^{a,**}

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

**e-mail: formal@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

После доработки 24.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Изучается механическая система с двумя степенями свободы, состоящая из двух абсолютно твердых тел (материальных точек), соединенных между собой невесомым прямолинейным вязкоупругим стержнем, который может растягиваться или сжиматься. Тела могут двигаться поступательно вдоль неподвижной прямой. К одному из них прикладывается ограниченная по абсолютной величине управляющая сила, вектор которой направлен вдоль стержня. Построено непрерывное кусочно-линейное по времени управление, которое переводит систему из одного положения равновесия в другое за время, “близкое” к минимально возможному. В отсутствие вязкости при построенном квазиоптимальном по быстродействию управлении нежелательные вибрации тел не возбуждаются ни в переходном процессе, ни по его окончании. В отличие от оптимального по времени релейного управления, построенное непрерывное управление является также и робастным по отношению к неопределенности конструктивных параметров.

DOI: 10.31857/S0002338823060094, EDN: HINGMD

Введение. Исследуемая в работе система содержит два абсолютно твердых тела, соединенных прямолинейным невесомым вязкоупругим стержнем, который может сжиматься или растягиваться. Эта система моделирует симметричное относительно оси твердое тело, вытянутое вдоль этой оси и обладающее податливостью вдоль нее. К одному из абсолютно твердых тел, расположенных на концах этого осесимметричного тела, прикладывается единственная внешняя управляющая сила, ограниченная по абсолютной величине. Вектор этой силы направлен вдоль стержня, соединяющего между собой оба тела. Эта сила должна переместить приведенную выше систему из ее начального равновесного состояния в другое состояние — также равновесное. Управление строится в виде непрерывной функции времени.

Математическая модель изучаемой системы с двумя степенями свободы состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В спектре системы есть двукратное нулевое собственное значение. Если в стержне учитывается вязкость, то в спектре системы есть также два действительных собственных значения или пара комплексно-сопряженных. В отсутствие вязкости система имеет только пару нулевых и пару чисто мнимых собственных значений.

Оптимальное по быстродействию ограниченное управление линейной стационарной системой представляет собой *разрывную* функцию времени [1–3] (bang-bang control). Система, содержащая две материальные точки, наделенные массами, исследуется в ряде публикаций (см., например, [4–11]). Среди них есть работы, в которых строится оптимальное по времени управление [4, 7, 8], оптимальное с точки зрения расхода топлива [8], а также управление, при котором в системе не возбуждаются нежелательные колебания или минимизируется их амплитуда [5, 9]. В [10, 11] построено ограниченное управление системой с двукратным нулевым собственным значением и парой чисто мнимых.

Изучаемая задача представляет интерес с точки зрения проблем управления космическими аппаратами, роботами-манипуляторами, конструкция которых обладает податливостью и которые

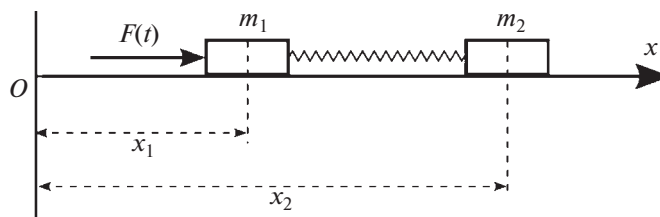


Рис. 1. Схема рассматриваемой механической системы

должны маневрировать как можно быстрее и без значительных структурных вибраций во время маневров и/или после них [5]. В [12] построено управление перемещением упругого манипулятора, которое также позволяет избежать возбуждения нежелательных вибраций при его работе.

В монографии [13] рассматриваются общие проблемы управления колебательными процессами, разработаны методы синтеза оптимального управления ими, в том числе приближенные. Отметим, что в статье [14] предлагается классификация управляемых систем с двумя степенями свободы.

Хорошо известно [6, 7], что *разрывное* управление, например оптимальное по быстродействию, не является робастным, поскольку при неточном знании параметров системы его использование может привести к неприемлемо большим отклонениям движения системы от желаемого. В настоящей статье построено в виде *непрерывной* функции времени управление, “близкое” к оптимальному по быстродействию. Это управление переводит систему из заданного положения равновесия в другое положение равновесия — желаемое. При неточном знании параметров системы использование *непрерывного* управления приводит к меньшим отклонениям движения системы от желаемого, нежели в случае применения разрывного управления. При построенном здесь непрерывном управлении не возникают, в частности, нежелательные колебания одного тела относительно другого ни в переходном процессе, ни после его окончания. Авторам настоящей статьи представляется, что развитый здесь метод построения *непрерывного* во времени квазиоптимального по быстродействию управления, при котором удастся реализовать движение системы, близкое к желаемому, может быть использован и в других задачах.

1. Механическая система и ее математическая модель. На рис. 1 показана схема механической системы с двумя степенями свободы, управление которой изучается в настоящей работе. Вдоль оси координат Ox могут перемещаться два абсолютно твердых тела массы m_1 и m_2 , соединенные вязкоупругим невесомым стержнем (упругий стержень на рис. 1 изображен в виде пружины). Расстояния этих тел от начала координат O обозначены через x_1 и x_2 , коэффициент жесткости стержня — через k , а коэффициент вязкости — через d . Длина стержня в нейтральном состоянии равна l . К первому телу массы m_1 приложена управляющая сила F .

Уравнения движения показанной на рис. 1 системы имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2 + l) = F(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1 - l) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Управляющую силу $F(t)$ будем считать допустимой, если она описывается кусочно-непрерывной функцией времени t , ограниченной по абсолютной величине:

$$|F(t)| \leq F_0 \quad (F_0 = \text{const}). \quad (1.2)$$

Множество допустимых управляющих воздействий обозначим через Ω .

Пусть при $t \leq 0$ имеет место тождество

$$F(t) \equiv 0 \quad (1.3)$$

и система находится в равновесии, так что

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (1.4)$$

В состоянии (1.4) длина стержня равна l и он находится в нейтральном положении. При условиях (1.4) система остается в равновесии до тех пор, пока имеет место тождество (1.3). Будем считать,

что цель управления $F(t) \in \Omega$ состоит в том, чтобы к некоторому моменту времени T перевести систему (1.1) из равновесия (1.4) в другое положение равновесия:

$$x_1(T) = x_{1T}, \quad x_2(T) = x_{1T} + l, \quad \dot{x}_1(T) = 0, \quad \dot{x}_2(T) = 0, \quad (1.5)$$

где $x_{1T} > 0$ — заданная постоянная величина. Отметим, что при $t = T$ (в состоянии (1.5)) длина стержня так же, как и при $t = 0$, должна быть равна l , т.е. он должен находиться в нейтральном положении. Другими словами, конфигурации системы в состояниях (1.4) и (1.5) совпадают, т.е. при $t = 0$ и $t = T$ имеет место равенство

$$x_2(t) = x_1(t) + l. \quad (1.6)$$

Чтобы упростить параметрический анализ, приведем систему к безразмерному виду.

2. Уравнения движения в безразмерных переменных. Уравнения (1.1), прежде всего, перепишем в виде

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\xi}_1 + d(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + k(\xi_1 - \xi_2 + 1) = \Phi(t), \\ m_2 \ddot{\xi}_2 + d(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + k(\xi_2 - \xi_1 - 1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$\xi_1 = x_1/l, \quad \xi_2 = x_2/l, \quad \Phi(t) = F(t)/l, \quad (|\Phi(t)| \leq \Phi_0, \quad \Phi_0 = F_0/l). \quad (2.2)$$

Теперь введем в рассмотрение безразмерное время τ и безразмерную управляющую силу $u(\tau)$:

$$\tau = t \sqrt{\frac{\Phi_0}{m_1}} \quad \left(t = \tau \sqrt{\frac{m_1}{\Phi_0}} \right), \quad u(\tau) = \frac{F(\tau)}{F_0} = \frac{\Phi(\tau)}{\Phi_0} \quad (|u(\tau)| \leq u_0, \text{ где } u_0 = 1). \quad (2.3)$$

Опустив громоздкие промежуточные выкладки, получим вместо (2.1) уравнения движения, описанные в безразмерных переменных (2.2) и (2.3):

$$\begin{cases} \xi_1'' + b_2(\xi_1' - \xi_2') + b_3(\xi_1 - \xi_2 + 1) = u(\tau), \\ b_1 \xi_2'' + b_2(\xi_2' - \xi_1') + b_3(\xi_2 - \xi_1 - 1) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Безразмерные параметры b_1 , b_2 и b_3 в уравнениях (2.4) выражаются через исходные размерные следующим образом:

$$b_1 = \frac{m_2}{m_1}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{l}{F_0 m_1}} d = \sqrt{\frac{1}{\Phi_0 m_1}} d, \quad b_3 = \frac{kl}{F_0} = \frac{k}{\Phi_0}. \quad (2.5)$$

Штрих в уравнениях (2.4) означает однократное дифференцирование по безразмерному времени τ , а два штриха — двукратное. Вместо размерного конечного момента времени T будем использовать безразмерный момент времени

$$\theta = T \sqrt{F_0/m_1 l} = T \sqrt{\Phi_0/m_1}. \quad (2.6)$$

Если коэффициент вязкости $d = 0$, то и $b_2 = 0$ (см. выражения (2.5)).

3. Уравнения движения в нормальных координатах. Запишем теперь уравнения движения (2.4) в так называемых “нормальных” [15] координатах. Для этого введем переменные η_1 и η_2 следующим образом:

$$\eta_1 = \frac{1}{l} \left(x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2 \right) = \xi_1 + b_1 \xi_2, \quad \eta_2 = \frac{1}{l} (x_1 - x_2 + l) = \xi_1 - \xi_2 + 1. \quad (3.1)$$

Дифференцируя соотношения (3.1) по безразмерному времени τ дважды, получим выражения

$$\eta_1'' = \xi_1'' + b_1 \xi_2'', \quad \eta_2'' = \xi_1'' - \xi_2''. \quad (3.2)$$

Подставив в каждое из выражений (3.2) производные ξ_1'' и ξ_2'' из уравнений (2.4), выпишем два искомого уравнения в нормальных координатах η_1 и η_2 (промежуточные выкладки здесь опущены):

$$\eta_1'' = u, \quad \eta_2'' + b_2 \left(1 + \frac{1}{b_1} \right) \eta_2' + b_3 \left(1 + \frac{1}{b_1} \right) \eta_2 = u. \quad (3.3)$$

Во втором из уравнений (3.3) содержатся, по существу, только два безразмерных параметра, которые обозначим через c_1 и c_2 :

$$c_1 = b_2 \left(1 + \frac{1}{b_1} \right), \quad c_2 = b_3 \left(1 + \frac{1}{b_1} \right). \quad (3.4)$$

Поэтому уравнения (3.3) можно записать более компактно:

$$\eta_1'' = u, \quad \eta_2'' + c_1 \eta_1' + c_2 \eta_2 = u. \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е. Система (1.1) может быть записана в “нормальных” координатах, несмотря на то, что, наряду с консервативной силой, к ней приложена и диссипативная. Заметим, что в работе [16] получены необходимые и достаточные условия приводимости одновременно трех матриц к диагональному виду, при этом рассматриваются также и системы с диссипацией.

Если коэффициент вязкости в стержне $d = 0$, то $b_2 = 0$, а значит, и $c_1 = 0$.

Уравнения (3.5) связаны одно с другим только управлением $u(\tau)$. В отсутствие управления, т.е. при $u(\tau) \equiv 0$, уравнения (3.3) становятся однородными и “распадаются” на независимые:

$$\eta_1'' = 0, \quad \eta_2'' + c_1 \eta_1' + c_2 \eta_2 = 0. \quad (3.6)$$

Собственные значения системы (3.6) с двумя степенями свободы удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda^2 = 0, \quad \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) имеют четыре корня:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{c_1}{2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, среди четырех собственных значений (3.8) всегда есть пара нулевых. Если подкоренное выражение во втором из соотношений (3.8) положительно, то существуют также два действительных отрицательных собственных значения. Если же это подкоренное выражение отрицательно, то существует пара комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_{3,4} = -\varepsilon \pm i\omega, \quad \text{где} \quad \varepsilon > 0. \quad (3.9)$$

Величины ε и ω очевидным образом выражаются через исходные параметры при помощи формул (3.4), (3.8). Величина ω представляет собой частоту собственных колебаний системы в безразмерном времени τ , величина $\vartheta = 2\pi/\omega$ — период этих собственных колебаний, а величина ε характеризует скорость их затухания. Если коэффициент диссипации $d = 0$, то $c_1 = 0$ и $\varepsilon = 0$, а выражение для частоты ω (безразмерной) принимает вид

$$\omega = \sqrt{c_2} = \sqrt{b_3 \left(1 + \frac{1}{b_1} \right)} = \sqrt{\frac{kl}{F_0} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)}. \quad (3.10)$$

Заметим, что частоту ω собственных колебаний можно находить не только чисто теоретически, но и экспериментально — при наличии соответствующей установки. Определение частоты экспериментальным путем иногда оказывается более удобным и надежным.

Рассматривая первое из соотношений (3.1), легко убедиться в том, что координата η_1 с точностью до постоянного множителя $m_1 l / (m_1 + m_2)$ описывает положение центра масс изучаемой двухмассовой системы. Что касается координаты η_2 , то она с точностью до постоянного слагаемого l и множителя $1/l$ определяет расстояние между двумя телами (материальными точками) с массами m_1 и m_2 .

Из начальных (при $t = 0$) условий (1.4), записанных в переменных x_1 , x_2 и их производных, с помощью соотношений (3.1) находим начальные (при $\tau = 0$) условия для переменных η_1 , η_2 и их производных η_1' , η_2'

$$\eta_1(0) = \frac{m_2}{m_1}, \quad \eta_2(0) = 0, \quad \eta_1'(0) = 0, \quad \eta_2'(0) = 0. \quad (3.11)$$

Из конечных (при $t = T$) условий (1.5), записанных в переменных x_1, x_2 , с помощью соотношений (3.1) получаются следующие конечные (при $\tau = \theta$) условия для переменных η_1, η_2 и производных: η_1', η_2'

$$\eta_1(\theta) = \frac{1}{l} \left[x_{1T} + \frac{m_2}{m_1} (x_{1T} + l) \right], \quad \eta_2(\theta) = 0, \quad \eta_1'(\theta) = 0, \quad \eta_2'(\theta) = 0. \quad (3.12)$$

Разрешив уравнения (3.1) относительно переменных x_1 и x_2 , можно найти выражения декартовых координат через нормальные η_1 и η_2 .

4. Синтез непрерывного квазиоптимального по времени управления, не возбуждающего в системе вибраций. При синтезе закона управления механическими системами часто приходится учитывать ограниченность ресурсов управления. При этом могут предъявляться определенные требования к качеству управляемых процессов. Например, требование, чтобы цель управления была достигнута, по возможности, быстро, требование избежать в управляемой системе возникновения нежелательных вибраций, требование робастности управления, т.е. требование, чтобы управление обеспечивало удовлетворительное качество функционирования системы, несмотря на ограниченность ресурсов управления и на то, что его параметры зачастую отличаются от используемых при расчетах.

Рассматриваемая в настоящем разделе задача состоит в построении ограниченного условием (2.3) ($|u(\tau)| \leq u_0$) непрерывного управления $u(\tau)$, которое переводит систему (3.3) с двумя степенями свободы из заданного начального равновесного положения в заданное конечное равновесное положение за время θ , “близкое” к минимально возможному $\theta_{\min}$. При оптимальном по быстродействию управлении системой (3.3), которое является *разрывным*, в переходном процессе возникают нежелательные колебания по переменной η_2 . Эти колебания затухают лишь к концу переходного процесса. Для того, чтобы подобные вибрации не возникали, длительность переходного процесса можно “несколько” увеличить путем замены участков, на которых управление претерпевает разрывы, на участки непрерывного управления, длительность каждого из которых *равна периоду собственных колебаний*. При этом, как показано далее, заданное конечное равновесное состояние достигается *медленнее*, но “*немного*”. Забегая вперед, заметим, что время достижения конечного состояния превышает минимально возможное менее чем на один период ϑ собственных колебаний системы. Искомое квазиоптимальное по быстродействию управление $u(\tau)$ построим аналитически.

Допустим вначале, что податливость в системе отсутствует, т.е. стержень, соединяющий два тела, не деформируется. Тогда расстояние между телами в процессе перемещения системы остается постоянным, иначе говоря, имеет место тождество

$$\eta_2(\tau) \equiv 0, \quad \text{т.е.} \quad x_2(\tau) - x_1(\tau) \equiv l. \quad (4.1)$$

В этом случае речь идет об управлении движением системы с одной степенью свободы, математическая модель (3.3) которой становится максимально простой — в ней остается только одно дифференциальное уравнение второго порядка с двойным нулевым собственным значением

$$\eta_1''(\tau) = u(\tau), \quad |u(\tau)| \leq u_0 \quad (u_0 = 1). \quad (4.2)$$

В выражениях (4.2) указано ограничение на управление $u(\tau)$, приведенное в соотношениях (2.3).

Пусть начальное (при $\tau = 0$) состояние системы (4.2) $\eta_1(0) = \eta_1'(0) = 0$, а желаемое конечное (при $\tau = \theta$) состояние $\eta_1(\theta) = \eta_{lg} = \text{const} > 0$, $\eta_1'(\theta) = 0$, где η_{lg} — заданная величина. Хорошо известно [1–3], что система (4.2) приводится из начального в конечное состояние за минимально возможное время $\theta_{\min}$ при помощи релейного управления с тремя переключениями, одно из которых происходит в начале процесса управления, другое — в его середине и третье — в конце:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ u_0 & \text{при } 0 \leq \tau \leq \theta/2, \\ -u_0 & \text{при } \theta/2 < \tau \leq \theta, \\ 0 & \text{при } \tau > \theta. \end{cases} \quad (4.3)$$

При этом минимально возможное время приведения равно [1–3]

$$\theta_{\min} = 2\sqrt{\eta_{lg}/u_0}. \quad (4.4)$$

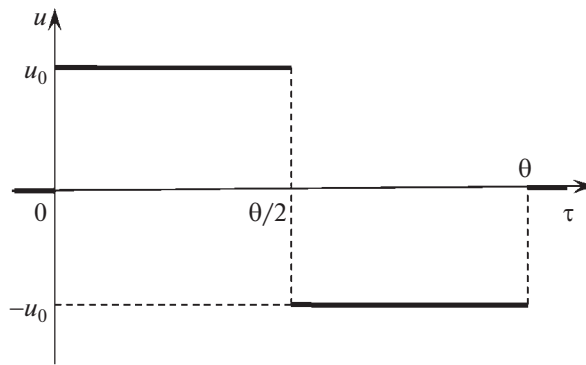


Рис. 2. Оптимальное по быстродействию управление (4.3) системой (4.2) с одной степенью свободы

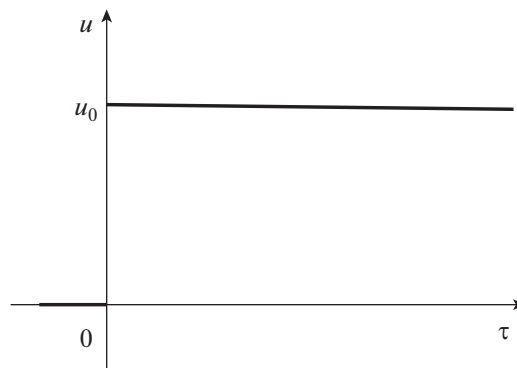


Рис. 3. Изменение во времени разрывной функции (4.6)

При $u_0 = 1$ (см. формулы (2.3)) выражение (4.4) упрощается:

$$\theta_{\min} = 2\sqrt{\eta_{lg}}. \quad (4.5)$$

Оптимальное по быстродействию релейное управление вида (4.3) показано на рис. 2. При управлении (4.3) функции $\eta_1(\tau)$ и $\eta_1'(\tau)$ с течением времени изменяются непрерывно, производная $\eta_1'(\tau)$ совершает одно колебание. Покажем, что переменная $\eta_2(\tau)$ при управлении (4.3) также колеблется.

Оценим влияние *разрывов* в управлении (4.3) на поведение функции $\eta_2(\tau)$ при $\tau \geq 0$. Для этого рассмотрим управление с разрывом в одной единственной точке $\tau = 0$:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ u_0 & \text{при } \tau \geq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

График “мгновенно” изменяющейся (в момент времени $\tau = 0$) функции (4.6) показан на рис. 3.

В соответствии с условиями (3.11) начальные (при $\tau = 0$) значения нормальной координаты η_2 и ее производной η_2' равны нулю:

$$\eta_2(0) = \eta_2'(0) = 0. \quad (4.7)$$

Второе из уравнений (3.3) при $d = 0$ (в отсутствие вязкости) принимает вид

$$\eta_2'' + \omega^2 \eta_2 = u(\tau). \quad (4.8)$$

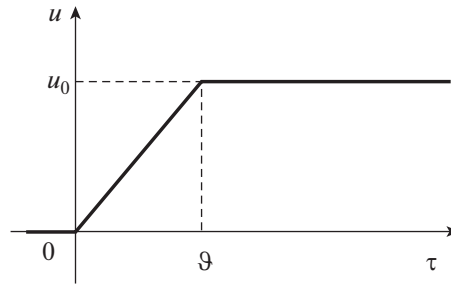


Рис. 4. График непрерывной функции (4.10)

Частота ω свободных колебаний системы (4.8) описывается равенствами (3.10). При управлении (4.6) и начальных условиях (4.7) решение неоднородного уравнения (4.8), как нетрудно показать, имеет следующий вид:

$$\eta_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ \frac{u_0}{\omega^2}(1 - \cos \omega\tau) & \text{при } \tau \geq 0, \end{cases} \quad \eta_2'(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ \frac{u_0}{\omega} \sin \omega\tau & \text{при } \tau \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Из рассмотрения соотношений (4.9) вытекает, что при управлении (4.6) функция $\eta_2(\tau)$ и соответственно ее производная $\eta_2'(\tau)$ при $\tau > 0$ совершают колебания с частотой ω свободных колебаний.

Конструкции многих механических систем обладают податливостью. При функционировании подобных систем в них часто возникают нежелательные колебания. Для борьбы с подобными вибрациями используются различные способы. Большинство из этих способов связано с *гашением* уже возникших вибраций. В то же время в работах [17–20] предлагаются способы управления механическими системами, при использовании которых удастся *предотвращать* нежелательные вибрации как в переходном процессе, так и после его окончания. В указанных публикациях построены законы управления, предотвращающие колебания в некоторых конкретных системах.

Для того, чтобы избежать колебаний величин $\eta_2(\tau)$, $\eta_2'(\tau)$, вместо управляющей функции (4.6), возрастающей при $\tau = 0$ “скачкообразно” от значения $u = 0$ до значения $u = u_0$, рассмотрим непрерывную функцию $u(\tau)$. Пусть эта функция $u(\tau)$ на интервале $0 \leq \tau \leq \vartheta$, длина которого равна периоду $\vartheta = 2\pi/\omega$ собственных колебаний, возрастает от значения $u = 0$ до значения $u = u_0$, изменяясь линейно во времени, а затем при $\tau \geq \vartheta$ остается постоянной:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\vartheta} \tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ u_0 & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases} \quad (4.10)$$

График изменения функции (4.10) показан на рис. 4.

При управлении (4.10) уравнение (4.8) как легко убедиться, имеет следующее решение:

$$\eta_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\omega^2 \vartheta} \left(\tau - \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \right) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ \frac{u_0}{\omega^2} & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\eta_2'(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\omega^2 \vartheta} (1 - \cos \omega\tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ 0 & \text{при } \tau \geq \vartheta. \end{cases}$$

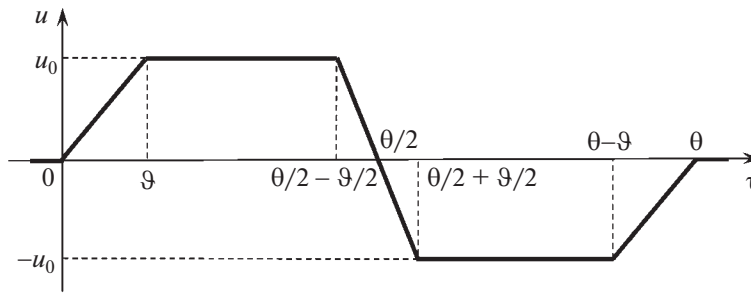


Рис. 5. Непрерывное трапецевидное управление

Решение $\eta_2(\tau)$ (см. формулы (4.11)) на интервале $(0, \vartheta)$ монотонно возрастает, поскольку внутри этого интервала производная $\eta_2'(\tau)$ положительна. При $\tau \geq \vartheta$ управляющий сигнал $u(\tau)$ становится постоянным — $u(\tau) = u_0$ (см. выражение (4.10)). При этом и решение $\eta_2(\tau)$ будет постоянным — $\eta_2(\tau) = u_0/\omega^2$ (в отличие от случая, когда управление $u(\tau)$ претерпевает разрывы). Из выражений (4.11) и сказанного выше следует, что при показанном на рис. 4 управлении (4.10) какие-либо колебания по переменной $\eta_2(\tau)$ не возникают.

На рис. 5 приведен график *непрерывного* во времени управляющего сигнала $u(\tau)$. Этот график получен из изображенного на рис. 2 путем замены участков с разрывами управления на участки непрерывного и (одновременно) линейного во времени изменения управления. Длительность каждого из этих трех участков выбираем равной периоду ϑ собственных колебаний. Длительность участков *постоянства* управления $u(\tau)$ при этом надо уменьшить так, чтобы конечное положение центра масс системы не изменилось.

Аналитическое описание трапецевидного управления $u(\tau)$ (см. рис. 5) выглядит следующим образом:

$$u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \frac{u_0}{\vartheta} \tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta, \\ u_0 & \text{при } \vartheta \leq \tau \leq \theta/2 - \vartheta/2, \\ \frac{2u_0}{\vartheta} (\theta/2 - \tau) & \text{при } \theta/2 - \vartheta/2 \leq \tau \leq \theta/2 + \vartheta/2, \\ -u_0 & \text{при } \theta/2 + \vartheta/2 \leq \tau \leq \theta - \vartheta, \\ -\frac{u_0}{\vartheta} (\theta - \tau) & \text{при } \theta - \vartheta \leq \tau \leq \theta, \\ 0 & \text{при } \tau \geq \theta. \end{cases} \quad (4.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что при управлении (4.12) колебания переменной η_2 не возбуждаются не только в интервале $0 \leq \tau \leq \theta/2 - \vartheta/2$, но и на всем промежутке $0 \leq \tau \leq \theta$.

Оценивая время θ приведения системы в конечное положение с помощью трапецевидного управления (4.12), можно показать, что имеет место следующее соотношение:

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\eta_{lg}}{u_0}} + \vartheta = \theta_{\min} + \vartheta. \quad (4.13)$$

Напомним, что в формуле (4.13) $\theta_{\min} = \sqrt{\eta_{lg}/u_0}$ — минимальное время приведения только центра масс системы в конечное положение η_{lg} с помощью релейного управления (4.3), а ϑ — период собственных колебаний.

Очевидно, что время θ_{opt} приведения рассматриваемой системы (3.5) с двумя степенями свободы в конечное положение при использовании оптимального управления больше, чем для

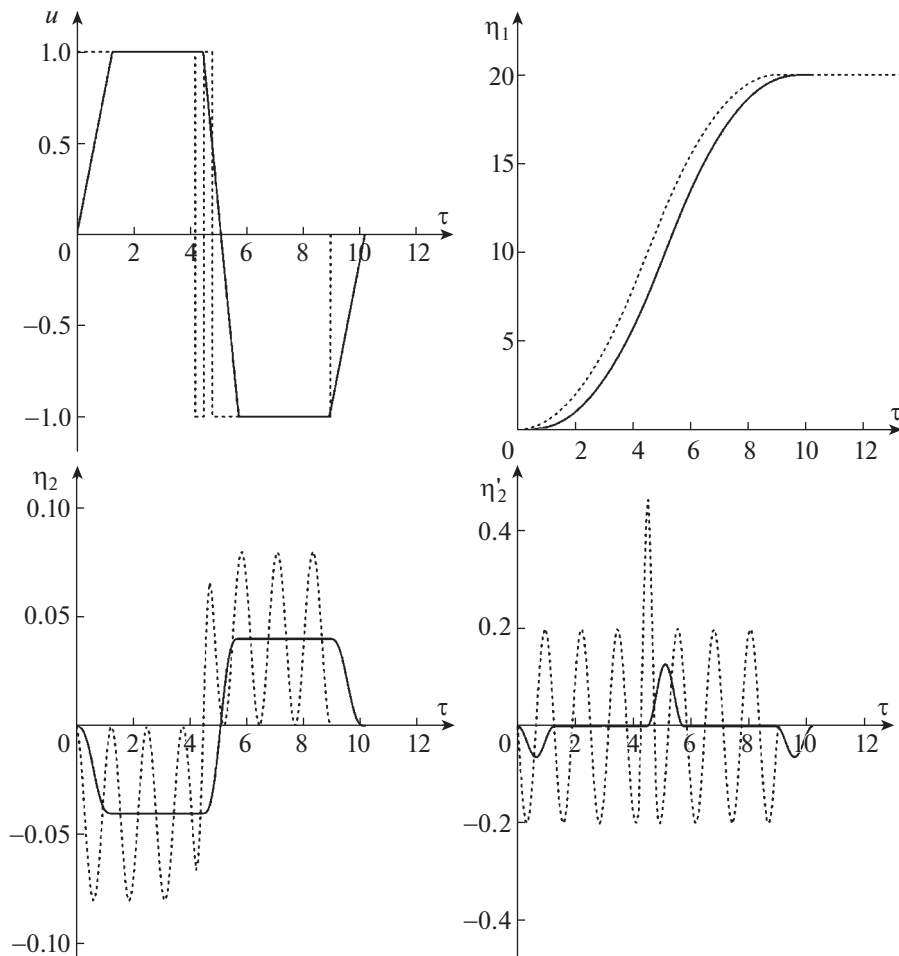


Рис. 6. Траектории при оптимальном (пунктирные линии) и трапецевидном управлениях

системы, в которой материальные точки не могут двигаться одна относительно другой. Поэтому имеют место следующие неравенства:

$$\theta_{\min} < \theta_{\text{opt}} < \theta. \quad (4.14)$$

Из соотношений (4.13) и (4.14) вытекают неравенства:

$$\theta_{\text{opt}} < \theta < \theta_{\text{opt}} + \vartheta. \quad (4.15)$$

Неравенства (4.15) означают, что время, затрачиваемое на приведение системы (3.5) в конечное положение с помощью трапецевидного управления, превосходит минимально возможное θ_{opt} , однако менее чем на период собственных колебаний системы.

5. Численные исследования. Для оценки эффективности и робастности предложенного “трапецевидного” управления проведем численное моделирование движения системы. Зафиксируем расстояние η_{lg} , на которое требуется переместить центр масс системы: $\eta_{lg} = 20$.

Будем сравнивать трапецевидное управление вида (4.12) (см. рис. 5) с оптимальным по быстродействию для данной задачи. Известно [7], что оптимальное управление является релейным и содержит *четыре* участка, на которых управление принимает максимальное по модулю значение. Отметим, что конечных формул, определяющих моменты переключения, получить не удастся. Однако эти моменты несложно найти численно при заданных значениях параметров системы и величины η_{lg} .

На рис. 6 представлены зависимости от времени оптимального и трапецевидного управления u , координат η_1 и η_2 , а также скорости η_2' . Расчеты проведены при значении безразмерной

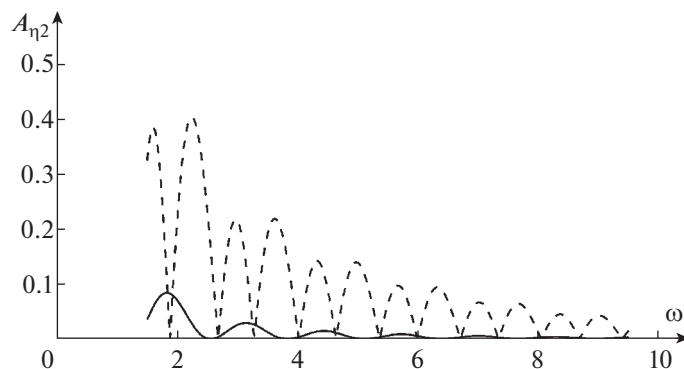


Рис. 7. Амплитуда относительных колебаний тел в зависимости от частоты

частоты собственных колебаний $\omega = 2$. Кривые, полученные при оптимальном управлении, изображены пунктирными линиями, а кривые, найденные при трапецевидном управлении, — сплошными.

Сравнивая траектории при оптимальном управлении и трапецевидном, убеждаемся в том, что времена, затрачиваемые на перемещение центра масс при оптимальном и трапецевидном управлении, близки, хотя, как и следовало ожидать, при трапецевидном управлении это время несколько больше, нежели при оптимальном (рис. 6). Что касается относительных колебаний тел, описываемых переменной η_2 , то при оптимальном управлении их больше, чем при трапецевидном, и они имеют существенно большую амплитуду. Относительные скорости тел при оптимальном управлении также заметно больше. При трапецевидном управлении переменная η_2 совершает одно “полное” колебание. Другими словами, упругий стержень в процессе перемещения всей системы сначала сжимается, затем растягивается, и в конце возвращается в исходное нейтральное положение, причем *без какого-либо перерегулирования*. Как при оптимальном, так и при трапецевидном управлении в течение всего переходного процесса имеет место неравенство $x_1(t) < x_2(t)$. Таким образом, предложенное трапецевидное управление, будучи непрерывным, позволяет предотвратить колебания друг относительно друга двух связанных упругим стержнем тел.

В реальной системе частота собственных колебаний и коэффициент вязкости могут быть известны с некоторой погрешностью. Обсудим влияние таких неточностей в определении параметров системы на характер движения.

5.1. Робастность по отношению к частоте собственных колебаний. Предположим, что фактическое значение частоты собственных колебаний в p раз больше, чем значение, используемое в законе управления. Будем считать, что демпфирование в системе отсутствует. Разница в частотах, очевидно, не скажется на движении центра масс системы. Однако она повлияет на относительное движение точек: и при оптимальном, и при трапецевидном законе управления оно, вообще говоря, не прекратится после того, как управление “отработает”, и возникнут незатухающие колебания.

На рис. 7 представлена амплитуда A_{η_2} относительных колебаний точек в зависимости от фактического значения частоты для случая $p = 1.1$ (т.е. ошибка в определении частоты составляет 10%). Сплошная линия отвечает трапецевидному управлению, а пунктирная — оптимальному.

Расчеты проводились для значений собственной частоты, при которых длина участков постоянного управления больше нуля, т.е. $\theta - 3\vartheta > 0$.

Таким образом, за исключением достаточно узких окрестностей дискретного набора частот амплитуда относительных колебаний при трапецевидном управлении существенно меньше, чем при оптимальном.

5.2. Робастность по отношению к вязкости. Предположим теперь, что коэффициент вязкости для стержня не равен нулю. Пусть в законе управления вязкие свойства стержня не учитываются. Данное обстоятельство, очевидно, не сказывается на движении центра масс. Но в общем случае после завершения процесса управления (т.е. при $\tau > \theta$) тела еще будут

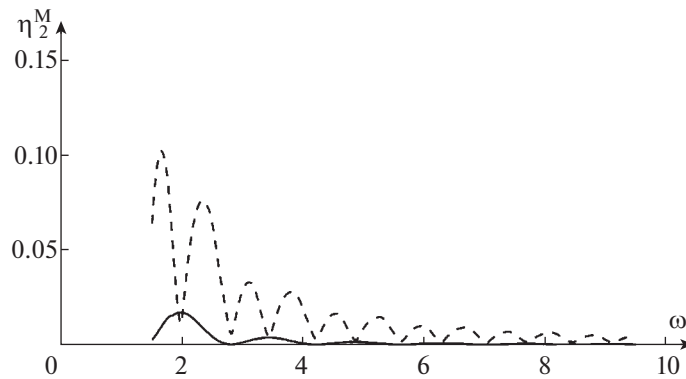


Рис. 8. Модуль максимального отклонения η_2 от нуля в зависимости от частоты

двигаться друг относительно друга (при неподвижном центре масс). Обозначим через η_2^M модуль максимального отклонения величины η_2 от нуля при $\tau \geq \theta$.

На рис. 8 приведены зависимости η_2^M от собственной частоты при безразмерном коэффициенте вязкости $\chi = 0.1$. Сплошная линия соответствует трапецевидному управлению, а пунктирная — оптимальному. Расчеты также были проведены только для таких частот, при которых $\theta \geq 3\vartheta$.

При трапецевидном управлении значения η_2^M существенно меньше, чем при оптимальном (за исключением окрестностей некоторых частот). Кроме того, как следует из рассмотрения рис. 8, величина η_2^M при трапецевидном управлении весьма быстро убывает с ростом частоты.

Таким образом, трапецевидное управление является более робастным (по отношению к неточному определению собственной частоты и коэффициента вязкого трения для стержня), чем оптимальное управление.

Заключение. Математическая модель рассматриваемой механической системы приведена к двум уравнениям относительно безразмерных переменных η_1 и η_2 , которые представляют собой нормальные координаты. Величина η_1 характеризует положение центра масс системы, состоящей из двух тел, а η_2 — взаимное расположение этих тел. Каждая из указанных двух координат описывается своим уравнением. Эти два уравнения связывает только управление, ограниченное по модулю. При оптимальном по быстродействию управлении этой системой (релейном) в переходном процессе возникают нежелательные колебания координаты η_2 . Построено непрерывное кусочно-линейное (трапецевидное) управление, в котором длительность каждого участка линейности равна периоду собственных колебаний переменной η_2 . Показано, что это управление позволяет предотвратить относительные колебания тел. При этом построенное трапецевидное управление остается близким к оптимальному по быстродействию и является робастным по отношению к неопределенности конструктивных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
4. Singh G., Kabamba P.T., McClamroch N.H. Planar Time-Optimal Control, Rest-to-Rest Slewing of Flexible Spacecraft // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1989. V. 12. № 1. 1989. P. 71–81.
5. Singer N.C., Seering W.P. Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1990. V. 112. P. 76–81.
6. Singh T., Vadali S.R. Robust Time-Delay Control // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1993. V. 115. P. 303–306.

7. *Singh T., Vadali S.R.* Robust Time-Optimal Control: Frequency Domain Approach // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 346–353.
8. *Singh T.* Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Two-Mass/Spring System // Proc. of American Control Conf., 1995. P. 3825–3829.
9. *Самсонов В.А.* Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы // Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 80 с.
10. *Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л.* Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 1994. № 4. С. 108–115.
11. *Chernousko F.L., Dobrynina I.S.* Constrained Control in a Mechanical System with Two Degrees of Freedom // IUTAM Symp. On Optimization of Mechanical Systems / Eds D.Bestle, W.Schiehlen. Stuttgart: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 57–64.
12. *Голубев Ю.Ф., Дитковский А.Е.* Управление упругим манипулятором с учетом полезной нагрузки и силы тяжести // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 125. С. 807–818.
13. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
14. *Maalouf D., Moog C.H., Aoustin Y., Li S.* Classification of Two-degree-of-freedom Under-actuated Mechanical Systems // IET Control Theory & Applications. 2015. V. 9. № 10. P. 1501–1510.
15. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 176 с.
16. *Новиков М.А.* Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц // Изв. вузов. Математика. 2014. № 12. С. 70–82.
17. *Formalskii A., Gannel L.* Control to Avoid Vibrations in Systems with Compliant Elements // J. Vibration and Control. 2015. V. 21. № 14. P. 2852–2865.
18. *Formalskii A.M.* Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 239 p.
19. *Проурзин В.А.* Управление движением упругих объектов без возбуждения собственных колебаний // АиТ. 2017. № 12. С. 54–69.
20. *Буданов В.М., Селюцкий Ю.Д., Формальский А.М.* Предотвращение колебаний сферического робота в продольном движении // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 95–108.

**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

УДК 517.977.58:539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ¹

© 2023 г. А. А. Гавриков^a, Г. В. Костин^{a,*}

^aИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Изучаются продольные колебания упругого стержня, управляемого посредством распределенной силы, которая приложена к отдельным участкам стержня. Полагается, что сила изменяется в пространстве кусочно-постоянным образом. Подобная механическая система может быть реализована с помощью пьезоактюаторов, прикрепленных вдоль стержня. Динамика системы определяется из решения вариационной задачи в соответствии с методом интегродифференциальных соотношений. Вариационная задача разрешается аналитически. Для этого на пространственно-временной сетке вводятся бегущие волны Даламберовского типа, задающие непрерывные перемещения и динамический потенциал. Последний связывает плотность импульса и напряжения. Ставится задача управления при условии взвешенной минимизации механической энергии колебаний, запасаемой стержнем в конечный момент времени, и средней потенциальной энергии, порождаемой управляющими воздействиями. Экстремальное движение и соответствующий закон управления находятся явным образом посредством решения уравнений Эйлера–Лагранжа. В качестве примера исследуются возможности управления для определенных конфигураций пьезоэлектрических элементов.

DOI: 10.31857/S0002338823050062, **EDN:** ONEOEA

Введение. Задачи управления системами с распределенными параметрами возникают, как правило, в приложениях, где описания механической системы с помощью одной независимой переменной (например, времени) недостаточно. Зачастую это приводит к необходимости управлять уравнениями в частных производных (УЧП). В этом случае функции управления могут входить как в краевые условия, так и в сами уравнения [1, 2]. Для колебательных систем появление управления в краевых условиях означает управление силой, моментом или иной величиной, заданной на части границы (например, на краю мембраны или конце стержня). Такой тип воздействия представляется удобным для инженерных приложений, но поиск оптимального управления в этом случае затруднен, в частности, вследствие естественных ограничений на скорость прохождения управляющего сигнала [3]. Если управление входит непосредственно в УЧП, то в идеале возможно управлять каждой модой колебаний в отдельности [2, 4], что облегчает построение оптимального решения [5]. Однако такое распределенное управление зачастую затруднительно реализовать непосредственно на практике (например, из-за необходимости прилагать заданную силу в каждой точке мембраны/стержня). Как следствие, может потребоваться пространственная дискретизация управляющего воздействия, так что сила действует только на часть системы или сила постоянна на части пространственной области.

В работе рассматривается механическая система, в которой управляющие воздействия дискретны и прилагаются только к определенным частям объекта. В качестве модельной задачи изучаются продольные колебания стержня, по длине которого периодически расположены пьезоэлектрические актюаторы. В промежутках между ними управление не прилагается, а создаваемая сила считается постоянной вдоль каждого актюатора, меняясь лишь во времени и от актюатора к актюатору.

Как правило, такие системы описываются УЧП, в которых возникают обобщенные функции в правых частях уравнений вследствие скачков сил в пространстве при переходе от актюатора к

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151).

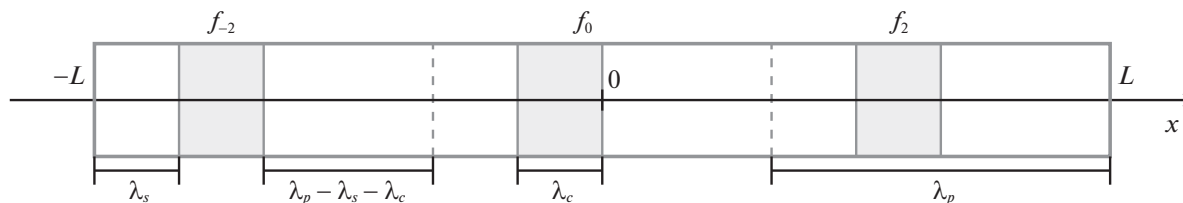


Рис. 1. Схема стержня с тремя управляющими элементами

участку, свободному от нагрузки [6]. Таким образом, решение может быть построено только лишь в терминах обобщенных функций. В данной работе авторы применяют метод интегродифференциальных соотношений (МИДС) [7], который позволяет поставить вариационную задачу динамики и найти аналитически решение оптимизационной задачи в виде непрерывных функций для непрерывных начальных условий. Под решением понимается пара функций: перемещения точек стержня и так называемый динамический потенциал, связанный дифференциальными соотношениями с импульсом и напряжениями. Задача динамики разрешается при помощи бегущих волн Даламберовского типа, определенных на пространственно-временной сетке, образованной характеристиками, а задача оптимизации (взвешенная минимизация терминальной механической энергии и энергетических затрат на управление) — используя уравнения Эйлера—Лагранжа. И в том и в другом случае неизвестные переменные находятся явным образом путем разрешения линейных соотношений, возникающих между бегущими волнами и компонентами вектора управления в силу условий непрерывности на сетке.

Ранее авторы использовали этот подход для построения оптимального управления продольными колебаниями при наличии терминальных условий для стержня, управляемого только с границы при условии минимизации как средней механической энергии [8], так и управления [9], а также когда между распределенными управляющими элементами отсутствуют промежутки. Были рассмотрены конфигурации, при которых граничное управление отсутствует [10], общий случай использования как граничного, так и распределенного управления [11], а также при условии дополнительно минимизации управления [12]. Частный случай горизонта управления, кратного безразмерной длине управляющего элемента, изучен в [13].

В работах [10, 14] затронут вопрос управляемости отдельных мод колебаний и разбиения мод на группы, каждая из которых управляется определенной комбинацией входов. Принципиальное отличие данной статьи — в наличии промежутков между управляющими элементами. Для определенных конфигураций это всегда приводит к потере управляемости отдельными группами мод, что является частным случаем проблемы неуправляемости волнового уравнения при воздействии только на часть длины [15]. Кроме того, авторы показывают на примере, что от геометрических соотношений между длинами элементов и промежутков зависит и эффективность управления как в смысле возможностей минимизации механической энергии, так и в смысле требуемых затрат энергии на управление. Выбор оптимального расположения актюаторов — крайне актуальная задача для инженерных приложений [16–18], когда относительные размеры актюаторов и управляемой системы фиксированы в силу технических ограничений. Используемый здесь подход может в дальнейшем помочь в постановке и решении подобных оптимизационных задач. Приводится пример исследования возможностей управления для различных конфигураций при фиксированном относительно длины стержня минимальном размере актюатора.

1. Постановка начально-краевой задачи. Рассматриваются продольные движения тонкого упругого стержня, схематически изображенного на рис. 1. Его длина вдоль оси x равна $2L$, начало координат расположено в геометрическом центре стержня, продольная жесткость которого $\kappa > 0$ и линейная плотность $\rho > 0$ не меняются вдоль оси x .

Помимо упругой силы в поперечном сечении стержня действует изменяющаяся во времени $t \geq 0$ управляющая сила $f(t, x)$, которая кусочно-постоянно распределена по длине. В рамках упрощенной модели такая сила может создаваться, например, группами пьезоэлектрических актюаторов (управляющими элементами), которые создают сжимающие или растягивающие напряжения на отдельных участках стержня, выделенных на рис. 1 серым тоном для случая трех элементов.

В этой работе мы ограничимся только периодическим расположением управляющих элементов с периодом λ_p , $L = K\lambda_p/2$, $K \in \mathbb{N}$. Длина единственного на периоде активного элемента рав-

на $\lambda_c \leq \lambda_p$. Крайний левый элемент стержня отстоит на расстоянии λ_s от граничной точки с координатой $x = -L$. Внутри каждого интервала управления $\mathbb{U}_k = (x_k^-, x_k^+)$ с номером $k \in \mathbb{K}$ сила f распределена равномерно. Здесь для удобства записи введено множество индексов $\mathbb{K} = \{1 - K, 3 - K, \dots, K - 1\}$ с шагом 2. Вне управляющих элементов сила f равна нулю. Координаты концов интервала $\mathbb{U}_k$ определены как

$$x_k^\pm = \frac{k-1}{2}\lambda_p + \frac{1\pm 1}{2}\lambda_c + \lambda_s, \quad k \in \mathbb{K}.$$

Вне этих управляющих элементов сила f равна нулю. Таким образом распределенная сила f задается в форме

$$f(t, x) = \begin{cases} f_k(t), & x \in \mathbb{U}_k, \quad k \in \mathbb{K}, \\ 0, & x \in \mathbb{X} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{K}} \mathbb{U}_k. \end{cases} \quad (1.1)$$

В качестве области определения $\mathcal{D}$ для переменных, задающих механическое состояние стержня, введем декартово произведение временного ($\mathcal{T}$) и пространственного ($\mathcal{X}$) интервалов:

$$\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}, \quad \mathcal{T} = (0, T), \quad \mathcal{X} = (-L, L),$$

где T – время управления. Для предполагаемого обобщения определяющих соотношений рассматриваемой системы в качестве неизвестных переменных выбираются абсолютные перемещения точек стержня $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, линейная плотность импульса $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и суммарная нормальная сила в поперечном сечении $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Закон изменения импульса (второй закон Ньютона) связывает две искомые функции p и s :

$$p_t(t, x) = s_x(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Здесь нижние индексы t и x обозначают соответственно частные производные по времени и пространству. В свою очередь импульс и сила связаны с первыми производными функции перемещения, согласно локальным законам состояния:

$$p(t, x) = \rho v_t(t, x), \quad s(t, x) = \kappa v_x(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.3)$$

Если функция f дифференцируема, классическое уравнение движения [19] получается после подстановки (1.3) в (1.2):

$$\rho(x)v_{tt}(t, x) - (\kappa(x)v_x(t, x))_x = f_x, \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.4)$$

В терминах введенных переменных на положение и импульс точек стержня накладываются начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$v(0, x) = v^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1.5)$$

где v^0 и p^0 – известные достаточно гладкие распределения [20]. Концы стержня $x = \pm L$ свободны от нагрузок:

$$s(t, -L) = s(t, L) = 0, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (1.6)$$

При этом необходимо учитывать, что, хотя функция f кусочно-непрерывна, стержень должен оставаться сплошным телом, а сила в сечении, согласно третьему закону Ньютона, не может иметь скачков. Это накладывает дополнительные условия непрерывности на функции v и s в точках $x_k^\pm$.

Согласно МИДС [7], для перехода к обобщенной формулировке начально-краевой задачи (1.2)–(1.6) введем на области $\mathcal{D}$ новую функцию (“динамический” потенциал) $r : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ таким образом, что

$$p = r_x, \quad s = r_t. \quad (1.7)$$

Непосредственной подстановкой (1.7) в (1.2) проверяется, что второй закон Ньютона при такой замене выполняется автоматически.

Чтобы устранить из рассмотрения переменные p и s , необходимо переписать уравнения состояния (1.3) как

$$\begin{cases} r_t(t, x) - \kappa(x)v_x(t, x) = 0, \\ r_x(t, x) - \rho(x)v_t(t, x) = f(t, x), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.8)$$

Через кинематическую и динамическую переменные v, r выражаются как начальное состояние (1.5), так и краевые условия (1.6), а именно:

$$\begin{aligned} v(0, x) = v^0(x), \quad r(0, x) = r^0(x) = \int_{-L}^x p^0(\chi) d\chi + c^0, \quad x \in \bar{\mathfrak{X}}; \\ r(t, L) = r^0(L), \quad r(t, -L) = r^0(-L), \quad t \in \bar{\mathfrak{T}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим особенность такого представления механического состояния системы: динамическая переменная r задана с точностью до произвольной константы c^0 , значение которой не влияет на движение упругого тела. Ненулевые правые части $r^0(\pm L)$ появляются в краевых условиях, заданных в (1.9), чтобы обеспечить необходимую, как будет показано ниже, непрерывность решения. Этим достигается совместность начальных и краевых условий при $t = 0$ и $x = \pm L$.

2. Обобщенная формулировка задачи. Локальное представление законов состояния (1.8) требует определенной гладкости начального распределения (1.9) и прикладываемой нагрузки f [20]. Для рассмотрения более широкого класса решений с учетом разрывного характера функции f два дифференциальных уравнения (1.8) можно объединить, согласно МИДС [7], в одно интегральное соотношение. Нахождение решения в этом случае сводится к условной минимизации функционала, квадратичного по кинематической и динамической переменным v, r .

Сформулируем соответствующую обобщенную начально-краевую задачу.

Даны квадратично-интегрируемые со своими первыми производными начальные распределения $v_0, r_0 \in H^1(\mathfrak{X})$ и квадратично-интегрируемая сила $f \in L^2(\mathfrak{D})$. Найти кинематическую и динамическую функции состояния $v^*(t, x)$ и $r^*(t, x)$ в пространстве $H^1(\mathfrak{D})$, которые минимизируют функционал:

$$\begin{aligned} \Phi[v^*, r^*] = \min_{v, r \in H^1(\mathfrak{D})} \Phi[v, r] = 0, \quad \Phi = \int_{\mathfrak{D}} \phi d\mathfrak{D} \geq 0, \quad d\mathfrak{D} = dt dx, \\ \phi \triangleq \frac{1}{4}(g^2 + h^2), \quad g \triangleq \sqrt{\rho} v_t - \frac{r_x}{\sqrt{\rho}}, \quad h \triangleq \sqrt{\kappa} v_x - \frac{r_t - f}{\sqrt{\kappa}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

при выполнении начальных и краевых ограничений (1.9).

В (2.1) интегральное соотношение $\Phi = 0$, реализуемое на точном решении, заменяет локальные уравнения состояния (1.8), при этом условная минимизация Φ проходит при строгом выполнении равенств (1.9). Вводятся специальным образом масштабированные функции состояния g, h , квадратичная форма которых ϕ имеет размерность линейной плотности энергии. В свою очередь функционал состояния Φ имеет размерность действия. Положительное значение $\Phi[v, r] > 0$ оценивает отклонение приближения (v, r) от точного решения (v^*, r^*) , на котором достигается абсолютный минимум функционала $\Phi = 0$. Требование интегрируемости в квадрате как функций состояния, так и их первых производных в вариационной задаче (1.9), (2.1) вытекает из того, что в Φ входят квадраты производных по t и x от неизвестных v и r .

3. Задача оптимального управления. Введем в рассмотрение вектор-функцию $\mathbf{f} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}^K$, $\mathbf{f} = (f_k)_{k \in \bar{K}}$, компоненты которой — это определенные в (1.1) силы $f_k(t)$, создаваемые k -м управляющим элементом. Относительно $\mathbf{f}$ решается следующая задача управления.

Пусть, согласно (2.1), с учетом начальных и краевых условий (1.9) функции $v, r \in H^1(\mathfrak{D})$ минимизируют функционал состояния Φ для произвольного управления $\mathbf{f} \in L^2(\mathfrak{T}; \mathbb{R}^K)$, определяющего силы f в соответствии с (1.1). Найти такую допустимую вектор-функцию $\mathbf{f}^*(t)$, которая на фиксированном интервале времени $\mathfrak{T}$ минимизирует целевой функционал:

$$\begin{aligned} \Theta[\mathbf{f}^*] = \min_{\mathbf{f} \in L^2(\mathfrak{T}; \mathbb{R}^K)} \Theta[\mathbf{f}], \quad \Theta = \Upsilon + 10^\gamma \Psi, \\ \Upsilon = \frac{\lambda_c}{2\kappa T} \int_{\mathfrak{T}} \mathbf{f}^2 dt, \quad \Psi = \int_{\mathfrak{X}} |\psi|_{t=T} dx, \quad \psi \triangleq \frac{\kappa v_x^2}{2} + \frac{r_x^2}{2\rho}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) — это задача поиска экстремума при условии, что для произвольной вектор-функции $\mathbf{f}(t)$ переменные v и r доставляют функционалу Φ из (2.1) минимальные нулевые значения,

строго выполняя ограничения-равенства, а именно условия (1.9). Здесь Y — средняя потенциальная энергия, порождаемая силой $f(t, x)$, Ψ — механическая энергия стержня в конце процесса, $\psi(t, x)$ — линейная плотность энергии, γ — безразмерный весовой коэффициент. Решение прямой задачи динамики (1.9), (2.1) — пара функций (v, r) . В представлении плотности энергии ψ входят обе переменные. Первое слагаемое в ψ определяет потенциальную энергию упругих деформаций стержня в перемещениях, второе — кинетическую энергию через динамический потенциал.

Для упрощения описания системы перейдем без потери общности к безразмерным переменным (далее индекс * опускается):

$$v = Lv^*, \quad r = \kappa \tau_* r^*, \quad x = Lx^*, \quad t = \tau_0 t^*, \quad \tau_*^2 = \frac{L\rho}{\kappa}. \quad (3.2)$$

Такая замена эквивалентна выбору динамической системы с параметрами $L = \rho = \kappa = 1$.

4. Решение начально-краевой задачи. Далее решение (v, r) задачи (1.9), (2.1) ищется в виде бегущих волн в представлении Даламбера. В общем случае произвольного набора параметров актюаторов поиск аналитического решения затруднен. В [10] рассмотрен частный случай расположения актюаторов без зазоров, т.е. когда $\lambda_c = \lambda_p$ и, следовательно, $\lambda_s = 0$. Для такой конфигурации можно привести систему за безразмерное время $T \geq 4/K$ в периодическое терминальное состояние с периодом $\lambda = 2/K$. В терминах собственных функций неуправляемыми являются все моды с волновыми числами, кратными $K/2$.

Ниже описывается алгоритм решения задачи для случая, в котором параметры длин и время управления кратны безразмерной длине λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= 2/N, \quad \lambda_p = N_p \lambda, \quad \lambda_c = N_c \lambda, \quad \lambda_s = N_s \lambda, \quad T = M\lambda, \\ N &= KN_p, \quad \{K, M, N_c, N_p\} \subset \mathbb{N}, \quad N_s \in \mathbb{Z}_+, \quad N_c + N_s \leq N_p. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Расположение элементов управления считается периодическим при выполнении соотношения (4.1). Иначе говоря, отсчитывая от левого края стержня при $x = -1$, первыми расположены $N_s \geq 0$ элементарных интервалов без управления каждый длины λ , затем N_c интервалов этой же длины с управлением. Замыкать период могут $N_p - N_c - N_s \geq 0$ интервалов опять без управляющего воздействия. Отсчитывая с правого конца текущего периода, структура повторяется.

В этом соразмерном случае удастся сформировать конечную сетку из характеристик на пространственно-временной области $\mathfrak{D}$, на которой можно, как будет показано ниже, точно разрешить начально-краевую задачу (1.9), (2.1). Кратность числу λ времени управления T не обязательна для построения конечной сетки и получения аналитического решения [11], но это приводит к увеличению более чем вдвое числа элементов сетки и усложнению алгоритма решения. В этой работе для упрощения изложения ограничимся дискретным набором интервалов времени, определенных в (4.1).

Для построения сетки на области $\mathfrak{D}$ разобьем временной интервал $\mathfrak{T}$ на M подынтервалов $\mathfrak{T}_m$, а пространственный интервал $\mathfrak{X}$ — на N подынтервалов $\mathfrak{X}_j$ так, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_m &= (t_m, t_{m+1}), \quad t_i = i\lambda, \quad m \in \mathfrak{M} = \{0, \dots, M-1\}, \\ \mathfrak{X}_j &= (x_{j-1}, x_{j+1}), \quad j \in \mathfrak{J} = \{1-N, 3-N, \dots, N-1\}, \\ x_n &= n\lambda/2, \quad n \in \mathfrak{N}^*, \quad \mathfrak{N}^* = \{-N, 2-N, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Каждому интервалу $\mathfrak{X}_j$ соответствует открытая подобласть $\mathfrak{D}_j = \mathfrak{T} \times \mathfrak{X}_j$ области $\mathfrak{D}$ и три одномерные функции:

$$\begin{aligned} w_j^+ &: (x_{j-1}, T + x_{j+1}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad w_j^- : (-x_{j+1}, T - x_{j-1}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_j &: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_j(t) = \lambda^{-1} \int_{\mathfrak{X}_j}^t f(\tau, x) d\tau dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

На области $\mathfrak{D}_j$ искомые функции v и r представляются в виде

$$\begin{cases} v(t, x) = w_j^+(t + x) + w_j^-(t - x), \\ r(t, x) = w_j^+(t + x) - w_j^-(t - x) + y_j(t), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathfrak{D}_j, \quad j \in \mathfrak{J}. \quad (4.4)$$

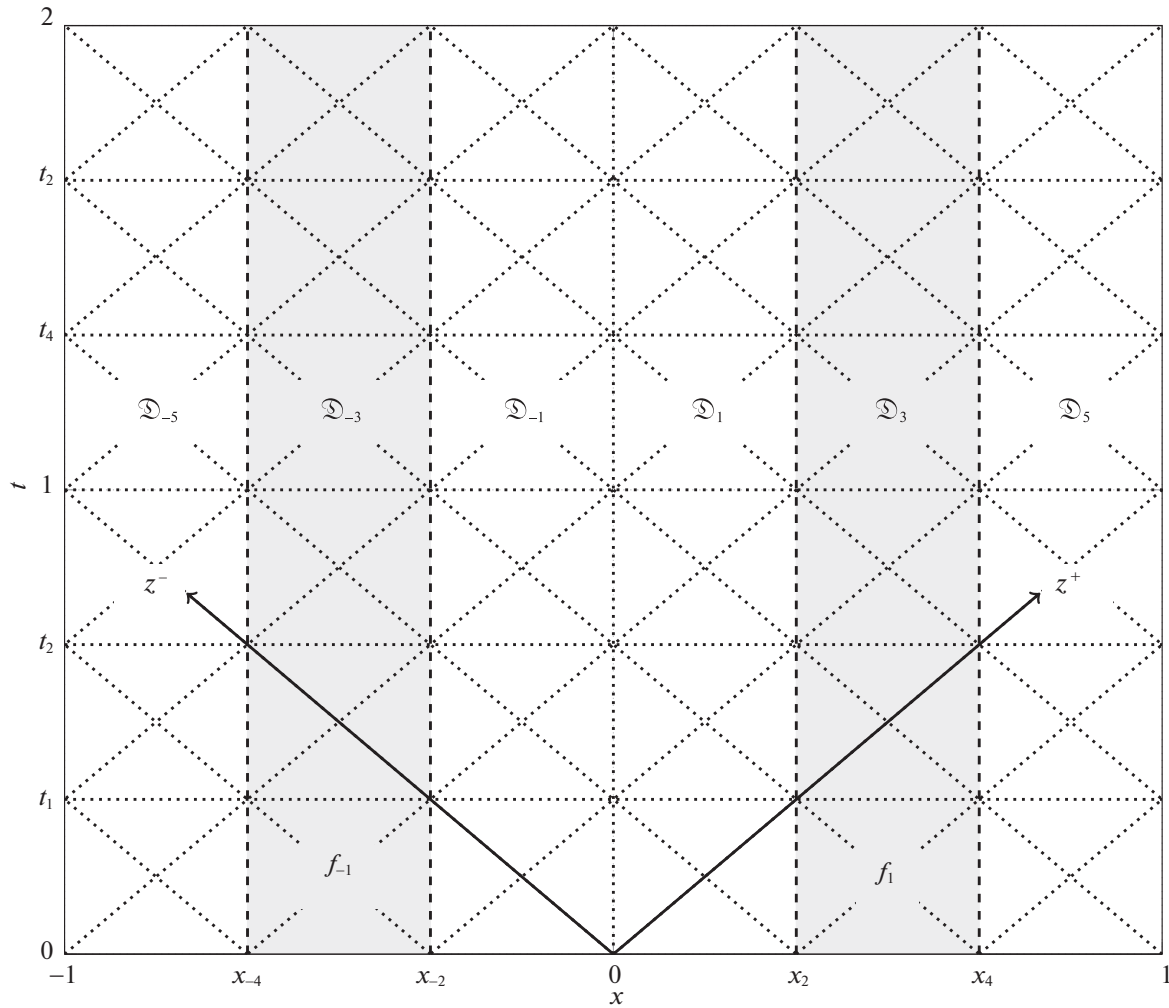


Рис. 2. Сетка на пространственно-временной области $\mathfrak{D}$ для $N = 6$, $K = 2$, $N_c = N_s = 1$, $M = 6$

Непосредственной подстановкой показывается, что функционал состояния Φ равен нулю при выполнении соотношений (4.4), так как $r_x = v_t$, $r_t = v_x + f$.

Чтобы увидеть, как одномерные функции определяют решение (4.4) на двумерной области $\mathfrak{D}$, обратимся к рис. 2. Для компактности записи вводятся новые координаты (z^+, z^-) , оси которых связаны с двумя характеристиками решения (сплошные наклонные линии). Два семейства характеристик — это отрезки в области $\mathfrak{D}$, на которых не меняются значения функций $w_j^\pm(t \pm x)$. Новые координаты связаны с (t, x) биективными линейными преобразованиями:

$$z^\pm = t \pm x, \quad t = \frac{z^+ + z^-}{2}, \quad x = \frac{z^+ - z^-}{2}. \quad (4.5)$$

Показанные пунктиром на рис. 2 наклонные ребра сетки — это характеристики, определяемые в новых координатах как

$$\mathfrak{S}_i^\pm = \left\{ (z^+, z^-) \in \mathfrak{D} : z^\pm = \frac{2i - N}{2} \lambda \right\}, \quad i = 1, \dots, N + M - 1.$$

Пространственные и временные ребра сетки проще задать в старых координатах в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_m^t &= \{(t, x) \in \mathfrak{D} : t = t_m\}, \quad t_m = m\lambda, \quad m \in \mathfrak{M}^* = \{0, \dots, M\}; \\ \mathfrak{S}_n^x &= \{(t, x) \in \mathfrak{D} : x = x_n\}, \quad x_n = \frac{1}{2}n\lambda, \quad n \in \mathfrak{N}^*. \end{aligned}$$

Для выполнения условий непрерывности на этих ребрах понадобится ввести на каждой под-области $\mathfrak{D}_j$ следующие функции:

$$\begin{aligned} w_{j,m}^{\pm} : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{R} : \quad w_{j,m}^{\pm}(z) &= w_j^{\pm}(z + z_{j,m}^{\pm}), \quad z_{j,m}^{\pm} = z_j^{\pm} + m\lambda, \\ z_j^{\pm} &= \frac{\pm j \mp 1}{2} \lambda, \quad j \in \mathfrak{J}, \quad m \in \mathfrak{M}^*, \quad \mathfrak{Z} = (0, \lambda); \\ y_{j,m} : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{R} : \quad y_{j,m}(z) &= y_j(z + t_m), \quad j \in \mathfrak{J}, \quad m \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Согласно (4.4), линейная комбинация функций $w_{i,m}^+$, $w_{j,m}^-$ и $y_{j,m}$ с допустимой комбинацией индексов i, j, m, n однозначно определяет переменные состояния v, r на соответственном треугольном элементе сетки.

Поскольку $v, r \in H^1(\mathfrak{D})$, из линейной зависимости следуют аналогичные свойства и для одномерных функций $w_{j,m}^{\pm} \in H^1(\mathfrak{Z})$, $y_{j,m} \in H^1(\mathfrak{Z})$. В силу леммы Соболева [21] эти функции должны быть непрерывны и непрерывно продолжаемы на замыкание своей области определения: $w_{j,m}^{\pm} \in C^0(\bar{\mathfrak{Z}})$, $y_{j,m} \in C^0(\bar{\mathfrak{Z}})$.

Для построения непрерывного решения начально-краевой задачи на замыкании области $\bar{\mathfrak{D}}$ необходимо выполнить начальные, краевые и межэлементные условия на сегментах $\mathfrak{S}_0^t$, $\mathfrak{S}_n^x$, $n \in \mathfrak{N}^*$. Учитывая (1.9), (4.4), (4.6) и вытекающие из (4.3) условия по построению $y_{j,0}(0) = 0$, начальные ограничения на $\mathfrak{S}_0^t$ для каждой подобласти $\mathfrak{D}_j$ представляются в виде

$$\begin{cases} w_{j,0}^+(z) + w_{j,0}^-(\lambda - z) = v^0(z + z_j^+), \\ w_{j,0}^+(z) - w_{j,0}^-(\lambda - z) = r^0(z + z_j^+), \end{cases} \quad j \in \mathfrak{J}. \quad (4.7)$$

Краевые условия из (1.9) для каждого ребра сетки, лежащего на граничных сегментах $\mathfrak{S}_{\pm N}^x$, переписываются в форме:

$$\begin{cases} w_{N-1,m+1}^+(z) - w_{N-1,m}^-(z) + y_{N-1,m}(z) = r^0(1), \\ w_{1-N,m}^+(z) - w_{1-N,m+1}^-(z) + y_{1-N,m}(z) = r^0(-1), \end{cases} \quad m \in \mathfrak{M}. \quad (4.8)$$

К этим ограничениям необходимо добавить еще и межэлементные условия непрерывности функций v и r на внутренних сегментах $\mathfrak{S}_n^x$. Эти условия задаются следующим образом:

$$\begin{cases} w_{n+1,m+1}^+(z) + w_{n+1,m}^-(z) = w_{n-1,m}^+(z) + w_{n-1,m+1}^-(z), \\ w_{n+1,m+1}^+(z) - w_{n+1,m}^-(z) + y_{n+1,m}(z) = w_{n-1,m}^+(z) - w_{n-1,m+1}^-(z) + y_{n-1,m}(z), \end{cases} \quad (4.9)$$

$$m \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathfrak{N} = \{2 - N, 4 - N, \dots, N - 2\}.$$

Число уравнений $N_e = 2N(M + 1)$ в линейной алгебраической системе (4.7)–(4.9) равно числу неизвестных функций $w_{j,m}^{\pm}$, $j \in \mathfrak{J}$, $m \in \mathfrak{M}^*$. Аргумент z пробегает значения от 0 до λ . Чтобы подтвердить разрешимость этой системы относительно функций бегущих волн, можно предложить следующий алгоритм.

Вначале попарно разрешаются начальные условия (4.7): каждая пара относительно двух переменных $w_{j,0}^+$ и $w_{j,0}^-$ для $j \in \mathfrak{J}$. После соответствующей замены аргумента $z' = \lambda - z$ и констант $z_j^- = z_j^+ + \lambda$ полученные значения этих переменных выражаются явно через начальные распределения:

$$\begin{cases} w_{j,0}^+(z) = \frac{1}{2} v^0(z_j^+ + z) + \frac{1}{2} r^0(z_j^+ + z), \\ w_{j,0}^-(z') = \frac{1}{2} v^0(z_j^- - z') - \frac{1}{2} r^0(z_j^- - z'), \end{cases} \quad j \in \mathfrak{J}. \quad (4.10)$$

На втором этапе, увеличивая индекс m от 0 до $M - 1$, последовательно удовлетворяются краевые и межэлементные условия (4.8), (4.9). При этом два краевых уравнения из (4.8) для текущего

значения m разрешаются относительно переменных $w_{N-1,m+1}^+$ и $w_{1-N,m+1}^-$. Для этого же m попарно разрешаются $2(N-1)$ уравнений из (4.9) относительно функций бегущих волн $w_{n+1,m+1}^+$ и $w_{n-1,m+1}^-$. Входящие в эту подсистему функции со вторым индексом m ($w_{j,m}^\pm$, $j \in \mathfrak{J}$) уже выражены на предыдущих шагах алгоритма относительно начальных функций v^0 , r^0 и неизвестных $y_{j,i}$, $i = 0, \dots, m-1$, $j \in \mathfrak{J}$.

5. Сведение задачи оптимального управления к классической вариационной. Решение линейной системы уравнений (4.7)–(4.9) относительно переменных $w_{j,m}^\pm$, где $j \in \mathfrak{J}$ и $m \in \mathfrak{M}^*$, зависит от начальных распределений $v^0(x)$, $r^0(x)$, $x \in \bar{\mathfrak{X}}$ и функций $y_{j,m}(z)$, $z \in \bar{\mathfrak{Z}}$ с индексами $j \in \mathfrak{J}$ и $m \in \mathfrak{M}$. В свою очередь, согласно (1.1), (4.3), (4.6), в зависимости от расположения интервала $\mathfrak{X}_j$ на оси x функция $y_{j,m}$ либо равна нулю, если $\mathfrak{X}_j \subset \mathfrak{X} \setminus \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} \Pi_k$, либо зависит от одной из управляющих сил f_k , если $\mathfrak{X}_j \subset \Pi_k$. Чтобы явно выразить эту зависимость, введем новые независимые функции управления:

$$u_{k,m} : \bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathbb{R} : \quad u_{k,m}(z) = \int_{t_m}^{t_m+z} f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathfrak{K}, \quad m \in \mathfrak{M}. \quad (5.1)$$

В этом представлении $y_{j,m}(z) = u_{k,m}(z)$ при условии, что $\mathfrak{X}_j \subset \Pi_k$. Введем в рассмотрения вектор-функцию управления $\mathbf{u} : \bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{KM}$ с компонентами:

$$\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^{KM}, \quad u_j = u_{k,m}, \quad j = M(K-1-k)/2 + m + 1, \quad k \in \mathfrak{K}, \quad m \in \mathfrak{M}. \quad (5.2)$$

Для того чтобы кинематическая и динамическая функции v , r были непрерывны, на сегментах $\mathfrak{S}_m^t$, $m \in \mathfrak{M}$, должны быть согласованы узловые значения функций управления:

$$u_{k,m}(\lambda) = u_{k,m+1}(0), \quad m \in \mathfrak{M}, \quad u_{k,0}(0) = 0, \quad k \in \mathfrak{K}. \quad (5.3)$$

Удобнее представить эти соотношения в векторной форме:

$$\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\lambda) = 0, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(KM) \times (KM)}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим структуру целевого функционала Θ из (3.1) с учетом представления Даламбера и введенных функций управления. В силу своей аддитивности функционал Υ переписывается в терминах вектор-функции управления $\mathbf{u}$ как

$$\Upsilon = \frac{\lambda_c}{2\kappa T} \int_0^\lambda (\mathbf{u}'(t))^2 dt.$$

Обращая внимание на выражения для v и r в (4.4) и учитывая (4.3), функцию плотности энергии ψ , определенную в (3.1), можно представить на подобласти $\mathfrak{D}_j$:

$$\psi = \psi_j = \frac{1}{2} \left(w_j^+(t+x) + w_j^+(t-x) \right)_x^2 + \frac{1}{2} \left(w_j^+(t+x) - w_j^+(t-x) \right)_x^2 = \frac{1}{2} (w_j^+(z^+))^2 + \frac{1}{2} (w_j^-(z^-))^2.$$

Учитывая значения координат $z^\pm$ в конечный момент времени $t = T$, получим выражение для терминальной энергии стержня:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{j \in \mathfrak{J}} (\Psi_j^+ + \Psi_j^-), \\ \Psi_j^\pm &= \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{X}_j} (w_j^\pm(T \pm x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \left(\frac{d}{dz} w_{j,M}^\pm(z) \right)^2 dz, \\ \Psi &= \int_0^\lambda (\mathbf{A}\mathbf{u}'(z) + \mathbf{a}(z))^2 dz, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(2N) \times (KM)}, \quad \mathbf{a} : \bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}. \end{aligned}$$

Здесь последняя строка вытекает из того, что $2N$ функции $w_{j,M}^+(x)$ как решение системы (4.7)–(4.9) зависят от начального состояния и линейной комбинации функций управления $u_{k,m}$. Эта зависимость выражается соответственно через заданную вектор-функцию $\mathbf{a}$ и матрицу $\mathbf{A}$.

Таким образом, путем представления искомых v и r в виде линейной комбинации бегущих волн, являющихся функциями одной переменной z , задача оптимального управления (1.9), (2.1), (3.1) после перенормировки сводится к классической краевой задаче вариационного исчисления относительно первой производной вектор-функции $\mathbf{u}(z)$. Нужно найти такое управление $\mathbf{u}^*(z)$ на интервале $z \in \bar{\mathfrak{J}}$, которое минимизирует квадратичный функционал:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}[\mathbf{u}^*] &= \min_{\mathbf{u} \in H^1(\bar{\mathfrak{J}}; \mathbb{R}^{KM})} \tilde{\Theta}[\mathbf{u}], \quad \tilde{\Theta} = \int_0^\lambda \theta(z, \mathbf{u}'(z)) dz, \\ \theta &= (\mathbf{u}')^2 + \tilde{\gamma}(\mathbf{A}\mathbf{u}' + \mathbf{a})^2, \quad \tilde{\gamma} = 2KT\lambda_c^{-1}10^\gamma > 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

при соблюдении краевых условий (5.4). Квадрат вектора в (5.5) означает сумму квадратов всех его компонент.

Для нахождения необходимых условий экстремальности решения вариационной задачи (5.4), (5.5) введем вектор-функцию, сопряженную к $\mathbf{u}$, согласно

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{u}'} = 2(\mathbf{E} + \tilde{\gamma}\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{u}' + 2\tilde{\gamma}\mathbf{A}^T\mathbf{a}, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица соответствующей размерности. С учетом того, что лагранжиан θ , введенный в (5.5), включает в себя только первую производную от $\mathbf{u}$, уравнение Эйлера имеет вид

$$(\mathbf{E} + \tilde{\gamma}\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{u}''(z) + \tilde{\gamma}\mathbf{A}^T\mathbf{a}'(z) = 0, \quad z \in \bar{\mathfrak{J}}. \quad (5.7)$$

Выпишем условие трансверсальности задачи:

$$\mathbf{p}^T(0)\delta\mathbf{u}(0) - \mathbf{p}^T(\lambda)\delta\mathbf{u}(\lambda) = 0, \quad (5.8)$$

где $\delta\mathbf{u}(0)$ и $\delta\mathbf{u}(\lambda)$ — вариации функции $\mathbf{u}$ на границе области определения. С учетом существенных краевых условий (5.4) из (5.8) можно вывести естественные условия, накладываемые на функцию $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}(\lambda) = -\mathbf{B}^T\mathbf{p}(0). \quad (5.9)$$

Важно отметить, что вектор управления $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющий необходимые условия стационарности (5.4), (5.7) и (5.9), доставляет абсолютный минимум целевому функционалу $\tilde{\Theta}$. Это напрямую следует из квадратичности и неотрицательности $\tilde{\Theta}$.

6. Вопросы управляемости динамической системы. Хотя в задаче управления (1.9), (3.1) не требуется строгого приведения стержня в наперед заданное состояние в конце процесса, значение минимизируемой в момент $t = T$ механической энергии Ψ будет напрямую зависеть от ресурсов выбранной структуры управления. Некоторые выводы об управляемости можно сделать, применяя метод Фурье.

Применим метод разделения переменных для уравнения (1.4) и спроецируем его в пространстве $L^2(\mathfrak{X})$ на базисные функции $\{e_i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, которые являются решением соответствующей краевой задачи на собственные значения:

$$e_i''(x) = -\omega_i^2 e_i(x), \quad e_i'(\pm 1) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.1)$$

При таком подходе решение исходной начально-краевой задачи представимо как разложение по этому ортогональному базису в виде

$$v(t, x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} e_i(x) v_i(t). \quad (6.2)$$

С использованием интегрирования по частям и с учетом разрывного характера функции силы f из (1.1), приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{v}_i + \omega_i^2 v_i = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e_i(x_n) y_n', \quad v_i(0) = v_i^0, \quad \dot{v}_i(0) = p_i^0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.3)$$

Здесь v_i , v_i^0 и p_i^0 — соответственно проекции решения $v(t, x)$ и начальных распределений $v^0(x)$ и $p^0(x)$ на $e_i(x)$. Дополнительно в (6.3) введены функции скачков интеграла силы f :

$$y_n(t) \triangleq y_{n+1}(t) - y_{n-1}(t), \quad n \in \mathfrak{N}^*, \quad y_{-N-1} = y_{N+1} = 0. \quad (6.4)$$

Использование одного и того же символа как для значений интегралов y_j , так и для скачков y_n не вызывает противоречий, потому что индексы этих функций принадлежат соответственно непересекающимся множествам $j \in \mathfrak{N}$ и $n \in \mathfrak{N}^*$ (ср. (4.3)).

Таким образом, из (6.3) следует, что на движение стержня влияют только скачки интегралов. Более того, i -я мода неуправляема, если для произвольного управления $\mathbf{u}$ правая часть соответствующего уравнения из (6.3) тождественно равна нулю:

$$\bar{f}_i(t) \triangleq \sum_{n \in \mathfrak{N}^*} e_i(x_n) y'_n(t) \equiv 0. \quad (6.5)$$

Если значения нескольких собственных функций такие, что $e_i(x_n) = c e_j(x_n)$ при $i \neq j$ для всех $n \in \mathfrak{N}^*$, будем считать, что все эти моды принадлежат одной группе. В случае однородного стержня при $\rho = \kappa = 1$ в безразмерном виде нормированные собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} e_i(x) &= \cos \frac{i\pi(x+1)}{2}, \quad \omega_i = \frac{i\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ e_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Значение функции

$$e_i(x_n) = \cos \frac{i\pi(N+n)}{2N}$$

пробегает лишь конечное число величин для каждого $n \in \mathfrak{N}^*$ при фиксированном N . Следовательно, и число линейных комбинаций $\bar{f}_i$, введенных в (6.5), ограничено. В результате все моды колебаний разбиваются на $N+1$ счетномерных подсистем (групп мод) с одним управляющим входом. Группа с номером $k = 0, \dots, N$ объединяет моды с номерами $i = 2Nj \pm k \geq 0$, где $j \in \mathbb{Z}_+$.

Исходя из помодового разложения (6.3) приходим к некоторым априорным представлениям о возможностях гашения колебаний для различных конфигураций управляющих элементов. Как было показано в [10], даже при наличии $K = N$ управляющих элементов, расположенных без промежутков (см. на рис. 3 верхнюю левую схему стержня для $N = 6$), мы не можем повлиять на нулевую группу мод, т.е. остановить движение стержня как целого и изменить амплитуды мод с номерами $2iN$, $i \in \mathbb{N}$. Действительно, подставляя значения $e_{2jN}(x_n)$, где $j \in \mathbb{Z}_+$, из (6.6) в (6.5) с учетом (6.4), получаем, что

$$\bar{f}_0 = \sqrt{2}(y'_{N+1} - y'_{-N-1})/2 \equiv 0, \quad \bar{f}_{2iN} = y'_{N+1} - y'_{-N-1} \equiv 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Эти силы не зависят от значения остальных функций y_j , $j \in \mathfrak{N}$, поэтому для фиксированного числа элементарных интервалов N при любых других конфигурациях системы управления ($K < N$) нулевая группа мод остается неуправляемой.

Уменьшение управляющих входов K может лишь ухудшить ситуацию и вызвать потерю управляемости и в других группах. Например, если управляющий элемент на каждом периоде занимает два элементарных интервала ($N_c = 2$, см. третью и шестую сверху схему слева на рис. 3), для N -й группы значения соответствующих собственных форм $e_{(2i-1)N}(x_n) = \cos(\pi(N+n)/2)$ при $n \in \mathfrak{N}^*$ и $i \in \mathbb{N}$ на концах $x = x_k^\pm$ интервала $\mathbb{U}_k$ равны $e_{(2i-1)N}(x_k^+) = e_{(2i-1)N}(x_k^-)$. Из этого напрямую следует, что действующая, согласно (1.1), на этом интервале постоянная сила $f(t, x) = f_k(t)$ входит в линейную комбинацию управления $\bar{f}_{(2i-1)N}$ моды с номером $(2i-1)N$ дважды с коэффициентом $+1$ и дважды же с коэффициентом -1 . Пробегая по всем индексам $k \in \mathfrak{K}$, получаем $\bar{f}_{(2i-1)N}(t) \equiv 0$. Это значит, что неуправляемыми для таких конфигураций являются моды с номерами iN , где $i \in \mathbb{Z}_+$.

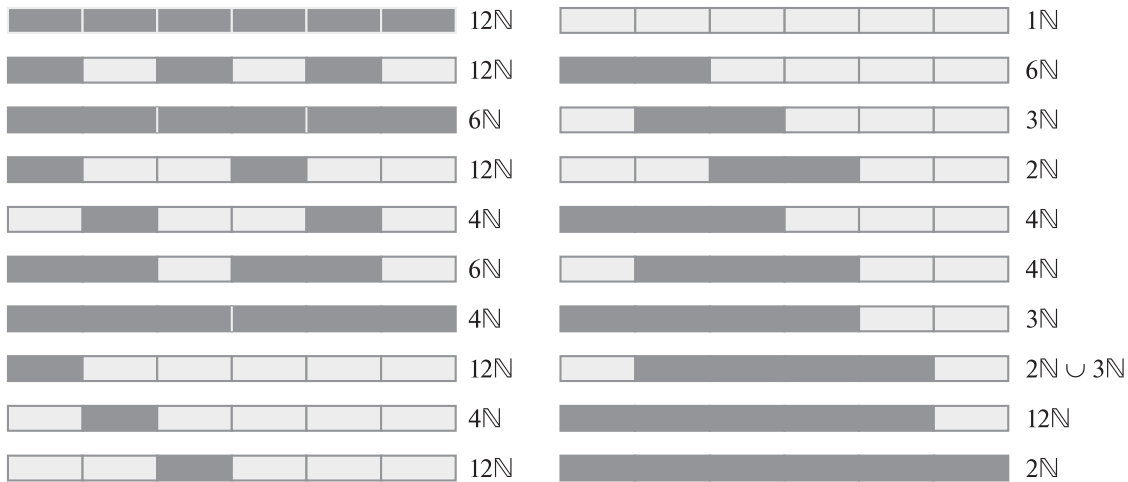


Рис. 3. Возможные периодические структуры управления стержнем при $N = 6$ и соответствующие множества индексов неуправляемых мод (серым обозначены участки с приложенными силами)

Еще один интересный пример структуры с дополнительной потерей управляемости — это случай с длиной периода 3λ ($N_p = 3$, $N = 3K$) и $N_s = N_c = 1$ (см., например, пятую сверху схему слева на рис. 3). Для этой конфигурации неуправляемыми являются моды с длиной волны, кратной 3λ (группа с номером $2K$). В рассматриваемой группе мод собственные функции e_i принимают на границе интервалов $\mathcal{X}_j$, $j \in \mathfrak{J}$, следующие значения:

$$e_i(x_n) = \cos\left((3K + n)\left(j \pm \frac{1}{3}\right)\pi\right), \quad i = (6j \pm 2)K, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathfrak{N}^*.$$

В узловых точках $x_k^\pm$ k -го периода на границе интервала управления $\mathbb{U}_k$ для $k \in \mathfrak{K}$ значения собственных функций совпадают: $e_i(x_k^+) = e_i(x_k^-)$. Следовательно, для этих мод правые части уравнений (6.3) обнулятся ($\bar{f}_i(t) \equiv 0$).

Можно обобщить рассуждения предыдущего абзаца на случай, когда управляющий интервал $\mathbb{U}_k$ расположен симметрично на k -м периоде структуры, т.е. когда $N_p = 2N_s + N_c$. Учитывая симметричность относительно центра периода собственных функций e_i с длиной волны, кратной $N_p\lambda$, можно утверждать, что в линейную комбинацию $\bar{f}_i$ функция управляющей силы f_k войдет N_i раз как с коэффициентом $+c$, так и с коэффициентом $-c$. Из этого вытекает неуправляемость i -й моды.

7. Пример оптимизации движения. Для наглядности рассмотрим пример оптимального управления продольными перемещениями упругого стержня при заданном времени $T = 3$. Выбраны следующие параметры структуры управляющих элементов: $K = 3$, $N = 6$, $N_c = 1$, $N_s = 0$ ($N_p = 2$, $M = 9$). Это означает, что по длине стержня укладываются три периода, каждый из которых разделен на два одинаковых участка: слева с управлением, справа — без управления (см. вторую сверху схему слева на рис. 3). В качестве начальных значений заданы функции

$$v^0(x) = -r^0(x) = a \cos \frac{4\pi x}{3}, \quad a^2 = \frac{9}{\pi(16\pi - 3\sqrt{3})}. \quad (7.1)$$

Коэффициент a выбирается так, чтобы начальная механическая энергия системы равнялась единице. Несмотря на четность тригонометрической функции в начальных условиях, функция плотности импульса $p^0(x)$ антисимметрична относительно начала координат, так как она равна, согласно (1.9), производной r_x^0 , которая нечетна по координате x . Из (7.1) следует, что центр масс стержня находится в покое в момент времени $t = 0$. Для рассматриваемой системы центр масс в отсутствие внешних сил будет оставаться неподвижным на всем интервале времени $t \in [0, T]$.

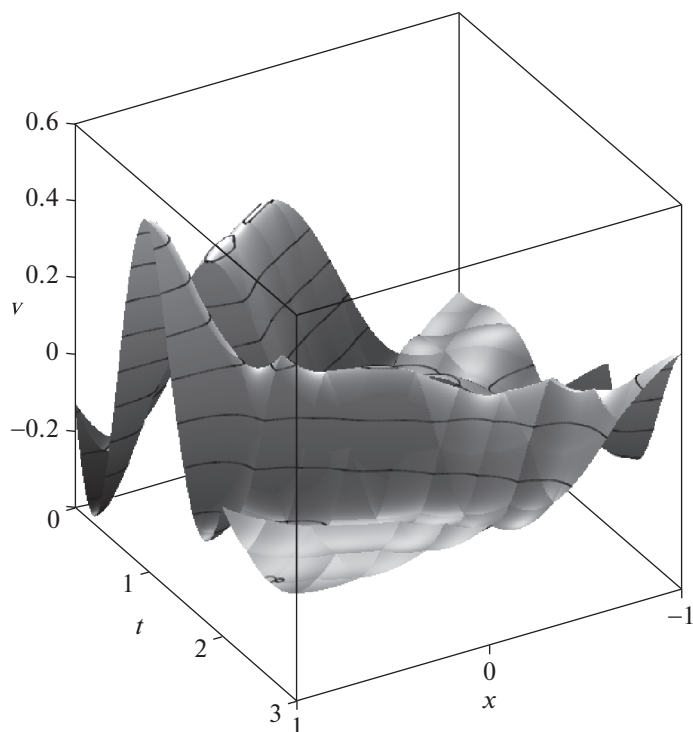


Рис. 4. Оптимальные перемещения стержня $v(t, x)$ при $\gamma = -1$

Для весового коэффициента $\gamma = -1$ оптимальные перемещения точек стержня $v(t, x)$ показаны на рис. 4. При выборе такого параметра большее внимание уделяется уменьшению интенсивности управления (квадрат нормы $\Upsilon = 0.01794$), что приводит к достаточно большим остаточным деформациям (терминальная энергия $\Psi = 0.08846$). Как видно из графика, функция перемещения непрерывна, но видны изломы, расположенные на характеристиках, которые изображены на рис. 2 пунктирными линиями для других параметров системы.

Оптимальные интегралы управления $u_k(t)$, которые воздействуют на стержень в пределах интервалов $\mathbb{U}_k = \mathbb{X}_j$, где $k = -2, 0, 2$ и $j = -5, -1, 3$, изображены на рис. 5 сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Это непрерывные функции с нулевыми по построению начальными значениями. Для выбранных начальных условий (7.1) интегралы управления представляют собой линейные комбинации тригонометрических и полиномиальных функций.

Выберем весовой коэффициент равным $\gamma = 1$. В этом случае для минимизации входных сигналов требуется больший ресурс управления ($\Upsilon = 0.03957$), при этом остаточная энергия снижается более чем на 2 порядка ($\Psi = 0.00831$) по сравнению с начальной. На рис. 6 показаны соответствующие оптимальные перемещения. Как видно, хотя терминальные деформации уменьшились, все же присутствуют неуправляемые моды колебаний с периодом, кратным $\lambda = 1/3$. На рис. 7 заметно почти удвоение амплитуды интегралов силы $u_k(t)$ (ср. рис. 5).

На рис. 8 в логарифмическом масштабе показана зависимость оптимальных значений среднего квадрата вектора управлений Υ от параметра времени M и весового коэффициента γ . Наивысших значений Υ достигает при $M = 3$ и больших положительных значениях γ . При дальнейшем увеличении времени T в той же области значений γ функционал управления Υ монотонно убывает.

Терминальная энергия стержня Ψ , показанная на рис. 9 также в зависимости от γ и M , монотонно уменьшается с увеличением времени. При $M \geq 4$ и положительных значениях γ этот функционал быстро приближается к предельному значению $\Psi^* = 0.00829$, равному суммарной энергии мод с номерами $i \in 12\mathbb{N}$ (см. разд. 6). При малом времени T или отрицательных значениях γ энергия почти не изменяется в процессе управления и остается близкой к единице.

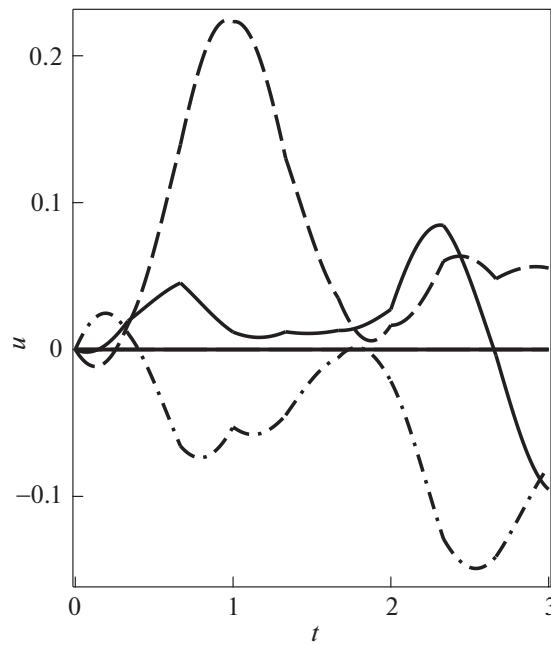


Рис. 5. Оптимальные управления $u_k(t)$ при $\gamma = -1$ для $k = -2$ (сплошная линия), $k = 0$ (штриховая) и $k = 2$ (штрихпунктирная)

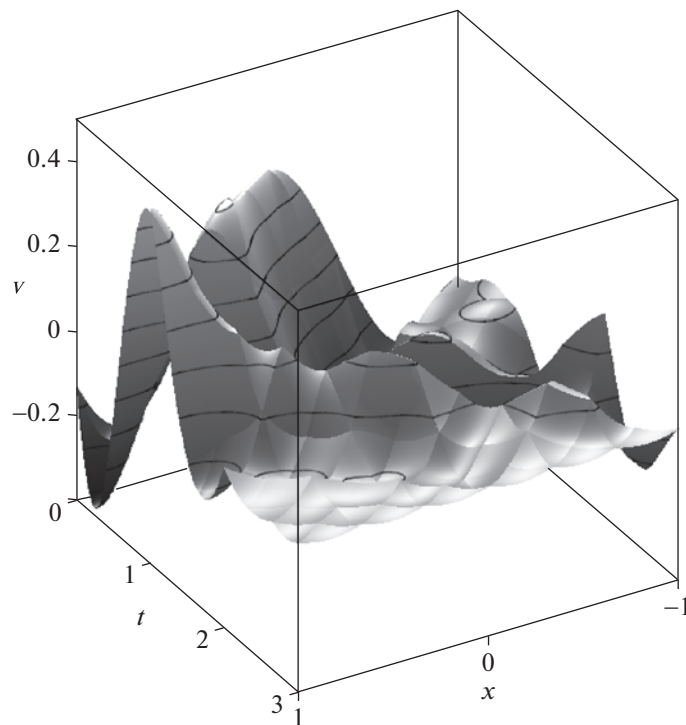


Рис. 6. Оптимальные перемещения стержня $v(t, x)$ при $\gamma = 1$

8. Анализ оптимальных значений целевых функционалов. Изучим поведение оптимальных значений квадрата нормы управления $\dot{U}$ и терминальной механической энергии Ψ , определенных в (3.1), при изменении конфигурации пьезоэлектрических элементов (табл. 1). Для примера возьмем начальные условия (7.1), зафиксируем число элементарных интервалов $N = 6$, временной параметр $M = 12$ ($T = 4$) и весовой коэффициент $\gamma = 3$. Выбор достаточно больших значений M и γ нацелен на достижение в момент времени T предельно низких энергий Ψ . Как показывают

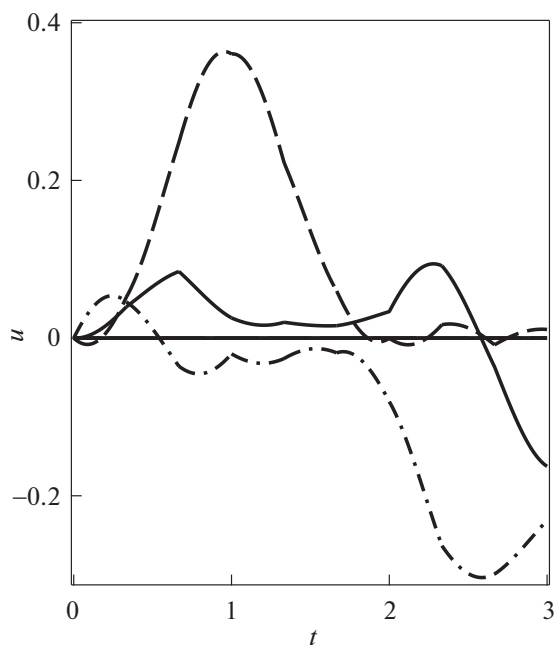


Рис. 7. Оптимальные управления $u_k(t)$ при $\gamma = 1$ для $k = -2$ (сплошная линия), $k = 0$ (штриховая) и $k = 2$ (штрих-пунктирная)

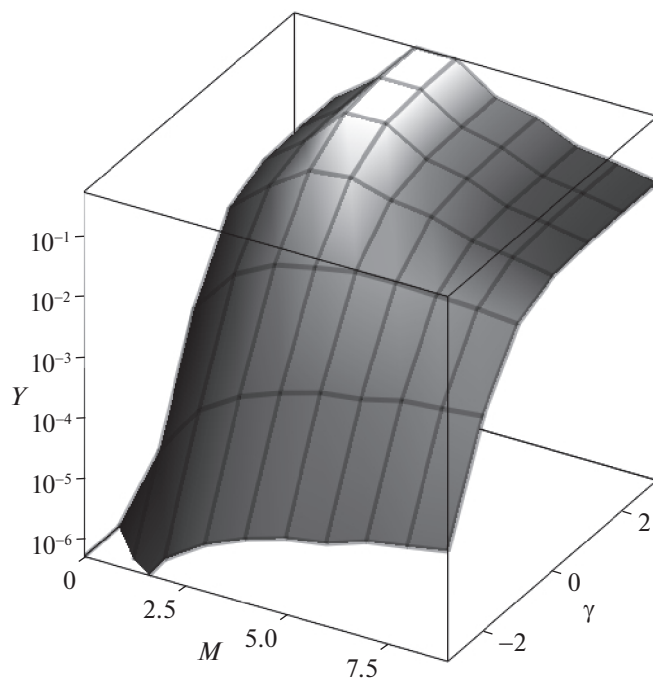


Рис. 8. Зависимость оптимального значения функционала Y от параметра времени M и весового коэффициента γ

расчеты, дальнейшее увеличение как M , так и γ не приводит к заметному снижению терминальной энергии.

С точностью до симметрии относительно начала координат $x = 0$ на рис. 3 для выбранного параметра N показаны все возможные периодические расположения и размеры управляющих элементов, обозначенные на каждой схеме серым фоном. Справа от схемы символически указано соответствующее множество номеров мод, на которые для заданной конфигурации не подается никаких управляющих воздействий.

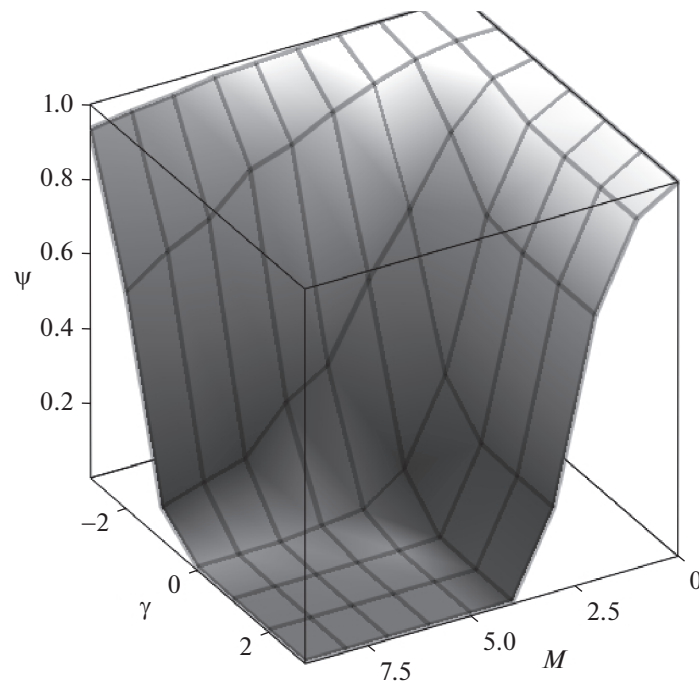


Рис. 9. Зависимость оптимального значения функционала Ψ от параметра времени M и весового коэффициента γ

Первая базовая схема слева на рис. 3 отвечает случаю с максимальным числом управляющих входов, $K = N = N_p = N_c = 6$. К ней относятся первые шесть чисел во второй строке сверху в таблице. Благодаря большому управляющему ресурсу в конце процесса удастся прийти в состояние с довольно низкой энергией $\Psi = \Psi^* \approx 0.008$ при наименьшей норме управления $\sqrt{\Upsilon}$. При этом каждая двенадцатая мода колебаний, отсчитывая от нулевой, неуправляема.

Такой же эффективности в подавлении колебаний можно достичь и при использовании трех управляющих входов малой длины ($K = 3$, $N_c = 1$, см. вторую схему сверху на рис. 3 слева). За это приходится платить более интенсивным управлением – функционал Υ увеличивается вдвое (третья строка таблицы, левая половина). Следует отметить, что для этой схемы вдвое увеличивается критическое время достижимости минимального значения энергии с $T^* = 2/3$ для $K = 6$

Таблица 1. Оптимальные значения функционалов Υ и Ψ для различных конфигураций управляющих элементов при $M = 2N = 12$ и $\gamma = 10^3$

N_p	N_c	N_s	Υ	Ψ	N_p	N_c	N_s	Υ	Ψ
1	1	0	0.01033	0.00829	0	0	0	0	1
2	1	0	0.02066	0.00829	6	2	0	0.04274	0.04205
2	2	0	0.01434	0.04205	6	2	1	0.02243	0.49284
3	1	0	0.04266	0.00829	6	2	2	0.01349	0.5
3	1	1	0.02256	0.16823	6	3	0	0.07285	0.16823
3	2	0	0.02197	0.04205	6	3	1	0.10309	0.16823
3	3	0	0.03643	0.16823	6	4	0	0.03756	0.49284
6	1	0	0.17171	0.00829	6	4	1	0.00273	0.95079
6	1	1	0.04512	0.16823	6	5	0	0.42874	0.00829
6	1	2	0.07994	0.00829	6	6	0	0.03125	0.5

до $T^* = 4/3$, см. [10]. При той же размерности $K = 3$ вектора управления $\mathbf{u}(t)$ увеличение длины управляющего элемента до $|\mathbb{U}_k| = 2/3$ ($N_c = 2$, третья сверху схема на рис. 3 слева и четвертая строка в левой половине таблицы) приводит к потере управляемости каждой шестой моды и к заметному увеличению остаточных колебаний.

Следующие четыре схемы на рис. 3 слева (с четвертой по седьмую сверху) показывают возможные расположения и длины элементов управления для случая $K = 2$, $N_p = 3$. При $N_c = 1$ и $N_s = 0$ вновь можно достичь минимального значения энергии $\Psi = \Psi^*$, хотя функционал управления Υ увеличивается более чем вчетверо по сравнению с базисным случаем при $N_p = N_c = 1$. Наикратчайшее время достижимости этой энергии тоже увеличивается до $T^* = 2$. Интересно отметить схему с двумя управляющими элементами при $N_c = N_s = 1$ (пятая строка на рис. 3). Более чем в 20 раз увеличивается терминальная энергия Ψ при таком симметричном расположении управляющего элемента на периоде. Можно показать, что для такой схемы неуправляемыми становятся моды с номерами, кратными 4. Для конфигураций с двумя входами при $N_c = 2$ или $N_c = 3$ не могут быть изменены амплитуды колебаний либо каждой четвертой, либо каждой шестой моды соответственно.

Остальные схемы на рис. 3 (кроме первой сверху справа, без актюаторов) отвечают случаю одного управляющего сигнала $K = 1$, иначе $N_p = 6$. Среди них хотелось бы выделить три конфигурации с параметрами $N_c = 1$ и $N_s = 0$, $N_c = 1$ и $N_s = 2$, $N_c = 5$ и $N_s = 0$. Для них за время $T \geq T^* = 3$ достигим наименьший для всех рассмотренных схем уровень остаточной энергии $\Psi = \Psi^*$. Из двух первых конфигураций с коротким управляющим элементом $N_c = 1$ более выгодным с точки зрения затрат управления оказывается второй вариант с большим сдвигом элемента к центру стержня. Самой затратной из трех оказывается конфигурация с длинным элементом, $N_c = 5$.

Для случая с одним управляющим сигналом стоит отметить две схемы с симметричным относительно геометрического центра расположением элемента — это конфигурации с параметрами $N_c = N_s = 2$ и $N_c = 6$ ($N_s = 0$). Из-за упомянутой симметрии неуправляемыми оказываются все четные моды, причем для начальных условий (7.1) в них содержится ровно половина запасаемой стержнем энергии (см. левую половину таблицы, пятая строка сверху и последняя строка). Для этих же начальных условий наибольшие колебания остаются для симметричного случая $N_c = 4$ и $N_s = 1$, когда нет возможности управлять не только четными модами, но и модами с индексами, кратными 3.

Выбранные примеры расположения управляющих элементов из-за своей ограниченности не позволяют сделать однозначные выводы о возможностях структурной оптимизации исследуемой динамической системы с распределенными параметрами. Следует указать при этом, что разумное уменьшение размеров пьезоэлементов при нарушении как геометрической симметрии их расположения, так и соразмерности различных частей конфигурации могут положительно сказаться на повышении эффективности управления в смысле уменьшения нормы входных сигналов и энергии остаточных колебаний.

Заключение. Рассмотрены продольные перемещения тонкого однородного упругого стержня с периодической структурой пьезоэлектрических элементов. Дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи, решение которой ищется относительно кинематической и динамической переменных в энергетическом пространстве. Для случая стержня, управляемого с помощью дискретно распределенных в пространстве продольных сил, при заданном законе воздействия предложен алгоритм построения оптимального движения в виде комбинации бегущих волн. При фиксированном интервале времени управления найдено решение задачи минимизации целевого функционала, который представляет собой взвешенную сумму квадрата нормы вектора управления и терминальной механической энергии стержня. Для этого двумерная по пространству и времени задача управления сведена к одномерной вариационной задаче с фиксированными концами. Исследована зависимость оптимальных значений нормы интеграла пьезоэлектрической силы и терминальной энергии от времени управления и весового коэффициента. Продемонстрировано изменение этих значений для ряда конфигураций управляющих элементов. Предложенный подход позволяет сравнить эффективность различных структур управления и таким образом поставить задачу о поиске в некотором смысле оптимальной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1971. 400 p.
2. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
3. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.
4. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
5. *Chen G.* Control and Stabilization for the Wave Equation in a Bounded Domain. II // SIAM J. Control Optim. 1981. V. 19. № 1. P. 114–122.
6. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal Control of a Distributed Parameter System with Applications to Beam Vibrations Using Piezoelectric Actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. № 2. P. 656–666.
7. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
8. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Оптимальное управление продольным движением упругого стержня с помощью граничных сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 74–90.
9. *Kostin G., Gavrikov A.* Energy-Optimal Control by Boundary Forces for Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod // Lecture Notes in Mechanical Engineering Advanced Problems in Mechanics III. Springer, 2023.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and Optimal Control Design for an Elastic Rod Actuated by Piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. *Kostin G., Gavrikov A.* Optimal Motions of an Elastic Structure Under Finite-dimensional Distributed Control // ArXiv. 2023. arXiv:2304.05765. P. 1–17.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.05765>
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Optimal Motion of an Elastic Rod Controlled by Piezoelectric Actuators and Boundary Forces // 16th Intern. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). М.: IEEE, 2022. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807484>
13. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and Optimal Control of Longitudinal Motions for an Elastic Rod with Distributed Forces // ArXiv. 2022. arXiv:2206.06139 5. P. 1–11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
14. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR Control for Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod Actuated by Distributed and Boundary Forces // Mechanisms and Machine Science. V. 125. Berlin: Springer, 2023. P. 285–295.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
15. *Ho L.F.* Exact Controllability of the One-dimensional Wave Equation with Locally Distributed Control // SIAM J Control Optim. 1990. V. 28. № 3. P. 733–748.
16. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A Methodology for Determination of Piezoelectric Actuator and Sensor Location on Beam Structures // J. Sound and Vibration. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
17. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review // J. Intelligent Material Systems and Structures. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243.
<https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
18. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A Novel Method to Fully Suppress Single and Bi-modal Excitations Due to the Support Vibration by Means of Piezoelectric Actuators // J. Sound and Vibration. 2021. V. 510. № 13. P. 116260.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
19. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
20. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
21. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ МУРА¹

© 2023 г. В. В. Соловьев^{а,*}

^аБелостокский технологический ун-т, Белосток, Польша

*e-mail: valsol@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2023 г.

После доработки 08.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Обнаружение неисправностей является важной задачей при проектировании отказоустойчивых конечных автоматов. Предлагаются структурные модели конечных автоматов Мура для обнаружения многократных неисправностей в различных элементах конечного автомата и предотвращения их негативного воздействия на управляемый объект. Рассматриваемые структурные модели позволяют обнаруживать недопустимые входные и выходные векторы как в каждом состоянии, так и для всего автомата, недопустимый код настоящего и следующего состояния автомата, а также недопустимые переходы между состояниями. Издержки реализации предлагаемых структур по площади в среднем составляют от 3 до 26%, а быстродействие автомата либо не изменяется, либо даже увеличивается в среднем на 24–30%. Приводятся оценки площади и быстродействия предлагаемых структурных моделей конечных автоматов, даются рекомендации для их практического использования. Показано, что выбор подходящей структуры позволяет не увеличивать площадь, а в некоторых случаях даже приводит к возрастанию быстродействия конечного автомата.

DOI: 10.31857/S0002338823060100, EDN: GSV CXM

Введение. В настоящее время беспилотные летательные аппараты (БПЛА) широко используются во многих сферах деятельности человека, в том числе и в военных конфликтах. Одним из способов борьбы с БПЛА является воздействие на БПЛА электромагнитного импульса с целью вывода из строя устройства управления [1]. Эффективным способом защиты БПЛА от воздействия электромагнитного импульса служит реализация устройства управления в виде отказоустойчивого конечного автомата.

На рис. 1 показана традиционная структурная модель конечного автомата, где X – входные сигналы (входной вектор); Y – выходные сигналы (выходной вектор); R – регистр состояний, в котором хранится код настоящего (текущего) состояния; Φ – комбинационная схема (логика), определяющая код следующего состояния ($\Phi: X \times S \rightarrow S$); Ψ – комбинационная схема, формирующая значения выходных сигналов ($\Psi: X \times S \rightarrow Y$); S – множество состояний конечного автомата. Отметим, что выход регистра R соединен цепью обратной связи с входом комбинационной схемы Φ . Для автоматов Мура значения выходных сигналов формируются на основании кода настоящего состояния ($\Psi: S \rightarrow Y$), а для автоматов Мили – на базе кода настоящего состояния и значений входных сигналов ($\Psi: X \times S \rightarrow Y$). Поэтому для автомата Мили входы X соединены с входами комбинационной схемы Ψ (на рис. 1 обозначено пунктирной линией). Тактовый сигнал clk для регистра R формируется с помощью генератора Oscillator.

В результате воздействия электромагнитного импульса сбои в структуре конечного автомата на рис. 1 могут возникать:

- на входах: недопустимый входной вектор X ;
- в регистре R : код недопустимого настоящего состояния;
- в логике Φ : формирование недопустимого кода следующего состояния;
- в логике Ψ : формирование недопустимого выходного вектора;

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Белостокского технологического университета (Польша) (грант № WZ/WI-III/5/2023).

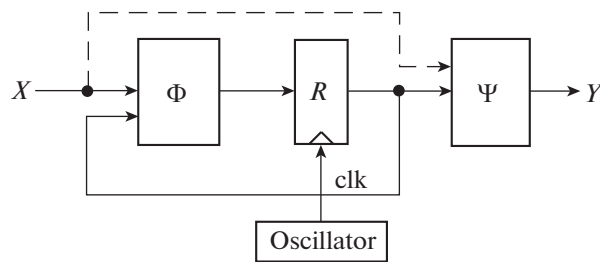


Рис. 1. Традиционная структурная модель конечных автоматов

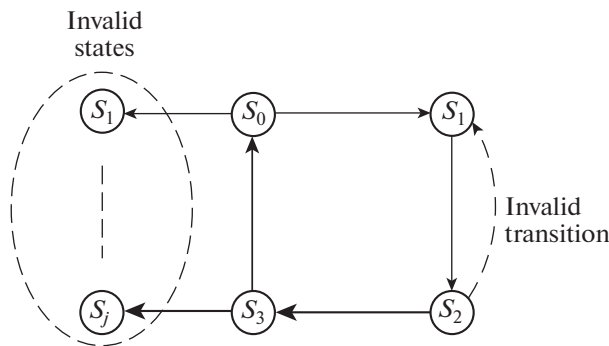


Рис. 2. Возможные неисправности конечного автомата

в цепях конечного автомата: входных, выходных, обратной связи;

в цепи синхросигнала clk : отсутствие тактового сигнала;

в генераторе *Oscillator*: выход из строя генератора тактовых сигналов.

Кроме того, в результате воздействия электромагнитного импульса возможны неисправности автомата на поведенческом уровне: переход автомата в недопустимые состояния (*invalid states*), а также недопустимые переходы (*invalid transition*) в допустимые состояния (рис. 2).

Известно достаточно много методов построения отказоустойчивых конечных автоматов. Большинство из них посвящены противодействию одиночных неисправностей (*single event upsets* – SEUs), порождаемых радиационным излучением и космическими лучами, которые изменяют содержимое триггеров или ячеек памяти, при этом первичные входы всегда считаются верными. Однако электромагнитный импульс характеризуется следующими особенностями воздействия на БПЛА:

значительная продолжительность времени воздействия по сравнению с космической частицей;

воздействие сразу на все компоненты схемы;

порождает не кратковременные одиночные неисправности (SEU), а продолжительные многократные ошибки;

воздействует главным образом на цепи (входные, выходные, обратной связи);

редко изменяет содержимое регистра или ячеек памяти.

Отметим, что современные методики проектирования цифровых устройств [2] значительно отличаются от подходов, используемых несколько десятилетий назад. В последнее время значительное развитие получили языки описания аппаратуры (*hardware description language* – HDL), такие, как, VHDL, Verilog, SystemVerilog и др. В результате синтез устройства сводится к корректному описанию проекта на некотором языке HDL [3]. При этом отпадают традиционные этапы синтеза конечного автомата: кодирование состояний; генерация логических (булевых) уравнений для комбинационных схем Φ и Ψ ; минимизация, факторизация и декомпозиция логики. Все эти действия средства синтеза выполняют автоматически. Однако в результате выполнения автоматической оптимизации логики избыточная логика, направленная на построение отказо-

устойчивого конечного автомата, может быть удалена из проекта. Поэтому необходимы новые подходы к проектированию отказоустойчивых конечных автоматов.

Областью исследований данной работы является проектирование отказоустойчивых конечных автоматов. Но прежде чем исправить каким-либо образом сбой конечного автомата, неисправность необходимо обнаружить. Поскольку в практике инженерного проектирования наиболее часто используется модель автомата Мура, в настоящей работе исследуются структурные модели для обнаружения неисправностей конечных автоматов Мура.

В статье впервые решается задача обнаружения неисправностей конечного автомата на структурном уровне. Для этого предложены структурные модели конечных автоматов, которые позволяют обнаружить многократные неисправности в различных элементах автомата и предотвратить их негативное воздействие на управляемый объект. Новизна структурных моделей заключается в следующем:

впервые рассматриваются неисправности конечного автомата, которые вызваны не космическими частицами, а электромагнитным импульсом, воздействующим на устройство управления БПЛА;

не ограничено число неисправностей в кодах состояний, во входном и выходном векторах;

структурные модели позволяют обнаруживать неисправности не только в регистре состояний конечного автомата, но также во входном векторе, в логике формирования кода следующего состояния, в логике формирования выходных сигналов, а также в цепи обратной связи;

кроме того, структурные модели выявляют недопустимые переходы автомата и переходы в недопустимые состояния;

структурные модели не только находят неисправности, но и предотвращают их негативное воздействие на управляемый объект;

объединенная структурная модель конечного автомата позволяет одновременно (параллельно) определять неисправности сразу во всех элементах конечного автомата;

структурные модели применимы при реализации конечного автомата как в программируемых интегральных схемах (ПЛИС — field programmable gate arrays — FPGAs), так и в специализированных интегральных схемах (application-specific integrated circuit — ASIC).

Главной целью работы является решение на структурном уровне задачи обнаружения многократных неисправностей различных компонентов конечного автомата Мура, которые могут быть вызваны электромагнитным импульсом.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 рассматриваются публикации, относящиеся к проблеме проектирования отказоустойчивых конечных автоматов. В разд. 2 описывается пример автомата Мура, который используется для объяснения предлагаемого подхода. В разд. 3 представлены структурные модели конечных автоматов. Экспериментальные исследования исследуются в разд. 4. В разд. 5 приведены оценки площади и быстродействия рассматриваемых структурных моделей. В разд. 6 на конкретных примерах даны рекомендации по практическому применению структурных моделей. В Заключение подводятся итоги и указывается на направление дальнейших исследований.

1. Относящиеся работы. Проектирование отказоустойчивых вычислительных и управляющих систем, которыми являются конечные автоматы, всегда было актуальным с момента появления компьютеров. Проблема защиты конечных автоматов от космических лучей интенсивно исследовалась в конце 60-х годов прошлого столетия. Традиционным решением задачи считается кратное дублирование архитектуры конечного автомата, при этом наибольшее распространение получил метод тройного модульного резервирования (triple modular redundancy — TRM) для защиты от SEU [4]. В общем случае отказоустойчивость цифровой системы может обеспечиваться избыточностью архитектуры, увеличением времени работы и избыточностью данных [5].

Большое число работ посвящено улучшению метода TMR. Для этого в [6] используется код с исправлением одиночных ошибок (single error correction — SEC) для реализации конечного автомата, который допускает одну ошибку в логике следующего состояния и в регистре состояний. В [7] сравниваются архитектуры отказоустойчивых конечных автоматов (TRM, SEU-ITRM, duplex, EEC, модифицированная EEC и IEC), которые допускают единичные ошибки при переключении состояний.

Применение ПЛИС для проектирования конечных автоматов дает ряд преимуществ по сравнению с ASIC: низкая потребляемая мощность, небольшая стоимость, малое время выхода готового изделия на рынок, возможность перепрограммирования и др. Однако ПЛИС более подвер-

жены SEU, вызываемые космическими частицами, чем ASIC. Поэтому фирма Xilinx выпустила специальную серию ПЛИС семейства Virtex, которая поддерживает метод TMR на аппаратном уровне [8]. В [9] предлагается в системах на кристалле (system-on-chip – SoC) при обнаружении ошибки в ПЛИС генерировать прерывание для микроконтроллера, который запускает процедуру частичного перепрограммирования ПЛИС. В [10] приводится метод усовершенствования TMR, который сочетает в себе дублирование со сравнением (duplication with comparison – DWC) и одновременное обнаружение ошибок (concurrent error detection – CED) на основе временной избыточности.

Отдельные работы посвящены способам кодирования состояний отказоустойчивых конечных автоматов. В [11] рассматриваются четыре способа кодирования состояний отказоустойчивых конечных автоматов: binary, one-hot, Хэмминга с расстоянием 2 (H2) и Хэмминга с расстоянием 3 (H3). Сравняется обеспечение отказоустойчивости и использование ресурсов. В [12] исследуются способы кодирования состояний binary, one-hot и H3 для устранения SEU в регистре состояний, рекомендуется вручную задавать логику восстановления из недопустимого состояния.

Было разработано много методов улучшения TMR, при этом используются различные способы кодирования состояний. В [13] предлагается метод двойной модульной избыточности (dual modular redundancy – DMR) и применение бита четности при реализации конечного автомата во встроенных блоках памяти FPGA. В [14] оцениваются два метода синтеза отказоустойчивых конечных автоматов: дублирование с самопроверкой и TMR. При этом используются следующие способы кодирования состояний: binary, one-hot и Грэя. В [15] предлагается улучшение метода TMR с помощью кода Хэмминга при реализации конечного автомата во встроенных блоках памяти ПЛИС. В [16] предлагается усовершенствование метода TMR от Xilinx [8]. Для этого система представляется как совокупность конечных автоматов, вводятся контрольные точки для определения неисправного домена. Когда обнаруживается неисправность, восстанавливается только неисправный домен, а остальная часть системы продолжает работать. В результате сокращается время восстановления системы после сбоя.

В некоторых методах в конечный автомат вводятся дополнительные состояния. В [17] рассматривается метод защиты конечного автомата от SEU. С этой целью в конечный автомат добавляются избыточные эквивалентные состояния для защиты состояний с высокой вероятностью возникновения сбоя. В [18] приводится метод синтеза отказоустойчивых конечных автоматов на основе кода исправления одиночных ошибок и обнаружения двойных ошибок (single error correction and double error detection – SEC-DED). Метод предусматривает возврат конечного автомата в известное безопасное состояние или состояние сброса.

В последнее время интерес к проектированию отказоустойчивых конечных автоматов по-прежнему не ослабевает. В [19] исследуется отказоустойчивость трех методов синтеза конечных автоматов: TMR, H3 и безопасный (safe) синтез. В [20] предлагаемый метод повышает отказоустойчивость конечного автомата за счет выборочного применения метода TMR в соответствии с важностью состояния. В [21] описывается квазичувствительная к задержке архитектура конечного автомата, которая сравнивается с TMR.

Рассмотрение вышеупомянутых работ показывает, что большинство методов синтеза отказоустойчивых конечных автоматов посвящено усовершенствованию метода TMR для исправления SEU в регистре состояний. При этом предполагается, что первичные входы, логика формирования кода следующего состояния, логика формирования выходов, а также дополнительная логика обнаружения и исправления ошибок сбоев не имеют.

В то же время отличные от традиционных структурные модели конечных автоматов являются очень эффективными для повышения быстродействия, уменьшения стоимости реализации и потребления мощности при реализации конечных автоматов на ПЛИС [22]. В настоящей работе исследуются структурные модели конечных автоматов Мура для обнаружения многократных неисправностей в различных элементах конечного автомата и предотвращения их негативного воздействия на управляемый объект.

2. Демонстрационный пример. В качестве примера рассмотрим конечный автомат Мура, граф которого показан на рис. 3. Наш автомат имеет пять состояний, три входа и три выхода. Вершины графа соответствуют состояниям $S_0, \dots, S_4$, а дуги графа – переходам автомата. Вблизи каждой дуги графа записывается входной вектор, который инициирует данный переход. Вблизи каждой вершины графа записывается выходной вектор, который формируется в данном состоянии. Здесь дефис (“–”) может принимать любое значение бита: 0 или 1.

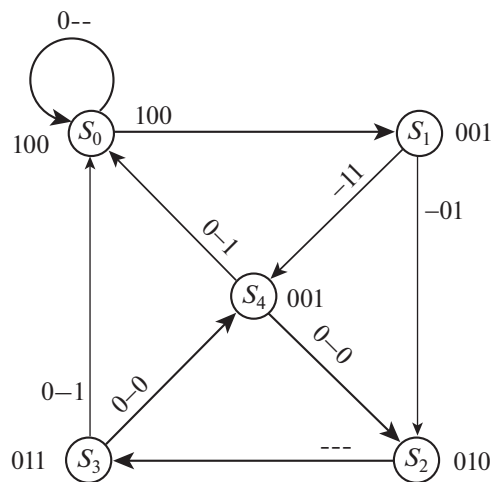


Рис. 3. Граф конечного автомата Мура

Допустимые переходы между состояниями (табл. 1) и допустимые выходные векторы в каждом состоянии (табл. 2) можно определить непосредственно по графу автомата. Допустимые входные векторы в каждом состоянии указывает разработчик на основании поведения устройства. Пусть для нашего автомата допустимые входные векторы заданы с помощью табл. 3.

3. Структурные модели конечных автоматов для обнаружения неисправностей. Структурные модели конечных автоматов для обнаружения неисправностей и предотвращения негативного воздействия неисправностей на управляемый объект показаны на рис. 4, где TVI – структура для обнаружения недопустимых входных векторов для всего автомата; VI – структура для обнаружения недопустимых входных векторов в каждом состоянии; VS – структура для обнаружения недопустимого кода настоящего состояния; VNS – структура для обнаружения недопустимого кода следующего состояния; VT – структура для обнаружения недопустимых переходов; TVO – структура для обнаружения недопустимых выходных векторов для всего автомата; VO – структура для обнаружения недопустимых выходных векторов в каждом состоянии.

Структуры на рис. 4 образованы путем введения в традиционную структуру на рис. 1 следующих комбинационных схем: TVI (total valid inputs), VI (valid inputs), VS (valid states), VNS (valid next states), VT (valid transitions), TVO (total void outputs) и VO (void outputs). Каждая дополнительная комбинационная схема формирует на выходе одноименный диагностический сигнал, единичное значение которого указывает на отсутствие неисправности. Все диагностические сигналы tv_i, vi, vs, vns, vt, tvo и vo управляют входом разрешения синхронизации CE (clock enable) регистра состояний R. Поэтому в случае обнаружения неисправности конечный автомат будет оставаться в состоянии state до устранения неисправности. Кроме того, в структурах VS, TVO и

Таблица 1. Допустимые переходы конечного автомата

Состояние	
настоящее	следующее
S ₀	S ₀
	S ₁
S ₁	S ₂
	S ₄
S ₂	S ₃
S ₃	S ₀
	S ₄
S ₄	S ₀
	S ₂

Таблица 2. Допустимые выходные векторы конечного автомата в каждом состоянии

Состояние	Выходной вектор
S_0	100
S_1	001
S_2	010
S_3	011
S_4	001

Таблица 3. Допустимые входные векторы конечного автомата в каждом состоянии

Состояние	Входные векторы
S_0	---
S_1	001 101 011 111
S_2	---
S_3	000 010 001 011
S_4	000 010 001 011

VO дополнительно установлен выходной регистр R_O , вход CE которого управляется сигналами vs , tvo и vo соответственно. В случае обнаружения неисправности регистр R_O позволяет сохранить на выходах автомата ранее сформированный выходной вектор Y . Отметим, что введение в структуру конечного автомата выходного регистра R_O приводит к задержке выходных сигналов автомата на один такт синхронизации. Структуры TVI, VI, VNS и VT не имеют выходного вектора R_O , поскольку обнаруживаемые этими структурами неисправности не изменяют значение выходного вектора Y . Поэтому для устранения негативного воздействия неисправностей, обнаруживаемых структурами TVI, VI, VNS и VT, достаточно остановить конечный автомат в настоящем состоянии state.

На входы каждой дополнительной комбинационной схемы поступают значения, необходимые для определения соответствующей неисправности. Так, на вход комбинационной схемы TVI поступает входной вектор X . Недопустимые входные векторы для всего автомата определяются разработчиком на основании поведения управляемого объекта. Пусть для нашего примера недопустимыми входными векторами являются 110 и 111. На вход комбинационной схемы VI поступает код настоящего состояния state, а также входной вектор X . Для нашего примера функционирование комбинационной схемы VI определено в табл. 3. На вход комбинационной схемы VS поступает код настоящего состояния state. На вход комбинационной схемы VNS поступает сформированный логикой Φ код следующего состояния next. Для нашего примера допустимыми являются коды состояний $S_0, \dots, S_4$. На вход комбинационной схемы VT поступает код настоящего состояния state, а также код следующего состояния next. Для нашего примера функционирование комбинационной схемы VT представлено в табл. 1. На вход комбинационной схемы TVO поступают значения выходов логики Ψ . Для нашего примера допустимыми являются выходные векторы, которые формируются в состояниях автомата: 100, 001, 010, 011 и 001. На вход комбинационной схемы VO поступает код настоящего состояния state и значения выходов, сформированные логикой Ψ . Для нашего примера функционирование комбинационной схемы VO приведено в табл. 2.

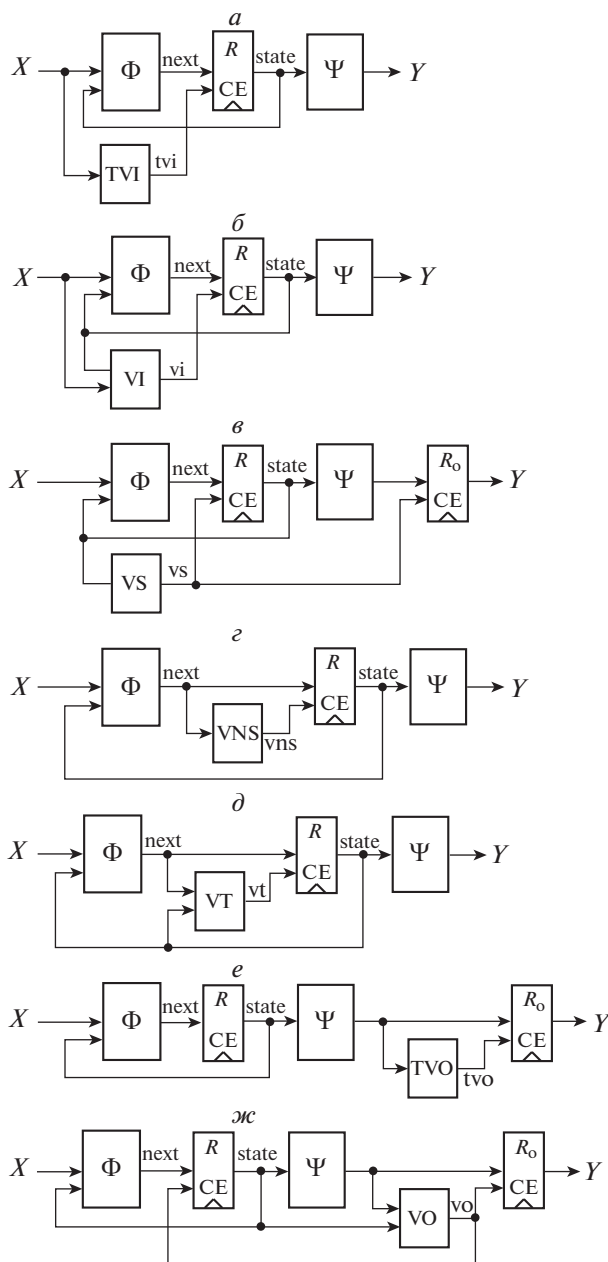


Рис. 4. Структурные модели для обнаружения неисправностей: *а* – структура TVI; *б* – структура VI; *в* – структура VS; *г* – структура VNS; *д* – структура VT; *е* – структура TVO; *ж* – структура VO

В табл. 4 приведены возможные причины неисправностей, которые обнаруживаются структурными моделями на рис. 4, где Φ – сбой в логике Φ ; X – недопустимый входной вектор X ; *feedback* – сбой в цепи обратной связи; Ψ – сбой в логике Ψ ; R – сбой в регистре состояний R .

Все рассмотренные структурные модели конечных автоматов не нацелены для реализации на определенную элементную базу: каждая структурная модель может быть реализована как на ASIC, так и на ПЛИС.

Структуры на рис. 4 по желанию пользователя могут произвольно объединяться вместе для наиболее эффективного обнаружения неисправностей автомата. Отметим, что структура TVI покрывается структурой VI, т.е. в случае обнаружения неисправности с помощью структуры TVI, эта неисправность обязательно будет обнаружена структурой VI. Аналогично структура TVO покрывается структурой VO, а структура VNS – структурой VT. Поэтому при объединении всех рас-

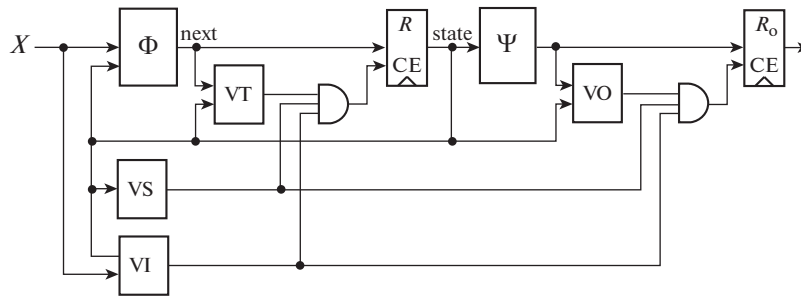


Рис. 5. Обобщенная структурная модель VISTO для обнаружения неисправностей конечных автоматов Мура

смаатриваемых структур вместе структуры TVI, TVO и NVS можно опустить. На рис. 5 показана обобщенная структура VISTO, которая объединяет структуры VI, VS, VT и VO.

Диагностические сигналы tv_i , vi , vs , vns , vt , tvo и vo , формируемые в структурных моделях конечных автоматов на рис. 4, могут выводиться на внешние выходы автомата для обнаружения местоположения неисправности в ASIC. При необходимости диагностические сигналы могут объединяться вместе для указания на ошибку (рис. 6), например, с целью реконфигурирования ПЛИС.

4. Экспериментальные исследования. Все рассмотренные структурные модели для нашего примера конечного автомата Мура были описаны на языке Verilog в стиле с тремя процессами [3]. В результате были созданы следующие проекты конечного автомата Мура для нашего примера: *based_FSM* – базовая структурная модель конечного автомата Мура (рис. 1); *TVI_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимых входных векторов для всего автомата (рис. 4,а); *VI_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимых входных векторов в каждом состоянии (рис. 4,б); *VS_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимого кода настоящего состояния (рис. 4,в); *VNS_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимого кода следующего состояния (рис. 4,г); *VT_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимых переходов между состояниями (рис. 4,д); *TVO_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимых выходных векторов для всего автомата (рис. 4,е); *VO_FSM* – конечный автомат с проверкой допустимых выходных векторов в каждом состоянии (рис. 4,ж); *VISTO_FSM* – конечный автомат с объединением всех рассмотренных проверок (рис. 5).

Для оценки параметров предлагаемых структурных моделей все проекты были реализованы с помощью средства Quartus Prime версии 22.4 на ПЛИС семейства Cyclone 10 LP. Результаты экспериментальных исследований приведены в табл. 5, где L – число используемых LUT (look-up table) или площадь; F – максимальная частота функционирования (в мегагерцах) или быстродействие; L_b и F_b – аналогичные параметры для базовой структурной модели автомата Мура; L/L_b и F/F_b – отношения соответствующих параметров.

Анализ табл. 5 показывает, что по стоимости реализации (площади) наиболее затратной является структура VISTO, которая приводит к увеличению площади на 109%. Затем по убыванию используемой площади следуют структуры VT (увеличение площади на 73%), VI (увеличение площади на 36%) и TVI (увеличение площади на 9%). Отметим, что структуры VO, VS, VNS и TVO не приводят к увеличению площади ПЛИС по сравнению с базовой структурой.

Таблица 4. Возможные причины неисправностей, обнаруживаемые структурными моделями конечных автоматов

Причины неисправности	TVI	VI	VS	VNS	VT	TVO	VO
Φ				*	*		
X	*	*		*	*		
Feedback		*	*	*	*		*
Ψ						*	*
R		*	*	*	*	*	*

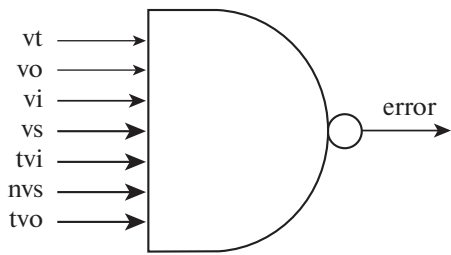


Рис. 6. Схема обнаружения ошибки конечного автомата

По быстродействию наиболее затратной также является структура VISTO, которая приводит к уменьшению быстродействия на 38%. Затем следуют структуры VT (уменьшение быстродействия на 35%) и TVI (уменьшение быстродействия на 8%). Кроме того, для структур VO, VS, TVO и VISTO выходные сигналы формируются с задержкой на один такт синхронизации по сравнению с базовой структурой. В то же время для структур VS и TVO быстродействие увеличивается на 36%, а для структуры VO – на 28%. Отметим также, что для структуры VI, несмотря на увеличение площади на 36%, быстродействие увеличивается на 10%, при этом отсутствует задержка выходных сигналов на один такт синхронизации. Структура VNS по площади и по быстродействию совпадает с базовой структурой.

Рассмотрение одного примера конечного автомата не позволяет в полной мере оценить предлагаемые структурные модели. Поэтому были проведены исследования структурных моделей на эталонных примерах конечных автоматов центра MCNC [23]. Результаты таких исследований представлены в табл. 6 и 7.

В табл. 6 приведены результаты сравнения площади эталонных конечных автоматов в случае использования предлагаемых структурных моделей по сравнению с базовой структурой, где i – число входов; o – число выходов; s – число состояний конечного автомата; C_b – площадь (число LUT) базовой структуры конечного автомата; C – площадь реализации конечного автомата в случае применения одной из предложенных структурных моделей; C_b/C – отношение соответствующих параметров; mid – среднеарифметическое значение параметра. Эталонные примеры конечных автоматов Мили предварительно были приведены к конечным автоматам Мура с помощью метода [24].

Отметим, что для структур VS и VNS площадь реализации совпадает.

Таблица 6 показывает, что наименее затратными по площади являются структуры TVO и TVI (увеличение площади в среднем на 3%). Однако структура TVI позволяет определить недопустимые входные векторы для всего конечного автомата, которых может вообще не быть, поскольку большинство конечных автоматов не имеют ограничений на входные векторы. Недопустимых выходных векторов для всего конечного автомата, которые определяет структура TVO, тоже может быть немного или вообще не быть. Следующими по аппаратным затратам следуют структуры VS и VNS (увеличение площади в среднем на 12%), затем следуют структуры VO и VT (увеличение

Таблица 5. Результаты экспериментальных исследований структурных моделей для нашего примера конечного автомата Мура

Проект	L	L/L_b	F	F/F_b	Примечание
Based_FSM	11	1	355	1	
TVI_FSM	12	1.09	328	0.92	
VI_FSM	15	1.36	389	1.10	
VS_FSM	11	1	482	1.36	Задержка на один такт
VNS_FSM	11	1	355	1	
VT_FSM	19	1.73	229	0.65	
TVO_FSM	11	1	482	1.36	Задержка на один такт То же »
VO_FSM	11	1	453	1.28	
VISTO_FSM	23	2.09	220	0.62	

Таблица 6. Сравнение площади (в числе LUT) базовой структуры конечного автомата с предложенными структурными моделями

FSM	i	o	s	C_b	VS, VNS		TVO		VO		VT		VI		TVI	
					C	C/C_b	C	C/C_b	C	C/C_b	C	C/C_b	C	C/C_b	C	C/C_b
Bbase	7	7	24	44	53	1.20	46	1.05	54	1.23	60	1.36	54	1.23	46	1.05
Cse	7	7	29	103	112	1.09	105	1.02	115	1.12	122	1.18	115	1.12	105	1.02
Ex1	9	19	78	256	280	1.09	262	1.02	288	1.13	308	1.20	285	1.11	259	1.01
Ex2	2	2	23	47	55	1.17	48	1.02	55	1.17	62	1.32	55	1.17	48	1.02
Ex3	2	2	13	31	34	1.10	32	1.03	36	1.16	40	1.29	36	1.16	32	1.03
Ex5	2	2	16	30	35	1.17	31	1.03	36	1.20	41	1.37	36	1.20	31	1.03
Ex6	5	8	14	59	63	1.08	62	1.05	65	1.10	68	1.15	65	1.10	61	1.03
Ex7	2	2	14	30	34	1.13	31	1.03	35	1.17	39	1.30	35	1.17	31	1.03
Keyb	7	2	20	66	72	1.09	67	1.02	73	1.11	79	1.20	75	1.14	68	1.03
Planet	7	19	95	173	210	1.21	179	1.03	211	1.22	236	1.36	207	1.20	175	1.01
Pma	8	8	49	153	168	1.10	156	1.02	172	1.12	186	1.22	172	1.12	156	1.02
S386	7	7	23	50	57	1.14	52	1.04	60	1.20	65	1.30	60	1.20	52	1.04
Sand	11	9	84	213	237	1.11	215	1.01	244	1.15	269	1.26	245	1.15	217	1.02
Styr	9	10	57	165	181	1.10	168	1.02	187	1.13	203	1.23	187	1.13	168	1.02
Tma	7	6	38	118	129	1.09	120	1.02	133	1.13	143	1.21	133	1.13	120	1.02
Mid						1.12		1.03		1.16		1.26		1.16		1.03

Таблица 7. Сравнение быстродействия базовой структуры конечного автомата с предложенными структурными моделями

Эталонный конечный автомат	F_b	TVI, VI, VNS, VT		VS		TVO		VO	
		F	F/F_b	F	F/F_b	F	F/F_b	F	F/F_b
Bbase	530	530	1	648	1.22	651	1.23	635	1.20
Cse	237	237	1	311	1.31	315	1.33	298	1.26
Ex1	211	211	1	309	1.46	307	1.45	305	1.45
Ex2	433	433	1	567	1.31	571	1.32	554	1.28
Ex3	445	445	1	593	1.33	592	1.33	543	1.22
Ex5	493	493	1	611	1.24	611	1.24	588	1.19
Ex6	381	381	1	495	1.30	498	1.31	472	1.24
Ex7	376	376	1	467	1.24	471	1.25	463	1.23
Keyb	459	459	1	585	1.27	581	1.27	562	1.22
Planet	589	589	1	684	1.16	682	1.16	663	1.13
Pma	346	346	1	431	1.26	442	1.28	410	1.18
S386	456	456	1	594	1.30	592	1.30	575	1.26
Sand	280	280	1	376	1.34	374	1.34	365	1.30
Styr	248	248	1	327	1.32	332	1.34	314	1.27
Tma	118	118	1	162	1.37	164	1.39	137	1.16
Mid					1.30		1.30		1.24

площади в среднем на 16%), а самой затратной по площади является структура VT (увеличение площади в среднем на 26%).

В табл. 7 приведены результаты сравнения быстродействия конечных автоматов в случае использования предлагаемых структурных моделей по сравнению с базовой структурой, где F_b — максимальная частота функционирования (в мегагерцах) базовой структуры конечного автомата;

Таблица 8. Ранги дополнительных комбинационных схем для диагностики неисправностей конечного автомата

Комбинационная схема	Ранг
TVI	$r = i$
VI	$r = i + k$
VS	$r = k$
VNS	$r = k$
VT	$r = 2k$
TVO	$r = o$
VO	$r = o + k$
VISTO	$r = i + o + 4k$

F — максимальная частота функционирования конечного автомата в случае применения одной из предложенных структурных моделей; F/F_q — отношение соответствующих параметров; mid — среднеарифметическое значение параметра.

Таблица 7 показывает, что быстродействие структур TVI, VI, VNS, VT полностью совпадает с быстродействием базовой структуры конечного автомата. Быстродействие структур VS и TVO возрастает в среднем на 30% по сравнению с базовой структурой, а быстродействие структуры VO возрастает в среднем на 24% по сравнению с базовой структурой конечного автомата.

5. Оценка площади и быстродействия предлагаемых структурных моделей. В случае реализации конечного автомата в ПЛИС на основе LUT площадь дополнительной комбинационной схемы можно определить с помощью следующего выражения:

$$C = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq n, \\ \left\lfloor \frac{r-n}{n-1} \right\rfloor + 1 & \text{при } r > n, \end{cases} \quad (5.1)$$

где n — число входов LUT; r — ранг (число входов) дополнительных комбинационных схем; $\lfloor A \rfloor$ — наибольшее целое число, большее или равное числу A .

Для рассматриваемых структурных моделей ранги дополнительных комбинационных схем приведены в табл. 8, где i — число входов; o — число выходов; k — число битов кодов состояний конечного автомата.

Отметим, что ранги дополнительных комбинационных схем зависят от числа k битов кодов состояний конечного автомата, т.е. от способа кодирования состояний. Поэтому, например, площадь реализации предлагаемых структурных моделей будет разная в случае использования кодирования one-hot и binary.

Оценка стоимости реализации предлагаемых структурных моделей для нашего примера представлена в табл. 9, где r — ранг дополнительной схемы (или схем) в случае кодирования one-hot; C_c — вычисленная площадь (в числе LUT) дополнительной комбинационной схемы (или схем); C_q — реальная площадь реализации, определенная с помощью средства Quartus; C_b — площадь базовой структуры конечного автомата. Отметим, что для нашего примера конечного автомата Мура в случае кодирования one-hot имеем $i = 3$, $o = 3$, $k = 5$ и $C_b = 11$.

Таблица 9 показывает, что на реальную площадь реализации C_q значительное влияние оказывает используемое средство синтеза. Поэтому вычисленное значение площади ($C_c + C_b$) может быть как больше, так и меньше реальной площади реализации. Например, для нашего примера вычисленное значение площади для большинства структур превышает или равно реальной площади реализации, исключениями являются структуры VT и VISTO.

Площадь дополнительных комбинационных схем, вычисленная, согласно (5.1), может применяться для выбора наиболее подходящей структурной модели среди других предлагаемых структурных моделей обнаружения неисправностей конечного автомата.

Таблица 9. Сравнение расчетной ($C_c + C_b$) и реальной (C_q) площади реализации нашего конечного автомата в случае кодирования one-hot

Структура	r	C_c	$C_c + C_b$	C_q
TVI	3	1	12	12
VI	8	3	14	14
VS	5	2	13	11
VNS	5	2	13	11
VT	10	3	14	19
TVO	5	2	13	11
VO	8	3	14	11
VISTO	26	10	21	23

Таблица 10. Свойства структурных моделей конечных автоматов

Свойство	TVI	VI	VS	VNS	VT	TVO	VO
Не задерживает на такт выходные сигналы	*	*		*	*		
Не увеличивает площадь	*		*	*		*	
Увеличивает быстродействие			*			*	*

Быстродействие дополнительных комбинационных схем в случае реализации конечного автомата на ПЛИС, основанных на LUT, можно оценить с помощью числа l уровней LUT, необходимых для их реализации [25]:

$$l = \lceil \log_2 r \rceil, \quad (5.2)$$

где r — ранг комбинационной схемы.

Однако поскольку сложность комбинационных схем Φ и Ψ значительно больше дополнительных схем для диагностики неисправностей, то дополнительные комбинационные схемы на быстродействие конечного автомата не влияют, а быстродействие конечного автомата определяется комбинационными схемами Φ и Ψ (для конечного автомата Мура наиболее сложной является комбинационная схема Φ). Кроме того, введение дополнительного выходного регистра R_O в ряде случаев приводит даже к увеличению быстродействия конечного автомата. Например, для нашего примера увеличение быстродействия наблюдается для структур VS, TVO и VO (табл. 5).

6. Примеры практического использования рассматриваемых структурных моделей. Выбор структурных моделей конечных автоматов и их объединение выполняется разработчиком устройства управления на основе их характеристик. Следующие факторы должны быть приняты во внимание при выборе структурных моделей:

- неисправности, которые обнаруживаются моделью;
- аппаратные издержки, вычисленные, согласно (5.1);
- быстродействия дополнительных комбинационных схем, определяемые согласно (5.2);
- допустимость задержки выходных сигналов на один такт синхронизации и др.

Рассмотрим выбор наиболее подходящей структурной модели для определения неисправностей на конкретных примерах. В табл. 10 приведены свойства предложенных структурных моделей, которые могут быть приняты во внимание при выборе наиболее подходящей структурной модели конечного автомата Мура из нашего примера.

Например, пусть для нашего примера конечного автомата Мура необходимо выбрать структурную модель, которая позволяет обнаружить наибольшее количество неисправностей и не допускается задержка выходных сигналов на один такт синхронизации, при этом желательно минимизировать увеличение площади и снижение быстродействия конечного автомата. Поскольку для конечного автомата не допускается задержка выходных сигналов на один такт синхронизации, согласно табл. 10, выбирать следует из структур TVI, VI, VNS и VT. Структуру TVI исключаем, поскольку она определяет только одну неисправность (недопустимый входной вектор X). Структуры VNS и VT позволяют выявить наибольшее число неисправностей (табл. 4). Структура

VNS не увеличивает площадь и не снижает быстродействие (табл. 5) по сравнению с базовой структурой, поэтому для реализации выбираем структуру VNS. В результате решаем задачу, не увеличивая площадь и не снижая быстродействие конечного автомата.

При выборе структуры для реализации следует также учитывать количество и сложность обнаруживаемых неисправностей. Пусть, например, для нашего примера конечного автомата Мура поставлена та же задача, но допускается задержка выходных сигналов на один такт синхронизации. Согласно табл. 4, все возможные причины неисправностей можно обнаружить путем объединения любых моделей из двух групп структур: {VNS и VT} и {TVO и VO}. Из группы {VNS и VT} выбираем структуру VNS, которая по сравнению со структурой VT не увеличивает площадь и не снижает быстродействие (табл. 5). Из группы {TVO и VO} выбираем структуру VO, которая позволяет обнаружить более сложные неисправности, чем структура TVO. Поэтому задача решается объединением структур VNS и VO.

Пусть необходимо наиболее точно определить следующие причины неисправностей: недопустимый входной вектор X , сбой в логике Φ , сбой в логике Ψ или сбой в регистре состояний R . Недопустимый входной вектор X определяется с помощью структуры TVI или VI (табл. 4); выбираем структуру VI, которая обнаруживает более сложные неисправности (недопустимые входные векторы в каждом состоянии). Сбой в логике Φ можно определить с помощью структуры VNS или VT; выбираем структуру VNS, которая не увеличивает площадь и не снижает быстродействие. Сбой в логике Ψ можно определить с помощью структуры TVO или VO; выбираем структуру VO, которая обнаруживает более сложные неисправности (недопустимые выходные векторы в каждом состоянии). Сбой в регистре состояний R можно обнаружить с помощью любой структуры, за исключением структуры TVI; выбираем структуру VS, которая однозначно указывает на сбой в регистре R или в цепи обратной связи. Поэтому задача решается объединением следующих структур: VI, VNS, VO и VS.

Пусть необходимо обнаружить переходы в недопустимые состояния, а также недопустимые переходы в допустимые состояния. Данная задача решается с помощью структуры VT.

Если необходимо наиболее точно указать местоположение и причину неисправности (например, при реализации конечного автомата в ASIC), то для реализации следует объединить все структуры, а диагностические сигналы tv_i , vi , vs , vns , vt , tvo и vo вывести на внешние выводы конечного автомата.

Заключение. Представлены структурные модели конечных автоматов Мура, которые позволяют обнаружить следующие неисправности:

- недопустимые входные векторы для всего автомата;
- недопустимые входные векторы в каждом состоянии;
- недопустимый код настоящего состояния;
- недопустимый код следующего состояния;
- недопустимые переходы между состояниями;
- недопустимые выходные векторы для всего автомата;
- недопустимые выходные векторы, формируемые в каждом состоянии.

Приведена также обобщенная структурная модель конечного автомата, позволяющая обнаружить все перечисленные выше неисправности. Кроме того, рассмотренные структурные модели позволяют обнаружить многократные сбои в логике Φ формирования кода следующего состояния, в логике формирования значений выходных сигналов Ψ , в регистре состояний R , а также в цепи обратной связи. Предлагаемые структурные модели конечных автоматов не только обнаруживают неисправности, но и предотвращают их негативное воздействие на управляемый объект.

Будущие исследования будут направлены на разработку структурных моделей, которые допускают исправление сбоев конечного автомата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Park S., Kim H. T., Lee S., Joo H., Kim H. Survey on Anti-Drone Systems: Components, Designs, and Challenges // IEEE Access. 2021. № 9. P. 42635–42659.
2. Соловьев В. В. Использование методики ASMD-FSMD при проектировании на программируемых логических интегральных схемах устройств обработки сигналов // РЭ. 2021. Т. 66. № 12. С. 1178–1188.

3. *Salauyou V., Zabrocki L.* Coding Techniques in Verilog for Finite State Machine Designs in FPGA // Proc. Intern. Conf. on Computer Information Systems and Industrial Management. Belgrade, Serbia: Springer, Cham, 2019. P. 493–505.
4. *Lyons R.E., Vanderkulk W.* The Use of Triple-Modular Redundancy to Improve Computer Reliability // IBM J. Research and Development. 1962. V. 6. № 2. P. 200–209.
5. *Aviziens A.* Fault-Tolerant Systems // IEEE Transactions on Computers. 1976. V. 100. № 12. P. 1304–1312.
6. *Rochet R., Leveugle R., Saucier G.* Analysis and Comparison of Fault Tolerant FSM Architecture Based on SEC Codes // Proc. IEEE Intern. Workshop on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. Venice, Italy: IEEE, 1993. P. 9–16.
7. *Niranjan S., Frenzel J.F.* A Comparison of Fault-Tolerant State Machine Architectures for Space-Borne Electronics // IEEE Transactions on Reliability. 1996. V. 45. № 1. P. 109–113.
8. *Carmichael C.* Triple Module Redundancy Design Techniques for Virtex FPGAs // Xilinx Application Note XAPP197.1. 2001.
9. *Pontarelli S., Cardarilli G.C., Malvoni A., Ottavi M., Re M., Salsano A.* System-on-Chip Oriented Fault-Tolerant Sequential Systems Implementation Methodology // Proc. IEEE Intern. Sympos. on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. San Francisco, USA: IEEE, 2001. P. 455–460.
10. *Lima F., Carro L., Reis R.* Designing Fault Tolerant Systems into SRAM-Based FPGAs // Proc. 40th Annual Design Automation Conf. Anaheim, USA: Machinery, 2003. P. 650–655.
11. *Burke G.R., Taft S.* Fault Tolerant State Machines. Washington, USA: NASA, 2004.
12. *Berg M.A.* Simplified Approach to Fault Tolerant State Machine Design for Single Event Upsets // Mentor Graphics Users' Group User2User Conf. Santa Clara, USA, 2004.
13. *Tiwari A., Tomko K.A.* Enhanced Reliability of Finite-State Machines in FPGA Through Efficient Fault Detection and Correction // IEEE Transactions on Reliability. 2005. V. 54. № 3. P. 459–467.
14. *Cassel M., Lima F.* Evaluating One-Hot Encoding Finite State Machines for SEU Reliability in SRAM-based FPGAs // Proc. 12th IEEE Intern. On-Line Testing Sympos. Lake Como, Italia: IEEE, 2006. P. 139–144.
15. *Frigerio L., Salice F.* RAM-Based Fault Tolerant State Machines for FPGAs // Proc. 22nd IEEE Intern. Sympos. on Defect and Fault-Tolerance in VLSI Systems. Rome, Italy: IEEE, 2007. P. 312–320.
16. *Azambuja J.R., Sousa F., Rosa L., Kastensmidt F.L.* Evaluating Large Grain TMR and Selective Partial Reconfiguration for Soft Error Mitigation in SRAM-Based FPGAs // Proc. 15th IEEE Intern. On-Line Testing Sympos. Lisbon, Portugal: IEEE, 2009. P. 101–106.
17. *El-Maleh A.H., Al-Qahtani A.S.* A Finite State Machine Based Fault Tolerance Technique for Sequential Circuits // Microelectronics Reliability. 2014. V. 54. № 3. P. 654–661.
18. *Sooraj S., Manasy M., Bhakthavatchalu R.* Fault Tolerant FSM on FPGA Using SEC-DED Code Algorithm // Proc. Intern. Conf. on Technological Advancements in Power and Energy. Kollam, India: IEEE, 2017. P. 1–6.
19. *Nidhin T.S., Bhattacharyya A., Behera R.P., Jayanthi T., Velusamy K.* Verification of Fault Tolerant Techniques in Finite State Machines Using Simulation Based Fault Injection Targeted at FPGAs for SEU Mitigation // Proc. 4th Intern. Conf. on Electronics and Communication Systems. Coimbatore, India: IEEE, 2017. P. 153–157.
20. *Choi S., Park J., Yoo H.* Area-Efficient Fault Tolerant Design for Finite State Machines // Proc. Intern. Conf. on Electronics, Information, and Communication. Barcelona, Spain: IEEE, 2020. P. 1–2.
21. *Verducci O., Oliveira D.L., Batista G.* Fault-Tolerant Finite State Machine Quasi Delay Insensitive in Commercial FPGA Devices // Proc. IEEE 13th Latin America Sympos. on Circuits and System. Santiago, Chile: IEEE, 2022. P. 1–4.
22. *Климович А.С., Соловьев В.В.* Структурные модели конечных автоматов при их реализации на программируемых логических интегральных схемах и системах на кристалле // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 2. С. 68–80.
23. *Yang S.* Logic Synthesis and Optimization Benchmarks user Guide. Version 3.0 // Microelectronics Center of North Carolina (MCNC). North Carolina, USA: MCNC, 1991.
24. *Климович А.С., Соловьев В.В.* Преобразование автомата типа Мили в автомат типа Мура путем расщепления внутренних состояний // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 6. С. 70–79.
25. *Соловьев В.В.* Синтез быстрых конечных автоматов на программируемых логических интегральных схемах путем расщепления внутренних состояний // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 3. С. 69–80.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.6

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ СПЕЦИФИКА КОНКУРЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА

© 2023 г. В. С. Каплан^а, Н. М. Новикова^{б,*}, И. И. Поспелова^{а,**}

^аФакультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^бФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: novikova@gse.cs.msu.ru

**e-mail: ipospelova05@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Рассматривается проблематика выработки и оптимизации правил аукциона спектра. Проведено сравнительное теоретическое исследование двух вариантов ценообразования: 1-й и 2-й цены для закрытого одностороннего аукциона спектра. Построена игровая модель аукциона, учитывающая возможность появления участников-фрирайдеров, бесплатно использующих частоты, купленные другим таким участником. Найдены в аналитическом виде все равновесия Нэша для возникающих игр. Показано существенное отличие игр между потенциальными фрирайдерами от игр, содержащих хотя бы одного обычного игрока. Доказано, что при исключении игроками доминируемых стратегий складывающаяся на аукционе цена лота определяется его ценностью для обычных участников, а в случае когда в игре все участники готовы стать фрирайдерами, цена покупки равна минимальной цене участия. Обсуждается влияние информированности участников о величинах ценности лота у партнеров на исход игры. Полученные теоретические свойства согласуются с результатами экспериментов для аукционов спектра, описанными в научной литературе.

Ключевые слова: игра с фрирайдерами, аукцион спектра, правило Викри, правило первой цены, равновесие Нэша, доминирование стратегий, эффективность по Парето, выявление предпочтений

DOI: 10.31857/S0002338823060057, EDN: GQEKGT

Введение. Построение управляющих систем представляет собой важную и сложную проблему не только, когда речь идет о технических системах, но и в не меньшей (если не в большей) степени, когда речь идет об управлении в системах, включающих лиц, самостоятельно принимающих решения, в совокупности определяющие функционирование системы как единого целого или, к примеру, общий доход. Такие задачи управления охватывают в том числе и разработку механизмов конкурентного отбора, в частности, правил проведения аукционов в самых разных сферах [1–4]. Оптимальных правил, вообще говоря, не существует, но всегда актуально исследование принимаемых правил на наличие тех или иных хороших свойств, к которым, к примеру, относится существование равновесия. Другим понятием, полезным при выработке коллективных решений, является их эффективность — оптимальность по Парето. Об эффективности трудно говорить в реальных условиях, когда интересы участника известны только ему самому (и то неполностью). Поэтому первоочередным свойством механизма управления коллективом участников, преследующих собственные цели, должно быть выявление предпочтений, предполагающее, что механизм стимулирует их к искреннему (честному) поведению, согласно своим интересам, например, к подаче на аукцион заявок с ценой, равной истинной ценности товара для участника. Далее покажем, что это значит для конкретной практической проблемы.

В последнее время в научной литературе появляется все больше и больше работ, посвященных аукционам, в которых некоторая уполномоченная организация (продавец) распределяет между заинтересованными лицами (покупателями) выделенные частотные диапазоны спектра электромагнитного излучения для передачи информации на этих частотах [4–9]. Подобные аукционы, как правило, радиочастот называются аукционами спектра (spectrum auctions) и проводятся регулярно — на очередной период времени. Однако далеко не во всех работах учитывается

разделение покупателей на две группы: использующих приобретенное право на передачу как исключительное (лицензионное) только для себя (тип l) и допускающих к купленным ими частотам всех желающих (тип u). Тип участника аукциона спектра покупатель выбирает для себя сам в зависимости от своих дальнейших целей, и его выбор не обязательно одинаков для разных диапазонов частот [10–12]. Наличие среди покупателей более одного u -участника меняет их поведение на аукционе спектра, поскольку стать фрирайдером может оказаться выгоднее, чем приобрести лот на аукционе (в случае если его выиграет другой u -участник). В результате аукцион демонстрирует снижение цен.

Для предсказания итогов аукциона и (или) объяснения его свойств используется математический аппарат исследования операций и теории игр [13–15]. Целью нашей статьи является применение его к односторонним аукционам спектра, которые будем моделировать игрой покупателей. С теоретико-игровой точки зрения интерес представляет изучение игры с фрирайдерами в бескоалиционной постановке, соответствующей закрытому аукциону (когда игроки не знают ставок друг друга). Следуя [11], для аукциона спектра сравним два вида правил: 1-й и 2-й цены [3, 15, 16], что дает две игровые модели. Общие сведения по теоретико-игровому подходу приводятся в разд. 1, где также подробно разбирается решение игр для закрытого аукциона спектра без фрирайдеров, т.е. среди покупателей не более одного u -участника. Основные результаты получены в разд. 2 для игровых моделей аукциона со всеми u -игроками и в разд. 3, где изучены всевозможные варианты игр с одним l -игроком и остальными (двумя и более) u -игроками. В разд. 4 обсуждаем обобщения на случай нескольких l -игроков и u -игроков. В Заключении подводим итоги и формулируем направления дальнейших исследований.

Рассмотрение проводится для аукциона, на котором лоты (диапазоны частот) разыгрываются независимо, т.е. продажа одного не влияет на продажу другого тому же покупателю. Для покупателей делаем упрощающее предположение, что покупка одного лота не препятствует покупке другого, размещаемого в ту же сессию, т.е. что можно пренебречь бюджетными ограничениями на покупку нескольких частотных диапазонов сразу. Мало того, как отмечено в [11], относительно одного диапазона участник может иметь тип l , а по отношению к другому быть u -игроком. Вследствие чего будем формально считать, что за каждый лот проходят отдельные торги. Это не только упрощает теоретический анализ аукциона [17], но и позволяет понять влияние фрирайдеров на стабилизацию его проведения безотносительно к проблемам комбинированного аукциона (с множеством лотов и победителей). Так что в данной статье ограничимся решением игр, соответствующих закрытому аукциону спектра, в котором разыгрывается один лот, уделяя главное внимание моделированию фрирайдерства и теоретико-игровому анализу специфики его проявления для двух основных вариантов ценообразования на подобных аукционах. Отметим, что третий из общепринятых вариантов – аукцион Викри–Кларка–Гровса [18] в случае одного лота эквивалентен аукциону 2-й цены.

Что касается одновременной торговли многими лотами (частотными диапазонами), как это принято Федеральной комиссией по коммуникациям и связи США (FCC), то еще в [19, 20] была продемонстрирована тенденция к сговору покупателей в этом случае, даже для аукциона закрытого типа. Историю и развитие аукционных правил FCC см. также в [21] и в ряде других статей из [5]. Они дают наглядное представление о важности задачи построения управляющих механизмов в условиях рыночного распределения частотного спектра.

1. Теоретико-игровое моделирование закрытого аукциона размещения в классической постановке – без фрирайдеров. Предположим, что неделимый товар, или *лот* (в нашем случае – частотный диапазон) продается на закрытом аукционе покупателю, заявившему готовность заплатить за него максимальную по сравнению с остальными покупателями цену (цена в заявке называется *бид*). Обозначим через x_i бид i -го участника (далее также – игрока i), $i = \overline{1, n}$. Пусть при равенстве максимальных бидов лот достается покупателю с наименьшим номером. Таким образом, в аукционе побеждает игрок

$$i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ i^0 \mid i^0 \in \operatorname{Arg} \max_{i=\overline{1, n}} x_i \right\}, \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор бидов конкурирующих за данный лот покупателей, называемый также *исходом* игры. Введем ограничение на биды $x_i \geq b_0$, предполагая, что меньшие значения торговая площадка не допускает к участию в аукционе, $b_0 > 0$. Получим $X_i = \{x_i \geq b_0\}$ – множество стратегий каждого игрока i . В качестве решения игры будем рассматривать понятие равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре [22], поскольку оно задает наиболее широкое множество ис-

ходов, которые потенциально могут быть реализованы в отсутствие сговора (без побочных платежей). Действительно, для неравновесного исхода всегда найдется игрок, которому выгодно изменить свой бид в условиях закрытого аукциона.

О п р е д е л е н и е 1. Исход x^0 называется *равновесным* в игре с функциями выигрыша φ_i , если

$$\forall i = \overline{1, n} \quad x_i^0 \in \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i, x_{-i}^0).$$

Здесь и далее вектор x с индексом $-i$ обозначает набор стратегий (бидов) всех остальных игроков, кроме i -го, а с индексом $-N$ — набор компонент вектора x с индексами не из $N \quad \forall N \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Указание на функцию выигрыша будем опускать, если это не приводит к недопониманию.

Допустим, что ценность лота для игрока i равна V_i и $V_1 > V_2 > \dots > V_n > b_0$ (нестрогие неравенства несколько усложняют, но принципиально не меняют рассуждения). Считаем, что игроки не знают V_i друг друга, но либо им, либо торговой площадке (продавцу) известен порядок их номеров для определения (1.1). (От условия монотонности V_i тоже можно отказаться, но мы его сохраняем для упрощения изложения.) Правила аукциона задают цену $p(x)$, которую заплатит игрок $i(x)$, купивший лот, согласно (1.1), $p(x) \leq x_{i(x)}$. В игре без фрирайдеров (когда среди покупателей не более одного i -игрока) функции выигрыша определяются по формуле

$$\varphi_{i(x)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \varphi_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \forall i \neq i(x), \quad (1.2)$$

отличающейся в зависимости от варианта аукциона только для игрока-победителя.

В аукционе 1-й цены $p_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_{i(x)}$, т.е. игрок $i(x)$ платит свой (победивший) бид. Следуя [15] (упр. 2, гл. III), нетрудно доказать, что все равновесные исходы x^0 в соответствующей игре представимы в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_j^0 \leq x_1^0 \quad \forall j$ и $\exists i > 1: x_i^0 = x_1^0$. Они приносят победу игроку 1, и его выигрыш $\varphi_1(x^0)$ может оказаться любым числом от 0 до $V_1 - V_2$ в зависимости от выбора x_{-1}^0 конкурентами. Учтем, что рациональным игрокам нет смысла подавать заявки $x_i > V_i$, поскольку покупка лота в таком случае принесет им убытки. Тогда если знать V_2 и порядок номеров, то игроку 1 можно выбрать $x_1 = V_2$ и рассчитывать на максимальный выигрыш в равновесии для этой игры. В противном случае, снижая x_1 по сравнению с V_1 , он рискует проиграть лот. Так что в аукционе 1-й цены при общих предположениях неинформированности трудно выйти на конкретное равновесное решение без сговора. Парето-оптимальным, т.е. эффективным (не улучшаемым одновременно для всех покупателей [13, 14]) исходом, в данной игре является $b^0 \stackrel{\text{def}}{=} (b_0, \dots, b_0)$, однако в закрытом аукционе каждому выгодно от него отклониться, выбрав x_i чуть побольше, чтобы выиграть лот, значит, исход b^0 не относится к равновесным.

В аукционе 2-й цены (аукционе Викри) победитель платит цену, равную заявке игрока, следующего за ним по величине бида, а при равенстве бидов — свою цену в заявке:

$$p_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_{j(x)}, \quad j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ j \neq i(x) \mid j \in \operatorname{Arg} \max_{j \neq i(x)} x_j \right\} \quad (1.3)$$

и $\varphi_{i(x)} = V_{i(x)} - x_{j(x)} \geq 0$. В (1.3) и далее для удобства изложения обозначение $j(x)$ применяется к ценообразующему для $i(x)$ игроку с минимальным номером.

На основе того же упр. 2 из гл. III [15] заключаем, что для игры (1.1)–(1.3) множество равновесий по Нэшу, в отличие от аукциона 1-й цены, содержит эффективные исходы x^* :

$$x^*(1) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^*, b_0, \dots, b_0) \quad \forall x_1^* \geq V_2, \quad x^*(i) \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^* \geq V_1, x_{-i}^* = b_{-i}^0) \quad \forall i > 1, \quad (1.4)$$

при которых любой участник i может выиграть лот, заплатив за него минимальную цену b_0 , так как $x_{j(x^*)}^* = b_0$ для любого исхода x^* из (1.4). Другие (непаретовские) равновесные исходы строятся аналогично и могут приводить к покупке лота любым i -м участником по любой превышающей b_0 цене $p \leq V_i$. Указанная группа исходов соответственно каждому i состоит из x^0 с $x_i^0 \geq V_1$ и $x_{j(x^0)}^0 = p \in (b_0, V_i]$ или (при $i = 1$) с $x_1^0 \geq V_2$ и $x_{j(x^0)}^0 = p \in (b_0, \min(V_1, x_1^0)]$. Для таких x^0 выполнено $i = i(x^0)$ по (1.1), $x_j^0 \leq p \quad \forall j \neq i$ и $p_2(x^0) = p$ из (1.3), а $\varphi_i(x^0) = V_i - p \geq 0$ из (1.2) ($i = \overline{1, n}$).

Из приведенного описания множества равновесных исходов трудно понять, что будет реализовано (и оценить выигрыш продавца), но здесь помогает еще одно хорошее свойство аукциона Викри в игре без фрирайдерства. Это — наличие равновесия в доминирующих стратегиях и существование самих доминирующих стратегий в игре [15].

О п р е д е л е н и е 2. Стратегия $x_i \geq b_0$ игрока i доминирует его стратегию $x_i^- \geq b_0$ в игре с функциями выигрыша φ_i , если $\forall j \neq i, \forall x_j \geq b_0 \varphi_i(x) \geq \varphi_i(x_i^-, x_{-i})$ и $\exists x_{-i}^-$ с компонентами $x_j^- \geq b_0$: $\varphi_i(x_i, x_{-i}^-) > \varphi_i(x_i^-, x_{-i}^-)$. При этом стратегия x_i^- называется доминируемой. Стратегия $x_i^+ \geq b_0$ игрока i называется доминирующей в игре с функциями выигрыша φ_i , если $\forall x_i \geq b_0, \forall j \neq i, \forall x_j \geq b_0 \varphi_i(x_i^+, x_{-i}) \geq \varphi_i(x)$.

Аукцион Викри для рассматриваемого случая считается выявляющим предпочтения, потому что именно искренние стратегии игроков $x_i = V_i$ оказываются доминирующими в игре для аукциона (1.1)–(1.3), т.е. $x_i^+ = V_i$, и такой вектор $x^+ = (V_1, \dots, V_n)$ входит для аукциона 2-й цены в состав равновесных исходов, что обеспечивает стабильность поведения покупателей на рассматриваемом аукционе без фрирайдеров. Однако это равновесие в доминирующих стратегиях, хотя и устойчиво, и обосновано на уровне индивидуального поведения (выбора стратегий), но не будет оптимальным по Парето. Действительно, игрок-победитель $i(x^+) = 1$ заплатит $p_2(x^+) = V_2 > b_0$ и получит выигрыш $\varphi_1(x^+) = V_1 - V_2 < V_1 - b_0 = \varphi_1(x^*(1))$, а остальные игроки, проигрывающие лот, не изменят своих результатов по сравнению с исходами $x^*(1)$, указанными в (1.4). Значит, любой равновесный исход $x^*(1)$ доминирует по Парето равновесие x^+ . Тем не менее, возможность практической реализации $x^*(1)$ тоже не очевидна в отсутствие побочных платежей.

Для гарантий x^+ торговой площадке (продавцу лота) правильно не только не раскрывать информацию о V_i , но и скрыть порядок номеров игроков. Тогда если игроки не знают, кто из них имеет 1-й номер, т.е. для кого из покупателей истинная ценность V_i данного лота на самом деле больше, то в попытке реализовать каждым свой эффективный исход $x^*(i)$ они выберут на основе (1.4) $x_i^* = V_i$, надеясь, что именно у него V_i , и в итоге придут к x^+ . Чтобы номер игрока, выигрывающего лот в случае нескольких максимальных бидов, был участникам заранее не известен и при этом они могли проверить отсутствие манипулирования со стороны продавца, достаточно договориться бросать жребий после возникновения равенства. Какой бы игрок ни выигрывал лот при равенстве бидов по установленным правилам, исход x^+ приносит победу игроку с максимальной ценностью лота для него. (Согласно сделанным выше предположениям, считаем, что такой игрок — игрок 1.)

В данных условиях исследуем, как меняется ситуация при наличии фрирайдерства. Фактически, фрирайдерство возникает в аукционе спектра с двумя и более u -участниками, каждый из которых готов воспользоваться лотом за счет другого такого же. Это приводит для соответствующих игроков к изменению функции выигрыша по сравнению с (1.2). Рассмотрим такие игры формально для различных возможных случаев.

2. Результаты теоретико-игрового моделирования закрытого аукциона спектра среди потенциальных фрирайдеров. Пусть все покупатели — участники аукциона спектра — имеют тип u , т.е. готовы стать фрирайдерами. Их функции выигрыша по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока-победителя, который все также определяется по формуле (1.1) и для которого выигрыш совпадает с заданным формулой (1.2), но в части остальных покупателей их выигрыши меняются, начиная превышать результат от победы на аукционе. Поэтому изменим на ψ обозначение функции выигрыша, чтобы учесть фрирайдеров (не победивших на аукционе u -игроков), и придем к формуле

$$\psi_{i(x)}(x) = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \psi_i(x) = V_i \quad \forall i \neq i(x), \quad (2.1)$$

где $p(x)$ равно $p_1(x)$ или $p_2(x)$, согласно разд. 1, для аукциона 1-й или 2-й цены соответственно.

У т в е р ж д е н и е 1. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами множество равновесий Нэша состоит из единственного исхода $b^0 = (b_0, \dots, b_0)$. Указанный исход также является равновесием в доминирующих стратегиях и оптимален по Парето.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равновесность и эффективность b^0 очевидна. Компоненты b_0 этого вектора являются доминирующими стратегиями игроков, поскольку выиграть лот с большей

платой хуже, а предложить меньшую цену нельзя по условию. Покажем, что других равновесных исходов нет (хотя при случайном выборе победителя равновесные векторы выигрышей покупателей будут существенно различаться). Действительно, пусть x — равновесие. Тогда если у игрока $i(x)$, победившего на аукционе, выбор $x_{i(x)} > b_0$, то, уменьшив бид, он обязательно увеличит свой выигрыш, что противоречит равновесности x . Отсюда максимальный бид в равновесии совпадает с b_0 . Утверждение 1 доказано.

У т в е р ж д е н и е 2. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами множество равновесий Нэша состоит из исходов $x^0 = (x_1^0, b_0, \dots, b_0) \quad \forall x_1^0 \geq b_0$. Указанные исходы также оптимальны по Парето. При этом равновесием в доминирующих стратегиях из них является лишь b^0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях (1.4) $x^0 = x^*(1)$, но без дополнительных ограничений на x_1^* . Равновесность и эффективность таких x^0 очевидна из того, что все они приводят к вектору выигрышей $(V_1 - b_0, V_{-1})$, которые максимальны для игроков $i > 1$, а игрок 1, выигрывающий лот, не может заплатить меньше b_0 . Стратегия $x_1^0 > b_0$ игрока 1 доминируется бидом b_0 (при x_{-1}^- с $b_0 < x_j^- \leq x_1^0$ для некоторого игрока $j > 1$). Биды b_0 являются доминирующими стратегиями и остальных игроков. Понятно, что других равновесных исходов нет, поскольку при выборе $x_{j(x)} > b_0$ игроком $j(x)$, имеющим 2-ю цену в заявке, игроку 1 выгодно снизить свой бид, чтобы отдать ему лавры победителя. Если же игрок 1 и так применил стратегию b_0 , то игроку, заявившему больше, будет выгодно снизить свой бид до b_0 , чтобы не платить на аукционе в качестве победителя. Утверждение 2 доказано.

Из доказательств утверждений 1 и 2 можно заметить, что в отличие от аукциона без фрирайдеров лот выигрывает покупатель, который побеждает при равенстве бидов, а не обязательно тот, у кого самая высокая оценка лота. Поэтому здесь жеребьевка при равенстве еще более оправдана. Ценности лота вообще нигде не высвечиваются и не видны в заявках, т.е. для данного случая аукционы не будут выявляющими предпочтения. Из самих утверждений 1 и 2 следует, что в игре с потенциальными фрирайдерами продавец не получит более установленной минимальной цены b_0 , какие бы правила аукциона им ни вводились. Иная картина возникает при наличии хотя бы одного l -игрока, так как u -игроки теряют свой выигрыш, когда он выигрывает лот. А тогда ставка b_0 перестает быть для них доминирующей стратегией. При этом их поведение и результат зависят от номера l -игрока, точнее, от его места в цепочке V_i . В следующем разделе рассмотрим возможные варианты.

3. Теоретико-игровое моделирование закрытого аукциона спектра, в котором кроме потенциальных фрирайдеров участвует l -игрок. Разберем три ситуации: l -игрок имеет максимальную ценность лота среди всех покупателей, l -игрок имеет минимальную ценность лота и ценность лота оказывается у него промежуточной (максимальное и минимальное значения V_i у u -игроков).

3.1. Максимальная ценность лота у l -игрока. Пусть игрок 1 соответствует покупателю типа l , а все остальные покупатели — участники аукциона спектра — имеют тип u , т.е. готовы стать фрирайдерами. Функции выигрыша игроков по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ (1.1) и для него не меняются, но для остальных игроков $i > 1$ появление l -игрока влияет на их выигрыш. Поэтому введем новое обозначение χ_i для функции выигрыша в этом пункте. Для игрока 1 имеем $\chi_1 = \phi_1$, а для u -игроков $i > 1$ в отличие от (1.2) и (2.1) будет

$$\chi_{i(x)}(x) = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x) \quad \chi_i(x) = \begin{cases} V_i, & \text{если } i(x) \neq 1, \\ 0, & \text{если } i(x) = 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно (см. разд. 1). По условиям разд. 1 $V_1 > V_i \quad \forall i > 1$, так что доказательство следующего утверждения 3 повторяет рассуждения разд. 1 для аукциона 1-й цены.

У т в е р ж д е н и е 3. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком 1 в равновесии выигрывает l -игрок, и множество равновесий Нэша состоит из x^0 , представимых в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_i^0 \leq x_1^0 \quad \forall j$ и $\exists i > 1: x_i^0 = x_1^0$.

З а м е ч а н и е 1. Сложным равновесием, т.е. полученным после исключения игроками своих доминируемых стратегий [15], в данной игре будут исходы от $(V_2, V_2, b_0, \dots, b_0)$ и до $(V_2, V_2, V_3, \dots, V_n)$, дающие все один и тот же вектор выигрышей $(V_1 - V_2, 0, \dots, 0)$.

З а м е ч а н и е 2. Если в рассматриваемом аукционе действует иное, чем (1.1), правило выбора $i(x)$ при равенстве бидов, например случайный выбор, то левую границу отрезка для x_1^0 в утверждении 3 следует исключить из условий на равновесие.

Для аукциона Викри (1.1), (1.3), (3.1), как и в разд. 1, равновесные исходы могут приводить к покупке лота любым i -м участником по любой цене $p \in [b_0, V_i]$. Однако группа равновесных исходов x^0 несколько сужается (см. ниже утверждение 4). Тем не менее, в ней по-прежнему содержится исход в искренних стратегиях $(V_1, V_2, \dots, V_n)$, приносящий лот игроку 1 по цене V_2 , хотя такие стратегии уже не являются доминирующими для u -игроков. Далее будем при анализе аукциона 2-й цены, как правило, использовать однотипное обозначение $x^0(i)$ для (различных!) равновесных исходов x^0 , которые приводят к покупке лота игроком i , т.е. (и это будем обеспечивать по построению) $i(x^0(i)) = i$, согласно (1.1).

У т в е р ж д е н и е 4. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком 1 в равновесии выигрывает лот либо l -игрок 1 на равновесных исходах $x^0(1)$ с компонентами $x_1^0(1) \geq V_2$ и $x_{j(x^0(1))}^0(1) = p \in [b_0, \min\{x_1^0(1), V_1\}]$, либо любой u -игрок $i > 1$ на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \geq V_1$, $j(x^0(i)) = 1$ и $x_1^0(i) = p \in [b_0, V_i]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подтвердим сначала, что $x^0(1)$ – равновесие. По определению этого исхода выигрывает лот l -игрок 1, а все остальные (u -игроки) получают нулевой выигрыш. Но никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше (т.е. больше, чем V_2) и выиграв лот. Игроку 1 тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш. Теперь покажем, что $x^0(i)$ – равновесие. Для игрока $j \neq i$ увеличение бида сверх $x_j^0(i) \geq V_1$ не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот эту цену как вторую. Игрок i тоже не может снизить бид до p , чтобы передать лот другому u -игроку, так как $j(x^0(i)) = 1$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером – у l -игрока. В итоге исходы, указанные в утверждении 4, – равновесные, $x_j^0(i) \leq p \ \forall j \neq i$, $i = i(x^0(i))$, $p_2(x^0(i)) = p$, $\chi_i(x^0(i)) = V_i - p \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Убедимся, что других равновесий нет.

Предположим, что x – равновесный исход с $p(x) = p$. Сначала пусть $i(x) = 1$. Тогда $x_1 \geq p$, и если $p > V_1$, то игрок 1 увеличит значение $\chi_1(x)$, не купив лот (выбрав бид меньше p), значит $p \leq V_1$. Если $x_1 < V_2$, то игрок 2, выбрав бид между x_1 и V_2 , получит положительный выигрыш от покупки лота – противоречие с равновесностью x . В результате пришли к условиям для $x^0(1)$. Пусть теперь $i(x) = i$, тогда аналогично предыдущему случаю $p \leq V_i$ и (чтобы игрок 1 не мог перебить его ставку с выгодой для себя) $x_i \geq V_1$. Кроме того, поскольку игрок i имеет тип u , то при $p > b_0$ он увеличит свой выигрыш, выбрав бид ниже p и передав лот другому u -игроку, если игрок $j(x)$, определенный в (1.3), имеет тип u . Остается только возможность равенства $j(x) = 1$, которое для $p = b_0$ выполняется автоматически. Опять пришли к условиям для $x^0(i)$, что завершает доказательство утверждения 4.

3.2. Минимальная ценность лота у l -игрока. Рассмотрим противоположный случай, когда игрок n имеет тип l , а все остальные покупатели – участники аукциона спектра – имеют тип u , т.е. являются потенциальными фрирайдерами. Отличие от п. 3.1 состоит в том, что ценность лота для l -игрока $V_n < V_i \ \forall i < n$, т.е. минимальна. Значит, по предположению разд. 1 он выигрывает лот в последнюю очередь, что заметно меняет ситуацию. Сохранив формулу (1.1), переобозначим функции выигрыша игроков на ξ_i для такого случая. Тогда для l -игрока n имеем $\xi_n = \varphi_n$, а для u -игроков $i < n$

$$\xi_{i(x)} = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x) \quad \xi_i(x) = \begin{cases} V_i, & \text{если } i(x) \neq n, \\ 0, & \text{если } i(x) = n, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно (см. разд. 1).

У т в е р ж д е н и е 5. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком n в равновесии покупает лот u -игрок, и множество равновесий Нэша состоит из исходов x^0 , для которых $x_n^0 = b \in [V_n, V_1]$, $\exists i < n$ ($i = i(x^0)$): $x_i^0 = b \leq V_i$, а у остальных u -игроков $j < n$ ($j \neq i$) их $x_j^0 < b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данные x^0 — равновесные исходы: l -игрок n не может увеличить свой 0-й выигрыш (с бидом сверх V_1 он окажется в минусе, а с меньшей ставкой он лот не выиграет из-за бида игрока $i(x^0)$), в свою очередь u -игрок $i(x^0)$, уменьшив свой бид, получит 0, так как лот выиграет l -игрок n , остальные u -игроки имеют в x^0 свой максимум. Других равновесий нет. Действительно, если лот выиграет l -игрок n со ставкой больше V_n , ему выгодно ее снизить даже ценой потери лота, а при ставке x_n меньше V_1 u -игроку 1 выгодно, увеличив свой бид до цены в его заявке, выиграть лот. Поэтому l -игрок n не может победить в равновесии. Если же лот выигрывает u -игрок, то, значит, его бид не меньше цены в заявке l -игрока n и в случае “строго больше” ему выгодно спустить свой бид до этой цены. Из равенства бидов игрока n и игрока $i(x)$ в равновесии бид игрока n не может оказаться строго меньше V_n , поскольку игроку n стало бы выгодным поднять бид под V_n (не достигая этой величины), чтобы перехватить лот с положительным выигрышем. Получаем для n -й компоненты равновесных исходов условия, сформулированные в утверждении 5. Условия на биды игроков $j < n$, $j \neq i$ необходимы для того, чтобы у выигравшего лот u -игрока i не было повода отклониться от равновесия, передавая лот другому такому же. Утверждение 5 доказано.

З а м е ч а н и е 3. Если l -игрок n исключит свои доминируемые стратегии, то останутся лишь равновесия с $b = V_n$. Это приносит продавцу больше, чем для аукциона 1-й цены в разд. 2, но меньше, чем в п. 3.1 и разд. 1. Для аукциона Викри (см. следующее утверждение 6) вариантов выигрыша игроков в равновесии существенно больше, но при $n > 2$ среди равновесных исходов нет вектора искренних стратегий игроков, поскольку при искренней стратегии игрока 2 игроку 1 выгодней выбрать бид, равный V_n , а не V_1 .

У т в е р ж д е н и е 6. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком n в равновесии покупает лот по цене p либо l -игрок n на равновесных исходах $x^0(n)$ с $x_n^0(n) \geq V_1$ и $x_{j(x^0(n))}^0(n) = p \in [b_0, V_n]$, либо любой u -игрок $i < n$ на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \geq V_n$ и $j(x^0(i)) = n$ при $x_n^0(i) = p \in (b_0, V_i]$ и еще игрок 1 при $p = b_0$ на $x^0(1) = x^*(1)$ из (1.4), но с $x_1^* \geq V_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве утверждения 4, $x^0(n)$ — равновесие, в котором выигрывает лот l -игрок n , а все остальные (u -игроки) получают нулевой выигрыш, и никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше или ниже. Игроку n тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш $V_n - p \geq 0$. И аналогично $x^0(i)$ — равновесие, так как:

1) для l -игрока n увеличение бида сверх $x_i^0(i) \geq V_n$ с целью победы в аукционе не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот именно эту цену как вторую;

2) u -игрок $i > 1$ ($i \neq n$) тоже не может снизить бид до p , чтобы передать лот другому u -игроку, так как $j(x^0(i)) = n$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером — у l -игрока;

3) u -игрок $i = 1$ не может снизить бид до p , чтобы передать лот другому u -игроку, из-за того, что при $p > b_0$ по построению требуется $j(x^0(i)) = n$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером — у l -игрока, а при $p = b_0$ лот останется у него самого — у игрока 1;

4) u -игроки $j \neq i$ — фрирайдеры, и больше этого им не выиграть.

В результате исходы, указанные в утверждении 6, являются равновесными, и притом $x_j^0(i) < x_n^0(i) \quad \forall j \neq i, j < n, x_n^0(i) = p$ для $i \neq n, i = i(x^0(i)), p_2(x^0(i)) = p, \xi_i(x^0(i)) = V_i - p \geq 0$ ($i = 1, n$). Доказательство того, что других равновесий нет, отличается от доказательства утверждения 4 лишь дополнительной необходимостью обосновать отсутствие в равновесии исходов $(x_i^0(i) \geq V_n, b_{-i}^0)$ для $1 < i < n$. Но подобный исход не будет равновесием в условиях утверждения 6,

поскольку u -игроку i выгодней спустить свой бид до минимального и стать фрирайдером, отдав лот игроку 1, у которого тоже тип u . Утверждение 6 доказано.

3.3. Ценность лота у l -игрока — промежуточная. Исследуем общий для данного раздела случай. Пусть тип l у игрока l , а все остальные покупатели — участники аукциона спектра — имеют тип u , т.е. стремятся оказаться фрирайдерами. Победитель аукциона $i(x)$ определяется для исхода x по формуле (1.1). Функции выигрыша игроков будем обозначать через f_i , они по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ и для него не меняются.

Для $i = l$ зададим $f_l \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_l$, где φ_l удовлетворяет (1.2), а для u -игроков i ($i \neq l$) воспользуемся формулой (3.3), обобщающей (3.1) и (3.2):

$$f_{i(x)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x) \quad f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} V_i, & \text{если } i(x) \neq l, \\ 0, & \text{если } i(x) = l, \end{cases} \quad (3.3)$$

с $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно. По условиям разд. 1 $V_1 > V_l > V_i \forall i > l$.

Утверждение 7. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком $l > 1$ в равновесии покупает лот u -игрок, и множество равновесий Нэша состоит из таких x^0 , для которых $x_l^0 = b \in [V_l, V_1]$ и $\exists i = i(x^0) < l: x_i^0 = b \leq V_i, x_j^0 < b \forall j < l, j \neq i, x_k^0 \leq b \forall k > l$.

Доказательство. Данные x^0 — равновесия, поскольку: l -игрок l не может увеличить свой 0-й выигрыш (выиграв лот с увеличением ставки, он окажется в минусе, а с уменьшением бида не выиграет аукциона), и u -игрок $i(x^0)$, уменьшив свой бид, получит 0, так как лот выиграет l -игрок l . Других равновесий нет. Действительно, если бы в равновесии лот выигрывал l -игрок l , то при цене в заявке больше V_l ему было бы выгодно ее снизить даже ценой потери лота, а при ставке меньше V_l u -игроку 1 выгодно, увеличив свой бид до цены в его заявке, выиграть лот. Значит, любой l -игрок с номером $l \neq 1$ не может победить в равновесии для рассматриваемого аукциона. Тогда лот выигрывает u -игрок i с бидом b , не меньшим цены в заявке l -игрока l , и в случае “строгое больше” ему выгодно спустить свой бид до этой цены, т.е. в равновесии их биды равны. При этом $b \leq V_i$ (иначе игрок i получил бы отрицательный выигрыш, что противоречит равновесию). В ситуации $b < V_l$ появляется возможность у игрока l поднять цену и выиграть лот, так что в равновесии его ставка не меньше V_l и $b \geq V_l$. Совмещая $V_l \leq b \leq V_i$, выводим $i < l$ в равновесии. Для остальных u -игроков $j < l$ ($j \neq i$) их биды в рассматриваемом равновесии должны быть строго меньше b , а для игроков с номерами $k > l$ их ставки могут быть нестрогое меньше b . Это нужно, чтобы игроку i было невыгодно отклоняться вниз от b (чтобы лот при его отклонении вниз переходил к игроку l). Утверждение 7 доказано.

Замечание 4. Если l -игрок l исключит свои доминируемые стратегии, то останутся лишь равновесия с $b = V_l$. Это приносит продавцу больше, чем для аукциона 1-й цены в разд. 2 и в п. 3.2, но меньше, чем в п. 3.1 и разд. 1.

Таким образом, для аукциона 1-й цены можно сделать вывод, что в ситуации, когда лот представляет максимальную ценность именно для игрока, имеющего тип l , наличие фрирайдеров не меняет выигрыша продавца и лот получает l -игрок 1. В остальных случаях выигрывают аукцион u -игроки, но продавец получает тем больше, чем выше ценность лота у l -игрока. Для аукциона Викри такой однозначной зависимости нет (см. утверждение 8): среди равновесных всегда имеется исход, приводящий к продаже лота по минимальной цене b_0 , и исход, обеспечивающий покупку лота l -игроком. Последний фактор тоже стоит учитывать при выборе между аукционом 1-й и 2-й цены.

Утверждение 8. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроком $l > 1$ в равновесии выигрывает лот либо l -игрок l на равновесных исходах $x^0(l)$ с $x_l^0(l) \geq V_l$ и $x_{j(x^0(l))}^0(l) = p \in [b_0, V_l]$, либо любой u -игрок i на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \geq V_l$ при $j(x^0(i)) = l$ и $x_l^0(i) = p \in (b_0, V_l]$ и еще дополнительно игрок 1 при $p = b_0$ на равновесных и оптимальных по Парето исходах $x^0(1) = x^*(1)$ из (1.4) с $x_1^* \geq V_l$.

Доказательство равновесности построенных исходов совпадает с доказательством утверждения 6 при замене n на l и ξ_i на f_i . И аналогичное обоснование проходит для того, что других равновесий нет. Для всех равновесных исходов из утверждения 8 имеем:

$$x_j^0(i) \leq p \quad \forall j \neq i, \quad x_j^0(i) < x_l^0(i) \quad \forall j < l, \quad j \neq i, \quad x_l^0(i) = p \quad \text{для } i \neq l, \quad i = i(x^0(i)), \quad p_2(x^0(i)) = p, \\ f_i(x^0(i)) = V_i - p \geq 0 \quad (i = 1, n).$$

Разница между равновесными исходами аукциона Викри в этом разделе состоит лишь в небольших отличиях цен p , по которым лот может быть продан. Но из всех случаев, кроме п. 3.1 (когда игрок 1 имеет тип l), исход в искренних стратегиях включается в равновесие лишь при $l = 2$, т.е. когда тип l у игрока 2. В обоих вариантах лот достается игроку 1 (в п. 3.1 — l -игроку, а в п. 3.3 с $l = 2$ — u -игроку) и продавец получает цену V_2 . Появление хотя бы одного l -игрока улучшает шансы продавца на получение равновесной цены выше минимальной, но не гарантирует от этого — в отличие от аукциона 1-й цены, чем больше ценность лота для l -игрока (или для игрока 2, если $l = 1$), тем лучше продавцу. Далее увидим, что при множестве l -игроков заметное влияние на его результат оказывают такой игрок с минимальным номером l^0 и максимальная ценность лота для всей совокупности l -игроков (кроме игрока 1, у которого V_1 заменяется на V_2). Наилучшие возможности у продавца в игре с фрирайдерами будут при $l^0 \leq 2$.

4. Результаты теоретико-игрового моделирования закрытого аукциона спектра между потенциальными фрирайдерами и l -игроками. Предположим, что тип l имеется у игроков $l \in L$ (участников с номерами из множества L), а все остальные покупатели — участники аукциона спектра (в количестве более одного) имеют тип u , т.е. рассчитывают стать фрирайдерами. Победитель аукциона $i(x)$ определяется для исхода x по формуле (1.1). Функции выигрыша игроков будем обозначать через F_i , они по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ и для него не меняются. Для $i = l \in L$ зададим $F_l \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_l$, где φ_l удовлетворяет (1.2), а для u -игроков $i \notin L$:

$$F_{i(x)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x) \quad F_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} V_i, & \text{если } i(x) \notin L, \\ 0, & \text{если } i(x) \in L, \end{cases} \quad (4.1)$$

при $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно.

В аукционе 1-й цены решение игры различается в зависимости от типа игрока 1. Если $1 \in L$, то он и выигрывает лот в равновесии, а множество равновесий, как в утверждении 3, состоит из x^0 , представимых в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_j^0 \leq x_1^0 \quad \forall j$ и $\exists i > 1: x_i^0 = x_1^0$. Действительно, такие исходы равновесные, а других равновесий нет по следующей причине. Для того, чтобы лот выиграл любой другой игрок $i > 1$ без убытка для себя, он должен подать заявку с ценой, не превышающей V_i , но это не даст равновесного исхода, поскольку игроку 1 будет выгодно поднять свой бид, чтобы выиграть самому.

И точно также если игрок 1 — u -игрок, то в равновесии лот получит какой-либо из u -игроков с номером $i(x^0) < l^0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{l \mid l \in L\}$ на одном из исходов x^0 , аналогичных построенным в утверждении 7. А именно введем обозначения $b(x)$ для максимального бида l -игроков из соответствующих компонент исхода x : $b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{l \in L} x_l$, и $l(x)$ — для l -игрока с минимальным номером из имеющих бид $b(x)$, т.е. $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{l \in L \mid x_l = b(x)\}$.

Утверждение 9. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроками $l \in L$ при $1 \notin L$ выигрывает лот в равновесии один из u -игроков, и множество равновесий Нэша состоит из x^0 , для которых $b(x^0) \in [V_{l^0}, V_1]$ и $\exists i = i(x^0) < l^0: x_i^0 = b(x^0) \leq V_i$, а для остальных $j \notin L$ выполнено $x_j^0 < b(x^0) \quad \forall j < l(x^0) \quad (j \neq i)$ и $x_j^0 \leq b(x^0) \quad \forall j > l(x^0)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что данному условию на $i(x^0)$ при любых указанных бидах $b(x^0)$ удовлетворяет $i = 1$. Следовательно, множество определенных в утверждении 9 исходов x^0 не пусто. Также понятно, что каждый такой исход x^0 — равновесный. Действительно, игроку $i(x^0)$ не выгодно увеличивать свой бид (он и так выигрывает лот), а снижение ставки отдаст лот l -игроку $l(x^0)$ (поскольку по построению бид $b(x^0)$ может остаться у u -игроков лишь с номерами $j > l(x^0)$), и это сводит к 0 выигрыш игрока $i(x^0)$. Остальные u -игроки $j \neq i(x^0)$ по-

лучают свой абсолютный максимум, т.е. не могут увеличить выигрыш. По условию $x_{i(x^0)}^0 = b(x^0) \geq V_{l^0} > V_l$ никакому l -игроку не увеличить выигрыш, выбирая бид, превышающий $x_{i(x^0)}^0$, но иначе не выиграть лот, т.е. тоже не получить больше 0. Покажем, что других равновесий нет.

Пусть существует иное равновесие x . Если при этом игрок $i(x)$ победил на аукционе, то его бид не может быть больше $V_{i(x)}$, так как в противном случае его выигрыш меньше 0 и ему лучше снизить бид даже с потерей лота. Предположив, что $i(x)$ имеет тип l , получим, что цена в его заявке не превосходит $V_{l^0} < V_l$, а значит, игрок 1 может, выбрав бид в интервале (V_{l^0}, V_l) , увеличить свой выигрыш (от 0 до положительного числа) — пришли к противоречию с равновесностью x . Как следствие: $i(x)$ имеет тип u .

Если бы бид игрока $i(x)$ был меньше $V_{l(x)}$, то l -игрок $l(x)$ сумел бы его перебить с выгодой для себя. Обратное неравенство для бида игрока $i(x)$ в равновесии предполагает $V_{l(x)} \leq V_{i(x)}$, что возможно лишь при $i(x) < l(x)$. Из (1.1) $x_{i(x)} \geq b(x)$, но строгое превышение не дает равновесия, потому что выгодно снизить бид, определяющий плату за лот, хотя бы до $b(x)$. Отсюда получаем, что для равновесия необходимо равенство $x_{i(x)} = b(x)$, из которого вытекает $x_i \leq b(x) \forall i$. Если бы, кроме $i(x)$, был другой u -игрок $j \notin L$ с номером $j < l(x)$ и $x_j = b(x)$, то стратегия b_0 была бы лучше для игрока $i(x)$, чем $b(x)$, поэтому $x_j < b(x) \forall j < l(x)$. Теперь отметим, что при $b(x) < V_{l^0}$ l -игрок l^0 может выбрать бид больше $b(x)$ с выгодой для себя. В итоге $b(x) \geq V_{l^0}$ и, значит, $i(x) < l^0$. Увеличение $b(x)$ сверх V_l приводит к отрицательному результату игрока $i(x)$, т.е. не дает равновесие. Получили для x все условия, предписанные утверждением 9 для x^0 , что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 5. Если игроки не будут использовать свои доминируемые стратегии (см. в разд. 1 определение 2), то множество равновесий в условиях утверждения 9 сокращается до x^0 , задаваемых $b(x^0) = V_{l^0} = x_{l^0}^0$. Причем выиграть лот (и проиграть фрирайдерство) может любой u -игрок i с $i < l^0$, а не только игрок 1, как в случае $L = \emptyset$ по утверждению 1. Все происходит из-за того, что подать заявку с ценой ниже b_0 участник не может, а ниже V_{l^0} может. Такая ситуация подталкивает к сговору u -игроков в аукционе 1-й цены. К сожалению, в игре с фрирайдерами от этого не свободен и аукцион Викри.

У т в е р ж д е н и е 10. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l -игроками $l \in L$, где $|L| < n - 1$, в равновесии по Нэшу может выиграть лот любой игрок i , заплатив за него цену p на следующих исходах.

Равновесные исходы $x^0(l)$ при выигрыше l -игрока $l \in L$ имеют компоненты:

$$\begin{aligned} x_l^0(l) \geq V_l \quad \text{и} \quad x_{j(x^0(l))}^0(1) = p \in [b_0, V_l], \quad \text{если} \quad l > 1, \\ x_1^0(1) \geq V_2 \quad \text{и} \quad x_{j(x^0(1))}^0(1) = p \in [b_0, \min\{x_1^0(1), V_1\}], \quad \text{если} \quad l = 1. \end{aligned}$$

Равновесные исходы $x^0(i)$ при выигрыше u -игрока $i > 1$ ($i \notin L$) имеют компоненты:

$$x_i^0(i) \geq V_{l^0}, \quad j(x^0(i)) \in L \quad \text{и} \quad x_{j(x^0(i))}^0(i) = p, \quad \text{где} \quad p \in \begin{cases} [b_0, V_i], & \text{если} \quad 1 \in L, \\ (b_0, V_i], & \text{если} \quad 1 \notin L, \end{cases}$$

а при выигрыше u -игрока $i = 1$ имеют вид

$$\begin{cases} x^0(1) = x^*(1) \text{ из (1.4) с } x_1^* \geq V_{l^0} \text{ и } p = b_0, \\ x^0(1) \text{ с } x_1^0(1) \geq V_{l^0}, \quad j(x^0(1)) \in L \text{ и } x_{j(x^0(1))}^0(1) = p \in (b_0, \min\{x_1^0(1), V_1\}]. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подтвердим, что построенные исходы равновесные.

1. Для $x^0(1)$ выигрывает лот игрок 1, и при $1 \in L$ все остальные игроки получают нулевой выигрыш, а при $1 \notin L$ все u -игроки получают свой максимум, и лишь у l -игроков есть стимул улучшить нулевой выигрыш. Но в любом варианте никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше $x_1^0(1)$ (т.е. больше V_2 при $1 \in L$ или больше V_{l^0} при $1 \notin L$) и выиграв лот. Игроку 1

тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш. Действительно, при $1 \notin L$ лот игрока 1 тогда достанется l -игроку $j(x^0(1))$, если $p > b_0$, а в случае $p = b_0$ лот останется у игрока 1 при любом снижении им цены в заявке.

2. Аналогично $x^0(l)$ — равновесие $\forall l \in L \setminus \{1\}$. Действительно, для любого игрока $j \neq l$ увеличение бида сверх $x_l^0(l) \geq V_l$ не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот эту цену как вторую. И победивший l -игрок не может увеличить свой выигрыш, изменяя ставку.

3. Докажем, что $x^0(i)$ — равновесие $\forall i \notin L$. Для игроков $l \in L$ увеличение бида сверх $x_i^0(i) \geq V_{l^0}$ не даст положительного выигрыша, потому что тогда им придется заплатить за лот эту цену $x_i^0(i)$ как вторую. Другим игрокам $j \neq i$ ($j \notin L$) нет смысла менять цену в заявке в силу их фрирайдерства. Игрок i тоже не может снизить бид, чтобы передать лот другому u -игроку, так как $j(x^0(i)) \in L$ (т.е. второй по величине бид с минимальным номером находится у l -игрока — он и выиграет лот вместо игрока i).

В результате исходы, указанные в утверждении 10, — равновесные. Убедимся, что других равновесий нет. Предположим, что x — равновесный исход с $p_2(x) = p$.

Рассмотрим случай $1 \in L$, и пусть сначала $i(x) = 1$. Тогда из (1.1) $x_1 \geq p$. Если $p > V_1$, то, не купив лот (выбрав $x_1^0 < p$), игрок 1 может увеличить значение $F_1(x)$ согласно (4.1), поэтому в равновесии $p \leq V_1$. Если $x_1 < V_2$, то игрок 2, выбрав x_2^0 между x_1 и V_2 , получит положительный выигрыш от покупки лота — противоречие с равновесностью x . В итоге пришли для x к условиям на $x^0(1)$, указанным в утверждении 10 при $1 \in L$. Пусть теперь $i(x) = l > 1$, $l \in L$, тогда аналогично предыдущему варианту цена лота $p \leq V_l$ и (чтобы игрок 1 не мог перебить его ставку с выгодой для себя) $x_l \geq V_l$. Опять пришли к условиям для $x^0(l)$. В оставшемся варианте $i(x) = i \notin L$ аналогично предыдущему: $p \leq V_i$ и $x_i \geq V_{l^0}$ с учетом $l^0 = 1$ при $1 \in L$. Кроме того, поскольку игрок i имеет тип u , то при $p > b_0$ он увеличит свой выигрыш, выбрав бид ниже p и передав лот другому u -игроку, если игрок $j(x)$, определенный в (1.3), имеет тип u . Единственная возможность — $j(x) \in L$. При $p = b_0$ выполняется равенство $j(x) = 1$, которое тоже дает $j(x) \in L$ при $1 \in L$. Получили на x условия, установленные утверждением 10 для $x^0(i)$ в случае $1 \in L$. Так что никаких новых равновесий x не возникает.

Проверим, что при $1 \notin L$ дополнительные равновесия тоже не появляются. При $i(x) = 1$ следует $x_1 \geq p$ и $p \leq V_1$, как и выше. Если $x_1 < V_{l^0}$, то игрок l^0 , выбрав $x_{l^0}^0$ между x_1 и V_{l^0} , получит положительный выигрыш от покупки лота — противоречие с равновесностью x . (Игроки типа u не будут перебивать лот у игрока 1, имеющего тот же тип, в отличие от случая, рассмотренного ранее.) В результате пришли к условиям для $x^0(1)$ при $1 \notin L$. При $i(x) = l \in L$ ничего не меняется по сравнению с $1 \in L$. Пусть $i(x) = i \notin L$, $i > 1$, тогда, как и для предыдущего случая, $p \leq V_i$ и $x_i \geq V_{l^0}$, а также при $p > b_0$ в равновесии должно быть $j(x) \in L$. Однако при $p = b_0$ выполняется равенство $j(x) = 1$, которое позволяет игроку $i \neq 1$, снизив свой бид до b_0 , передать лот игроку 1. Поэтому вариант $p = b_0$ не приводит к равновесию в данном случае. Получили условия, установленные утверждением 10 для $x^0(i)$ при $1 \notin L$. Утверждение 10 полностью доказано.

З а м е ч а н и е 6. Для обоих аукционов, если игрок 1 (т.е. игрок с максимальной ценностью лота для него) имеет тип l , то он и будет бенефициаром, как в обычном аукционе без фрирайдеров, несмотря на то, что у u -игроков доминирующих стратегий нет. Но если игрок 1 — u -игрок, то при $2 \notin L$ выбор им бида V_1 или V_2 уже ничем не обоснован, оптимальный по Парето исход b^0 — не равновесный, и очевидных бенефициаров нет. Игрок 1 типа u заинтересован в покупке лота другими u -игроками с номерами $i < l^0$, если такие имеются (т.е. если $l^0 > 2$). Это приводит к нестабильной ситуации — разным исходам в разных повторениях игры, что вполне способно вызвать постепенное снижение бидов и цены аукциона (в том числе за счет стремления участников к неформальным договоренностям). Таким образом можно объяснить картину цен, наблюдаемую в аукционах спектра, проводимых на практике и с помощью модельных торгов [4, 5].

Чисто теоретически, из утверждения 10 вытекает, что в аукционе 2-й цены ничего не мешает продавцу оказаться в равновесной ситуации продажи лота по минимальной цене b_0 . Однако подобная ситуация заставляет подозревать сговор победителя аукциона с другими покупателями, причем не только с фрирайдерами, но и с участниками типа I , для которых в большей степени характерен индивидуализм (так как их интересует лицензионное приобретение лота — только для себя). Действительно, в равновесии I -игрок является вторым по убыванию бидов, т.е. ценообразующим в аукционе 2-й цены — для игрока, выигрывающего лот. Низкая цена p на аукционе предполагает, что все I -игроки подали заявки с не большей ценой. Тем не менее, в отсутствие информированности игроков друг о друге следует учесть, что для I -игроков в аукционе Викри честные стратегии — доминирующие. (Доказательство ничем не отличается от рассуждений для случая игры без фрирайдеров.) Для неинформированных игроков выбор доминирующих стратегий соответствует рациональному поведению [15]. По условию $V_i > b_0$. Значит, выбор b_0 со стороны I -игроков не рационален, а свидетельствует о какой-то договоренности.

Для аукциона Викри, предположив, что I -игроки и игрок 1 применяют искренние стратегии, получим равновесный исход $(V_{L \cup \{1\}}, b_{-L \cup \{1\}}^0)$ с ценой лота V_p при $1 \notin L$ и V_2 при $1 \in L$ — аналогично аукциону 1-й цены. Использование искренней стратегии u -игроком 1 менее объяснимо с точки зрения теории игр (см. замечание 6) во всех случаях, кроме $2 \in L$. Поэтому, когда $I^0 > 2$, продавцу лота особенно важно не допустить сговора I -игрока I^0 с u -игроками $i < I^0$ (у которых ценность лота выше). Для чего и служит закрытый аукцион. Если u -игроки $i < I^0$ не договорятся между собой, то в аукционе 2-й цены побеждает I -игрок — складывается одно из равновесий $x^0(I)$ из утверждения 10. Однако при $1 \notin L$ исходы (V_L, b_{-L}^0) , соответствующие честным стратегиям I -игроков, не дадут равновесий, а стратегии $x_i^0(I)$ — не искренние (победитель в равновесии вынужден применить доминируемую стратегию). Так что правило 2-й цены при $I^0 > 2$ уже нельзя считать стратегически обоснованным.

Заключение. Наличие фрирайдеров существенно меняет свойства аукционов размещения (в том числе аукционов спектра). Если без них все преимущества имеет механизм Викри, то в аукционе среди фрирайдеров его преимущества сводятся на нет. Этим отчасти обуславливается и тот факт, что механизм Викри—Кларка—Гровса [18] не проявляет своих хороших свойств в комбинированных аукционах спектра (за несколько связанных лотов сразу и с несколькими победителями), поскольку он как раз обобщает на этот случай правило 2-й цены. Отметим, что когда связи между лотами в комбинированном аукционе существенны (например, одни дополняют другие, причем по-разному для разных игроков), возникает иная задача. Рассмотрим ее в наших дальнейших работах, поскольку она близка к проблеме учета технических связей, характерной для задачи построения рынка электроэнергетики, которая успешно решена [2].

В разд. 3 было показано, что для продавца, распределяющего частоты на конкурентной основе покупателям, среди которых имеются фрирайдеры, важно участие хотя бы одного I -игрока — это несколько стабилизирует аукцион. Притом чем выше для таких игроков ценность лота, тем на более высокую цену реально надеяться продавцу. Ценность лота у иных игроков может иметь значение для продавца лишь в случае, когда они не знают весь профиль ценностей и свое место в нем, т.е. не способны представить свой шанс на победу и шансы на победу других u -игроков. Тогда им есть какой-то смысл в аукционе 2-й цены использовать свою искреннюю стратегию. Но в равновесии цену лота будет, как правило, определять заявка I -игрока, для которых в аукционе 2-й цены искренняя стратегия — доминирующая. И в этом — преимущество аукциона Викри для продавца, если ему удастся обеспечить отсутствие информационного обмена, провоцирующего сговор.

Информированным об истинном профиле ценностей лота у других покупателей u -игрокам выгодно сговориться на заявки с минимальным бидом, выбрав из своей среды того, кто выиграет для них лот ценой потери фрирайдерства. Однако побочные платежи между ними будут заметны регулятору, а без них равновесные выигрыши оказываются слишком несимметричными, что затрудняет договоренность и приводит к желанию скрыть от партнеров истинную ценность лота для себя. Действительно, u -игрокам i , для которых ценность лота больше, чаще приходится покупать лот при искренних стратегиях I -игроков (в силу условия $p \leq V_i$ на равновесные цены для победы игрока i и $p \geq V_i$ при честных стратегиях I -игроков I). Вопрос, что может дать для принятия решения u -игроками использование механизма Кларка—Гровса [15, 23], также находится в сфере наших будущих интересов.

В целом, полученное описание в явном виде множеств равновесий по Нэшу для ряда игр, соответствующих аукциону спектра, позволяет провести аналитику, подтверждающую или поясняющую результаты экспериментов с учетом игроков типа u и l из [10, 11]. При этом удастся выявить влияние разных факторов по отдельности, как то: правил аукциона (включая выбор победителя при равных ставках), распределения l -игроков среди u -игроков по ценности лота для них, информированности покупателей о ставках друг друга, о типе (u или l) других участников, об упорядочении игроков по ценности лота для них и т.п. Многообразие построенных равновесных исходов служит обоснованием различий в поведении покупателей, не вызванных необходимостью приобретения связанных лотов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jackson M.* Mechanism Theory // Optimization and Operations Research / Ed. U. Derigs. V. 3. Oxford: EOLSS Publishers, 2003.
2. *Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнс Е.М., Новикова Н.М., Селезнев А.В., Удальцов Ю.А., Ширяева Л.В.* Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 2. С. 84–94.
3. *Васин А.А.* Математические модели рынков и аукционов. М.: МАКС Пресс, 2023.
4. *Сонин К.И.* Основы теории аукционов (Нобелевская премия по экономике 2020 года) // Вопросы экономики. 2021. № 1. С. 5–32.
5. *Handbook of Spectrum Auction Design* / Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
6. *Hu S., Shi R.* Analysis of Recent Development of Spectrum Auction and Forecast of Future Development // 3rd Intern. Conf. on Economic Management and Cultural Industry. V. 203. Guangzhou: Atlantis Press, 2021. P. 518–522.
7. *Dong X., Zhang Y., Guo Y., Gong Y., Shen Y., Ma J.* PRAM: a Practical Sybil-Proof Auction Mechanism for Dynamic Spectrum Access with Untruthful Attackers // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2021. V. 22. P. 1143–1156.
8. *Devi M., Sarma N., Deka S. K.* Multi-Winner Spectrum Allocation in Cognitive Radio Networks: A Single-Sided Auction Theoretic Modelling Approach with Sequential Bidding // Electronics. 2021. V. 10. P. 602–626.
9. *Dang Y., Li Z.* The Analysis and Discussion of Spectrum Auctions Based on Case Study // J. Education, Humanities and Social Sciences. 2022. V. 2. P. 181–185.
10. *Bykowski M.M., Olson M., Sharkey W.W.* Efficiency Gains From Using a Market Approach to Spectrum Management // Information Economics and Policy. 2010. V. 22. P. 73–90.
11. *Sharkey W.W., Beltran F., Bykowski M.M.* Comparing the Ability of Different Auction Mechanisms to Efficiently Designate Spectrum Between Licensed and Unlicensed Use // SSRN Electronic Journal. 2013. <http://ssrn.com/abstract=2214022>. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2214022>.
12. *Каплан В.С.* Специфика и теоретико-игровой анализ аукциона размещения частот // Тихоновские чтения. Научная конференция: тез. докл. М.: МАКС Пресс, 2022. С. 85.
13. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
14. *Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. М.: Академия, 2008.
15. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
16. *Vickrey W.* Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders // Journal of Finance. 1961. V. 16. No. 1. P. 8–37. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x>
17. *Fookes N., McKenzie S.* Impact of Budget Constraints on the Efficiency of Multi-lot Spectrum Auctions // Handbook of Spectrum Auction Design. Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. P. 764–781.
18. *Edelman B., Ostrovsky M., Schwarz M.* Internet Advertising and the Generalized Second-price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords // American Economic Review. 2007. V. 97. No. 1. P. 242–259. <https://doi.org/10.1257/aer.97.1.242>
19. *Weber R.J.* Making More from Less: Strategic Demand Reduction in the FCC Spectrum Auctions // J. Economics and Management Strategy. 1997. V. 6. No. 3. P. 529–548.
20. *Cramton P., Schwartz J.A.* Collusive Bidding: Lessons from the FCC Spectrum Auctions // J. Regulatory Economics. 2000. V. 17. P. 229–252.
21. *Milgrom P., Segal I.* Designing the US Incentive Auction // Handbook of Spectrum Auction Design. Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. P. 803–815.
22. *Nash J.F.* Non Cooperative Games // Annals of Math. 1951. V. 54. No. 2. P. 286–295.
23. *Maskin E.* Mechanism Design for Pandemics // Review of Economic Design. 2022. V. 26. No. 3. P. 255–259.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**АНАЛИЗ УЗЛОВЫХ МУЛЬТИПОТОКОВ
В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СИСТЕМЕ
ПРИ УРАВНИТЕЛЬНЫХ СТРАТЕГИЯХ УПРАВЛЕНИЯ**

© 2023 г. Ю. Е. Малашенко^а, И. А. Назарова^{а,*}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^{*}*e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2023 г.

После доработки 09.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

В рамках вычислительных экспериментов на математической модели многопользовательской сетевой системы связи изучается динамика изменения показателей функционирования телекоммуникационной сети. Предложенная алгоритмическая схема позволяет последовательно формировать покомпонентно неубывающие векторы допустимых исходящих узловых мультипоток. В модели предполагается, что передача межузловых потоков разных видов осуществляется одновременно из всех узлов всеми корреспондентами по всем маршрутам с минимальным числом ребер. При вычислениях на каждом шаге ресурсы распределяются равными долями вплоть до достижения полной загрузки сети. Результаты, полученные в ходе экспериментов, дают возможность проследить изменения величин квот, выделяемых корреспондентам на передачу потока определенного вида. Найденные векторы допустимых исходящих узловых мультипоток можно рассматривать как гарантированные многокритериальные оценки показателей функционирования многопользовательской системы. Анализируются сети с различными структурными особенностями и равной суммарной пропускной способностью. Приводятся специальные диаграммы.

DOI: 10.31857/S0002338823060082, EDN: GSJHPS

Введение. Работа продолжает исследование основных функциональных характеристик при предельных нагрузках в телекоммуникационных системах [1–3]. В качестве многопараметрической оценки функциональных возможностей многопользовательской сети используются векторы исходящих узловых мультипоток. Компонентами указанного вектора являются все межузловые потоки с источником в выбранной вершине и стоками во всех остальных узлах сети.

В ходе вычислительных экспериментов определяются допустимые распределения всех межузловых потоков, которые передаются одновременно всеми корреспондентами по кратчайшим маршрутам. На основе найденных межузловых потоков формируются взаимно допустимые векторы исходящих мультипоток из всех узлов сети. В рамках модели предполагается, что система управления позволяет выравнять величины исходящих узловых потоков в ситуациях, когда внешняя нагрузка на узлы сети превышает нормативные ограничения. В работе изучаются пиковые распределения при полной загрузке сети. Пропускная способность ребер сети рассматривается как вектор ресурсов. Ресурсы распределяются между пользователями (узлами-корреспондентами) для обеспечения передачи потоков. Для каждого узла оцениваются требуемые затраты ресурсов при передаче всех исходящих межузловых потоков, для которых данный узел является источником.

Для построения последовательных оценок допустимого исходящего мультипотока из узла с помощью модели анализируется динамический процесс “заполнения” ребер сети при монотонном увеличении межузловых нагрузок. Предполагается что система управления обеспечивает передачу межузловых потоков по всем доступным кратчайшим маршрутам при текущих значениях пропускной способности ребер. На каждом шаге часть остаточной пропускной способности распределяется равными долями между корреспондентами для увеличения соответствующих межузловых потоков. На каждом этапе подсчитываются суммарные затраты ресурсов и последовательно анализируются результаты выравнивания исходящих мультипоток. За

конечное число итераций достигается полная загрузка сети и вычисляются гарантированные оценки [4] допустимых исходящих узловых мультипоток, передаваемых из всех узлов сети одновременно всеми корреспондентами. Предложенный способ моделирования дает возможность сравнивать и выявлять различия в распределении ресурсов при использовании уравнивающих стратегий. Полученные оценки можно трактовать как ограничения на величину каждого межузлового потока определенного вида, который можно будет гарантированно передать в сети одновременно с потоками других корреспондентов, если условия совместной передачи на остальные виды потоков не будут нарушены. Результаты, полученные в ходе экспериментов, можно рассматривать как алгоритмически заданное описание функциональных возможностей сети при предельной загрузке. Предложенный метод позволяет проследить в динамике взаимосвязь изменения узловых мультипоток и пропускной способности ребер сети от минимальных значений до достижения предельной загрузки.

Данная статья находится в русле исследований стратегий управления и построения диспетчерских правил распределения потоков, нагрузок и ресурсов в многопользовательских сетях [5–9]. Далее для построения всех кратчайших путей и максимального однопродуктового потока используются процедуры поиска с полиномиальными оценками вычислительных затрат [10, 11].

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и двоянные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет *смежные* вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направления передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} .

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N - 1)$ независимых, неперекрывающихся и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Для каждой вершины $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, формируется подмножество $P(v_n)$ всех пар-корреспондентов, для которых вершина v_n является узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m \mid s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

а для каждого $P(v_n)$ – список номеров $M(n)$ пар p_m , входящих в подмножество $P(v_n)$:

$$M(n) = \{m_1(n), m_2(n), \dots, m_{N-1}(n)\}.$$

Обозначим через z_m величину *межузлового* потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ – поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ – множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ – множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n , и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , – *входящей* для v_n , и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} – *исходящей*, и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида, проходящему от источника s_m к приемнику t_m пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k , определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ — положительные числа $d_k > 0$. Вектор $\mathbf{d}$ определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}.$$

В рамках формализма модели для каждого узла $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, формируется вектор исходящего мультипотока $\bar{\mathbf{z}}(n)$, компонентами которого являются межузловые потоки z_m для всех пар $p_m \in P(v_n)$ с узлами-источниками s_m , расположенными в вершине v_n :

$$\bar{\mathbf{z}}(n) = \{z_m \mid m \in M(n)\}, \quad n = \overline{1, N}.$$

2. Допустимые узловые мультипотoki. При проведении вычислительных экспериментов векторы $\bar{\mathbf{z}}(n)$ допустимых исходящих мультипотоков формируются на основе найденных распределений совместно допустимых межузловых потоков z_m , $p_m \in P(v_n)$, передаваемых одновременно из всех узлов сети. Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для некоторого заданного допустимого межузлового потока $\tilde{z}_m$ и соответствующих значений дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$, $k = \overline{1, 2E}$, величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{2E} \tilde{x}_{mi}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую *нагрузку* (далее RI-нагрузку от английского resulting internodal load) на ребра сети при передаче межузлового потока $\tilde{z}_m$ из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина $\tilde{y}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$. В рамках модели отношение RI-нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные *затраты* ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках $\tilde{x}_{mi}$.

Для получения гарантированных оценок узловых мультипотоков предполагается, что межузловые потоки передаются по маршрутам, содержащим минимальное число ребер (далее MER-маршруты от английского minimum edge route). При проведении вычислительных экспериментов для оценки величин “расщепленного” потока на первом этапе для каждой пары уз-

лов $p_m = (s_m, t_m)$ в сети $G(1)$ формируется набор $H_m(1)$ всех путей, которые далее используются как MER-маршруты передачи m -го вида потока:

$$H_m(1) = \{h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1)\},$$

где $h_m^j(1)$ — список номеров дуг в j -м пути в сети $G(1)$ между узлами s_m и t_m ; $\mu_m(1)$ — минимальное число ребер в MER-маршруте $h_m^j(1)$, а $J_m(1)$ — число MER-маршрутов для m -й пары.

Для каждой пары $p_m \in P$ по всем MER-маршрутам из $H_m(1)$ передается единичный межузловой поток z_m и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определяются дуговые потоки для пары p_m :

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (2.1)$$

Межузловой поток по MER-маршрутам (далее MER-поток) $z_m^0(1)$ между узлами s_m и t_m вычисляется по формулам (1.1) и (2.1). Рассчитываются нормирующий коэффициент

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.2)$$

и дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0 x_{mk}^0(1), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}.$$

При передаче всех потоков x_{mk}^0 по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице.

Распределение совместно допустимых межузловых потоков последовательно определяется на основе MER-маршрутов и дуговых потоков x_{mk}^0 . Подсчитываются *остаточные* пропускные способности и формируется сеть для проведения следующей итерации. На последующих итерациях с учетом текущих пропускных способностей строятся новые MER-маршруты и формируется множество равных по величине межузловых потоков, которые можно передавать одновременно. Финальные межузловые потоки, при одновременной передаче которых полностью используется пропускная способность всех ребер сети, вычисляются за конечное число итераций, не превосходящее общего количества ребер сети. Описанная выше процедура далее называется MEREF-процедура (от английского minimum edge route equal flow) или для краткости MF-процедура.

При проведении вычислительных экспериментов на первом шаге ($t = 1$) MF-процедуры пропускная способность $d_k(1)$ каждого ребра $r_k \in R$ для сети $G(1)$ полагается равной пропускной способности исходной сети, а его *длина* — единице:

$$d_k(1) = d_k, \quad l_k(1) = 1, \quad k = \overline{1, E}.$$

По формуле (2.2) и с учетом MER-потока $z_m^0(1)$ определяются нормирующие коэффициенты $\omega_m^0(1)$, $m = \overline{1, M}$. На втором этапе указанные коэффициенты используются для поиска текущих квот на передачу совместно допустимых потоков одновременно между всеми парами p_m , $m = \overline{1, M}$.

Задача 1. Найти $\alpha^*(1) = \max_{\alpha} \alpha$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) [x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)] \leq d_k(1), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

Для всех пар $p_m \in P$, $m = \overline{1, M}$, и всех дуг u_k , $k \in H_m(1)$ с помощью $\alpha^*(1)$ вычисляются дуговые и межузловые потоки:

$$x_{mk}^*(1) = \alpha^*(1) \omega_m^0(1) x_{mk}^0(1), \quad x_{m(k+E)}^*(1) = \alpha^*(1) \omega_m^0(1) x_{m(k+E)}^0(1),$$

$$z_m^*(1) = \alpha^*(1), \quad m = \overline{1, M}.$$

Таким образом каждой паре корреспондентов на этом этапе MF-процедуры выделяется одна и та же *квота* $\alpha^*(1)$ на передачу допустимого потока при заданных кратчайших маршрутах соединения. Решение задачи 1 позволяет получить *уравнительное* распределение квот на одновременную передачу межузловых потоков различных видов и соответствующие нагрузки, численно равные $y_m^*(1)$, $m = \overline{1, M}$.

Для найденных дуговых потоков вычисляется остаточная пропускная способность всех ребер, формируется сеть $G(2)$, для которой

$$d_k(2) = d_k(1) - \sum_{m=1}^M (x_{mk}^*(1) + x_{m(k+E)}^*(1)) =$$

$$= d_k(1) - \alpha^*(1) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) (x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)), \quad k = \overline{1, E}.$$

Текущая *длина* каждого ребра r_k для сети $G(t)$ на следующей итерации ($t \geq 2$) определяется по следующему правилу:

$$l_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } d_k(t) > 0, \quad k = \overline{1, E}, \\ N^2, & \text{если } d_k(t) = 0, \quad k = E. \end{cases}$$

На первом этапе шага t ($t \geq 2$) в сети $G(t)$ для каждой пары узлов $p_a \in P$ при текущих $l_k(t)$ определяется длина $L_a(t)$ MER-маршрута:

$$L_a(t) = \sum_{k \in h_a^l(t)} l_k(t).$$

Если длина $L_a(t) \geq N^2$, то для пары p_a в сети $G(t)$ нет пути соединения и значение MER-потока здесь и далее полагается равным нулю:

$$z_a^0(t) = 0.$$

Если же длина $L_a(t) < N^2$, то для пары p_a строится множество $H_a(t)$ всех MER-маршрутов и, согласно MF-процедуре, вычисляются текущий MER-поток $z_a^0(t)$, дуговые потоки $x_{ak}^0(t)$, $x_{a(k+E)}^0(t)$ для дуг u_k , $k \in H_a(t)$, а также коэффициенты:

$$\omega_a^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{z_a^0(t)}, & \text{если } z_a^0(t) > 0, \quad a = \overline{1, M}, \\ 0, & \text{если } z_a^0(t) = 0, \quad a = \overline{1, M}. \end{cases}$$

Для определения величины текущей квоты $\alpha^*(t)$ решается задача 2.

Задача 2. Найти $\alpha^*(t) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)] \leq d_k(t), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

На шаге t ($t \geq 2$) с помощью решения задачи 2 находятся: текущие допустимые значения межузловых потоков, которые могут передаваться в сети $G(t)$ одновременно для всех пар $p_m \in P$:

$$z_m^*(t) = \begin{cases} z_m^*(t-1) + \alpha^*(t), & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ z_m^*(t-1), & \text{если } z_m^0(t) = 0. \end{cases}$$

На заключительном этапе шага t ($t \geq 2$) для каждого ребра сети вычисляется остаточная пропускная способность сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \alpha^*(t) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)], \quad k = \overline{1, E},$$

и осуществляется проверка следующих условий.

Если после завершения шага t окажется, что хотя бы для одного ребра $r_k \in R$ остаточная пропускная способность $d_k(t+1) > 0$, то формируется новая сеть $G(t+1)$ и производится переход к следующей итерации.

Если $d_k(t+1) = 0$ для всех $k = \overline{1, E}$, то происходит останов, все пропускные способности ребер исчерпаны и сеть полностью загружена. Финальная итерация обозначается $t := T$.

На каждом шаге t результирующие межузловые потоки и реберные нагрузки для каждой пары p_m , $m = \overline{1, M}$, обозначаются через $z_m^*(t)$, $y_m^*(t)$ и соответственно равны:

$$z_m^*(t) = z_m^*(t), \quad y_m^*(t) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{i=1}^E [x_{mi}^*(\tau) + x_{m(i+E)}^*(\tau)].$$

Удельные затраты $w_m^*(t)$ при передаче межузловых потоков одновременно по всем MER-маршрутам $H_m(1), H_m(2), \dots, H_m(t)$:

$$w_m^*(t) = \frac{y_m^*(t)}{z_m^*(t)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Для анализа результатов вычислительных экспериментов на каждой итерации $t = \overline{1, T}$ полученные данные $z_m^*(t)$, $y_m^*(t)$, $w_m^*(t)$ помещаются в массивы $\mathbf{Z}^*(t)$, $\mathbf{Y}^*(t)$, $\mathbf{W}^*(t)$, а также формируются векторы допустимых исходящих узловых мультипотоков, которые обозначаются

$$\bar{\mathbf{z}}^*(n, t) = \{z_m^*(t) \mid p_m \in P(v_n)\}, \quad t = \overline{1, T}, \quad n = \overline{1, N}.$$

3. Уравнительное распределение нагрузок. Для анализа допустимых исходящих мультипотоков при уравнительном распределении межузловых нагрузок для всех пар узлов $p_m \in P$ использовалась MERER-процедура (от английского minimum edge route equal resource) или для краткости MR-процедура, которая состоит в следующем. На первом этапе при передаче единичных потоков по каждому MER-маршруту из $H_m(t)$, $m = \overline{1, M}$, определяются реберные нагрузки для $m = \overline{1, M}$ и $k = \overline{1, E}$. Для каждой пары $p_m \in P$ вычисляются нагрузки:

$$y_m^0(t) = \sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^{J_m(t)} \eta_k^j(m) = \mu(m) J_m(t), \quad m = \overline{1, M},$$

нормирующие коэффициенты:

$$\theta_m^0(t) = \frac{1}{y_m^0(t)} \quad \text{для всех} \quad y_m^0(t) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad (3.1)$$

при которых результирующие межузловые нагрузки $y_m^0 = \theta_m^0(t) y_m^0(t)$ будут равны единице, если соответствующий межузловой поток будет передан по всем маршрутам $H_m(t)$, $m = \overline{1, M}$.

На текущем шаге t MR-процедуры в сети $G(t)$ для значений $d_k(t)$ и $l_k(t)$ для каждой пары $p_a \in P$ находится набор MER-маршрутов $H_a(t)$.

С учетом $y_a^0(t)$ при передаче межузлового MER-потока $z_a^0(t)$ по всем MER-маршрутам из $H_a(t)$ нормирующие коэффициенты $\theta_a^0(t)$ вычисляются по формуле (3.1). Указанные коэффициенты в задаче 3 используются для поиска равных *нагрузок* при передаче соответствующих межузловых потоков одновременно между всеми парами $p_a \in P$.

Задача 3. Найти $\beta^*(t) = \max_{\beta > 0}$

при условиях: $\beta \sum_{m=1}^M \theta_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t)$, $k = \overline{1, E}$.

Решение задачи 3 $\beta^*(t)$ определяет текущие совместно допустимые значения дуговых потоков и реберных нагрузок:

$$\begin{aligned} x_{mk}^{**}(t) &= \beta^*(t) \theta_m^0(t) x_{mk}^0(t), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}, \\ y_m^{**}(t) &= \beta^*(t) \theta_m^0(t) \sum_{k=1}^E (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) = \\ &= \beta^*(t) \sum_{k=1}^E \left(\frac{x_{mk}^0(t)}{y_m^0(t)} + \frac{x_{m(k+E)}^0(t)}{y_m^0(t)} \right) = \beta^*(t), \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

На шаге t решение задачи 3 позволяет получить *уравнительное* распределение нагрузки. Межузловые потоки, соответствующие дуговым потокам $x_{mk}^{**}(t)$ и нагрузкам $y_m^{**}(t) = \beta^*(t)$, согласно (1.1), обозначим через $z_m^\Delta(y_m^{**}(t))$ и вычислим остаточную пропускную способность ребер в сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \beta^*(t) \sum_{m=1}^M \theta_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)), \quad k = \overline{1, E}.$$

После завершения шага t производится проверка условий:

если хотя бы для одного ребра $r_k \in R$ остаточная пропускная способность $d_k(t+1) > 0$, то формируется новая сеть $G(t+1)$, для нее определяется текущая *длина* ребер:

$$l_k(t+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } d_k(t+1) > 0, \quad k = \overline{1, E}, \\ N^2, & \text{если } d_k(t+1) = 0, \quad k = \overline{1, E}, \end{cases}$$

и происходит переход к итерации $t+1$;

если же $d_k(t+1) = 0$ для всех $k = \overline{1, E}$, то все пропускные способности ребер исчерпаны и сеть полностью загружена.

Финальная итерация обозначается $t := T$. При этом для каждого t вычисляются: результирующие значения межузловых потоков для каждой пары p_m :

$$z_m^{**}(t) = \sum_{\tau=1}^t z_m^\Delta(y_m^{**}(\tau)), \quad m = \overline{1, M};$$

суммарные реберные нагрузки, соответствующие предельному распределению пропускной способности ребер сети:

$$y_m^{**}(t) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{i=1}^E [x_{mi}^{**}(\tau) + x_{m(i+E)}^{**}(\tau)], \quad m = \overline{1, M};$$

удельные затраты $w_m^{**}(t)$ при передаче межузловых потоков по всем маршрутам $H_m(\cdot)$:

$$w_m^{**}(t) = \frac{y_m^{**}(t)}{z_m^{**}(t)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

В ходе эксперимента на каждом шаге $t = \overline{1, T}$ все полученные $z_m^{**}(t)$, $y_m^{**}(t)$, $w_m^{**}(t)$ заносятся в массивы $\mathbf{Z}^{**}(t)$, $\mathbf{Y}^{**}(t)$, $\mathbf{W}^{**}(t)$ и формируются векторы совместно допустимых исходящих узловых мультипотоков, которые обозначаются

$$\bar{\mathbf{z}}^{**}(n, t) = \{z_m^{**}(t) | p_m \in P(v_n)\}, \quad t = \overline{1, T}, \quad n = \overline{1, N}.$$

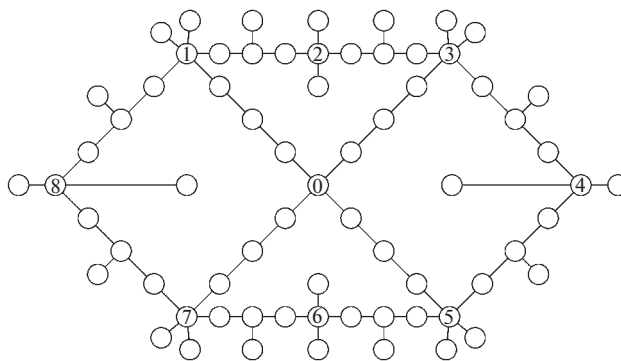


Рис. 1. Базовая сеть

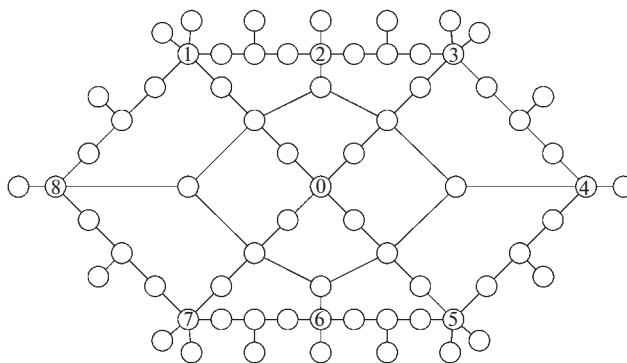


Рис. 2. Кольцевая сеть

4. Построение оценок показателей функционирования. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2 (базовая и кольцевая сети соответственно). В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер d_k выбираются случайным образом из отрезка $[900, 999]$ и совпадают для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900. В ходе эксперимента проводилась нормировка и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68\,256.$$

Диаграммы, представленные на рисунках с нечетными номерами, относятся к базовой сети, а с четными — к кольцевой. На каждом из рис. 3–6 представлены три кривые, характеризующие изменения основных параметров: использованную пропускную способность, медианы и средние значения межузловых потоков. В частности, указанные кривые позволяют проследить по шагам, сравнить общие тенденции и оценить закономерности в ходе вычислительного эксперимента.

По горизонтальной оси указаны (относительные) номера итераций

$$v(t) = \frac{t}{T}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Нижняя кривая $\delta(t)$ отображает изменения при использовании ресурсов сети на каждом шаге

$$\delta(t) = \frac{D(t)}{D(0)}, \quad t = \overline{1, T}, \quad 0 \leq \delta(t) \leq 1,$$

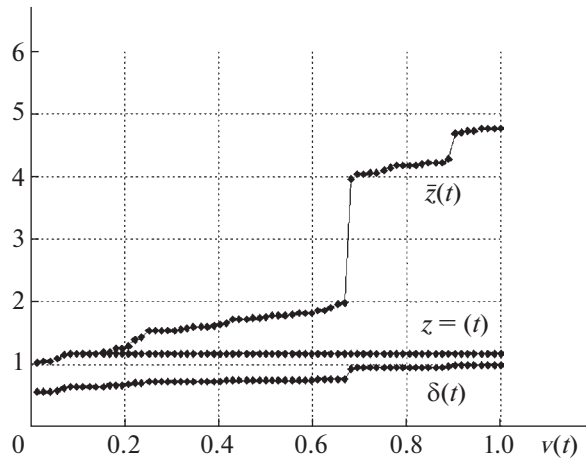


Рис. 3. Базовая сеть. Межузловые потоки MF-процедуры

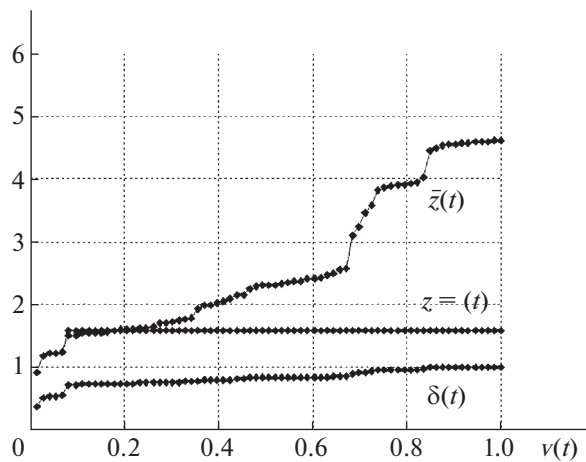


Рис. 4. Кольцевая сеть. Межузловые потоки MF-процедуры

где $D(t)$ — сумма загруженной пропускной способности сети за t шагов при одновременной передаче всех исходящих допустимых узловых мультипотоков $\bar{z}^*(n, t)$ в базовой и $\bar{z}^{**}(n, t)$ в кольцевой сети, $n = \overline{1, N}$.

На рис. 3–6 все кривые расхода ресурсов $\delta(t)$ демонстрируют одинаковую тенденцию — после 10-й итерации расходуются более 80% ресурсов, а на оставшихся итерациях равными порциями распределяются оставшиеся 20% пропускной способности.

На диаграммах вторая кривая $\bar{z}^-(t)$ отражает значения медиан межузловых потоков. Здесь так же, как и в случае расходования ресурсов, после 10-й итерации устанавливается некий стационарный режим, и медианы не меняются до момента останова. Для базовой сети на рис. 3, 5 значения $\bar{z}^-(t)$ соответственно равны 1.18 и 1.21, для кольцевой на рис. 4, 6 — 1.57 и 1.58. Таким образом после 10-й итерации исчерпывается 80% пропускной способности сети и более 70% пар-корреспондентов сохраняют достигнутые значения потоков. Остаточный ресурс распределяется поровну между узлами, инцидентными висячим дугам.

На рис. 3–6 верхняя кривая $\bar{z}^+(t)$ отвечает средним значениям межузловых потоков по итерациям. Цифры на рисунках отличаются, но общий вид диаграмм подтверждает общую тенденцию. В начале ресурсы сети распределяются равными долями почти между всеми парами. Однако когда использовано 80% ресурсов, многие узлы оказываются изолированными, а сеть

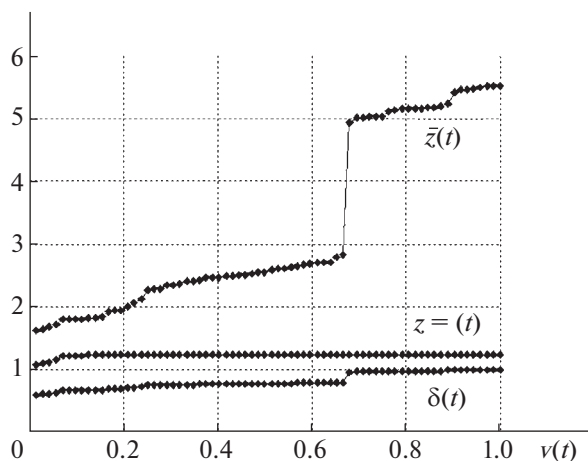


Рис. 5. Базовая сеть. Межузловые потоки MR-процедуры

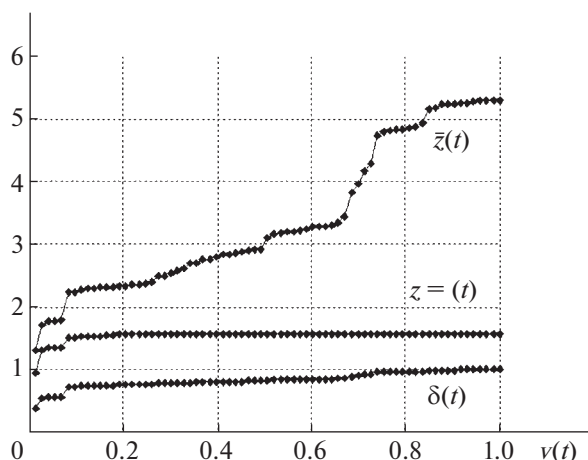


Рис. 6. Кольцевая сеть. Межузловые потоки MR-процедуры

распадается на отдельные фрагменты. Остаточная пропускная способность висячих ребер распределяется между узлами, расположенными “близко” друг к другу, и для некоторых пар-корреспондентов потоки оказываются столь значительными, что резко меняют средние значения.

На рис. 7–10 представлены диаграммы, которые позволяют проанализировать, как меняются допустимые исходящие узловые мультипотоки в ходе выполнения MF- и MR-процедур. По горизонтальной оси откладываются относительные номера узлов $v_n \in V$:

$$\lambda = \frac{n}{N}, \quad n = \overline{1, N}.$$

По вертикальной оси откладываются значения суммарных узловых мультипотоков на итерации t :

$$\vartheta(n) = \sum_{m \in M(n)} z_m^*(t), \quad n = \overline{1, N}, \quad t = 1, T.$$

Цифры, указанные непосредственно над кривыми, отвечают номеру итерации t , в данном случае на всех рисунках это 10, 30, 50, 70.

Диаграммы на рис. 7–10 подтверждают выводы, сделанные ранее. На начальных этапах значения исходящих потоков почти равны 100 единицам и соответствующие кривые почти параллельны горизонтальной оси и лежат в коридоре значений $100 \leq \vartheta(\cdot) \leq 200$, что отвечает почти равным медианам (см. рис. 3–6). На рис. 7–10 при $t = 50$ и 70, когда сеть распадается на

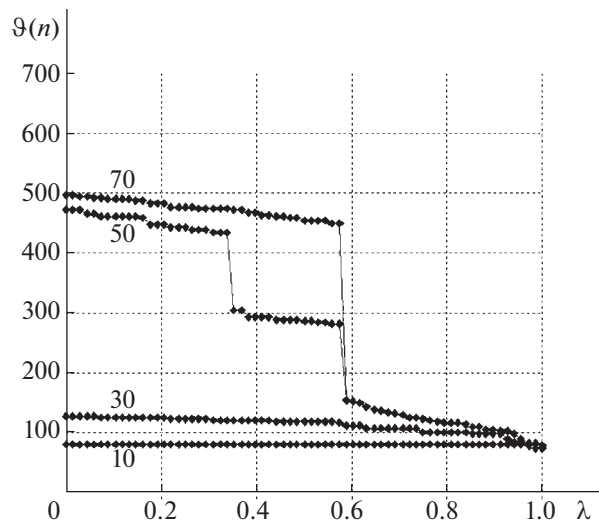


Рис. 7. Базовая сеть. Узловые мультипотoki MF-процедуры

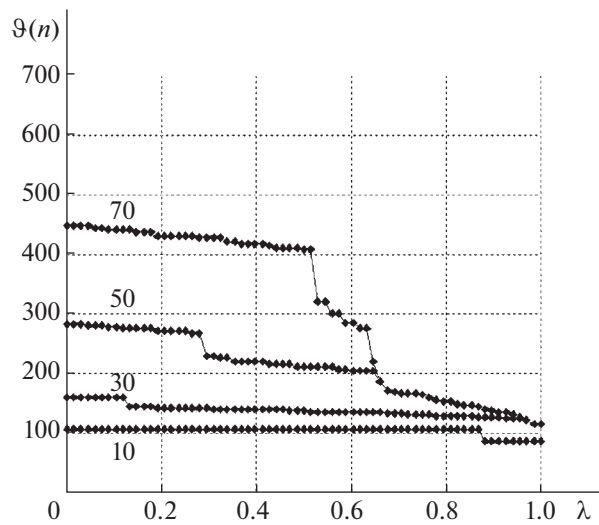


Рис. 8. Кольцевая сеть. Узловые мультипотoki MF-процедуры

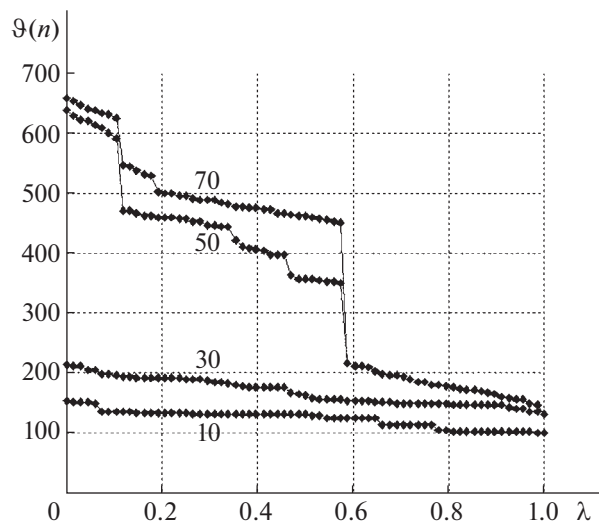


Рис. 9. Базовая сеть. Узловые мультипотoki MR-процедуры

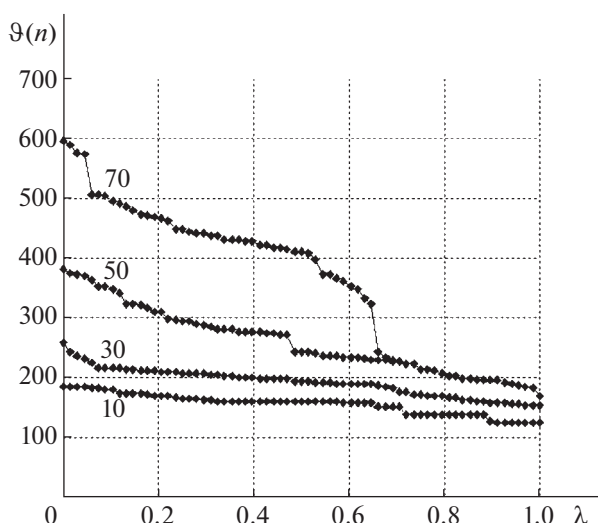


Рис. 10. Кольцевая сеть. Узловые мультипотоки MR-процедуры

отдельные фрагменты, распределение остаточной пропускной способности происходит между небольшим числом смежных узлов. В результате смежные пары-корреспонденты получают дополнительно от 200 до 400 единиц потока. Дуги, ведущие к висячим вершинам, не являются транзитными, и остаточная пропускная способность на последних итерациях может составлять до 700 единиц в кольцевой сети.

Формально полная загрузка сети достигается на последней итерации ($t = T$). С содержательной точки зрения в реальных системах остаточные ресурсы и мало загруженные ребра указывают на структуру сети, в которой неэффективно используются ресурсы.

Схема проведения вычислительных экспериментов позволяет применять полученные результаты при построении гарантированных оценок функциональных характеристик. Параметризованные векторы

$$\bar{z}(n, \gamma) = \gamma \bar{z}^*(n, T) + (1 - \gamma) \bar{z}^{**}(n, T), \quad n = \overline{1, N}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

при любых γ и предельных нагрузках сети определяют допустимый вектор исходящих мультипотоков, передаваемых из всех узлов.

Заключение. Предложенная математическая модель и проведенные эксперименты позволили провести оценку функциональных возможностей и структурных особенностей многопользовательских сетевых систем. В рамках модели предполагалось, что система управления и диспетчерские правила поддерживают *уравнительное* распределение ресурсов и/или *выравнивание* невязаемозаменяемых потоков разных видов для всех пар *равноправных* корреспондентов. Анализ потоков между смежными узлами и загрузки соответствующих ребер показал неэффективное использование ресурсов этими корреспондентами. Совместно допустимые векторы узловых мультипотоков можно рассматривать как многокритериальные оценки пропускной способности сети. Линейную однопараметрическую комбинацию векторов узловых потоков при полной загрузке можно применять для агрегированных оценок уязвимости и живучести сети при изменении пропускной способности ее ребер. Значения узловых мультипотоков при загрузке сети на 70–80% позволяют проводить оценку пропускной способности сети в стационарном “рабочем” режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Управление распределением ресурсов при выравнивании нагрузок и межузловых потоков в многопользовательской сети // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 91–102.
2. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения ресурсов в многопользовательской сети при равных межузловых нагрузках // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 21–26.
3. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 19–24.

4. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
5. *Salimifard K., Bigharaz S.* The Multicommodity Network Flow Problem: State of the Art Classification, Applications, and Solution Methods // *J. Oper. Res. Int.* 2020. V. 22. Iss. 2. P. 1–47.
6. *Ogryczak W., Luss H., Pioro M. et al.* Fair Optimization and Networks: A Survey // *J. Appl. Math.* 2014. V. 3. P. 1–25.
7. *Luss H.* Equitable Resource Allocation: Models, Algorithms, and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
8. *Balakrishnan A., Li G., Mirchandani P.* Optimal Network Design with End-to-End Service Requirements // *Oper. Res.* 2017. V. 65. Iss. 3. P. 729–750.
9. *Моудера Дж., Элмаграби С.* Исследование операций. Модели и применения. Т. 2. М.: Мир, 1981.
10. *Йенсен П., Барнес Д.* Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
11. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.

УДК 004.89,004.048,004.67

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. М. А. Жарова^{a,*}, В. И. Цурков^{b,**}

^aМФТИ, Долгопрудный, Россия

^bФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: zharova.ma@phystech.edu

**e-mail: v.tsurkov@frccsc.ru

Поступила в редакцию 29.06.2023 г.

После доработки 02.07.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Рекомендательные системы — это специальные алгоритмы, которые позволяют пользователям получать персонализированные рекомендации по интересующим их темам. Системы такого рода широко используются в различных областях, например, в электронной коммерции, провайдерских сервисах, социальных сетях и т.д. Наряду с классическими подходами в последние годы в рекомендательных системах стали также популярны нейронные сети, которые постепенно вытесняют традиционные методы коллаборативной фильтрации и контент-базированные алгоритмы. Однако нейросети требуют больших вычислительных ресурсов, в связи с чем часто возникает вопрос: оправданно ли будет увеличение качества и будет ли оно вообще? Проведено исследование нейросетевого подхода в рекомендательных системах — а именно трансформерной модели SASRec из Microsoft Recommenders — и ее сравнение с классическим алгоритмом — гибридной моделью LightFM. Для обучения и валидации применяются данные, взятые из приложения по поиску жилья. В качестве основной метрики для сравнения предлагается использовать HitRate. Результаты экспериментов помогут понять, какие алгоритмы обладают более высокой точностью предсказаний и рекомендаций. Также в качестве дополнительной части рассматривается кластеризация эмбедингов пользователей и объектов.

DOI: 10.31857/S0002338823060124, EDN: FNCIVV

Введение. Простейшим прототипом рекомендательной системы является приобретение некоторого предмета, когда к нему предлагают другие сопутствующие предметы. Эта модель обобщается. Имеем две группы объектов — пользователей и предметов. Рассматривается задача их взаимодействия, если данных много, то применяются компьютерные алгоритмы.

Развитие нейронных сетей не обошло область рекомендательных систем, в настоящее время существует уже достаточное число таких алгоритмов. Они могут обрабатывать большие объемы данных и выявлять более сложные зависимости между пользователями и объектами, что позволяет создавать более точные и персонализированные рекомендации. Но несмотря на преимущества нейросетевых методов, многие компании до сих пор продолжают использовать в своей работе только алгоритмы матричной факторизации. Это может быть связано с тем, что применение нейросетей более сложно и требовательно к вычислительным ресурсам, также они могут дольше работать по времени в зависимости от архитектуры и нуждаться в большем объеме данных для обучения. Все это может стать проблемами для малых компаний.

Таким образом, с одной стороны, стоит более затратное применение нейросетевых моделей, с другой — гипотетически более высокое качество выдаваемого результата. В работе предлагается исследовать нейросетевой подход в рекомендательных системах — а именно трансформерную модель SASRec из Microsoft Recommenders [1, 2] — и сравнить ее с классическим алгоритмом — гибридной моделью LightFM [3, 4]. Данные модели выбраны не случайно: LightFM является лидером среди представителей классических алгоритмов, превосходя по метрикам в равных условиях бустинги [5] и другие подходы матричной факторизации [6]; SASRec имеет архитектуру трансформера [7], которая также показала свое значительное превосходство в области CV [8, 9] и NLP [10].

С развитием технологий и доступности инструментов для реализации нейросетевых методов с каждым годом все большее число компаний могут позволить себе применять нейросети в качестве собственных решений задач рекомендаций. Обоснованно ли это по метрикам качества таких алгоритмов — предстоит выяснить.

1. Постановка задачи. Пусть имеется множество пользователей $U = \{u_j \mid j \in \overline{1, n_{users}}\}$, множество объектов $I = \{i_j \mid j \in \overline{1, n_{items}}\}$, а также информация про их взаимодействие (например, покупки, звонки или просмотры объявлений). Последнее представляется в виде матрицы $R = \|r_{ui}\|$, по столбцам которой обычно располагают объекты, а по строкам — пользователей. На пересечении ячеек i и j (т.е. для i -го пользователя и для j -го объекта) стоит число, обозначающее их взаимодействие: если i -й пользователь никогда не взаимодействовал с j -м объектом, то на месте соответствующей ячейки матрицы R будет стоять 0; а если касание в том или ином виде было — можно поставить в зависимости от его степени какое-либо натуральное число (например, если пользователь просмотрит объявление — поставим 1, если он сохранил его в закладки — поставим 2, а если купил — 3). Такую матрицу взаимодействий часто называют термином “коллаборативные данные”.

К этому можно добавить также метаданные — расширенную информацию про пользователей и объекты — например, дополнительные характеристики пользователей, такие, как возраст, пол, изначально указанные предпочтения, увлечения и т.д.; для объектов это может быть также категория, цвет, жанр и т.п. в зависимости от содержания.

Сама задача рекомендаций заключается в том, чтобы на основе списка (базы) имеющихся объектов составить для каждого конкретного пользователя персональный список объектов, с которыми он еще не взаимодействовал и которые могут быть потенциально ему интересны (можно отранжировать список рекомендаций по релевантности и в таком порядке показывать пользователю). В зависимости от имеющегося набора данных используются различные алгоритмы рекомендаций, для каждого типа существуют отдельные способы оценки качества их работы.

Таким образом, работа рекомендательной системы включает следующие этапы.

1. Сбор данных: можно собрать информацию о взаимодействии пользователей и объектов, таких, как история их предпочтений, покупок, оценок или просмотров (коллаборативные данные). Аналогично собирается информация об объектах и пользователях по отдельности — их характеристики, описание или жанры (метаданные).

2. Предобработка данных: собранные данные подвергаются предварительной обработке, включая очистку, преобразование и структурирование. Например, из коллаборативных данных необходимо удалить дубликаты, малоактивных пользователей, а метаданные привести к векторному виду. Произвольная текстовая информация может быть обработана с использованием методов естественного языка для извлечения ключевых слов или характеристик.

3. Выбор подхода: в зависимости от типа имеющихся данных выбирается общий подход (тип) построения рекомендательной системы — коллаборативная фильтрация, контентные или гибридные методы. После определения группы модели, с помощью которой можно решить поставленную задачу, можно выбирать уже определенную архитектуру, например из списка state-of-the-art подходов или в соответствии с имеющимися ресурсами и масштабами данных.

4. Обучение модели и генерация рекомендаций: после обучения модели рекомендательная система генерирует персонализированные рекомендации для каждого пользователя. Они могут быть основаны на сравнении предпочтений пользователя с другими пользователями, анализе сходства предметов или применении других методов в зависимости от выбранного подхода (подробнее о каждом подходе будет рассказано в следующем разделе).

5. Оценка и обратная связь: как правило, сначала происходит проверка на валидационном наборе данных, на нем рассчитываются метрики качества работы системы, формируется первичное понимание возможности решения поставленной задачи таким способом. В дальнейшем возможно провести АВ-тест на настоящих пользователях и оценить его статистическую значимость. Обратная связь пользователей также может применяться для улучшения системы путем адаптации к изменяющимся предпочтениям и обновлениям.

6. Обновление системы и мониторинг: при эксплуатации чаще всего требуется периодически переобучать модель — например, чтобы включить новые данные, улучшить веса и качество работы, учесть новейшие изменения в предпочтениях и потребностях пользователей.

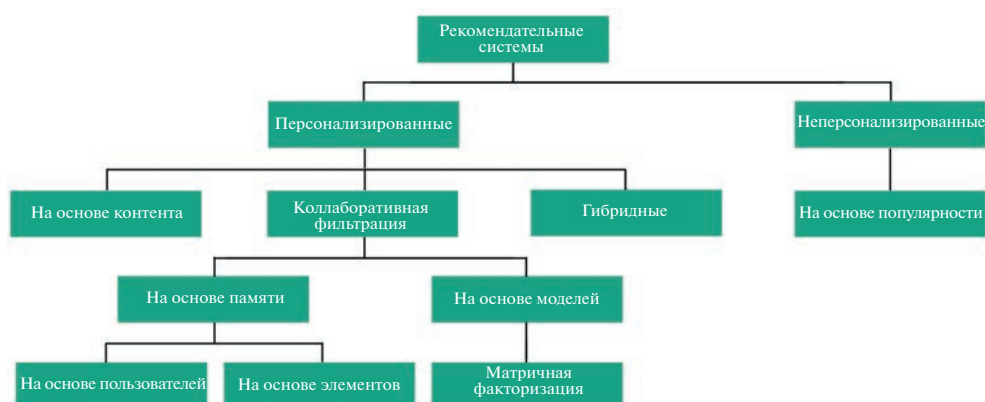


Рис. 1. Типы рекомендательных систем

В совокупности, работа рекомендательной системы состоит из итеративного цикла сбора данных, анализа, обучения и предоставления персонализированных рекомендаций, а также улучшения их качества с течением времени.

2. Основные типы рекомендательных систем. Существует несколько типов рекомендательных систем, которые используют различные подходы и методы для предоставления персонализированных рекомендаций (рис. 1). Разберем основные из них.

Две большие группы, на которые делятся все рекомендательные системы, – персонализированные и неперсонализированные. Эти типы представляют различные способы построения рекомендательных систем и предоставления рекомендаций пользователям.

Неперсонализированные методы: рекомендации основаны на общих трендах, популярности или общей пользе предметов. Они не учитывают индивидуальные предпочтения и интересы конкретного пользователя. Неперсонализированные рекомендации могут быть полезны, когда у пользователя нет истории взаимодействия или для предоставления общих рекомендаций на базе популярных и актуальных трендов. Примерами использования таких подходов могут быть рекомендации в разделах “Лучшие продажи” или “Популярные товары”; для их реализации достаточно обычных статистических расчетов, без применения каких-либо алгоритмов машинного обучения.

Персонализированные подходы: рекомендации настраиваются в соответствии с индивидуальными предпочтениями, интересами и поведением конкретного пользователя. Они могут учитывать историю взаимодействия с предметами, а также контекстуальную информацию, – такую, как местоположение, пол, возраст пользователя или цвет, размер и другие характеристики для объектов. Персонализированные рекомендации стремятся предлагать для каждого отдельного пользователя наиболее релевантные и интересные именно ему предметы. Для построения таких рекомендаций используются методы машинного обучения – коллаборативная фильтрация, фильтрация контента и другие алгоритмы.

Персонализированные подходы имеют ряд преимуществ, например: повышение удовлетворенности пользователей, улучшение точности рекомендаций, возможность адаптироваться к изменяющимся предпочтениям пользователей и, как следствие, улучшение клиентского опыта, увеличение оборотов компании. Единственное – эти алгоритмы могут столкнуться с проблемой холодного старта, когда у нас недостаточно данных про конкретного пользователя для персонализированных рекомендаций (например, для новых клиентов или вследствие невозможности использования конфиденциальных данных). В таких случаях можно прибегнуть к неперсонализированному подходу.

Остановимся подробнее на персонализированных подходах к построению рекомендательных систем.

Content-based model. Такие алгоритмы будут рекомендовать пользователю продукты, похожие на те, которые он выбирал ранее. Под похожестью имеются в виду такие сущности, как категория, тег, жанр и т.п., т.е. метаданные. Данные модели анализируют характеристики продуктов, составляют некоторый набор их критериев (жанры, содержание, ключевые слова, кате-

гории и т.д.) и далее предлагают пользователю то, что наиболее схоже по этим критериям с его последними интересами и предпочтениями.

Такие модели хорошо работают в рекомендациях фильмов, музыки, магазинах повседневных товаров. Единственный возможный минус, который здесь в целом можно учесть, — пользователь не попробует новые товары или услуги.

В качестве “меры схожести” часто используют следующие метрики:

1. Индекс Жаккара измеряет сходство между двумя объектами A и B как мощность множества пересечения, деленную на мощность множества объединения каких-либо характеристик объекта (мощность множества X обозначается как $|X|$). Применяется в основном для категориальных признаков (при необходимости может быть интерпретирован и на числовые):

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}.$$

2. Косинусное расстояние. Оценка векторов по косинусному расстоянию между ними используется для оценки близости массивов с числами:

$$similarity = \cos \theta = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i B_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2}}.$$

Collaborative filtering. Коллаборативная фильтрация — это системы, в которых рекомендации пользователю рассчитываются на основе его оценок, а также оценок других пользователей. Применение этого подхода дает лучшее качество [11]; можно прогнозировать рейтинги по оценкам похожих пользователей или для похожих продуктов. Именно по этим признакам выделяют несколько подтипов таких моделей.

Итак, имеем множество пользователей, множество продуктов и список оценок некоторых пользователей по некоторым продуктам. Можно представить эти данные в виде “троек” (u, i, r_{ui}) , где u обозначает пользователя, i — продукт, r_{ui} — рейтинг, который пользователь u поставил продукту i . Далее можно расположить их в виде матрицы, каждая строка которой соответствует пользователю, а столбец — продукту.

Наша задача — предсказать неизвестные элементы матрицы, т.е. рейтинги для продуктов, которые пользователь еще не видел. Далее можно отсортировать их для каждого пользователя и понять, какие продукты потенциально наиболее релевантны для него. Это и будет список рекомендаций.

Memory-based. Так как матрица собрана сразу и по пользователям, и продуктам, в первую очередь можно применить для нее следующие алгоритмы:

user2user (поиск соседей-пользователей по оценкам);

item2item (поиск схожих предметов на основе оценок пользователей).

В целом, они идентичны друг другу, первый заключается в следующем:

1) определить, насколько другие пользователи в базе данных похожи на данного пользователя (например, используя меры схожести, описанные в предыдущем параграфе);

2) по оценкам других пользователей предсказать, какую оценку даст данный пользователь данному продукту, учитывая с большим весом тех, которые больше похожи на исходного.

А второй можно описать так:

1) определить, насколько другие продукты в базе данных похожи на данный;

2) по оценкам других продуктов предсказать, какую оценку даст данный пользователь данному продукту, учитывая с большим весом те продукты, которые больше похожи на данный.

Таким образом, все сводится опять же к поиску похожих пользователей или объектов, но исходя из коллаборативной информации, а не метаданных. Эти подходы достаточно редко используются на практике в силу их трудозатратности. Необходимость вычислять попарные расстояния для всего множества, а затем их сортировка занимают довольно много времени.

Model-based. В силу недостатков предыдущего подхода на практике чаще используются алгоритмы из семейства model-based, эту группу называют просто “матричная факторизация”. На данный момент они остаются самыми популярными в области рекомендательных систем

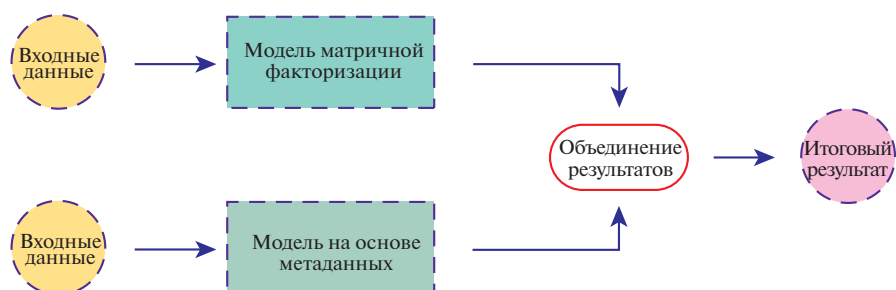


Рис. 2. Схема работы гибридного алгоритма

благодаря своей простоте и эффективности. Для memory-based схожесть между пользователями и схожесть между объектами рассчитывалась по отдельности. Но что если по той же матрице “пользователь–объект” обучить факторы, характеризующие и пользователей, и объекты одновременно?

Основная идея методов матричной факторизации заключается в разложении исходной матрицы пользователей и предметов на две более низкоранговые — так называемые матрицы факторов. Они представляют собой скрытые признаки пользователей и объектов, а их произведение дает оценки или предсказания рейтингов для всех возможных комбинаций пользователей и предметов. Матрицы факторов могут быть обучены с помощью различных методов оптимизации, градиентного спуска или сингулярного разложения.

Преимущества методов матричной факторизации:

способность обрабатывать разреженные данные: матрицы “пользователь–объект” практически всегда содержат большое количество нулей, так как, как правило, пользователи взаимодействуют лишь с небольшой частью объектов;

учет скрытых признаков (факторов): методы этой группы позволяют моделировать скрытые характеристики пользователей и предметов. Например, в рекомендательных системах для фильмов скрытые факторы могут представлять жанры, настроение, стиль и т.д. Это даст возможность системе делать более точные предсказания, основанные на глубоком понимании предпочтений пользователей.

Из недостатков: невозможность выставлять рекомендации для полностью новых пользователей, которые пока никак не провзаимодействовали ни с одним из объектов. Также в таких алгоритмах не предусмотрено использование метаинформации, которая тоже может быть полезна.

Гибридные модели. Наверное, не найдется такой сферы деятельности, в которой бы не возникло идеи собрать все лучшее воедино. Рекомендательные системы не стали исключением — группу моделей, которые сочетают в себе характеристики различных типов алгоритмов, называли гибридными.

Работа гибридных рекомендательных систем основывается на интеграции различных методов и подходов для генерации рекомендаций. Самые распространенные типы комбинирования:

по отдельности реализовать коллаборативный и контентный алгоритмы, а затем объединить их результаты–рекомендации;

добавлять контентные правила в коллаборативный подход;

добавлять коллаборативные правила в контентный подход;

построить одну общую модель, включающую в себя правила обоих подходов.

Обычно эти варианты берут в качестве основы и дополняют по собственному желанию и согласно критериям сферы деятельности. Ниже приведен пример схемы работы гибридной рекомендательной системы на основе объединения результатов коллаборативного и контентного алгоритмов (рис. 2).

Единственный недостаток гибридных систем — сложность разработки и повышенные технические требования к ресурсам для обучения и инференса таких алгоритмов.

3. LightFM — это библиотека, разработанная для построения гибридных рекомендательных систем. Она предоставляет простой и эффективный способ создания и оценки моделей рекомендаций, объединяя коллаборативную фильтрацию и фильтрацию контента [3].

Преимущества LightFM содержат:

гибкость: LightFM позволяет интегрировать различные типы данных, включая информацию о взаимодействиях пользователей, контентные признаки предметов и контекстуальную информацию;

эффективность: библиотека предоставляет оптимизированные алгоритмы для обучения моделей рекомендаций на больших и разреженных данных;

поддержка различных метрик: LightFM дает возможность оценивать качество рекомендаций с помощью большого числа встроенных метрик, таких как точность, покрытие, разнообразие и др.;

простота использования: API LightFM дружелюбен к пользователю и обладает простым интерфейсом для построения и оценки моделей рекомендаций.

Рассмотрим подробнее поддерживаемые алгоритмы ранжирования данной библиотеки.

Bayesian Personalized Ranking (BPR). Основная идея заключается в выборке и парном сравнении положительных и отрицательных объектов (под отрицательными можно понимать те, с которыми пользователь не взаимодействовал). Алгоритм в упрощенном виде можно представить следующим образом.

Случайным образом возьмем пользователя u и объект i , который ранее был выбран пользователем. В таком случае i будет считаться положительным.

Случайным образом возьмем объект j , который был выбран пользователем реже, чем i (в том числе, который пользователь никогда не выбирал). Тогда j будет считаться отрицательным.

Вычисляем оценку P_{ui} и P_{uj} пользователя u , а также положительного объекта i и отрицательного j соответственно.

Находим разницу между положительными и отрицательными оценками: $x_{uij} = P_{ui} - P_{uj}$.

Пропускаем эту разницу через сигмоиду и вычисляем веса для обновления всех параметров модели с помощью градиентного шага.

Weighted Approximate-Rank Pairwise (WARP). Концепция данного подхода схожа с предыдущим, за исключением случаев, когда происходит градиентный шаг.

В BPR градиентный шаг происходит каждый раз с разницей в качестве веса.

WARP совершает градиентный шаг только в случае неверного предсказания (т.е. когда оценка отрицательного объекта оказалась больше положительного). Если предсказание было верным, то продолжаем выбирать отрицательные объекты, пока не получим неверный прогноз или не достигнем некоторого порогового значения.

Для этих целей WARP предоставляет два гиперпараметра:

Margin определяет, насколько ошибочным должен быть прогноз для совершения градиентного шага;

Cutoff определяет, сколько раз можно выбирать отрицательные примеры, пытаясь получить неверное предсказание, прежде чем алгоритм остановится и перейдет к следующему пользователю.

На практике, вероятнее всего, WARP предпочтительнее для большинства рекомендательных систем, нежели BPR [12], в дальнейших экспериментах будем использовать его.

Также в реализации данной модели [4] можно варьировать большое число гиперпараметров: размерность скрытых факторов; максимальное количество положительных результатов для каждого обновления; максимальное количество отрицательных выборов, используемых при подборе WARP; можно указать номер положительного примера, который будет выбран из всего набора таковых для каждого пользователя; есть возможности для применения различных множителей регуляризации. Благодаря широкому выбору гиперпараметров и алгоритмов, возможности соединить все методы и данные воедино, LightFM находится в числе лучших классических моделей рекомендательных систем. Это подтверждают многочисленные сравнения алгоритма с бустингами и отдельными классическими реализациями алгоритмов рекомендаций [5, 6, 13].

4. Глубокое обучение и модели-трансформеры. В основном известно, что нейронные сети применяются в задачах компьютерного зрения, обработки текстов и аудио. Deep Learning часто превосходит классические методы Machine Learning (ML), поэтому сейчас многие компании внедряют их для работы с табличными данными, в том числе для задач рекомендаций. Несмотря на то, что в области рекомендательных систем было предложено много разнообразных и эффективных методов, нейросети пришли в эту область относительно недавно.

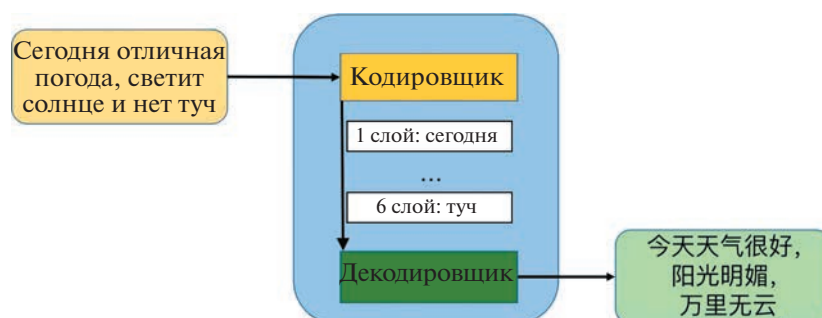


Рис. 3. Простейшая схема работы трансформерной модели

Архитектурные особенности таких моделей берут идеи из разных подходов. Преимущество использования нейронных сетей:

более высокое качество по сравнению со стандартными ML-моделями;

большая гибкость — в рамках одной модели можно получить ответы сразу на несколько вопросов, например: “Добавит, ли пользователь товар в корзину?”, “Начнет, ли он оформление заказа с этим товаром?” или “Купит, ли он этот товар?”;

возможность применения различных типов данных — картинок и текста, а также алгоритмов обучения с подкреплением.

Обычно архитектура всех нейросетей в рекомендательных системах устроена следующим образом: для каждого пользователя и продукта создается вектор (случайный или некоторым образом кодирующий исходные данные), который обучается — меняется после каждого прохода через слои нейросети. Таким образом, после этого процесса получают обученные эмбединги пользователей/продуктов. Здесь можно провести аналогию с матрицами, которые получаются после разложения в алгоритмах матричной факторизации. Каждое число в эмбеддинге тоже характеризует некоторый фактор пользователя или объекта, только выявляются они нейросетями, а не обычным разложением, что, конечно, дает более четкие зависимости. Далее можно делать с этими эмбедингами (матрицей эмбедингов) что угодно — перемножать, рассчитывать косинусное расстояние, корреляцию Пирсона, использовать как признаки для моделей второго уровня и т.д., находя таким образом схожести между пользователями, объектами и выдавая рекомендации.

Наряду с комбинацией нейросетевого и классического подходов рекомендательная система может быть полностью построена на основе нейросети. Рассмотрим принцип работы и архитектуру моделей-трансформеров. Первыми они применялись в задачах обработки естественного языка (рис. 3).

Кратко опишем их принцип работы следующим образом.

1. Исходные данные (текст/картинки/последовательность действий) переводятся в набор эмбедингов при помощи энкодера (от англ. encoder), в зависимости от типа данных и типа разбиения их количество может быть разным (на рис. 3, например, эмбединг сопоставляется каждому слову в предложении). Делается это алгоритмами кодирования и понижения размерности.

2. Происходит обучение нейросети, здесь главную роль играет слой внимания или self-attention [7]. Его суть состоит в том, что для каждого эмбединга он учитывает его контекст. В задачах обработки текста смысл этого очевиден — можно таким образом понять, насколько слово важно в предложении, с какими оно больше всего связано и т.д. Для рекомендательных алгоритмов, например, определяется связь действий одного пользователя и выявляются в них зависимости. Под “капотом” слоя внимания находятся математические вычисления — для каждого эмбединга рассчитывается несколько значений (query — q , key — k , value — v) путем перемножения этого эмбединга на соответствующие матрицы Q , K , V , которые в свою очередь получают в процессе обучения. Затем они перемножаются друг с другом для разных элементов, нормируются на размерность векторов матрицы K (обозначается d_k) и прогоняются через softmax. Функция “внимания” определяется следующим образом:

$$Attention(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V.$$

Напомним, что здесь softmax — функция активации, которая применяется для выходных значений какого-либо слоя:

$$\text{softmax}(w_1^T x, \dots, w_k^T x) = \frac{\exp(w_k^T x)}{\sum_{i=1}^k \exp(w_i^T x)},$$

где w_i — значение веса соответствующего нейрона в слое, x — вектор выходных значений.

По смыслу концепция query/key/value (ключ/значение/запрос) аналогична поисковым системам. Например, когда пользователь что-то ищет в Интернете, поисковая система сопоставит его запрос (текст в строке поиска) с набором ключей (название сайтов, описание и т.д.), связанных с кандидатами в своей базе данных, а затем представит наиболее подходящие ссылки на сайты (значения).

3. Далее запросы, ключи и значения линейно проецируются на матрицы Q , K , V . Для каждой из этих спроецированных версий запросов, ключей и значений параллельно рассчитывается функция внимания *Attention*: на вход поступают d_v -мерные выходные значения, затем они объединяются и снова проецируются (d_v — размерность векторов в матрице V). Данный механизм называют Multi-head attention, математически можно записать эту функцию следующим образом:

$$\text{MultiHead}(Q, K, V) = \text{Concat}(\text{head}_1, \dots, \text{head}_h)W^O,$$

где $\text{head}_i = \text{Attention}(QW_i^Q, KW_i^K, VW_i^V)$, $W_i^Q \in \mathbb{R}^{d_{\text{model}}d_q}$, $W_i^K \in \mathbb{R}^{d_{\text{model}}d_k}$, $W_i^V \in \mathbb{R}^{d_{\text{model}}d_v}$, $W^O \in \mathbb{R}^{hd_v \times d_{\text{model}}}$ — матрицы проекций, h — количество параллельно вычисляемых слоев внимания, а *Concat* — операция “склеивания” справа-налево векторов в матрицу. Данный механизм позволяет модели совместно воспринимать информацию из разных подпространств представления в разных позициях. При одном слое внимания усреднение препятствует этому.

4. После слоя внимания можно вставить еще несколько различных слоев нейросети. В оригинале статьи — это два линейных преобразования со следующей функцией активации ReLU между ними:

$$\text{FFN}(x) = \max(0, xW_1 + b_1)W_2 + b_2,$$

т.е. проводится две свертки с размером ядра 1.

5. После всех проделанных манипуляций обученные эмбединги декодируются обратно в исходный тип данных, например в набор рекомендаций или переведенный текст.

Создание архитектуры трансформера стало своего рода одной из революционных точек в развитии глубокого обучения нейросетей, дав мощный толчок в первую очередь направлению языковых моделей [8]. На данный момент есть уже достаточно много результатов, показывающих их преимущества [8, 14]. После аналогичные модели появились в области компьютерного зрения [9, 10] и не обошли область рекомендательных систем [1].

5. SASRec (self-attentive sequential recommendation) — это алгоритм рекомендаций, основанный на архитектуре Transformer [1]. Он обрабатывает и моделирует последовательности взаимодействий пользователей с предметами для предсказания следующего наиболее вероятного предмета, с которым пользователь может взаимодействовать.

Основные шаги работы алгоритма.

1. Входные данные должны состоять из истории взаимодействий пользователей с предметами, представленных в виде последовательностей. Каждая последовательность — список предметов, с которыми пользователь взаимодействовал, отсортированный по времени.

2. Входные последовательности обрабатываются, чтобы сделать их одинаковой длины, например путем обрезания или дозаполнения. Также выполняется кодирование предметов и пользователей в числовые индексы.

3. SASRec — нейросетевая модель, поэтому для работы ей необходимы векторные представления для пользователей и предметов — эмбединги. В самом начале они инициализируются случайным образом и далее меняются в процессе обучения модели.

4. SASRec использует архитектуру Transformer, поэтому здесь приходится иметь дело со слоями внимания. Multi-head attention дает возможность модели обрабатывать последовательности

входных данных с учетом их взаимосвязей и зависимостей. Подобно словам в предложении, оно дает возможность модели сосредоточиться на важных аспектах последовательности действий пользователя и учитывать “контекстные” зависимости. А позиционно-сетевое представление добавляет информацию о месте элементов в последовательности, это важно для моделирования зависимостей между ними.

5. Модель обучается на “положительных” и “отрицательных” последовательностях: сначала для каждого элемента рассчитываются логиты, после чего методом WARP (описан подробно выше) оптимизируется функция потерь.

6. После обучения модель может использоваться для генерации рекомендаций. Для каждого пользователя прогнозируются вероятности взаимодействия с каждым предметом из общего набора, после чего они ранжируются и “верхние” позиции в первую очередь попадают в список рекомендаций.

Из преимуществ, доставшихся SASRec в наследство от трансформерной архитектуры, выделяется способность учитывать долгосрочные зависимости и контекстные особенности в последовательностях взаимодействий пользователей с объектами, что делает ее эффективной для задач последовательных рекомендаций.

6. Оценка эффективности моделей и метрики качества. В рекомендательных системах используются различные метрики для оценки и измерения качества предоставляемых рекомендаций. Рассмотрим некоторые из наиболее распространенных.

Точность (precision): измеряет долю релевантных рекомендаций среди всех. Она вычисляется как отношение числа релевантных рекомендаций к общему числу рекомендаций и показывает, насколько они полезны для пользователей.

Полнота (recall): измеряет долю релевантных рекомендаций, найденных среди всех действительно релевантных элементов. Она вычисляется как отношение числа релевантных рекомендаций к общему числу действительно релевантных элементов. Полнота показывает, насколько система способна найти все подходящие элементы.

F-мера (F-measure): объединяет точность и полноту в одну общую меру качества. F-мера вычисляется как гармоническое среднее между точностью и полнотой и позволяет учесть обе эти метрики одновременно.

Индекс покрытия (coverage): измеряет долю уникальных элементов, для которых были сделаны рекомендации, относительно общего числа уникальных элементов в системе. Индекс покрытия показывает, насколько система разнообразна и способна предложить рекомендации для широкого спектра элементов.

Ранговая корреляция (ranking correlation): оценивает степень соответствия порядка рекомендованных элементов и фактического порядка предпочтений пользователей. Некоторые из популярных ранговых корреляционных метрик включают коэффициенты Спирмена и Кендалла.

Среднее смещение ранжирования (mean average precision, MAP): учитывает ранжирование элементов в рекомендациях. Она измеряет среднее значение точности для каждого релевантного элемента в ранжированном списке рекомендаций. MAP позволяет учесть как точность, так и порядок элементов в рекомендациях.

Нормализованная взаимная информация (normalized discounted cumulative gain, NDCG): учитывает релевантность и ранжирование элементов в рекомендациях. Она присваивает более высокие значения более релевантным и лучше ранжированным элементам в рекомендациях.

Метрика Hit Rate (или Hit Ratio) измеряет долю рекомендаций, которые содержат хотя бы один релевантный элемент для пользователя. Она показывает, насколько успешно рекомендательная система предлагает пользователю хотя бы один элемент, который он считает релевантным.

Обычно выбор метрики напрямую связан со способом тестирования. Здесь существует два принципиально разных подхода.

1. Помещать для каждого пользователя несколько объектов в тестовую часть. Тогда фактически необходимо предсказать последние 20–30% элементов, которые понравятся пользователю (в зависимости от размера тестового набора данных). В качестве метрик здесь нет ограничений — можно использовать любые.

2. Помещать для каждого пользователя только один объект в тестовую часть. Тогда необходимо предсказать только один следующий интерес пользователя. Этот подход хорош тем, что большее количество данных можно оставить для обучения модели, но появляются ограничения в

используемых метриках — чаще всего будет полезен *hit rate*, *NDCG*, а вот *recall* и *precision* применить уже не получится.

7. Проведение эксперимента. 7.1. Описание данных. Обучать обе модели будем только на коллаборативных данных. Напомним, что это данные, основанные на истории взаимодействия пользователей с предметами; используются в моделях коллаборативной фильтрации для рекомендаций объектов, схожих по скрытым факторам с теми, что конкретный пользователь уже просмотрел или оценил.

Такие данные часто представляются в виде матрицы, которая содержит информацию о том, какие пользователи взаимодействовали с какими объектами. Обычно их располагают по строкам и столбцам соответственно, а ячейки заполняются нулями или единицами — в зависимости от того, взаимодействовал пользователь с этим объектом или нет. Например, в случае рекомендации фильмов можно записать в нее, какие зрители и какие фильмы оценили или просмотрели.

Часто также применяется метод записи коллаборативных данных в виде простой последовательности “пользователь—объект”. Из недостатков — это занимает больше места, сложнее учитывать вес взаимодействий. Но зато появляется возможность использовать временные характеристики — какие взаимодействия были раньше, а какие позже, что очень важно для нейросетевых моделей-трансформеров, так как их основное преимущество заключается в проведении анализа поведения пользователя во времени и генерация рекомендаций с учетом всех предыдущих зависимостей в поведении.

Перейдем к описанию данных, используемых в эксперименте. Их тематика — действия пользователей на сайте по поиску жилья, интерфейс системы выглядит следующим образом (рис. 4).

Пользователи могут задавать определенные фильтры системе — комнатность, этажность здания; аренда или продажа и др. В первую очередь показываются объявления, которые наиболее релевантны его предыдущим интересам и запросу. Для построения моделей нам понадобятся уникальные номера (ID) пользователей, объявлений, а также временная отметка. Промежуток, за который были выгружены данные — июль 2022 г. В итоге получилось 431 982 уникальных пользователя и 388 607 уникальных объектов, общее число исходных записей равно 82 463 346.

В коллаборативную матрицу можно записать следующие виды взаимодействий (признак *event_name*):

- просмотр,
- добавить в “избранное”,
- показать контакты продавца,
- сделать звонок,
- завершить звонок.

Возможность учета веса события доступна только для модели *LightFM*, поэтому для более корректного сравнения заполним матрицу бинарными значениями 0 или 1, чтобы наилучшим образом соответствовать модели *SASRec*.

Для составления матрицы “пользователь—продукт” понадобятся только пары признаков ID пользователя — ID объекта в виде истории их взаимодействий (напомним, что свойства объектов в коллаборативной фильтрации напрямую не учитываются).

Закодируем пользователей и объявления натуральными числами, начиная с нуля, чтобы в итоговой матрице можно было провести биекцию между индексом строки или столбца и исходным ID. Для этого используем *category_encoder*.

По трем столбцам *user_id_enc*, *offer_id_enc* и искусственно созданному столбцу *action*, заполненному единицами для датасета (рис. 5), можно построить матрицу “пользователь—объект”, которая понадобится для обучения *LightFM*. Так как такие матрицы в большинстве случаев довольно разреженные (пользователи взаимодействуют далеко не со всеми объектами), для них был создан особый формат — *sparse* или *csr, matrix*. Они устроены таким образом, что нули в них не хранятся. Так как они составляют основную часть данных, то не занимают лишней памяти, в условиях разреженности это становится особенно актуально. Для *SASRec* же достаточно просто выделить столбцы *user_id_enc*, *offer_id_enc* в отдельный текстовый файл, отсортировав по *user_id_enc*, и по времени.

Перед составлением итогового набора данных в виде матрицы или последовательности с датасетом также были произведены следующие стандартные преобразования по очистке:

- удалены дубликаты в связке “пользователь—объект”;

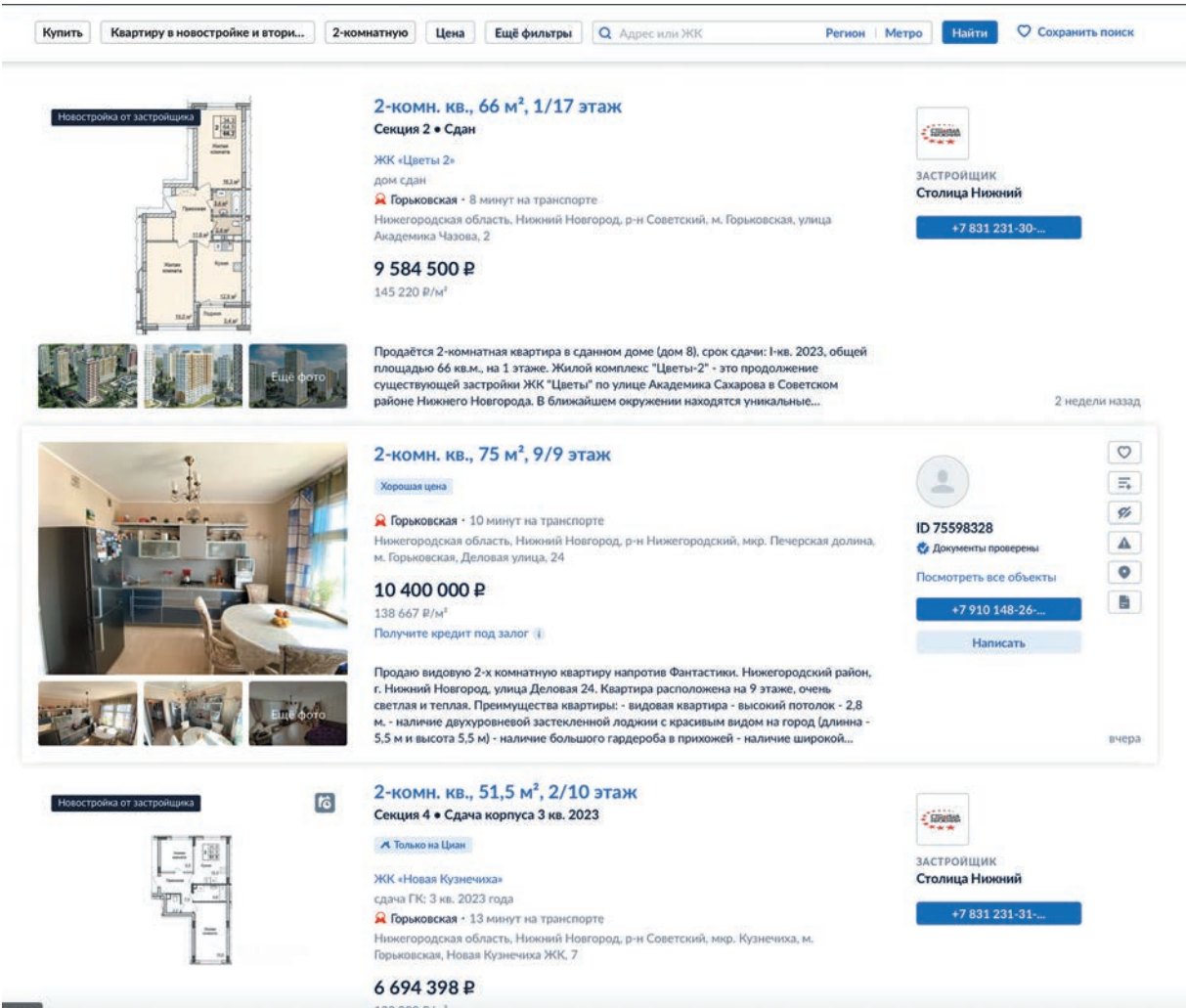


Рис. 4. Пример интерфейса сайта

	timestamp	user_id	offer_id	event_name	user_id_enc	offer_id_enc	event_name_enc
0	2022-07-29 00:00:02.095	82662998	275699899	OpenOfferScreen	0	0	1
1	2022-07-29 00:00:20.794	70430591	263076121	Add2Like	1	1	2
2	2022-07-29 00:00:21.326	93889189	254183210	OpenOfferScreen	2	2	1
3	2022-07-29 00:00:26.945	91525566	268686455	OpenOfferScreen	3	3	1
4	2022-07-29 00:00:27.162	78613959	275660175	OpenOfferScreen	4	4	1

Рис. 5. Исходные данные с закодированными ID пользователей и объектов

взяты только пользователи, у которых более пяти действий за указанный промежуток времени;

последовательность дополнительно отсортирована по коду пользователя, а затем по времени для нейросетевой модели.

После всех преобразований осталось 8 666 106 записей, из которых часть будет отдана на обучение моделей, часть – на оценку качества работы.

7.2. Выбор унифицированного подхода тестирования. Существует два кардинально отличающихся подхода проверки качества работы рекомендательных систем. Они связаны с различными способами прогнозирования поведения пользователя: предсказание некото-

рого процента следующих кликов или предсказание только одного следующего действия пользователя. Рассмотрим их подробнее и разберем преимущества и недостатки.

1. Предсказание процента кликов (Click-Through Rate, CTR): в таком подходе из общего числа данных обычно выделяют 20–30% для тестирования и валидации, остальное — для обучения.

Преимущества подхода:

более состоятельные оценки, можно попытаться оценить поведение пользователя не только в начале, но и в перспективе;

может быть использован для оценки эффективности алгоритмов по всем возможным метрикам.

Недостатки подхода:

может стать критичным в условиях ограниченности данных, так как значительная их часть пойдет на тестирование, а не на обучение, что может повлиять на качество модели в целом;

возможна предвзятость в пользу популярных элементов. Некоторые модели могут склоняться к рекомендации объектов с высоким средним рейтингом, что может привести к искажению оценки эффективности рекомендаций.

2. Предсказание следующего действия пользователя (Next Action Prediction): в таком подходе из общего числа данных выделяется по одному действию пользователя для тестирования и валидации, остальное — для обучения.

Преимущества подхода:

получаем больше данных для обучения модели, что позволяет улучшить предсказания; это полезно, когда рекомендательная система должна предлагать наиболее релевантные элементы, учитывая контекст и последовательность всего предыдущего (в особенности последних действий), а также в условиях ограниченности данных;

как следствие, более эффективен для задачи последовательной рекомендации, так как позволяет лучше учесть как краткосрочные зависимости, так и изменение предпочтений пользователя со временем.

Недостатки подхода:

само по себе качество тестирования будет менее информативным, особенно, если задача заключается в том, чтобы предсказать для пользователя последовательность из набора следующих объектов, а не только один;

ограниченность использования метрик — например, не получится воспользоваться оценками “at k”.

Выбор между этими двумя подходами зависит от конкретного контекста и целей рекомендательной системы. В нашем исследовании был выбран второй подход, так как данных по итогу получилось не очень много, и он более подходящий для моделей последовательных рекомендаций, в числе которых SASRec. В качестве главной метрики возьмем Hit Rate; в самой библиотеке уже реализован алгоритм такого тестирования, которым можно воспользоваться.

8. Обучение LightFM. Зафиксируем основные детали при обучении модели и результаты.

1. Обучающие данные: матрица взаимодействий “пользователь–объект” в формате *csr*, *matrix* на основе всех данных, за исключением двух последних действий для каждого пользователя. Тестовые и валидационные данные: для каждого пользователя взято по два последних клика.

2. Обучение происходило за одну итерацию в 150 эпох на заранее эмпирически подобранных оптимальных гиперпараметрах. Это достаточно точный процесс, значения указаны с большой точностью, так как именно они дают наилучшее качество модели (подробно указаны в табл. 1).

3. Оценка качества проводилась методом MAP, метрика HitRate составила 0.047 или 4.7% точности предсказания последующего клика пользователя.

4. Обсуждение адекватности полученной метрики: на достаточно больших наборах данных известно, что “хорошее” значение метрики *precision@5* равняется 30%, на малых наборах для этой же модели на том же наборе данных получилось *precision@5* = 20%. Если примерно экстраполировать HitRate на пять элементов, получается значение в этих пределах (если просто умножить на пять, получится 23.5%, т.е. даже присутствует эффект наличия более релевантных рекомендаций в начале списка). Это позволяет утверждать о правильности полученной метрики и корректно проведенном эксперименте.

Таблица 1. Гиперпараметры для обучения модели LightFM

Гиперпараметр	Значение на обучении
loss	warp
max_sampled	19
no_components	150
user_alpha	0.000012403932688782397
item_alpha	0.00007600815597574313
learning_rate	0.3702643399600358

Таблица 2. Гиперпараметры для обучения модели SASRec

Гиперпараметр	Значение на обучении
num_epoch	30 + 14
batch_size	200
RANDOM_SEED	100
lr	0.001 + 0.0001
maxlen	50
num_blocks	2
hidden_units	100
num_heads	1
dropout_rate	0.1
_emb	0.0
num_neg_test	20577

9. Обучение SASRec. Аналогично зафиксируем основные детали при обучении модели SASRec.

1. Обучающие данные: последовательность взаимодействий “пользователь—объект” в формате обычной записи пар в текстовом файле в необходимом порядке на основе всех данных, за исключением двух последних действий для каждого пользователя. Тестовые и валидационные данные: для каждого пользователя взято по два последних клика.

2. Обучение происходило за две итерации: 30 эпох на заранее эмпирически подобранных оптимальных гиперпараметрах (подробно указаны в табл. 2) с шагом $lr = 0.001$ и дополнительно 14 эпох с шагом $lr = 0.0001$ (так как обучение с 30+ эпохи с $lr = 0.001$ приводило к переобучению).

3. Оценка качества проводилась методом NAP, метрика HitRate составила 0.140 или 14.0% точности предсказания последующего клика пользователя.

4. Обоснование адекватности полученной метрики приведено в разд. 8, здесь же она составила почти в 3 раза больше. Отдельного тестирования методом CTR (Click Through Rate) для данной модели не проводилось, поэтому сложно утверждать, насколько релевантными могли бы быть рекомендации на последующих местах списка.

10. Результаты. Финальная метрика Hit Rate (число правильно предсказанных следующих действий пользователя) составила:

для LightFM 0.047,

для SASRec 0.140.

Нейросетевая модель показала по целевой метрике преимущество почти в 3 раза по качеству. При этом нужно учесть, что суммарное время обучения LightFM составило примерно 10 мин, для SASRec — 30 мин. — разница тоже в 3 раза. Можно утверждать, что на данном наборе данных достигнуто максимальное качество для обеих моделей, так как при превышении 150 эпох LightFM переставала показывать прирост в метриках. В силу строения модели это означает, что метод сошелся к оптимуму, дальнейшее увеличение качества невозможно. Для SASRec на исходном наборе данных также при дальнейшем обучении алгоритма метрики начинали падать, что свидетельствует о переобучении.

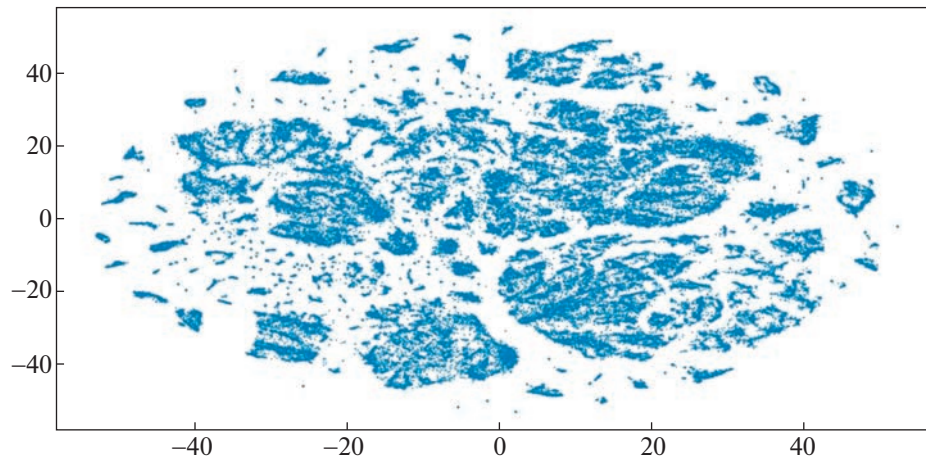


Рис. 6. Визуализация эмбедингов объявлений после TSNE-разложения

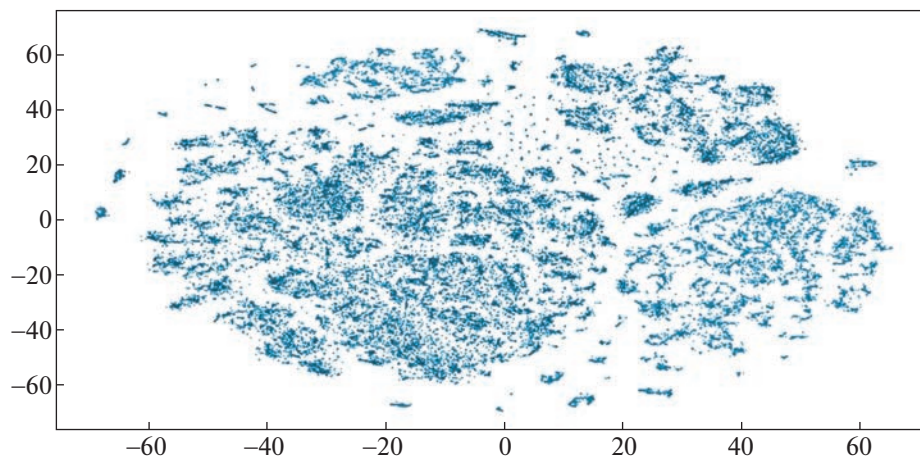


Рис. 7. Визуализация эмбедингов пользователей после TSNE-разложения

В качестве дополнительного подтверждения корректной работы нейросетевой модели из нее были извлечены эмбединги пользователей и объявлений, исходная размерность векторов равнялась 100 (гиперпараметр модели, который был задан вручную — *hidden_units*). Далее размерность векторов была понижена при помощи TSNE-разложения до двух, получившаяся визуализация представлена на рис. 6 и 7.

На графиках каждая точка соответствует какому-либо одному пользователю или объявлению, прослеживается разделение на кластеры, что уже хорошо. Значит, модель уловила их скрытые факторы. Предположительно, в каждом кластере находятся близкие по интересам пользователи или близкие по содержанию объявления.

Проверим гипотезу на простом интерпретируемом признаке для пользователей — предпочтении в покупке или продаже. Для каждого объявления из исходного набора данных можно определить, относится оно к категории продажи или аренды. Далее разметим пользователей: если больше 70% их интересов (просмотров объявлений) относятся к категории объектов продажи, то присвоим им целевую переменную 1; если аналогичная ситуация справедлива для категории объектов аренды, то поставим в таргет 0. К счастью, “промежуточных” пользователей не возникло. За месяц все исключительно интересовались преимущественно либо арендой, либо продажей.

При визуализации разметки “продажи—аренды” на графике рис. 7 получилась следующая картинка (рис. 8): отмечены области, в которые попали пользователи, интересующиеся преимущественно арендой, остальная часть — продажами.

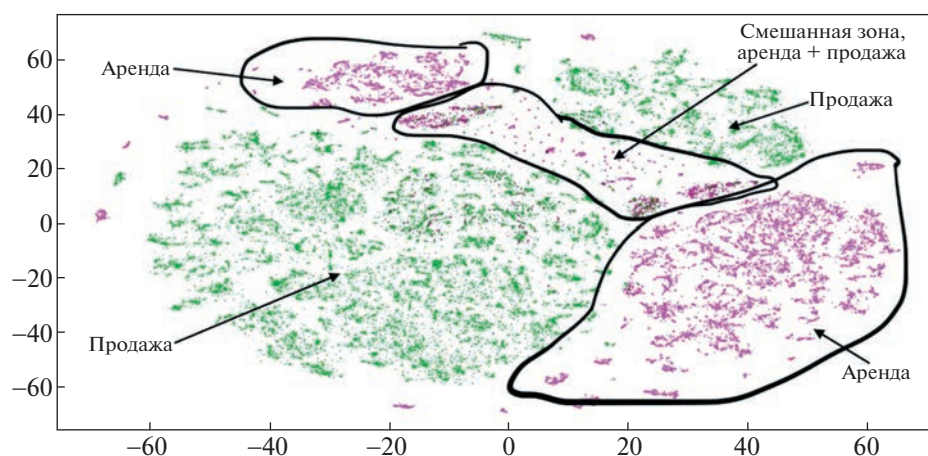


Рис. 8. Визуализация эмбедингов пользователей по предпочтениям продажи и аренды

Видно, что разделения обеих групп проходят четко по границам некоторых кластеров, выделившихся в пространстве после TSNE-разложения. Это уже наглядно свидетельствует о хорошей кластеризации, что, в свою очередь, — об информативных эмбедингах и корректно проведенном обучении.

Подтвердим визуальный результат численным — соберем датасет, в котором признаками будут выступать эмбединги, а целевой переменной — бинарный признак предпочтения в “аренде—продаже”. Обучим на этих размеченных данных классификатор CatBoost, метрики получились следующие:

precision 0.97,
recall 0.96,
roc-auc 0.99.

Классификация на датасете, составленном из эмбедингов, показала высокие результаты, что подтверждает численно качество полученных эмбедингов (и качественно обученную модель SASRec), а также предоставляет возможности для переиспользования эмбедингов для решения других различных задач.

Заключение. Проведено детальное исследование двух моделей коллаборативной фильтрации для решения задачи рекомендаций: классическая LightFM и нейросетевая SASRec. Для этого был проведен сбор и подготовка аналогичных данных для обеих моделей, обучение и подбор гиперпараметров. В качестве дополнительного подтверждения качества работы нейросетевой модели собран датасет на основе эмбедингов модели и обучен простой классификатор.

Проведен сравнительный анализ различных подходов к решению данной задачи и выбраны наилучшие алгоритмы-представители классического ML и глубокого обучения с использованием нейросетей. По результатам сравнения в абсолютно равных условиях нейросетевая модель SASRec показала метрики качества примерно в 3 раза выше, чем классическая LightFM. Обе модели были обучены с подобранными гиперпараметрами до максимально возможного качества на имеющемся наборе данных. Дополнительно качество работы нейросетевой модели показывает проведенный эксперимент по кластеризации эмбедингов пользователей по предпочтениям “аренды—продажи”.

Результат может быть применен для улучшения качества работы рекомендательных алгоритмов в тех компаниях, где до сих пор используются классические подходы. На основе полученных метрик можно рассчитать потенциально возможную прибыль от продаж после введения нового алгоритма для конкретных случаев, чтобы понимать, будет ли внедрение нейросетевых моделей компенсировать затраты на оборудование и обслуживание таких систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kang W.-Ch., McAuley J. Self-Attentive Sequential Recommendation // IEEE Intern. Conf. on Data Mining (ICDM). Singapore, 2018. P. 197–206.

2. Имплементация модели SASRec на Python // GitHub. Microsoft recommenders : webcite <https://github.com/microsoft/recommenders/tree/main/recommenders/models/sasrec> (accessed: 22.04.2023).
3. Kula M. Metadata Embeddings for User and Item Cold-start Recommendations // Proc. 2nd Workshop on New Trends on Content-Based Recommender Systems co-located with 9th ACM Conf. on Recommender Systems (RecSys). Vienna, Austria, 2015. P. 14–21.
4. LightFM Documentation // LYST's Engineering Blog : webcite <https://making.lyst.com/lightfm/docs/home.html> (accessed: 20.04.2023).
5. Sineva I.S., Denisov V.Y., Galinova V.D. Building Recommender System for Media with High Content Update Rate // IEEE Intern. Conf. Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies. St. Petersburg, Russia, 2018. P. 385.
6. Sudasinghe P. G. Enhancing Book Recommendation with the use of Reviews : Master's Degree Programmes. Colombo, 2019. 54 p.
7. Manotumruksa J., Yilmaz E. Sequential-Based Adversarial Optimisation for Personalised Top-N Item Recommendation // Proc. 43rd Intern. ACM SIGIR Conf. on Research and Development in Information Retrieval. Xi'an, China, 2020. P. 2045–2048.
8. Tenney I., Das D., Pavlick E. BERT Rediscovered the Classical NLP Pipeline // Proc. 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. Florence, Italy, 2019. P. 4593–4601.
9. Bi J., Zhu Z., Meng Q. Transformer in Computer Vision // IEEE Intern. Conf. on Computer Science, Electronic Information Engineering and Intelligent Control Technology (CEI). Fuzhou, China, 2021. P. 178–188.
10. Han K., Wang Y., Chen H., Chen X., Guo J., Liu Z., Tang Y., Xiao A., Xu C., Xu Y., Yang Z., Zhang Y., Tao D. A Survey on Vision Transformer // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2022. V. 45. № 1. P. 87–110.
11. Schafer J.B., Frankowski D., Herlocker J., Sen Sh. Collaborative Filtering Recommender Systems // The Adaptive Web: Methods and Strategies of Web Personalization. Berlin, Germany, 2007. P. 291–324.
12. Rosenthal E. Learning to Rank Sketchfab Models with LightFM <https://www.ethanrosenthal.com/2016/11/07/implicit-mf-part-2/> (accessed: 20.04.2023).
13. Patoulia A.A., Kiourtis A., Mavrogiorgou A., Kyriazis D. A Comparative Study of Collaborative Filtering in Product Recommendation // Emerging Science Journal. 2023. V. 7. № 1. 15 p.
14. Polignano M., de Gemmis M., Semeraro G. Comparing Transformer-based NER approaches for analysing textual medical diagnoses // Proc. Working Notes of CLEF. Bucharest, Romania, 2021. V. 2936. P. 818–833.

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ**

УДК 629.7.01

**УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ФОРМИРОВАНИЯ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЗАДЕЛА В АВИАСТРОЕНИИ
НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ДЕФИЦИТА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВОЙСТВ
ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

© 2023 г. К. С. Анисимов^а, В. Н. Евдокименков^{б,*}, М. Н. Красильщиков^б,
К. И. Сыпало^а, Н. Б. Топоров^б

^аЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия

^бМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: evdokimenkovvn@mai.ru

Поступила в редакцию 08.06.2023 г.

После доработки 19.06.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Существующий опыт проектирования авиационной техники доказывает, что в ряде случаев создание перспективного летательного аппарата, удовлетворяющего комплексу предъявляемых требований, невозможно в рамках накопленного научно-технического задела в области авиастроения. В результате возникает необходимость определения приоритетных научно-технических решений, внедрение которых в условиях временных и финансовых ограничений обеспечит создание летательного аппарата, отвечающего заявленным требованиям. Показано, что подобная задача может быть интерпретирована как так называемая обобщенная задача оптимизации, отличие которой от классической задачи математического программирования заключается в том, что множество допустимых значений летно-технических характеристик является дополнительным объектом оптимизации. Предложен конструктивный алгоритм решения подобной задачи, возможности которого иллюстрируются на примере проектирования транспортного рампового самолета

DOI: 10.31857/S0002338823060021, **EDN:** GNUELK

Введение. Государственной программой Российской Федерации “Развитие авиационной промышленности на 2013–2025 годы” предусматривается повышение конкурентоспособности российской авиационной промышленности на мировом рынке авиационной техники и услуг. В свою очередь существующий уровень конкуренции на этом рынке требует повышения качества проектирования перспективных авиационных комплексов на основе современных информационных технологий.

Как известно, проектирование авиационного комплекса является сложной научно-технической задачей вследствие противоречивости требований, предъявляемых к такому комплексу, и, как следствие, необходимости определения в процессе проектирования значительного количества взаимосвязанных параметров. В конечном итоге, качество решения такой задачи определяется возможностью проектируемого авиационного комплекса решать возложенные на него задачи с необходимой эффективностью.

В предшествующих работах авторов [1, 2] показано, что повышение качества процесса проектирования перспективных образцов авиационной техники с одновременным снижением временных и финансовых затрат может быть достигнуто, в том числе, путем включения в процесс проектирования дополнительного этапа так называемого функционального проектирования наряду с традиционно используемыми стадиями структурного, компоновочного и обличкового (технического) проектирования.

Как полагают авторы статьи, этап функционального проектирования включает решение двух основных задач:

формирование набора вариантов облика перспективного летательного аппарата (ЛА), удовлетворяющего комплексу междисциплинарных по своей сути требований (массовых, дина-

мических, экологических, энергетических, экономических и др.), с учетом накопленного научно-технологического задела;

оценка дефицита функциональных свойств перспективного ЛА (в случае невозможности его создания на текущем уровне научно-технологического развития) и определение приоритетных научно-технических решений, внедрение которых обеспечит создание ЛА, удовлетворяющего заданным требованиям.

Метод решения первой из сформулированных задач подробно описан в [1, 2]. Показано, что эта задача может быть интерпретирована как классическая задача математического программирования, в которой множество допустимых значений летно-технических характеристик (ЛТХ), участвующих в расчете интегральных показателей, отражающих многодисциплинарные требования, предъявляемые к перспективному ЛА, формируется на основе накопленного опыта проектирования.

Как уже указывалось выше, задача оценки дефицита функциональных свойств и определения приоритетных научно-технических решений возникает в случае невозможности создания перспективного ЛА, удовлетворяющего всей совокупности многодисциплинарных требований, на современном уровне развития авиационных технологий. В формальной постановке эта задача определяется как обобщенная задача оптимизации [3–5], отличие которой от классической задачи математического программирования заключается в дополнительной операции оптимизации множества допустимых значений ЛТХ, поскольку влияние перспективных научно-технических решений проявляется, прежде всего, в изменениях формы и размеров этого множества, и как результат само множество становится дополнительным объектом оптимизации.

В [1] приведена постановка подобной обобщенной задачи оптимизации без подробного изложения метода ее решения. В статье предложен метод решения этой задачи и результаты его практического использования на примере оценки дефицита функциональных свойств при проектировании рампового самолета транспортной категории, удовлетворяющего комплексу многодисциплинарных требований.

1. Постановка задачи оценки дефицита функциональных свойств перспективных ЛА. В рамках развиваемой концепции функционального проектирования [1, 2] приемлемым полагается облик перспективного ЛА, описываемый вектором проектных параметров r , при котором обеспечивается одновременное выполнение комплекса многодисциплинарных требований.

Формальный учет этих требований базируется на использовании интегральных показателей $I_j(r)$, $j = \overline{1, N}$, количественно выражающих степень соответствия проектируемого ЛА заявленным требованиям:

$$\begin{cases} I_{1\min} \leq I_1(r) \leq I_{1\max}, \\ I_{2\min} \leq I_2(r) \leq I_{2\max}, \\ I_{3\min} \leq I_3(r) \leq I_{3\max}, \\ \dots\dots\dots \\ I_{N\min} \leq I_N(r) \leq I_{N\max}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Предельные значения показателей $I_{j\min}, I_{j\max}$ устанавливает специалист (эксперт), исходя из заданных требований к перспективному ЛА. Заметим, что система неравенств (1.1) позволяет в наиболее общем виде учесть требования к базовым функциям перспективного ЛА.

В дальнейшем комплекс показателей (1.1) будем представлять в виде вектор-функции $I(r) = (I_1(r), I_2(r), \dots, I_N(r))^T$, для которого заданным полагается множество допустимых значений W_I :

$$W_I = \{I(r) : I_{j\min} \leq I_j(r) \leq I_{j\max}, j = \overline{1, N}\}. \quad (1.2)$$

Компоненты вектора $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ в (1.1) в совокупности определяют ЛТХ, участвующие в вычислении интегральных показателей $I_j(r)$, $j = \overline{1, N}$. В дальнейшем предполагается, что задано множество допустимых значений ЛТХ как n -мерный параллелепипед W_r , определяемый совокупностью условий:

$$W_r = \{r : r_{i\min} \leq r_i \leq r_{i\max}, i = \overline{1, n}\}. \quad (1.3)$$

Предельные значения ЛТХ $r_{i\min}, r_{i\max}$, $i = \overline{1, n}$, в (1.3) задаются с учетом накопленного опыта проектирования ЛА, который базируется на доступных для использования научно-технических и технологических решениях.

Таким образом, нарушение хотя бы одного из условий (1.1) указывает на дефицит функциональных свойств проектируемого ЛА, состоящий в том, что на базе накопленного научно-технического задела, представленного множеством W_r , невозможно обеспечить выполнение всей совокупности условий (1.1).

В подобной ситуации использование перспективных научно-технологических решений, внедрение которых возможно в обозримой перспективе, является очевидным способом выполнения многодисциплинарных требований (1.1). Как уже говорилось, влияние этих перспективных решений выражается, прежде всего, в изменении размеров множества допустимых значений ЛТХ W_r .

Следовательно, задача устранения дефицита функциональных свойств проектируемого ЛА заключается в минимально возможном расширении размеров W_r с целью определения нового множества W_r^* , в пределах которого обеспечивается одновременное выполнение комплекса условий (1.1).

В результате построения нового множества W_r^* будут определены приоритетные научно-технологические решения, потенциально обеспечивающие возможность расширения диапазонов предельных значений отдельных ЛТХ, для которых будет подтверждена такая необходимость. При этом формирование множества W_r^* должно осуществляться с учетом временных и финансовых затрат, технологических сложностей и рисков, сопровождающих развитие любого перспективного научно-технологического решения и таким образом существенно влияющих на факт его выбора.

2. Оценка дефицита функциональных свойств перспективного ЛА как обобщенная задача оптимизации. Поскольку интегральные показатели $I_j(r)$, $j = \overline{1, N}$, используемые для оценки многодисциплинарных требований (1.1), имеют разный физический смысл и выражены в разных единицах измерений, необходим переход к их безразмерным нормированным аналогам $\hat{I}_j(r)$, $j = \overline{1, N}$, на основе линейного преобразования:

$$\hat{I}_j(r) = \frac{I_j(r) - 0.5(I_{j\min} + I_{j\max})}{0.5(I_{j\max} - I_{j\min})}. \quad (2.1)$$

Это нормирующее преобразование отображает N -мерный параллелепипед W_I в куб $\hat{W}_I$, задаваемый условиями:

$$\hat{W}_I = \{\hat{I}(r) : -1 \leq \hat{I}_j(r) \leq 1, j = \overline{1, N}\}. \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение скалярные функции $\varphi_j(r)$, $j = \overline{1, N}$, количественно выражающие для любого фиксированного вектора ЛТХ r факт выполнения каждого из условий (1.1). Эти функции определим следующим образом:

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} -(\hat{I}_j(r) + 1), & \hat{I}_j(r) < -1, \\ 0, & -1 \leq \hat{I}_j(r) \leq 1, \\ \hat{I}_j(r) - 1, & \hat{I}_j(r) > 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Далее используем скалярную функцию $\Phi(r)$, количественно выражающую для любого фиксированного вектора ЛТХ r штраф за невыполнение совокупности условий (2.2). Эту функцию определим таким образом, чтобы признаком выполнения всего комплекса условий (2.2) было значение $\Phi(r) = 0$:

$$\begin{cases} r : \forall j \varphi_j(r) = 0 \Leftrightarrow \Phi(r) = 0, \\ r : \exists j \varphi_j(r) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi(r) > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Примерами функций $\Phi(r)$, удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), могут быть следующие:

$$\Phi(r) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(r), \quad (2.5)$$

$$\Phi(r) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(r), \quad (2.6)$$

$$\Phi(r) = \max_j \varphi_j(r). \quad (2.7)$$

Выбор конкретного вида оптимизируемой функции $\Phi(r)$ из набора (2.5)–(2.7) осуществляет с учетом используемых численных методов оптимизации и оценки затрат машинного времени для проведения вычислений.

Из (2.3), (2.4) следует, что вектор ЛТХ r^* , для которого обеспечивается вся совокупность условий (1.1), является решением оптимизационной задачи:

$$r^* = \arg \min_{r \in W_r} \Phi(r). \quad (2.8)$$

В результате решения задачи (2.8) возможны следующие ситуации:

В а р и а н т 1: $\Phi(r^*) = 0$. В этом случае дефицит функциональных свойств проектируемого ЛА отсутствует, т.е. накопленный научно-технологический задел в области авиастроения, заключенный в множестве W_r (1.3), обеспечивает создание перспективного ЛА, отвечающего набору междисциплинарных требований. Облик перспективного ЛА в первом приближении описывает вектор ЛТХ r^* . Дальнейшее уточнение полученного таким образом предварительного облика ЛА проводится на стадиях структурного, обличкового и компоновочного проектирования.

В а р и а н т 2: $\Phi(r^*) \neq 0$. Создание перспективного ЛА, удовлетворяющего комплексу заявленных требований, на текущем уровне научно-технологического развития авиастроения, невозможно, т.е. существует дефицит функциональных свойств проектируемого ЛА. Этот дефицит может быть устранен за счет расширения границ $r_{i\min}, r_{i\max}$, $i = \overline{1, n}$, исходного множества допустимых значений ЛТХ W_r в результате внедрения новых научно-технологических решений. Иными словами, с учетом возможности внедрения передовых технологий формируется новое множество ЛТХ W_r^* , в пределах которого обеспечивается одновременное выполнение условий (1.1).

Рассмотрим эту задачу более подробно. Ранее мы уже упоминали о том, что, задача устранения дефицита функциональных свойств перспективного ЛА может быть интерпретирована как обобщенная задача оптимизации [1], в которой множество допустимых значений ЛТХ W_r становится дополнительным параметром оптимизации:

$$\Phi(W_r^*, r^*) = \min_{W_r \in \Xi} \min_{r \in W_r} \Phi(r) = 0, \quad (2.9)$$

где Ξ — семейство всех (любых) множеств допустимых значений ЛТХ, которые могут быть сформированы с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений.

Как подчеркивалось выше, внедрение любого перспективного научно-технологического решения требует финансовых и временных затрат. Учитывая это, определим затраты на устранение дефицита функционального свойства, связанного с i -й ЛТХ, на основе выражения:

$$D_i(r) = \begin{cases} d_i^1(r_i - r_{i\min}), & r_i < r_{i\min}, \\ 0, & r_{i\min} \leq r_i \leq r_{i\max}, \\ d_i^2(r_i - r_{i\max}), & r_i > r_{i\max}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Функция $d_i^1(r_i - r_{i\min})$ в (2.10) является строго положительной и выражает финансовые или временные затраты, связанные с разработкой и внедрением научно-технологических решений, обеспечивающих расширение диапазона возможных значений ЛТХ r_i путем уменьшения ее минимального $r_{i\min}$ значения.

Соответственно функция $d_i^2(r_i - r_{i\max})$ также строго положительная и используется для оценки финансовых или временных затрат, связанных с разработкой и внедрением научно-технологических решений, направленных на увеличение максимального $r_{i\max}$ значения ЛТХ r_i .

Конкретный вид этих функций определяется экспертным путем на основе обобщения опыта и знаний специалистов в области проектирования авиационной техники, а также с учетом накопленного опыта проектирования ЛА различных типов.

С учетом (2.10) обобщенные затраты на устранение дефицита функциональных свойств проектируемого ЛА по всему набору ЛТХ можно определить следующим образом:

$$D(r) = \sum_{i=1}^n D_i(r). \quad (2.11)$$

Заметим, что влияние перспективных научно-технических решений проявляется не только изменением размеров исходного множества ЛТХ W_r , но и его формы, поскольку внедрение этих решений корректирует в том числе характер связей между компонентами вектора ЛТХ.

Алгоритмы оптимизации формы и размеров множеств допустимых значений параметров путем их направленной деформации рассматриваются в рамках обобщенного минимаксного подхода [3–5]. Однако эти алгоритмы имеют общетеоретический характер, т.е. фактически неприменимы для практических инженерных расчетов.

Учитывая это, в [1] предложен алгоритм приближенного построения множества W_r^* в классе параллелепипедов за счет расширения границ $r_{i\min}, r_{i\max}, i = \overline{1, n}$, исходного параллелепипеда W_r . При этом, к сожалению, предложенный алгоритм не учитывает возможные затраты на реализацию перспективных научно-технических направлений, что может привести к заведомо нереализуемым проектным решениям. В настоящей статье описывается развитие алгоритма, предложенного в [1], позволяющее определить приоритетные направления научно-технологического развития с учетом возможных затрат на их развитие и внедрение.

Алгоритм объединяет ряд последовательных шагов, содержание которых приводится ниже.

Шаг 1. Формируется начальное приближение W_r^0 для множества допустимых значений ЛТХ, в качестве которого принимается исходный параллелепипед W_r :

$$W_r^0 = \{r : r_{i\min}^0 \leq r_i \leq r_{i\max}^0, i = \overline{1, n}\}, \quad (2.12)$$

где $r_{i\min}^0 = r_{i\min}, r_{i\max}^0 = r_{i\max}, i = \overline{1, n}$.

Дальнейшая процедура, обеспечивающая получение множества W_r^* , направленного на устранение дефицита функциональных свойств проектируемого ЛА, базируется на методе оптимизации нулевого порядка – методе покоординатного спуска [6]. Заметим, что описываемая ниже процедура во многом повторяет алгоритм параметрической оптимизации доверительных множеств в классе кубов, изложенный в [5].

Шаг 2. Последовательно варьируется значение $r_{1\min}$ в сторону уменьшения:

$$r_{1\min}^k = r_{1\min}^0 - k\delta r_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.13)$$

где δr_1 – заданный шаг поиска по компоненте r_1 . При этом предельные значения всех других компонент вектора r принимаются равными их исходным значениям: $r_{1\max} = r_{1\max}^0, r_{i\min} = r_{i\min}^0, r_{i\max} = r_{i\max}^0, i = \overline{2, n}$. Таким образом, для каждого нового значения $r_{1\min}^k$ имеем приближение $W_r^k \in \Xi$ для множества W_r^* , задаваемое совокупностью условий:

$$W_r^k = \{r : r_{1\min}^k \leq r_1 \leq r_{1\max}^0, r_{j\min}^0 \leq r_j \leq r_{j\max}^0, j = \overline{2, n}\}. \quad (2.14)$$

Шаг 3. Для множества W_r^k решается задача оптимизации

$$D(r) \rightarrow \min_{r \in W_r^k}, \quad (2.15)$$

где $D(r)$ определяется в виде (2.11) и учитывается ограничение

$$\Phi(r) = 0. \quad (2.16)$$

В результате находится вектор r^k , обеспечивающий выполнение многодисциплинарных требований, предъявляемых к перспективному ЛА с учетом внедрения перспективных научно-технических решений, и оценка затрат на их реализацию $D(r^k)$.

Шаг 4. Выполняется перебор значений $r_{1\min}^k, k = 1, 2, 3, \dots$, в результате чего находится, во-первых, граница $r_{1\min}^*$, во-вторых, соответствующее этой границе множество $W_r^* \in \Xi$, определяемое условиями (2.14), а также вектор ЛТХ $r^*(r_{1\min}^*)$, при которых достигается минимум затрат $D(r^*(r_{1\min}^*)) = d_1^1(r_{1\min}^0 - r_{1\min}^*)$ на разработку и внедрение новых научных и технологических решений, использование которых обеспечивает выполнение заявленных требований $\Phi(r^*(r_{1\min}^*)) = 0$.

Шаг 5. Оценивается эффективность использования перспективных технологий, направленных на увеличение значения $r_{1\max}^0$. Для этого последовательно варьируется значение $r_{1\max}$ в сторону увеличения:

$$r_{1\max}^k = r_{1\max}^0 + k\delta r_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

При этом предельные значения всех других компонент вектора r принимаются равными их исходным значениям:

$$r_{1\min} = r_{1\min}^0, \quad r_{ij\min} = r_{j\min}^0, \quad r_{j\max} = r_{j\max}^0, \quad j = \overline{2, n}.$$

Таким образом, для каждого нового значения $r_{1\max}^k$ имеем приближение $W_r^k \in \Xi$ для множества W_r^* , задаваемое совокупностью условий:

$$W_r^k = \{r : r_{1\min}^0 \leq r_1 \leq r_{1\max}^k, r_{j\min}^0 \leq r_j \leq r_{j\max}^0, j = \overline{2, n}\}. \quad (2.18)$$

Для каждого приближения W_r^k решается задача условной оптимизации (2.15), (2.16). В итоге определяется вектор ЛТХ $r^*(r_{1\max}^k)$, при которых достигается минимум затрат $D(r^*(r_{1\max}^k)) = d_1^2(r_{1\max}^k - r_{1\max}^0)$, связанных с внедрением новых научных и технологических решений, использование которых обеспечивает выполнение заявленных требований $\Phi(r^*(r_{1\max}^k)) = 0$.

Аналогичным образом оценивается возможность выполнения заданных требований, предъявляемых к перспективному ЛА, за счет изолированной коррекции предельных значений $r_{j\min}^0, r_{j\max}^0, j = \overline{2, n}$, всех других компонент вектора ЛТХ.

В результате работы описанного алгоритма определяется набор векторов $r^*(r_{i\min}^*), r^*(r_{i\max}^*), i = \overline{1, n}$, описывающих в первом приближении варианты обликов перспективного ЛА, которые могут быть получены за счет внедрения новых научно-технических решений и удовлетворяют набору заданных требований:

$$\Phi(r^*(r_{i\min}^*)) = 0, \Phi(r^*(r_{i\max}^*)) = 0$$

с оценками затрат $D(r^*(r_{i\min}^*)), D(r^*(r_{i\max}^*))$ на их реализацию.

Решение принимается в пользу того варианта $\hat{r}$, реализация которого сопряжена с наименьшими затратами:

$$D(\hat{r}) = \min_{i=\overline{1, n}} \{D(r^*(r_{i\min}^*)), D(r^*(r_{i\max}^*))\}. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) определяет конкретную компоненту вектора ЛТХ и предпочтительное с учетом необходимых затрат направление расширения ее предельных значений. Это направление предполагает формирование соответствующего научно-технологического задела в форме научных и технологических решений, определяющих перспективные области деятельности.

Таблица 1. Состав показателей, определяющих требования к перспективному самолету

Наименование показателя, I_j	Минимальное значение, $I_{j\min}$	Максимальное значение, $I_{j\max}$
Весовая отдача	0.28	0.8
Относительная масса конструкции	0.1	0.3
Крейсерская скорость, км/ч	300	900
Скорость отрыва, км/ч	0	100
Длина пробега, м	400	1200
Скорость посадочная, км/ч	0	100
Длина разбега, м	300	1200
Время разбега, с	0	50

Рассмотрена возможность удовлетворения ограничений, описывающих функциональные свойства проектируемого ЛА, за счет изолированного изменения предельных значений отдельных компонент вектора ЛТХ. Если подобная схема не позволит обеспечить выполнение набора условий (1.1) или ее реализация потребует недопустимых временных или финансовых затрат, возможен более сложный вариант описанного алгоритма за счет одновременной коррекции предельных значений двух и более компонент вектора ЛТХ.

Практическая реализация приведенного алгоритма требует многократного решения задач условной оптимизации, подобных (2.15), (2.16). Для этого может быть использован алгоритм на основе метода направленного случайного поиска [7]. Существенным преимуществом такого алгоритма является возможность распараллеливания вычислений. Работа алгоритма требует генерирования реализаций непрерывной равномерно-распределенной на интервале (0.1) случайной величины, для чего применен мультипликативный датчик равномерно-распределенных псевдо-случайных чисел [8]:

$$\alpha_i = \{M\alpha_{i-1}\}, \quad (2.20)$$

где $i = 1, 2, \dots, M = 1220703125$, $\alpha_0 = 2^{-32}$, фигурные скобки в (2.20) означают дробную часть числа.

Для моделирования реализаций дискретной равномерно-распределенной случайной величины, задаваемой условием

$$P(X(\omega) = x_k) = \frac{1}{K}, \quad k = \overline{1, K},$$

использован алгоритм:

$$\gamma_i = \min_k \left(\left(\alpha_i - \frac{k}{K} \right) < 0 \right), \quad (2.21)$$

где α_i находится в соответствие с (2.20).

В следующем разделе рассматривается задача оценки дефицита функциональных свойств перспективного ЛА применительно к проектированию самолета транспортной категории.

3. Пример оценки дефицита функциональных свойств перспективного самолета транспортной категории. Рассмотрим процесс формирования облика перспективного ЛА на примере классического транспортного рампового самолета, который должен обеспечивать беспосадочный перелет на дальность свыше 5000 км, перевоза при этом полезную нагрузку не менее 60 т.

Следуя [1], при формировании облика проектируемого самолета ограничимся только требованиями весовой и динамической эффективности. Это допущение никак не повлияет на реализацию описанного в разд. 2 алгоритма, но обеспечит более наглядное представление результатов.

Исходя из заданных требований к перспективному ЛА, определены предельные значения показателей $I_{j\min}, I_{j\max}, j = \overline{1, N}$ (табл. 1).

Таблица 2. Вектор ЛТХ r , используемый для расчета интегральных показателей, отражающих соответствие проектируемого самолета предъявленным требованиям

Наименование ЛТХ, r_i	Минимальное значение, $r_{i\min}$	Максимальное значение, $r_{i\max}$
Коэффициент лобового сопротивления на посадке	0.33	0.34
Количество двигателей, шт.	4	4
Тяга двигателя максимальная, кгс	8290	8300
Максимальное значение коэффициента подъемной силы на взлете	1.9	1.95
Максимальное значение коэффициента подъемной силы на посадке	2.4	2.45
Вес перевозимой целевой нагрузки, кг	60000	60000
Дальность полета, км	5000	5000
Степень двухконтурности двигателя	4.4	4.5
Стреловидность крыла, град.	25	27
Площадь крыла, m^2	200	210
Размах крыла, м	50	60
Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме	0.01	0.02
Время разбега, с	0	50

Таким образом, приемлемым полагается облик проектируемого ЛА, для которого выполняется следующая совокупность условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.28 \leq I_1(r) \leq 0.8, \\ 0.1 \leq I_2(r) \leq 0.3, \\ 300 \leq I_3(r) \leq 900, \\ 0 \leq I_4(r) \leq 100, \\ 400 \leq I_5(r) \leq 1200, \\ 0 \leq I_6(r) \leq 100, \\ 300 \leq I_7(r) \leq 1200, \\ 0 \leq I_8(r) \leq 50. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

В табл. 2 приведен перечень ЛТХ (компонентов вектора r), используемых для расчета интегральных показателей $I_j(r)$, $j = \overline{1,8}$, представленных в табл. 1.

Конкретные значения этих ЛТХ получены на основе обобщения накопленного общемирового опыта проектирования транспортных рамповых самолетов и отражают текущий научно-технический уровень развития авиастроения. Значения, присутствующие в табл. 2, задают в 13-мерном пространстве исходное множество ЛТХ W_r .

Зависимости $I_1(r) - I_8(r)$, связывающие показатели, описанные в табл. 1, с компонентами вектора ЛТХ r , определены на основе фундаментальных положений теории полета [9, 10] с использованием соотношений, приведенных в табл. 3.

Обозначения, принятые в выражениях из табл. 3, имеют следующий смысл: l, S, χ – соответственно размах, площадь и стреловидность крыла, C_{x0} – коэффициент лобового сопротивления при нулевом угле атаки, m – часовой расход топлива, $G_{взл}$ – взлетный вес, S – площадь крыльев, $C_{y\maxвзл}$ – максимальное значение коэффициента подъемной силы на взлете, $C_{y\maxпос}$ – максимальное значение коэффициента подъемной силы на посадке, ρ_0 – плотность атмосферы на поверхности земли, $G_{пос}$ – посадочный вес, $V_{пос}$ – посадочная скорость, W – скорость ветра, $K_{пос}$ – аэродинамическое качество на посадке, $f_{тр}$ – коэффициент трения при движении по взлетно-посадочной полосе (ВПП), $V_{отр}$ – скорость отрыва, $P_{ср}$ – среднее значение тяги двигателя в момент

Таблица 3. Соотношения, участвующие в расчете интегральных показателей $I_1(r) - I_8(r)$

Характеристики, участвующие в расчете интегральных показателей, I_j	Выражение для расчета
Удлинение крыла	$\lambda = \frac{l^2}{S}$
Эффективное удлинение крыла, $\lambda_{\text{эф}}$	$\lambda_{\text{эф}} = \frac{\lambda}{1 + \pi \frac{\lambda}{100} \cos^2}$
Коэффициент отвала поляры	$A = \frac{1}{\pi \lambda_{\text{эф}}}$
Коэффициент подъемной силы на крейсерском режиме, $C_{y\text{кр}}$	$C_{y\text{кр}} = \sqrt{\frac{C_{x0}}{A}}$
Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме, $C_{x\text{кр}}$	$C_{x\text{кр}} = c_{x0} + AC_{y\text{кр}}^2$
Статический удельный расход топлива номинальный	$c_{p0} = \frac{0.8}{1 + 0.5 \sqrt{m}}$
Скорость горизонтального полета (крейсерская скорость), $V_{\text{г.п}}$	$V_{\text{г.п}} = \sqrt{\frac{2G_{\text{взл}}}{\rho S C_y}}$
Коэффициент подъемной силы в момент отрыва	$C_{y\text{отр}} = 0.7 C_{y\text{махвзл}}$
Коэффициент подъемной силы на посадке	$C_{y\text{пос}} = 0.7 C_{y\text{махпос}}$
Аэродинамическое качество на посадке	$K = \frac{C_{y\text{пос}}}{C_{x\text{пос}}}$
Аэродинамическое качество на крейсерском режиме	$K = \frac{C_{y\text{кр}}}{C_{x\text{кр}}}$
Потребная тяга, P_n , кгс	$P_n = \frac{G_{\text{взл}}}{K}$
Скорость отрыва, м/с	$V_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{2G_{\text{взл}}}{\rho S C_{y\text{отр}}}}$
Скорость посадочная, м/с	$V_{\text{пос}} = \sqrt{\frac{2G_{\text{пос}}}{\rho S C_{y\text{пос}}}}$
Длина пробега, $L_{\text{пр}}$, м	$L_{\text{пр}} = \frac{(V_{\text{пос}} \mp W)^2}{g \left(\frac{1}{K_{\text{пос}}} + f_{\text{тр}} \right)}$
Длина разбега, L_p , м	$L_p = \frac{(V_{\text{отр}} \mp W)^2}{2g \left(\frac{P_n}{G_{\text{взл}}} - f_{\text{тр}} \right)}$
Удельный расход топлива на крейсерском режиме, $C_{\text{уд}}$, кг/кгсч	$C_{\text{уд}} = C_{p0} + \frac{0.4M}{1 + 0.027H}$
Масса топлива, m_t , кг	$m_t = q_{\text{км}} l$ $q_{\text{км}} = \frac{q_{\text{ч}}}{V_{\text{г.п}}}$ $q_{\text{ч}} = C_{\text{уд}} P_n$

Таблица 4. Множество допустимых значений ЛТХ W_r^* , построенное с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений

Наименование ЛТХ, r_i	Минимальное значение, $r_{i\min}$	Максимальное значение, $r_{i\max}$
Коэффициент лобового сопротивления на посадке	0.33	0.34
Количество двигателей, шт.	4	5
Тяга двигателя максимальная, кгс	8290	8551
Максимальное значение коэффициента подъемной силы на взлете	1.9	1.98
Максимальное значение коэффициента подъемной силы на посадке	2.4	2.45
Вес перевозимой целевой нагрузки, кг	60000	60000
Дальность полета, км	5000	5000
Степень двухконтурности двигателя	4.4	4.7
Стреловидность крыла, град.	25	27
Площадь крыла, м ²	200	210
Размах крыла, м	50	60
Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме	0.01	0.02
Масса взлетная, кг	80000	82113

разбега самолета по ВПП, g — ускорение силы тяжести, H — крейсерская высота, M — число Маха на крейсерском режиме, $q_{\text{км}}$ — километровый расход топлива, Δl — длина участка горизонтального полета, q_c — среднечасовой расход топлива на крейсерском режиме.

В результате решения задачи оптимизации (2.8) выяснилось, что в границах исходного множества ЛТХ W_r невозможно определить облик самолета, удовлетворяющий совокупности условий (3.1), т.е. имеет место дефицит функциональных свойств. Следовательно, необходимо найти минимально возможное расширение границ множества W_r допустимых значений ЛТХ и построить новое множество W_r^* с использованием алгоритма, описанного в разд. 2.

Как указывалось выше, получение множества W_r^* должно проводиться с учетом затрат на устранение дефицита функционального свойства, связанных с внедрением перспективных научных и технологических решений, которые определяются на основе (2.10), (2.11). В работе использованы линейные зависимости $d_i^1(r_i - r_{i\min})$, $d_i^2(r_i - r_{i\max})$, $i = \overline{1,13}$, выражающие время, которое, по мнению экспертов, необходимо для практического внедрения тех или иных технологий, позволяющих расширить диапазоны $r_{i\min}$, $r_{i\max}$, $i = \overline{1,13}$, соответствующих компонентов вектора ЛТХ r .

В результате реализации алгоритма (разд. 2) было определено новое множество допустимых значений ЛТХ W_r^* и выделены возможные направления расширения границ исходного множества W_r допустимых значений ЛТХ, представленные в табл. 4 темным цветом.

Как следует из табл. 4, приоритетное значение для создания транспортного рампового самолета, отвечающего всему набору требований, сформулированных в табл. 1, имеют технологии, связанные с совершенствованием силовой установки. Удовлетворить заявленные требования удастся за счет использования пяти двигателей, способных обеспечить максимальную суммарную взлетную тягу на уровне 8551 кгс и обладающих степенью двухконтурности, равной 4.7.

Другим важным направлением исследований является повышение взлетных характеристик самолета, в частности увеличение максимального значения коэффициента подъемной силы на взлете до величины 2.45, например, за счет использования более совершенных средств механизации крыла.

Выделенные направления исследований в совокупности и определяют тот научно-технологический задел, развитие которого позволит создать транспортный самолет, отвечающий заявленным требованиям.

Заключение. Предложена формализация задачи оценки дефицита функциональных свойств проектируемого ЛА как обобщенной задачи оптимизации, в которой множество допустимых значений ЛТХ выступает в качестве дополнительного параметра оптимизации. Разработан алгоритм решения этой задачи с учетом накопленного научно-технического задела в области авиастроения, а также финансовых и временных ограничений.

Рассмотренная формализация позволяет определить приоритетные научно-технологические решения, внедрение которых обеспечит создание ЛА, отвечающего комплексу междисциплинарных требований с минимальными затратами. Оценка этих решений и как результат перспективных направлений развития авиастроения также реализуется с учетом финансовых или временных затрат на разработку и внедрение.

Представлен пример, иллюстрирующий работу описанного алгоритма оценки дефицита функциональных свойств перспективного ЛА на примере проектирования классического рампового транспортного самолета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов К.С., Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Сыпало К.И., Топоров Н.Б. Оптимизация процесса совершенствования авиационных комплексов на базе концепции функционального проектирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 105–123.
2. Evdokimenkov V.N., Toporov N.B., Vavilov D.S. Optimizing the Preliminary Design Profile of an Aircraft // Russian Engineering Research. 2022. V. 42. № 6. P. 599–602
3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, Физматлит, 1976.
4. Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В. О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 73–80.
5. Евдокименков В.Н., Динеев В.Г., Карп К.А. Инженерные методы вероятностного анализа авиационных и космических систем. М.: Физматлит, 2010.
6. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
7. Аттеков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с.
8. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. пособие / Под ред. А.Н. Лебедева и Е.А. Чернявского. М.: Высш. шк., 1986.
9. Балакин В.Л., Лазарев Ю.Л. Динамика полета самолета. Расчет траекторий и летных характеристик: Конспект лекций. Самара: Самарск. гос. аэрокосм. ун-т, 2002. 56 с.
10. Аэромеханика самолета / Под ред. А.Ф. Бочкарева и В.В. Андреевского. М.: Машиностроение, 1985.