

ISSN 0002-3388

Номер 4

Июль - Август 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 4, 2023

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Прямой метод Ляпунова в задаче обеспечения устойчивости компактного минимального множества динамической системы и формирование гало-орбиты в окрестности точки Лагранжа L_2

Г. А. Степаньянц

3

Новый двухуровневый метод машинного обучения для оценивания вещественных характеристик объектов

А. А. Докукин, О. В. Сенько

17

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому

В. С. Пацко, А. А. Федотов

25

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

К вопросу о реализации информационной технологии уточнения эфемерид космических аппаратов ГЛОНАСС на основе использования перспективных аппаратных средств межспутниковых измерений

М. Н. Красильщиков, Д. М. Кружков, В. В. Пасынков

50

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Оптимальный конечномерный регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. I. Неполные точные измерения

Е. А. Руденко

59

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задача граничного управления колебаниями образца слоистого двухфазного композиционного материала

А. А. Егорова, А. С. Шамаев

75

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Сигнатуры первого и второго порядков экстремальных однородных гиперграфов и их связь с векторами степеней вершин

Т. Ю. Гольцова, Е. К. Егорова, В. Ю. Леонов, А. В. Мокряков

84

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Машинное обучение в проблеме технического долга программного обеспечения

В. В. Качанов, С. И. Марков, В. И. Цурков

98

Оперативное целеполагание в иерархических группах активных объектов. I. Выделенная группа

С. К. Галиханов, Б. Е. Федун, Н. Д. Юневич

105

Привилегированное обучение с помощью регуляризации
в задаче оценки позы человека

М. С. Каприлова, Р. Г. Нейчев, А. Д. Тихонова

121

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления
угловым движением космического аппарата

А. В. Молоденков, Я. Г. Сапунков

125

Оптимальное управление переориентацией космического аппарата
за заданное время с квадратичным критерием качества
относительно управляющих и фазовых переменных

М. В. Левский

137

Стабилизация программных движений механических систем
с учетом ограничений

А. Е. Голубев

153

РОБОТОТЕХНИКА

О движении на коньках робота, управляемого внутренним маховиком

Л. А. Климина, Е. С. Шалимова

168

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.01+629.78.015:52

**ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ КОМПАКТНОГО МИНИМАЛЬНОГО
МНОЖЕСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ФОРМИРОВАНИЕ
ГАЛО-ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛАГРАНЖА L2**

© 2023 г. Г. А. Степаньянц

МАИ (национальный исследовательский ун-т) Москва, Россия

e-mail: gssst@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.11.2022 г.

После доработки 22.12.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Показана эффективность применения прямого метода Ляпунова для обеспечения устойчивости движения в компактных инвариантных множествах конечномерных динамических систем. В рамках линейной модели ограниченной задачи трех тел рассматривается возможность обеспечения асимптотической устойчивости периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки Лагранжа L2 с использованием сил светового давления без расхода рабочего тела. Оценивается необходимая площадь управляющих поверхностей в зависимости от массы космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338823030034, EDN: EUFJQP

Введение. При необходимости обеспечить устойчивость невозмущенного движения системы, не являющегося состоянием равновесия, часто переходят к уравнениям в отклонениях, а потом ищут закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы в отклонениях [1–6]. При этом для нелинейных систем уравнения в отклонениях оказываются нестационарными, и нестационарным оказывается также искомый закон управления [1, 4, 5]. Такой подход часто приводит к необходимости подавать на вход системы некоторый программный сигнал, зависящий от времени, а иногда и от параметров системы [7]. В ряде случаев создание такого управляющего сигнала не имеет альтернатив. Однако если нужно обеспечить асимптотическую устойчивость установившегося движения системы, не являющегося состоянием равновесия (например, периодического), нет необходимости в определении конкретной функциональной зависимости состояния системы от времени. Это может быть тогда, когда известно желаемое (или исследуемое) положение целой траектории установившегося движения в пространстве состояний. Как правило, замыкание траектории установившегося движения является ограниченным минимальным множеством динамической системы [8–10]. При этом вместо управления движением в установившемся режиме и обеспечения его асимптотической устойчивости по Ляпунову целесообразно рассматривать задачу обеспечения требуемого поведения системы в окрестности его минимального множества или, другими словами, задачу обеспечения асимптотической устойчивости минимального множества системы. Интуитивно понятные изменения формулировок теорем прямого метода Ляпунова (требуемые, конечно, обоснования) позволяют применить их для построения искомых законов управления. Замечательно, что в нетривиальных случаях (когда минимальное множество не является точкой покоя) пространственная конфигурация минимального множества помогает найти требуемые для решения задачи функции Ляпунова.

Цель статьи — построение законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость движения системы в окрестности минимального множества, не являющегося изолированным состоянием равновесия.

Отличительная особенность предлагаемого подхода представляет собой применение индикаторов минимальных множеств для построения функций Ляпунова, используемых для построения законов управления движением системы в окрестности минимального множества. Сформу-

лированы и доказаны достаточные условия асимптотической устойчивости компактных инвариантных множеств, позволяющие строить эффективные законы управления.

В качестве примера рассматривается задача исследования возможности непрерывного управления движением космического аппарата (КА) в окрестности второй коллинеарной точки Лагранжа системы Солнце–Земля–КА с помощью сил светового давления [7, 11]. Применение прямого метода Ляпунова в предлагаемой редакции позволило получить аналитические выражения для закона управления (линейного с насыщением при обеспечении состояния покоя КА в окрестности точки Лагранжа и нелинейного при обеспечении устойчивости его периодического движения — гало-орбиты). Кроме того, проведена оценка потребной площади управляющих поверхностей при дополнительном условии полного освещения КА (для бесперебойного функционирования солнечных батарей).

1. Постановка задачи. Пусть уравнения движения конечномерной стационарной динамической системы записаны в виде

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = f(x, u(x)), \quad \dim x = n, \quad \dim u(x) = m, \quad u(x) \in U, \quad (1.1)$$

где $u(x)$ — закон управления, U — множество допустимых значений вектора управления, f — непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов. Законом управления, как обычно, назовем зависимость вектора управления от вектора состояния. Если не будет специальных оговорок, допустимыми считаем кусочно-дифференцируемые функции от вектора состояния, значения которых лежат в замкнутом выпуклом множестве U , как правило, ограниченном (т.е. на компакте). Полагаем выполненными требуемые для решения задачи условия управляемости. Условимся, что в уравнении движения (1.1) функция $F(x)$ будет обозначать значение правой части уравнения (1.1) при конкретном выбранном законе управления, так, что $F(x) = f(x, u(x))$. Таким образом, может оказаться, что закон управления является кусочно-дифференцируемой функцией от координат вектора состояния и правая часть (1.1) также окажется кусочно-дифференцируемой функцией. При необходимости (например, в случае релейного закона управления) считаем выполненными условия продолжения решения системы (1.1) на поверхности перехода из одной области гладкости в другую [12].

Условимся в дальнейшем, как обычно, называть компактом (или компактным множеством) замкнутые вполне ограниченные подмножества полного топологического пространства (в контексте данной статьи можно ограничиться замкнутыми ограниченными подмножествами евклидова пространства $\mathbb{R}^n$). Для произвольного множества X через $Cl X$, $Int X$, $Fr X = Cl X \setminus Int X$ обозначены соответственно его замыкание, внутренность и граница.

Будем считать, что необходимо обеспечить асимптотическую устойчивость движения в замкнутом ограниченном инвариантном [8–10] множестве, являющимся замыканием устойчивой по Пуассону траектории, т.е. в минимальном множестве, которое обозначим M . Движение в M назовем устойчивым (асимптотически устойчивым), если устойчиво (асимптотически устойчиво) минимальное множество M , что в свою очередь будет означать выполнение следующего определения.

Определение 1. Компактное минимальное множество M называется устойчивым, если для всякой его ε -окрестности $S_\varepsilon(M)$ найдется такая δ -окрестность $S_\delta(M)$ и такое $\tau \geq 0$, что при любых $x(0) \in S_\delta(M)$ и любых $t > \tau$ состояние системы не выходит за пределы ε -окрестности $S_\varepsilon(M)$, так что $x(t) \in S_\varepsilon(M)$. Если окрестность $S_\delta(M)$ может быть выбрана независимо от $S_\varepsilon(M)$, то минимальное множество M называется асимптотически устойчивым.

Пусть задано управление (или закон управления), обеспечивающее заданное движение в требуемом минимальном множестве M . В случае, если минимальное множество M не является асимптотически устойчивым, требуется найти закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость минимального множества. По возможности желательно оценить область притяжения множества M снизу, т.е. указать такое множество начальных условий, для которого все начинающиеся в нем движения асимптотически сходятся к M .

В качестве примера рассмотрим задачу обеспечения асимптотической устойчивости установленного движения КА в окрестности коллинеарной точки Лагранжа L_2 системы Солнце–Земля [6].

2. Решение задачи. Нам понадобится следующее очевидное расширение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости применительно к устойчивости инвариантных множеств и рас-

пространение понятий знакопостоянных и знакоопределенных функций на замкнутые инвариантные множества.

О п р е д е л е н и е 2. Неотрицательная непрерывная функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат вектора состояния, заданная в окрестности $S(M)$ компактного инвариантного множества M , называется знакопостоянной положительной функцией, если $\mathbf{x} \in M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \in S(M) \setminus M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) \geq 0$). Функция $V_M(\mathbf{x})$ называется знакопостоянной отрицательной, если функция $-V_M(\mathbf{x})$ будет знакопостоянной положительной. Знакопостоянная функция $V_M(\mathbf{x})$ — знакоопределенная, если $V_M(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in M, \mathbf{x} \in S(M) \setminus M \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) > 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Заданная в окрестности $S(M)$ и равная нулю на компактном инвариантном множестве M функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат системы называется функцией Ляпунова, если выполнены следующие два условия.

1. Во всех точках области $S(M) \setminus M$ функция $V_M(\mathbf{x})$ имеет производную по любому направлению.
2. В любой точке $\mathbf{x} \in S(M) \setminus M$ производная функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения (т.е. производная функции $V_M(\mathbf{x})$ вдоль направления, определяемого вектором $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ правой части уравнения (1.1)), и равная

$$V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = W_M(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{V(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}))}{\varepsilon} \right),$$

является знакопостоянной в $S(M)$.

З а м е ч а н и е 1. В тех точках, где функция $V_M(\mathbf{x})$ дифференцируема, ее производная вдоль траекторий движения равна $W_M(\mathbf{x}) = \text{grad}_{\mathbf{x}} V_M(\mathbf{x}) \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$, где точка — знак скалярного произведения. Так как состояние системы $\mathbf{x}$ — функция времени, то производную функции $V_M(\mathbf{x})$, взятую вдоль траекторий движения, называют также полной производной функции $V_M(\mathbf{x})$ по времени, взятой в силу уравнений движения системы.

О п р е д е л е н и е 4. Непрерывная функция $V_M(\mathbf{x})$ от координат системы, заданная в окрестности $S(M)$ минимального (инвариантного) множества M , называется индикатором M , если она равна нулю на M и больше нуля на дополнении M в $S(M)$, т.е. на $S(M) \setminus M$.

2.1. Достаточные условия устойчивости компактного минимального множества.

Т е о р е м а 1. Для устойчивости компактного минимального множества M динамической системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением (1.1) с правой частью $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, достаточно выполнения следующих условий.

1. Найдется знакоопределенная положительная функция Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$, являющаяся индикатором минимального множества M .
2. Функция Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$ равна нулю на многообразии M . Во всех точках множества $S(M) \setminus M$ для любого направления существует производная функции $V_M(\mathbf{x})$ вдоль этого направления.
3. Полная производная по времени от функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения системы, т.е. функция $V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) = W_M(\mathbf{x})$, представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию в окрестности $S(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $V_* > 0$ минимальное значение функции $V_M(\mathbf{x})$ на компакте $\text{Fr } S_\varepsilon(M)$, являющемся границей множества $S_\varepsilon(M)$. Так как $V_M(\mathbf{x})$ непрерывна и равна нулю на M , то найдется такая окрестность $S_\delta(M)$, что $\mathbf{x} \in S_\delta(M) \Rightarrow V_M(\mathbf{x}) < V_*$ & $S_\delta(M) \subset S_\varepsilon(M)$. Значение, принимаемое функцией Ляпунова в процессе движения системы, запишем в следующем виде:

$$V_M(\mathbf{x}(t)) = V_M(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t W_M(\mathbf{x}(\tau)) d\tau. \quad (2.1)$$

Так как $W_M(\mathbf{x}) \leq 0$ & $t \geq 0 \Rightarrow V_M(\mathbf{x}(t)) \leq V_M(\mathbf{x}(0)) = V_*$, то движение, начавшееся в $S_\delta(M)$, никогда не достигнет границы $\text{Fr}S_\varepsilon(M)$. Теорема доказана.

Нам понадобится следующая теорема, которая для инвариантного множества является аналогом теорем Ляпунова и Барбашина—Красовского [2] об асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия стационарной системы.

2.2. Расширенные достаточные условия асимптотической устойчивости компактного инвариантного множества.

Теорема 2. Пусть в ограниченной окрестности $S(M)$ минимального множества M выполняются условия теоремы 1, а множество $S(M)$ содержит подмножество $S_{VM}(c_0) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \leq c_0\}$. В этом случае для асимптотической устойчивости минимального множества M достаточно, чтобы для любого $c \leq c_0$ для множества $S_{VM}(c)$ выполнялось любое из следующих условий.

1. Для любого $\gamma > 0$ замкнутое множество $S_V(c, \gamma) = \{\mathbf{x} : \gamma \leq V_M(\mathbf{x}) \leq c\}$ не является инвариантным и не содержит инвариантного подмножества системы.

2. При любых $0 < \gamma \leq c$ поверхности равных уровней $S_{VC}(\gamma) = \{\mathbf{x} : V_M(\mathbf{x}) = \gamma\}$ не инвариантны и не имеют инвариантных подмножеств системы.

3. Множество $S_{VM}(c) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \leq c\}$ не содержат ω — предельных точек системы (условие Барбашина—Красовского применительно к минимальным множествам).

4. Производная $W_M(\mathbf{x})$ функции $V_M(\mathbf{x})$, взятая вдоль траекторий движения системы, является знакоопределенной отрицательной функцией в $S(M)$, равной нулю на инвариантном множестве M .

Доказательство. 1. Поскольку в силу теоремы 1 состояние системы остаётся внутри множества $S_V(c, 0) = \{\mathbf{x} : 0 \leq V_M(\mathbf{x}) \leq c\}$, а при любом как угодно малом γ множество $S_V(c, \gamma) = \{\mathbf{x} : \gamma \leq V_M(\mathbf{x}) \leq c\}$ не инвариантно и не содержит инвариантных подмножеств, то для любых начальных условий $\mathbf{x}(0) \in S_V(c, 0)$ найдется такое $\tau > 0$, что $\mathbf{x}(\tau) \in S_V(\gamma, 0)$. Таким образом, условие 1 — перефразировка определения асимптотической устойчивости из определения 1 и поэтому справедливо.

2. Так как любая поверхность равных уровней $S_{VC}(\gamma)$ является подмножеством $S_V(c, \gamma)$, то нарушение условия 2 влечет за собой нарушение условия 1. При доказательстве теоремы 1 было показано, что значения функции Ляпунова $V_M(\mathbf{x})$ не возрастают. Предположим, нарушая условия теоремы, что существует инвариантное подмножество G , указанное в условии 1. Так как замыкание инвариантного множества инвариантно, не нарушая общности, можно считать G замкнутым минимальным множеством, а так как $S(M)$ ограничено, то G — компактно. На компакте G функция Ляпунова будет принимать свое минимальное положительное значение, не возрастающее при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, постоянное на G , откуда вытекает, что нарушение условия 1 влечет нарушение условия 2. Таким образом, условия 1 и 2 эквивалентны.

3. Отрицание условия 3 влечет отрицание условия 1, поскольку множество ω — предельных точек замкнуто и инвариантно, а поэтому наличие предельной точки в $S_{VM}(c)$ противоречит условию 1. Любая бесконечная последовательность точек компактна и содержит сходящуюся подпоследовательность, поэтому нарушение условия 1 означает наличие хотя бы одной предельной точки, т.е. условия 1 и 3 эквивалентны.

4. Если выполнено условие 4, то любая поверхность равного уровня $S_{VC}(\gamma) = \{\mathbf{x} : V_M(\mathbf{x}) = \gamma\}$ является компактом, на котором производная W_M принимает свое не равное нулю максимальное значение (отрицательное), и поэтому состояние системы не может оставаться на множестве $S_{VC}(\gamma)$ в течение конечного промежутка времени и выполнение условия 4 влечет за собой справедливость условия 2. Теорема доказана.

2.3. Оценка области притяжения компактного инвариантного множества.

Следствие теоремы 2. Из доказательства теоремы следует, что любое множество $S_{VM}(c_0)$, заданное соотношением $S_{VM}(c_0) = \{\mathbf{x} : 0 < V_M(\mathbf{x}) \leq c_0\} \subset S(M)$, лежит в области притяжения инвариантного множества M и поэтому может служить оценкой снизу этой области притяжения. Наилучшей оценкой снизу, которая может быть построена на основании выбранной

функции Ляпунова, очевидно, является та, которая соответствует максимальному значению параметра c_0 .

Для полноты добавим теорему о неустойчивости инвариантного множества в форме, практически совпадающей с классическими формулировками теорем Ляпунова о неустойчивости нулевого состояния равновесия системы в отклонениях.

2.4. Достаточные условия неустойчивости компактного инвариантного множества.

Теорема 3. Для неустойчивости компактного инвариантного множества M динамической системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением (1.1) с правой частью $F(x)$, достаточно выполнения следующих условий.

1. Найдётся функция Ляпунова $V_M(x)$, являющаяся индикатором множества M .
2. В любой как угодно малой окрестности множества M найдется такая точка, в которой функция $V_M(x)$ принимает положительные значения.
3. Во всех точках множества $S(M) \setminus M$ для любого направления существует производная функции $V_M(x)$ вдоль этого направления.
4. Полная производная по времени от функции $V_M(x)$, взятая вдоль траекторий движения системы, т.е. функция $V'(x, F(x)) = W_M(x)$, представляет собой знакоопределенную положительную функцию в окрестности $S(M)$.

Доказательство опускается, поскольку является перефразировкой доказательства соответствующей теоремы Ляпунова о неустойчивости нулевого состояния равновесия системы в отклонениях.

Замечание 2. Иногда при исследовании кусочно-гладких динамических систем минимальное компактное множество, устойчивость которого оценивается, удобно бывает представить в виде замыкания пересечений конечного числа связных открытых множеств. В этом случае может оказаться полезным следующее утверждение.

2.5. Устойчивость инвариантных множеств, являющихся пересечением конечного числа областей.

Теорема 4. Пусть инвариантное компактное множество M динамической системы представляет собой замыкание пересечения конечного числа открытых множеств G_k :

$$M = \text{Cl} \bigcap_{k=1}^h G_k = \bigcap_{k=1}^h \text{Cl} G_k.$$

В этом случае для асимптотической устойчивости множества M достаточно выполнения следующих двух условий.

1. Каждое множество G_k содержит M в качестве подмножества и может быть представлено в виде $G_k = \{x : V_k(x) < C_k\}$, где V_k — непрерывные дифференцируемые функции, равные нулю на множестве M и непрерывно дифференцируемые во всех точках $G_k \setminus M$ (в дополнении M в G_k), область определения которых совпадает с G_k .

2. Производная по времени $V'_k(x)$ любой функции V_k вдоль траекторий динамической системы — непрерывная функция от x , а ее значения во всех точках $x \notin M$ строго отрицательны.

Доказательство. Обозначим через $\hat{G}_m$ множества:

$$\hat{G}_m = G_m \setminus \bigcup_{k=m+1}^h G_k,$$

положим

$$G_{Ck} = \left\{ x : V_k(x) \leq C = \min_k C_k \right\}$$

и введем функцию $V(x)$, значение которой определим соотношением $x \in \hat{G}_m \Rightarrow V(x) = V_m(x)$. Пусть

$$G_{CV} = \{x : V(x) \leq C\} = \bigcup_k G_{Ck},$$

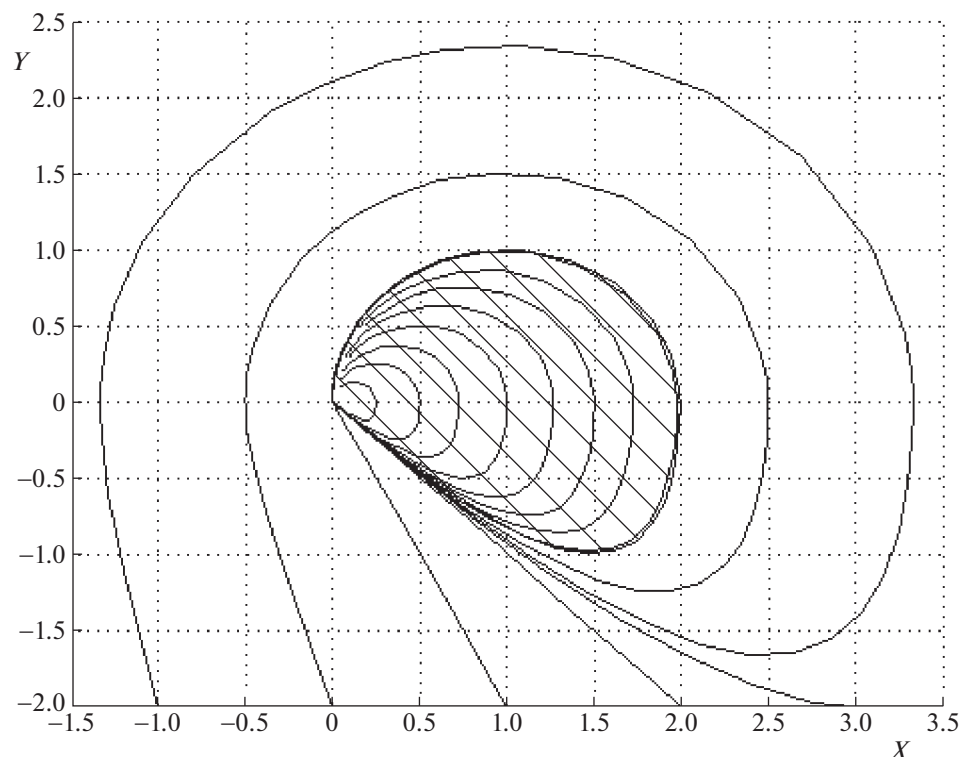


Рис. 1. Фазовый портрет системы 3

а $S_\varepsilon(M)$ — открытая окрестность множества M . Рассмотрим множество $G_{\varepsilon C} = G_{CV} \setminus S_\varepsilon(M)$ и функцию $V(x)$. Заданное таким образом множество $G_{\varepsilon C}$ является компактом, на границе которого функция V принимает значение C , а в любых внутренних точках ее значение не превышает C . Каждой точке $x \in G_{\varepsilon C}$ соответствует значение производной $V'(x) = V'_k(x)$ при $x \in \hat{G}_k$, и хотя $V'(x)$ может не быть непрерывной, но она интегрируема и принимает на $G_{\varepsilon C}$ свое максимальное (отрицательное) значение. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получим, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ при любых начальных условиях, лежащих в окрестности G_{CV} , движение системы за конечное время достигнет окрестности $S_\varepsilon(M)$. Теорема доказана.

Например, рассмотрим кусочно-гладкую систему второго порядка, дифференциальные уравнения движения которой записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y), \\ y \leq 0 &\Rightarrow f(x, y) = -2x - 3y, \quad x = 0 \text{ \& } y = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0, \\ y > 0 \text{ \& } (x-1)^2 + y^2 > 1 &\Rightarrow f(x, y) = -x + 1, \\ y > 0 \text{ \& } (x-1)^2 + y^2 \leq 1 &\Rightarrow f(x, y) = -x + \frac{x^2 + y^2}{2x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эта система имеет единственное неустойчивое нулевое состояние равновесия, причем все движения системы при $t \rightarrow \infty$ сходятся к этому состоянию равновесия. Для траекторий этой системы, лежащих в ограниченной области, т.е. устойчивых по Лагранжу, состояние равновесия является одновременно и α и ω предельной точкой, что и определяет его неустойчивость по Ляпунову (для остальных траекторий нулевое состояние равновесия представляет собой только ω предельную точку). Фазовый портрет этой системы показан на рис. 1.

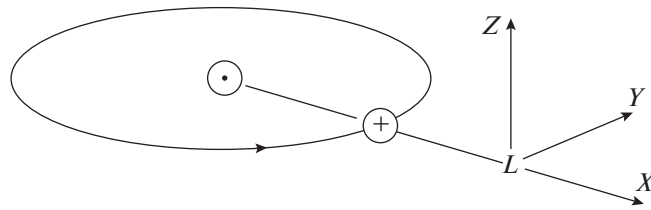


Рис. 2. Система координат, связанная с точкой Лагранжа

Объединение G всех обыкновенных (орбитно устойчивых) траекторий системы (2.2) лежит в ограниченной открытой области $G = \text{Int } G$, выделенной на рисунке штриховкой. В рассматриваемом случае эти траектории начинаются и заканчиваются в окрестности неустойчивого нулевого состояния равновесия. Их объединение является связным открытым ограниченным инвариантным множеством системы и может быть представлено в виде $G = \{ \langle x, y \rangle : \Phi(x, y) < 0 \}$, причем функция $\Phi(x, y)$ задается соотношениями $y > 0 \Rightarrow \Phi(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1$, $y \leq 0 \Rightarrow \Phi(x, y) = (2x + y)^2 - 8(x + y)$. Замыкание этого множества также инвариантно, а его граница состоит из двух особых (орбитно неустойчивых) траекторий — нулевого состояния равновесия и траектории, проходящей через точку $(2, 0)$.

Зададим $V(x, y) = \Phi(x, y)$ при $\Phi(x, y) \geq 0$. При $\Phi(x, y) \leq 0$ положим $V(x, y) = 0$. Такая функция $V(x, y)$ является индикатором инвариантного множества G . Ее производная, взятая вдоль траекторий движения системы, равна нулю при $y > 0$, а при $y < 0$ отрицательна. Поверхности ее равных уровней (линии) не содержат инвариантных подмножеств (в данном случае — состояний равновесия). Таким образом, на основании теоремы 2 компактное инвариантное множество G асимптотически устойчиво. Применение такой функции Ляпунова к замкнутым инвариантным множествам, являющимся строгими подмножествами множества G , приведет к равенству нулю производной функции Ляпунова. Таким образом, эти множества окажутся устойчивыми, но не асимптотически.

В [3] был предложен принцип построения такого закона управления, который обеспечивает наиболее быстрое затухание значений выбранной функции Ляпунова. Такой же закон управления обеспечивает наибольшее значение оценки снизу области притяжения стабилизируемого состояния равновесия [5]. Применительно к рассматриваемой задаче построения закона управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость минимального множества, закон управления целесообразно строить следующим образом. Выбирается знакоопределенная положительная функция $V_M(\mathbf{x})$, являющаяся индикатором минимального множества M и такая, производная которой $V'(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = W_M(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, взятая вдоль траекторий движения, зависит от управления $\mathbf{u}$. Если удастся найти такой допустимый закон управления $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, при котором $V_M(\mathbf{x})$ по-прежнему остается индикатором минимального множества M и вместе с тем выполняются условия теорем 1 и 2, то задача обеспечения асимптотической устойчивости минимального множества M считается решенной. Оптимальным для выбранной функции Ляпунова называем закон управления, обеспечивающий минимальное значение производной этой функции. Естественно, такой минимум предполагается существующим. Как правило, в таких случаях множество допустимых значений управления является замкнутым и ограниченным.

3. Пример. 3.1. Задача обеспечения асимптотической устойчивости периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки L2. Решение будем искать в рамках линейной модели ограниченной круговой задачи трех тел [6]. Систему дифференциальных уравнений движения центра масс КА запишем в правой вращающейся системе координат [4]. Центр системы координат поместим в точке Лагранжа (L2), ось X направим вдоль оси Солнце–Земля ($\odot$, $\oplus$) в сторону от Солнца, ось Y — по направлению вектора скорости Земли, ось Z — перпендикулярно плоскости орбиты Земли (рис. 2).

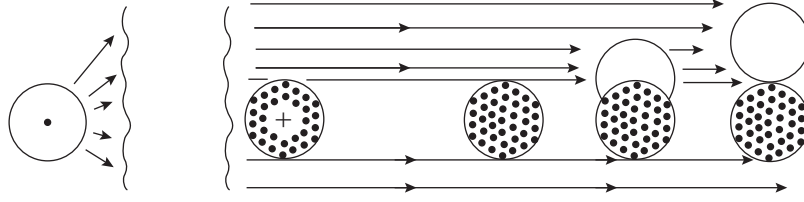


Рис. 3. Условие выхода КА из полутени

Линейное приближение для такой системы, записанное для ускорений КА, будет иметь следующий вид [4]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= (2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + 2\Omega_0 y_2 + \frac{u_x}{m}, \\
 \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\
 \frac{dy_2}{dt} &= (\Omega_0^2 - C_0)y_1 - 2\Omega_0 x_2 + \frac{u_y}{m}, \\
 \frac{dz_1}{dt} &= z_2, \\
 \frac{dz_2}{dt} &= -C_0 z_1 + \frac{u_z}{m}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

В этих уравнениях u_x, u_y, u_z — проекции на координатные оси действующих на КА сил, Ω_0 — угловая скорость вращения Земли по орбите, mC_0 — гравитационные силы, действующие на КА, m — масса КА, $C_0 = k(m_\odot/(r_\oplus + r_L)^3 + m_\oplus/r_L^3)$, константа k — гравитационная постоянная, $m_\odot$ — масса Солнца, $m_\oplus$ — масса Земли, $r_\oplus$ — расстояние от Земли до Солнца, r_L — расстояние от Земли до точки Лагранжа.

В [7, 11] в качестве управляющих сил, стабилизирующих движение КА, предложено рассматривать силы светового давления. Величину и направление этих сил будем задавать с помощью изменения эффективной площади и пространственного положения управляющих отражающих поверхностей (включая солнечные батареи).

Из точки Лагранжа L_2 диск Земли и диск Солнца видны под одним и тем же углом. Поэтому для длительного функционирования КА необходимо, чтобы он был смещен в плоскости X, Y относительно оси X (требование постоянного функционирования солнечных батарей). Учитывая, что Земля и Солнце видны под малым углом (примерно 1°), для полного освещения КА требуется его смещение относительно оси X на величину диаметра Земли (рис. 3).

При меньшем смещении видимый диск солнца имеет вид серпа, а КА будет находиться в полутени и его освещенность будет в γ раз слабее, чем при полном видимом диске. Коэффициент γ равен $1 - 2 \arccos \Delta - \Delta \sqrt{1 - \Delta^2}$, где Δ — половина величины смещения КА от оси X в долях земного радиуса.

Применим предлагаемый подход к решению задачи управления установившимся движением КА в окрестности точки Лагранжа. На первом этапе не будем рассматривать вопросы, связанные с реализацией требуемых величин управляющих воздействий. Обозначим через r_0 требуемую величину отклонения КА от точки Лагранжа, необходимую для функционирования солнечных батарей и получения потребного для управления давления солнечного света. Для конкретности примем r_0 , равным диаметру Земли $D_\oplus$. Свободное движение системы (3.1) неустойчиво (ее характеристический многочлен содержит один положительный, один отрицательный и два чисто мнимых корня). Рассмотрим два варианта решения поставленной задачи.

3.2. П е р в ы й в а р и а н т. Требуется создать устойчивое состояние равновесия на расстоянии r_0 от оси X , проходящей через точку Лагранжа и не меняющей свое положение относительно выбранной системы координат. Преимущество такого подхода заключается в равенстве нулю возмущающих воздействий, вызванных наличием кориолисовых ускорений ($2\Omega_0 y_2$ и $2\Omega_0 x_2$) при невозмущенном движении системы. Недостатком является необходимость создания постоянно-го управляющего воздействия, равного $(C_0 - \Omega_0^2)r_0$ (при смещении вдоль оси Y) или $C_0 r_0$ (при смещении вдоль оси Z). Задача решается стандартными методами. Можно предложить, например, следующий линейный закон управления, обеспечивающий автономное управление по каждой координате с максимальной степенью устойчивости:

$$\begin{aligned} u_x &= m(-2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2\Omega_0 y_2 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2), \\ u_y &= m((\Omega_0^2 - C_0)r_0 - 2\Omega_0 x_2 - 2(\sqrt{C_0 - \Omega_0^2})y_2), \\ u_z &= m(-2(\sqrt{C_0})z_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим только, что при любом подходе критическим является смещение КА вдоль оси X , связанное с потерей устойчивости. Для грубой оценки недопустимых величин смещений можно принять равными нулю смещения от номинальных значений вдоль осей Z и Y . При законе управления (3.2) движение вдоль оси X на основании (3.1) будет описываться уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + u_x, \quad u_x = -2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2. \end{aligned}$$

Обозначим через $D_\oplus$ диаметр Земли и перейдем к безразмерному времени и координатам, положив

$$\bar{x}_1 = x_1/D_\oplus, \quad \bar{t} = \Omega_0 t, \quad \bar{x}_2 = x_2/D_\oplus \Omega_0, \quad C = C_0/\Omega_0^2 \approx 3.94.$$

Ограничив управление u_x величиной u_0 , получим систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_1}{d\bar{t}} &= \bar{x}_2, \\ \frac{d\bar{x}_2}{d\bar{t}} &= (2C + 1)\bar{x}_1 + \bar{u}_x, \\ \bar{u}_x &= -2(2C + 1)\bar{x}_1 - 2(\sqrt{2C + 1})\bar{x}_2, \quad |\bar{u}_x| \leq \bar{u}_0. \end{aligned}$$

На рис. 4 показан фазовый портрет этой системы при единичных ограничениях на безразмерную величину управляющего ускорения ($\bar{u}_0 = 1$). Условно можно считать безопасными отклонения в пределах зоны линейности и катастрофическими – выходящие за пределы области притяжения, ограниченной сепаратрисами седла и равной удвоенной зоне линейности.

3.3. В т о р о й в а р и а н т. Требуется обеспечить устойчивое движение КА по круговой орбите радиуса r_0 и периода τ_0 с центром на оси X в плоскости, перпендикулярной оси X .

Поскольку движение должно проходить в плоскости, перпендикулярной оси X , то необходимо гарантировать стабилизацию КА вдоль оси X , что будем считать выполненным путем выбора закона управления

$$u_x = m(-2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 - 2\Omega_0 y_2 - 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2). \quad (3.3)$$

Таким образом, задача сводится к выбору закона управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость предельного цикла радиуса r_0 и круговой частоты $\omega = 2\pi/\tau_0$. Круговую

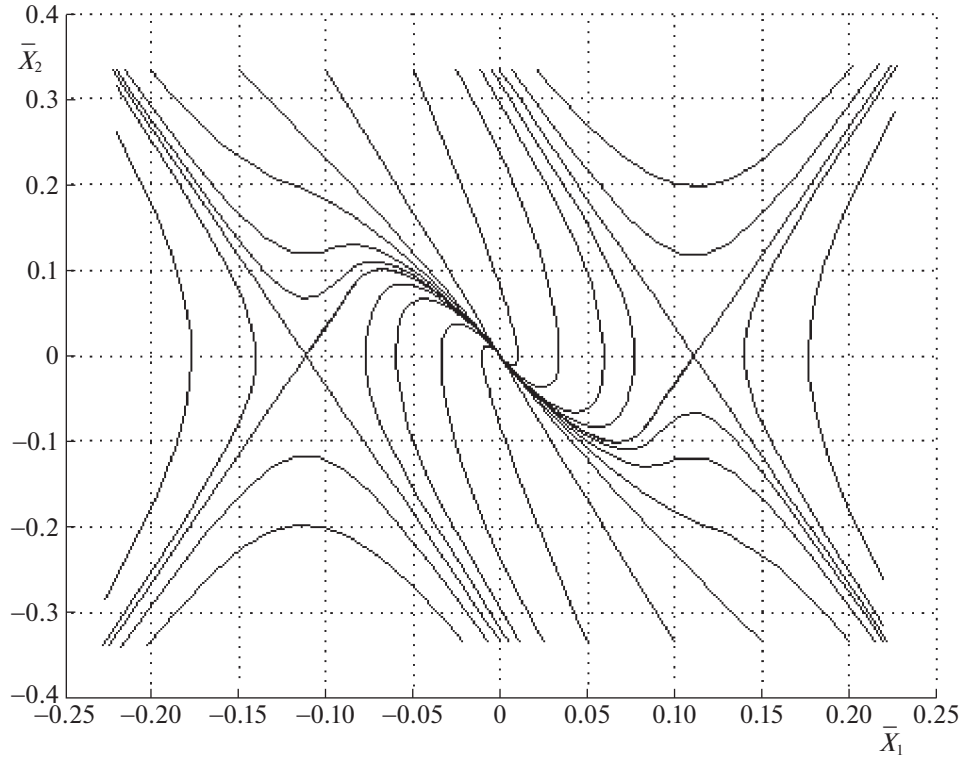


Рис. 4. Фазовый портрет системы стабилизации координаты x

орбиту радиуса r_0 в четырехмерном подпространстве с координатами y_1, y_2, z_1, z_2 можно задать в виде равенства нулю трех функций:

$$\begin{aligned} V_1(y_1, y_2, r_0, \omega) &= (\omega^2 y_1^2 + y_2^2 - \omega^2 r_0^2), \\ V_2(z_1, z_2, r_0, \omega) &= (\omega^2 z_1^2 + z_2^2 - \omega^2 r_0^2), \\ V_3(y_2, z_2, r_0, \omega) &= (y_2^2 + z_2^2 - \omega^2 r_0^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что в качестве индикатора стабилизируемого предельного цикла (являющегося компактным минимальным множеством системы) можно выбрать сумму квадратов этих функций:

$$V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega) = V_1^2(y_1, y_2, r_0, \omega) + V_2^2(z_1, z_2, r_0, \omega) + V_3^2(y_2, z_2, r_0, \omega). \quad (3.5)$$

Производная функции $V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega)$, взятая вдоль траекторий движения, в соответствии с уравнениями (3.1) при законе управления (3.3) равна

$$4(V_1 + V_3)(y_1 \omega^2 - (C_0 - \Omega_0^2)y_1 + u_y)y_2 + 4(V_2 + V_3)(z_1 \omega^2 - C_0 z_1 + u_z)z_2. \quad (3.6)$$

Если при любом $k > 0$ положить

$$\begin{aligned} u_x &= -m(2(2C_0 + \Omega_0^2)x_1 + 2\Omega_0 y_2 + 2(\sqrt{2C_0 + \Omega_0^2})x_2), \\ u_y &= -m(\omega^2 y_1 - (C_0 - \Omega_0^2)y_1 + k(V_1 + V_3)y_2), \\ u_z &= -m(\omega^2 z_1 - C_0 z_1 + k(V_2 + V_3)z_2), \end{aligned} \quad (3.7)$$

то производная (3.6) функции $V(y_1, y_2, z_1, z_2, r_0, \omega)$ будет равна $-4k(V_1^2 y_2^2 + V_2^2 z_2^2 + V_3^2 (y_2^2 + z_2^2))$, что влечет выполнение условий теоремы 1 и первых трех условий теоремы 2. Возможно также использовать “релейное” управление, положив

$$\tilde{u}_x = u_x / \tilde{u}, \quad \tilde{u}_y = u_y / \tilde{u}, \quad \tilde{u}_z = u_z / \tilde{u}, \quad \tilde{u} = \|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (3.8)$$

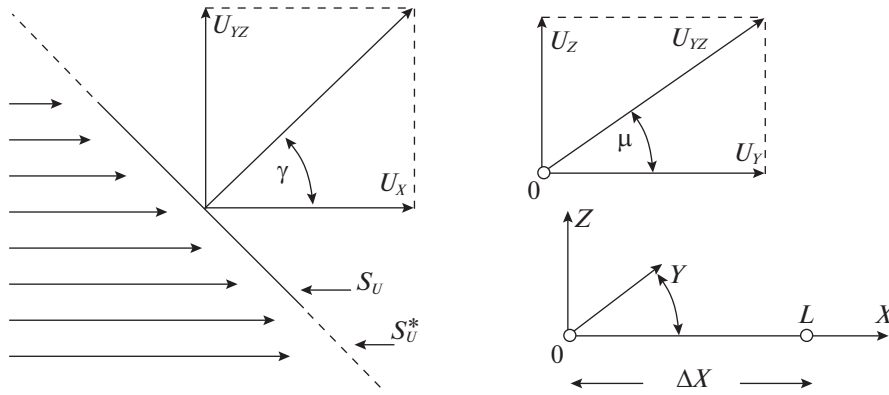


Рис. 5. Создание управляющих сил вдоль координатных осей

Таким образом, функция (3.5) при законе управления (3.7), заданном в окрестности $S(L)$, является функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям асимптотической устойчивости исследуемого предельного цикла.

3.4. Обеспечение управляющих сил и моментов. Осталось рассмотреть возможность создания необходимых для обеспечения устойчивости рассматриваемого цикла управляющих сил и моментов. Пусть S_{SB} — необходимая для функционирования аппаратуры КА площадь поверхности солнечных батарей. Если считать солнечные батареи черным телом, то действующая на них сила светового давления направлена вдоль оси X . Ее величина равна $p_{\odot} S_{SB}$, где $p_{\odot}$ — удельное давление солнечного света на черное тело, $p_{\odot} \approx 0.9 \times 10^{-6}$, Н/м². Управляющие поверхности условно представим в виде набора параллельных друг другу плоских зеркальных элементов. Обозначим через S_U общую площадь всех этих элементов, а через $\mathbf{h}$ — вектор нормали к их поверхности. Будем считать, что величину S_U можно произвольно изменять в пределах от 0 до S_U^* (например, сворачивая отражающую поверхность или изменяя ее прозрачность).

Изменяя угол наклона зеркальных управляющих поверхностей по отношению к световому потоку и их ориентацию по отношению к осям Y и Z , можно получить изменение направления и величины вектора светового давления (рис. 5).

Сила светового давления на управляющую поверхность равна $2p_{\odot} S_U \cos^2 \gamma = p_{\odot} S_U (1 + \cos(2\gamma))$, где γ — угол между направлением светового потока и вектором нормали к плоскости зеркальной управляющей поверхности. Сместим начало координат в сторону Солнца вдоль оси x на величину $\Delta x = p_{\odot} (S_{SB} + S_U) (2C_0 + \Omega_0^2) / m$. Желаемую круговую орбиту КА также сместим в сторону Солнца на величину Δx . Линеаризованные уравнения движения при этом останутся прежними, но значение координаты u_x вектора управления $\mathbf{u}$, изменится. Управление u_x равно проекции вектора управления на ось X : $u_x = p_{\odot} S_U \cos(2\gamma)$. Пусть U_{YZ} — проекция вектора управления на плоскость Y, Z . Очевидно, норма вектора $\mathbf{U}_{YZ}$ равна $u_{yz} = p_{\odot} S_U \sin(2\gamma)$. Если μ — угол между осью Y и вектором $\mathbf{U}_{YZ}$, то управляющие силы равны $u_y = u_{yz} \cos(\mu)$, $u_z = u_{yz} \sin(\mu)$. При этом вектор управления может принимать любые значения внутри трехмерного шара $\hat{U}$, радиус которого равен $p_{\odot} S_U^*$. Ориентация управляющих отражающих поверхностей определяется значениями углов μ , γ и площадью S_U следующими равенствами:

$$\mu = \arctg(u_z/u_y), \quad \gamma = \arctg(u_{YZ}/u_x), \quad S_U = (U_x + p_{\odot} S_U^*) / (2p_{\odot} \cos(2\gamma)).$$

Назовем предельной оценкой снизу нормы вектора управления величину u_* , необходимую для обеспечения невозмущенного движения КА. Траектория такого движения лежит в плоскости Y, Z , координата $x = 0$, а закон управления задается соотношением (3.7). Значение вектора управления для этого случая обозначим $\hat{\mathbf{u}}_*$. Координаты вектора $\hat{\mathbf{u}}_*$ будут равны

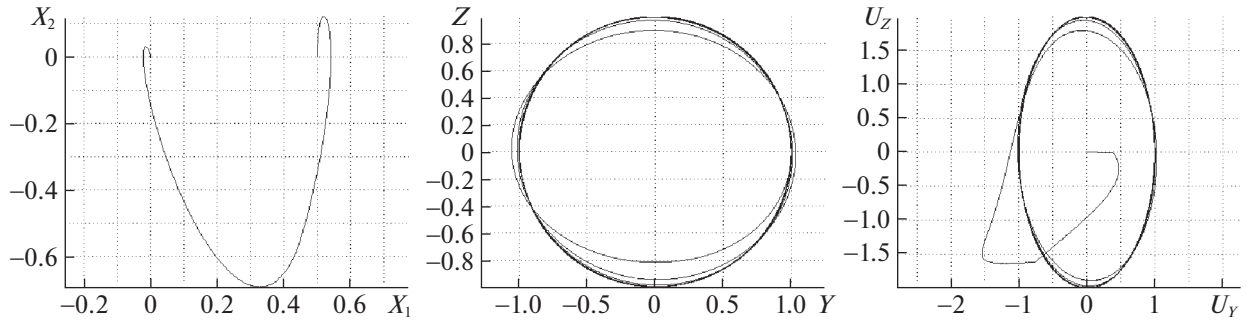


Рис. 6. Проекция траекторий движения на координатные плоскости при минимально допустимых ресурсах управления

$$\hat{u}_x = -2m\Omega_0 y_2 = -2m\Omega_0 \frac{dy}{dt}, \quad \hat{u}_y = m(C_0 - \Omega_0^2 - \omega^2)y_1, \quad \hat{u}_z = m(\omega^2 - C_0)z_1.$$

Для круговой орбиты радиуса $r_0 = D_\oplus$, лежащей в плоскости Y, Z , получим

$$\hat{y}(t) = r_0 \sin(\omega t), \quad \hat{z}(t) = r_0 \cos(\omega t), \quad \frac{dy}{dt} = r_0 \omega \cos(\omega t).$$

Оценим максимальное значение, которое принимает при движении по этой орбите норма вектора управления:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 &= \|\hat{u}_x\|^2 + \|\hat{u}_y\|^2 + \|\hat{u}_z\|^2 = \\ &= m^2 r_0^2 [(4\Omega_0^2 \omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2) \cos^2(\omega t) + (C_0 - \omega^2 - \Omega_0^2)^2 \sin^2(\omega t)] = \\ &= m^2 r_0^2 [(4\Omega_0^2 \omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2) - (2C_0 \Omega_0^2 + 2\Omega_0^2 \omega^2 - \Omega_0^4) \sin^2(\omega t)]. \end{aligned}$$

Так как сомножитель $-(2C_0 \Omega_0^2 + 2\Omega_0^2 \omega^2 - \Omega_0^4)$ отрицателен, то максимум достигается при $t = 0$:

$$\max_t \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2 = m^2 r_0^2 (4\Omega_0^2 \omega^2 + (C_0 - \omega^2)^2).$$

В свою очередь для минимума этого выражения по ω получим два экстремальных значения круговой частоты. Одно из них — тривиальное нулевое (локальный максимум), а другое — $\bar{\omega} = \sqrt{C_0 - 2\Omega_0^2}$ (искомый минимум). Для работоспособности системы необходимо обеспечить величину нормы располагаемых значений управления U^* выше предельной оценки $\hat{u}_* = 2mr_0\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\bar{\omega}^2 + (C_0 - \bar{\omega}^2)^2)}$. Отношение $u^*/\hat{u}_*$ будет при этом играть роль своеобразного запаса ресурса управления. Для зеркальной отражающей управляющей поверхности ее минимальная площадь может быть оценена величиной

$$S_* = \frac{\hat{u}_*}{2p_\odot} = \left(\frac{mr_0}{p_\odot}\right) \Omega_0 \sqrt{(4\Omega_0^2\bar{\omega}^2 + (C_0 - \bar{\omega}^2)^2)}.$$

Сомножитель $\Omega_0\sqrt{(4\Omega_0^2\bar{\omega}^2 + (C_0 - \bar{\omega}^2)^2)}$, равен $\approx 7.76 \times 10^{-14}$, $1/\text{с}^2$. Для грубой оценки можно считать, что на 1 кг массы потребная площадь управляющих поверхностей лежит в пределах от 0.6 до 1 м² в зависимости от реального значения их коэффициента отражения.

З а м е ч а н и е 3. Специфика рассматриваемого примера заключается в том, что для работоспособности системы проекция предельного цикла на плоскость Y, Z должна быть окружностью. Параметры закона управления при установившемся движении не должны выходить на ограничения. Такое требование вызвано принципиальной необходимостью компенсации кориолисовых сил, которая требует практически всех запасов управления.

На рисунках 6 и 7 для закона управления (3.7) показаны проекции траекторий вектора состояний на плоскость X_1, X_2 ($x_1 = x, x_2 = dx/dt$), на плоскость Y, Z и проекция вектора управления на плоскость U_Y, U_Z . Использовалась стандартная безразмерная форма записи дифференциальных

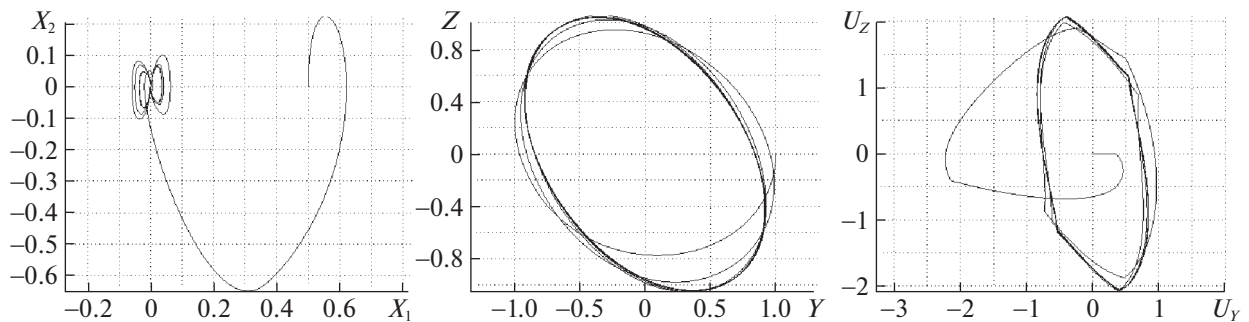


Рис. 7. Проекция траекторий движения на координатные плоскости при дефиците ресурсов управления

уравнений движения. Масштаб времени выбран так, что период обращения Земли вокруг Солнца (безразмерный год) равен 2π . При этом безразмерное значение Ω угловой скорости вращения Земли вокруг Солнца равно 1. За единицу длины выбран диаметр Земли. Безразмерное значение C константы C_0 принято равным $C = 3.94$.

Оптимальное значение угловой скорости вращения КА вокруг точки Лагранжа будет равно $\bar{\omega} = \sqrt{C - 2\Omega^2} \approx 1.393$. Сомножитель $\Omega_0 \sqrt{(4\Omega_0^2 \bar{\omega}^2 + (C_0 - \bar{\omega}^2))}$, равен 2.786 для безразмерной формы ($\Omega_0 = 1$).

Для представления о возможных отклонениях КА от номинальной траектории на рис. 6 показаны проекции траекторий вектора состояний при предельно допустимых значениях ресурсов управления. Величины начальных условий по координатам выбраны соответствующими невозмущенному движению по круговой орбите, лежащей в плоскости Y, Z .

Как видно из рис. 6, после компенсации близких к предельно допустимым значениям координаты x отклонений (левый график), траектория установившегося движения совпадает с окружностью (средний график). Влияние 10% дефицита ресурсов управления показано на рис. 7.

Невозможность полностью компенсировать кориолисовы ускорения приводит к тому, что в установившемся режиме координата $x \neq 0$ (левый график) и поэтому проекция установившегося движения на плоскость Y, Z не является окружностью (средний график). На правом графике рис. 7 видно, что управляющие воздействия периодически выходят на ограничения.

З а м е ч а н и е 4. При решении задачи управляющие воздействия считались безынерционными. Для проверки допустимости такого условия в уравнения движения были включены уравнения привода управляющих поверхностей. Они были записаны в виде $T(du/dt) + u = v$. Безразмерная постоянная времени T была задана равной 0.0014, что соответствует ≈ 12 ч реального времени. Выяснилось, что на графиках практически невозможно отличить траектории такой системы от графиков траекторий системы с безынерционным приводом. Поскольку полтора земных суток, по-видимому, вполне достаточно для разворота управляющих панелей на любой угол, то вполне допустимо при начальных исследованиях считать привод безынерционным.

Заключение. Можно утверждать, что если замыкание траектории установившегося движения является компактным минимальным множеством, т.е. инвариантно, ограничено и не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, то применение прямого метода Ляпунова для построения законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость установившихся движений, может оказаться достаточно эффективным. Дифференцируемые вдоль траекторий движения системы индикаторы минимальных множеств в первую очередь являются претендентами на используемую для построения такого закона функцию Ляпунова.

Приведенный пример применения прямого метода Ляпунова, хотя и не может претендовать на серьёзную практическую значимость, тем не менее, показывает, что постановка задачи использования светового давления для обеспечения длительного функционирования КА в окрестности второй точки Лагранжа, по крайней мере, не бессмысленна. Для КА малой массы (порядка сотен килограмм) управляющие поверхности по площади примерно соответствуют площади солнечных батарей, а следовательно, конструктивно могут быть выполнены в каркасном исполнении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
4. *Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.* и др. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам солнечной системы / Под ред. А.Г. Тучина. М.: АО НПО Лавочкина, 2018.
5. *Степаньянц Г.А.* Теория динамических систем. М.: URSS, Либроком, 2010.
6. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
7. *Forres A., Jorba A.* Station Keeping Close Unstable Equilibrium Points with a Solar Sail. URL. [http://www.maia.ub.es/dsg/2007/0710 farres.pdf](http://www.maia.ub.es/dsg/2007/0710%20farres.pdf).
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ГТТИ, 1947.
9. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941.
10. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГТТИ, 1949.
11. *Novikov D., Nazirov R., Eismont N.* Spacecraft Formation Control in Vicinity of Libration Points Using Solar Sails. Small Satellites for Earth Observation // Selected Proc. 5th Intern. Sympos. of the International Academy of Astronautics / Eds. R. Sandau, A. Valenzuela. Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 2005.
12. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Мат. сб., 1960. Т. 51. № 1.

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 004.93'14,004.021

НОВЫЙ ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ¹

© 2023 г. А. А. Докукин^{а,*}, О. В. Сенько^{а,**}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

*e-mail: dalex@ccas.ru

**e-mail: senkoov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.02.2023 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается новый двухуровневый ансамблевый регрессионный метод, его модификации и применение в прикладных задачах. Ключевой особенностью метода является нацеленность его на построение ансамбля предикторов, хорошо аппроксимирующих целевую переменную, и при этом состоящего из алгоритмов, по возможности отличающихся друг от друга по вычисляемым прогнозам. Построение ансамбля, обладающего указанными свойствами, на первом этапе производится через оптимизацию специального функционала, выбор которого теоретически обосновывается в работе. На втором этапе по сформированным этим ансамблем прогнозам вычисляется коллективное решение. Кроме того, описываются некоторые эвристические модификации, положительно сказывающиеся на качестве прогноза в прикладных задачах. Эффективность метода подтверждается результатами, полученными для конкретных прикладных задач.

DOI: 10.31857/S0002338823040029, EDN: OCEZGW

Введение. Ансамблевые методы имеют весьма продолжительную историю и являются существенной частью технологий машинного обучения, используемых при решении задач обучения по прецедентам: классификации или предсказания числовых переменных [2, 3]. Под ансамблевым методом обычно понимается метод, вычисляющий решения в два этапа: отдельными алгоритмами ансамбля и коллективным алгоритмом.

Среди ансамблевых технологий наибольшее распространение получили метод случайных лесов [4] и метод градиентного бустинга [5]. Данные технологии успешно использовались ранее, в том числе для задач оценивания вещественных характеристик по признаковым описаниям объектов.

Задача обучения по прецедентам в приведенном смысле определяется следующим образом. Рассмотрим совокупность объектов, позволяющих измерить или вычислить n своих числовых характеристик (признаков) $X_1, \dots, X_n$. Пусть для некоторых из этих объектов также измерен целевой признак Y , их будем называть прецедентами. Обучающей выборкой назовем множество прецедентов $S = \{(y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m)\}$, где $y_i, i = \overline{1, m}$ – значения целевой переменной Y для i -го объекта, а x_i – вектор признакового описания i -го объекта, $x_i = (X_1^i, \dots, X_n^i)$. Требуется построить алгоритм A для определения (предсказания) значения Y для остальных объектов: $A(x) = y$. В случае, когда Y принимает категориальные значения, задача может называться задачей классификации, а в случае, когда Y является непрерывной числовой характеристикой, – регрессией.

В методе случайных лесов [4] деревья генерируются независимо с использованием комбинации бэггинга и метода случайных подпространств [6, 7]. Иными словами, каждое новое дерево T_k , добавляемое в ансамбль на шаге k , строится по выборке S_k^b , являющейся выборкой с возвра-

¹ Работа проведена в рамках государственного задания (проект 0063-2016-0003) с помощью инфраструктуры ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН [1].

щением из проекции исходной обучающей выборки $S_k^b \subset S^b = \{(y_1, x_1^b), \dots, (y_m, x_m^b)\}$, где x_i^b — проекция вектора x_i на признаковое подпространство $X^b \subset \{X_1, \dots, X_n\}$. Процесс генерации деревьев прекращается, когда общее число деревьев в ансамбле достигает заранее заданного числа. В методе случайных лесов применяются простые коллективные решения: при решении задач классификации объект относится в тот класс, к которому его отнесло большинство деревьев ансамбля; при решении регрессионных задач коллективный прогноз вычисляется как средний прогноз по ансамблю.

В методах, основанных на градиентном бустинге, каждое новое дерево T_k , добавляемое в ансамбль на шаге k , осуществляет один шаг градиентного спуска. Пусть функция $l(y_j, A(x_j))$ описывает потери, возникающие при использовании в качестве прогноза Y в точке x_j величины $A(x_j)$, например квадратичная ошибка $l(y_j, A(x_j)) = (y_j - A(x_j))^2$. Для обучения вычисляется градиент l по $(A(x_1), \dots, A(x_m))$, $\nabla l = \{r_1, \dots, r_m\}$, где $r_j = \partial l(y_j, A(x_j)) / \partial A(x_j)$, $j = \overline{1, m}$. Очевидно, для квадратичной ошибки $r_j = 2(A(x_j) - y_j)$. Пусть A_k — ансамбль, построенный к k -му шагу:

$$A_1 = T_0,$$

$$A_k = T_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i T_i, \quad k > 1,$$

где T_0 — некоторое начальное приближение, например тождественный ноль. Если теперь T_k обучается по выборке $\{r_1^k, \dots, r_m^k\}$, тем самым аппроксимируя градиент функции потерь при $A = A_k$, а ε_k — шаг градиентного спуска на шаге k , то ансамбль, построенный таким образом, будет с каждым шагом все точнее оптимизировать заданный функционал, а значит, приближать целевую переменную.

Метод случайных регрессионных лесов и метод градиентного бустинга широко применяются при решении разнообразных прикладных задач, демонстрируя во многих случаях высокую эффективность. Причем ни один из них не является бесспорным лидером — на практике встречаются задачи, где то один, то другой из этих методов демонстрируют превосходство, иногда со значительным отрывом. Вместе с тем можно предположить, что два указанных метода не исчерпывают все возможности достижения высокой эффективности ансамблевых решений. Возникает даже желание объединить эти подходы, что в какой-то мере реализуется в предлагаемом методе.

1. Оптимизируемый функционал. В методе случайных лесов ансамбли генерируются случайно, что, очевидно, не обеспечивает их оптимальности. В то же время градиентный бустинг не является в полной мере ансамблевым методом — это, несомненно, сумма алгоритмов, но каждый в отдельности аппроксимирует не целевую переменную, а производные функции потерь. В нашем методе предлагается совместить лучшее из двух подходов. С одной стороны, будем строить ансамбль из разнообразных элементов, каждый из которых в определенной степени случаен, и аппроксимирует целевую переменную. При этом сами элементы будут строиться путем оптимизации специального функционала, к выводу которого мы переходим.

Рассмотрим итерационную процедуру построения ансамбля. Обозначим через $B_i(x)$ произвольный алгоритм: как дерево, так, например, и линейную комбинацию деревьев, получаемый на i -м шаге. К шагу k ансамбль будет состоять из всех алгоритмов, построенных на предыдущих шагах, а ансамблевым решением $A_k(x)$ считаем среднее этих алгоритмов:

$$A_1(x) = O(x),$$

$$A_k(x) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} B_i(x), \quad k > 1,$$

где $O(x)$ — тождественный ноль.

В качестве функционала ошибки нас будет интересовать среднее квадратичное отклонение:

$$L(S, A_k) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m l(y_j, A_k(x_j)) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j))^2.$$

Заметим, что этот функционал можно выразить через средний квадрат отклонения по всем объектам и алгоритмам:

$$\frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - B_i(x_j))^2,$$

для чего рассмотрим последний:

$$\begin{aligned} \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - B_i(x_j))^2 &= \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - A_k(x_j) + A_k(x_j) - B_i(x_j))^2 = \\ &= \frac{k}{km} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j))^2 + \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B_i(x_j))^2 - \\ &- \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - A_k(x_j))(A_k(x_j) - B_i(x_j)) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j))^2 + \\ &+ \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B_i(x_j))^2 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j)) \frac{(A_k(x_j) - B_k(x_j))}{k}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что средний квадрат ошибки для алгоритма A_k вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j))^2 &= \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - B_i(x_j))^2 - \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B_i(x_j))^2 + \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_k(x_j)) \frac{(A_k(x_j) - B_k(x_j))}{k}. \end{aligned}$$

Два слагаемых $L(S, A_k)$ в полученной формуле имеют простую интерпретацию. Первое описывает отклонение прогнозов от истинных значений Y , а второе представляет собой среднюю дисперсию прогнозов для объектов из S . Последнее слагаемое интерпретируется сложнее, но можно сделать несколько наблюдений. Во-первых, оно стремится к нулю при росте размера ансамбля k . Во-вторых, само его появление вызвано желанием упростить алгоритм и определить A_k как сумму слагаемых предыдущих шагов без включения искомого алгоритма, иначе это слагаемое строго равно нулю. Наконец, в дальнейшем метод потребует еще несколько нестрогих переходов и дополнительных эвристик, поэтому не будем включать последнее слагаемое в функционал:

$$L(S, A_k) = \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - B_i(x_j))^2 - \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B_i(x_j))^2. \quad (1.1)$$

Таким образом, оптимальность ансамбля может достигаться за счет двух факторов: хорошей аппроксимации связи Y с переменными $X_1, \dots, X_n$ на обучающей выборке и высокой дисперсии прогнозов обучающих объектов.

Эти рассуждения позволяют выбрать функционал для оптимизации нового слагаемого ансамбля B_k , $B_k = \arg \min_B Q(B, A_k)$. Строгое вычисление прироста качества $L(S, A_k) - L(S, A_{k-1})$ согласно (1.1) приводит к значительному усложнению алгоритма:

$$\begin{aligned} L(S, A_k) - L(S, A_{k-1}) &= \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (y_j - B_i(x_j))^2 - \frac{1}{(k-1)m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} (y_j - B_i(x_j))^2 - \\ &- \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B_i(x_j))^2 + \frac{1}{(k-1)m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} (A_{k-1}(x_j) - B_i(x_j))^2 = \\ &= \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m (y_j - B_k(x_j))^2 + \frac{1}{k(k-1)m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} (y_j - B_i(x_j))^2 - \\ &- \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m (A_k(x_j) - B_k(x_j))^2 - \frac{1}{k(k-1)m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} (A_{k-1}(x_j) - B_i(x_j))^2. \end{aligned}$$

Вклад одного элемента в этот функционал убывает с ростом размера ансамбля, поэтому логичнее для оптимизации отдельного элемента использовать $k(L(S, A_k) - L(S, A_{k-1}))$, а эта разность, в свою очередь, с ростом k приближается к следующему виду:

$$Q(B, A_k) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - B(x_j))^2 - \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B(x_j))^2,$$

что уже значительно удобнее. Тем не менее, $Q(B, A_k)$ не достигает минимума по прогнозам $B(x_1), \dots, B(x_m)$ и требует введения параметра μ , где $\mu \in [0, 1]$. Дальнейшие построения основываются на предположении, что оптимальность ансамбля в смысле обеспечения с его помощью максимальной обобщающей способности будет достигаться для корректирующих деревьев, при которых функционал $Q(B, A_k, \mu)$ минимален:

$$Q(B, A_k, \mu) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - B(x_j))^2 - \mu \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - B(x_j))^2, \quad (1.2)$$

т.е. $B_k = \arg \min_B Q(B, A_k, \mu)$.

Далее функционал (1.2) позволяет применить процедуру градиентного бустинга напрямую для построения элементов ансамбля. Такой подход был реализован в [8] и показал хорошие результаты в практических задачах. Однако он не лишен недостатков. В первую очередь это возростание сложности обучения. Кроме того, возникает необходимость подбирать шаг градиентного бустинга.

Этих недостатков лишено непосредственное построение дерева, оптимизирующего функционал (1.2). Аналогия с градиентным бустингом сохраняется, но B попадает в минимум функционала за один шаг, что снижает сложность и не требует подбора параметра. Однако такой способ связан с некоторыми техническими сложностями и будет целью последующих исследований. Для проверки самой концепции рассмотрим другой подход, реализуемый с помощью стандартных методов scikit-learn [9]. Предположим, что минимум Q достигается в точке $B^*(x_1), \dots, B^*(x_m)$. В качестве B_k может быть использовано регрессионное дерево T_k , обучаемое по выборке $\{(B^*(x_1), x_1), \dots, (B^*(x_m), x_m)\}$. По сложности и количеству параметров этот подход аналогичен предыдущему, но в данной работе мы пожертвуем простотой для достижения дополнительного разнообразия в ансамбле с помощью дополнительных техник, таких, как бэггинг и метод случайных подпространств. Опишем данный подход подробнее.

Предположим, что за первые $k - 1$ шагов получен ансамбль $B_1, \dots, B_{k-1}$. Сгенерируем бутстрэп репликацию S_k^b выборки S в проекции на случайное подпространство, как это описано во Введении. По репликации S_k^b построим регрессионное дерево T_k . Алгоритм B_k ищется в виде суммы $B_k = T_k + t_k$, где t_k — корректирующее дерево, которое строится исходя из условия минимизации $Q(T_k + t_k)$.

Перепишем функционал (1.2) для этой процедуры:

$$Q(t, \mu) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - T_k(x_j) - t(x_j))^2 - \mu \frac{1}{km} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (A_k(x_j) - T_k(x_j) - t(x_j))^2. \quad (1.3)$$

На первом шаге ищется действительный вектор $t^* = t_1^*, \dots, t_m^*$, компонентами которого являются оптимальные смещения прогнозов, вычисляемых деревом T_k , т.е. $t^* = \arg \min Q(t, \mu)$. Минимальное значение функционала $Q(t, \mu)$ по t_j достигается при $\partial Q(t, \mu) / \partial t(x_j) = 0$ или при

$$t(x_j) = t_j^* = \frac{k}{k - \mu} y_j - T_k(x_j) - \frac{\mu}{k - \mu} A_k(x_j), \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.4)$$

Вместе с тем вычисление оптимальных смещений по формуле (1.4) может приводить к снижению точности формируемого алгоритма B_k по отношению к T_k при соблюдении наборов неравенств:

$$B_k(x_k) = T_k(x_j) + t_k(x_j) < T_k(x_j) < y_j \quad (1.5)$$

или

$$B_k(x_k) = T_k(x_j) + t_k(x_j) > T_k(x_j) > y_j. \quad (1.6)$$

Такого снижения точности можно избежать, если при выполнении одного из наборов неравенств (1.5), (1.6) приравнять t_j^* нулю.

Таким образом, описана рекурсивная процедура построения ансамбля алгоритмов. Начиная с пустого ансамбля и тождественного нуля в качестве коллективного решения, затем пополним его суммами пар деревьев, где первое аппроксимирует целевую переменную напрямую, а второе аппроксимирует поправку, минимизирующую функционал $Q(t, \mu)$ (1.3). Построение ансамбля завершается, если k достигает задаваемого пользователем порогового значения N . Ансамбли, которые строятся с помощью представленной выше процедуры, далее будем называть декоррелированными.

2. Коллективное решение и дополнительные эвристики. Наряду со способом генерации ансамбля важную роль для достижения высокой эффективности ансамблевого алгоритма играет процедура, вычисляющая коллективное решение. Хотя ансамбль строится, исходя из соображений минимизации ошибки усредненного ответа алгоритмов, использование такой схемы коллективного решения оказалось недостаточно эффективно. В работе [8] рассматривались несколько других способов, кроме среднего по декоррелированному ансамблю, в частности стекинг [10], т.е. применение прогнозов, вычисляемых отдельными деревьями ансамбля, в качестве признаков для алгоритмов второго уровня, рассчитывающих выходное коллективное решение. Эксперименты, представленные в [8], показывают, что более высокая точность достигается с помощью стекинга со случайным регрессионным лесом, чем с простым усреднением. По этой причине в методе реализованы несколько вариантов коллективного решения: усреднение и стекинг с методом градиентного бустинга и случайным лесом, а также их выпуклой комбинацией.

Наибольшая точность предсказания обычно достигается при больших размерах ансамбля. Однако чрезмерно большое число признаков приводит к увеличению неустойчивости и снижению точности прогноза. Для снижения признакового пространства могут быть использованы различные подходы. В предлагаемом методе применяются две техники: прореживание и переоптимизация. В первом случае после вычисления полного декоррелированного ансамбля все вошедшие в него регрессионные деревья ранжируются по величине функционала $Q(B, \mu)$, где для произвольного элемента B_j , ансамбль полагается равным $\{B_i \in A_k | i \neq j\}$. Далее из ансамбля исключаются все недостаточно эффективные слагаемые так, чтобы оставить заданные заранее N' элементов. Эксперименты на реальных задачах не выявили заметного повышения эффективности от использования этой процедуры. Возможно, это не так при большем количестве исходных слагаемых, но в таком случае значительно увеличивается вычислительная сложность процедуры. Переоптимизация же оставляет количество слагаемых, но пытается дополнительно “раздвинуть” их. Рассмотрим ансамбль $\{B_1, \dots, B_N\} \setminus B_j$ и применим процедуру построения нового алгоритма B к этому ансамблю, а затем заменим B_j на полученный алгоритм, и так для всех слагаемых по очереди. Эффект от такой процедуры также не стал грандиозным, однако эти две процедуры оставлены в методе для дальнейшего исследования.

Несколько более высокую эффективность показало применение для снижения размерности признакового пространства варианта метода экстремальной группировки (ЭГ) параметров [11]. На начальном этапе признаки случайно разбиваются на некоторое заранее заданное число групп, для каждой из которых вычисляется соответствующий групповой фактор, как среднее по всем признакам, вошедшим в группу. При этом часть из признаков умножается на -1 для обеспечения одинаковой направленности связей с целевой переменной. Используется процедура, сходная со стандартным методом кластеризации “ k -средних” и заключающаяся в переносе каждого из признаков в группу, для которой модуль коэффициента корреляции между признаком и соответствующим групповым фактором максимален. Далее производится пересчет групповых факторов. Процесс завершается в случае отсутствия необходимости переноса признаков на каком-то из шагов. В реализованном методе ЭГ может быть использован как для исходных признаков, что особенно актуально, например, для химических задач с высокой коррелированностью признаков, так и для генерируемого пространства.

В работе не используются стекинг и предварительная кластеризация признаков, поскольку это некие общие процедуры, применимые к любому методу.

Таким образом, свойства итогового алгоритма определяются следующим набором параметров: N — число элементов ансамбля (в экспериментах фиксировалось $N = 200$); N' — число эле-

ментов ансамбля после отсеивания (в экспериментах фиксировалось $N' = N$); μ — влияние декоррелирующей компоненты функционала (в экспериментах фиксировалось $\mu = 0.5$); v — доля признаков, задействованных для построения T_k ; κ — параметр вклада t_k : $B_k = T_k + \kappa t_k$ (в экспериментах фиксировалось $\kappa = 1$); G — число групп ЭГ в ансамбле; `corrector=average|forest|boosting` — тип корректирующей процедуры. Отдельно задаются параметры итоговой корректирующей процедуры. Для бустинга и бэггинга берутся параметры по умолчанию, для усреднения параметры не нужны.

Как это обычно бывает, не существует единого набора гиперпараметров, эффективного для любых прикладных задач. Пример комбинаций, позволяющих достичь преимущества по сравнению с чистыми методами градиентного бустинга и случайного леса, для предсказания свойств химических элементов представлен в [12]. В следующей главе описано применение разработанного метода для решения нескольких других задач.

3. Прикладные задачи. Для оценки качества исследованного алгоритма и диапазона оптимальных гиперпараметров были использованы следующие задачи.

Houses — выборка 'House Prices: Advanced Regression Techniques'², содержащая данные для оценки стоимости недвижимости по различным признакам, от рельефа участка и длины примыкающей улицы до типа и качества отделки постройки и близости железной дороги. В задаче имеется 1460 объектов, описываемых 79 признаками, большинство из которых категориальные. Для применения метода к таким признакам применялась следующая процедура кодирования: по обучающей подвыборке значения признаков заменялись на среднее целевого показателя для всех объектов с таким значением признака; в тестовой подвыборке использовалось значение из обучающей подвыборки; если в тестовую подвыборку попадало значение, неизвестное в обучающей, оно заменялось на среднее значение целевого признака по всей выборке; пропуски в количественных признаках заменялись нулями, поскольку их природа — площадь отсутствующего элемента.

Prices, Costs — еще одна выборка недвижимости³ из репозитория UCI [13]. Выборка содержит 372 объекта, описанных 107 числовыми признаками, по которым предсказывается цена недвижимости и стоимость ее постройки. Эти две задачи рассматривались отдельно.

Systolic — задача оценивания систолического давления по сигналу электрокардиограммы (ЭКГ) [14]. Выборка содержит 836 объектов, описанных 160 спектральными показателями.

Разработанный метод реализован с помощью стандартных методов из библиотеки `scikit-learn` [9], новизна сводится к использованию модифицированной целевой переменной. Дерево T_k ищется с помощью `BaggingRegressor` с числом элементов, равным одному, и `max_features = v`. Поправка t_k реализована с помощью `DecisionTreeRegressor`. Для экспериментов часть гиперпараметров фиксировалась и делалось несколько запусков с различными значениями μ , v , G и корректора. В этом порядке они и приводятся при описании результатов.

Также из `scikit-learn` были взяты референсные методы: `BoostingRegressor` в качестве реализации градиентного бустинга и `RandomForestRegressor` — как случайный лес. Все методы запускались с размером ансамбля, равным 200, и остальными параметрами по умолчанию. Мы сознательно отказались от попыток сравнить качество с другими исследователями и провели собственные тесты по нескольким соображениям, главное из которых — поставить методы в относительно одинаковые условия и выявить эффект, оказываемый техникой декорреляции. Так, задача **Houses** требует предобработки признаков, и улучшение результатов достигается лидерами соревнования Kaggle, в том числе за счет улучшения этой обработки. Это же во многом касается и задач **Costs** и **Prices** — наиболее свежее доступное исследование этих данных также во многом сосредоточено на специфике выборки [15], в то время как мы изучаем общий подход. Задача **Systolic** в таком виде никем не исследовалась.

Полученные результаты и параметры запуска представлены в табл. 1. Для оценки качества предсказания использовались две характеристики: коэффициент детерминации (R -квадрат, R^2) и среднее абсолютное отклонение (MAE). Решение задач производилось в режиме скользящего контроля с разбиением на 10 частей. Кроме того, результаты усреднялись по 10 запускам, чтобы отразить их устойчивость, поэтому в таблице приводится среднее значение (`mean`) и стандартное отклонение (`stddev`) показателей.

² <https://www.kaggle.com/competitions/house-prices-advanced-regression-techniques/data>.

³ <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Residential+Building+Data+Set>.

Таблица 1. Результаты экспериментов

Задача	Модель	R^2		MAE	
		mean	stdev	mean	stdev
Houses	Boosting	0.882	0.006	17642	352.37
	Forest	0.861	0.0051	17923	112.72
	0.5, 0.4, 40, forest	0.881	0.0134	16645	211.1
	0.5, 0.4, 40, boosting	0.879	0.01	17232	239.12
	0.5, 0.4, 40, average	0.888	0.0035	16577	94.9
Costs	Voosting	0.96	0.0027	16.6	0.342
	Forest	0.95	0.0035	20.19	0.372
	0.7, 40, boosting	0.946	0.0056	20.59	0.659
	0.7, 40, forest	0.932	0.0042	19.41	0.662
	0.7, 40, average	0.933	0.0057	19.35	0.494
	1, 40, forest	0.96	0.0036	18.21	0.558
	1, 80, forest	0.961	0.0015	17.09	0.26
	1, 120, forest	0.96	0.0032	18.07	0.409
	Boosting	0.977	0.0017	81.76	3.014
	Forest	0.961	0.003	121.21	3.073
Prices	0.7, 40, boosting	0.929	0.0063	202.99	7.278
	0.7, 40, forest	0.941	0.0056	184.44	9.078
	0.7, 40, average	0.938	0.0064	191.83	8.133
	1, 40, forest	0.971	0.0027	103.53	3.15
	1, 80, forest	0.972	0.0021	102.17	3.41
	1, 120, forest	0.97	0.0033	104.39	3.5
	Boosting	0.432	0.0134	6.02	0.055
	Forest	0.464	0.0073	5.81	0.043
	0.3, 80, boosting	0.475	0.0077	5.75	0.044
	0.3, 80, forest	0.482	0.0084	5.79	0.05
Systolic	0.3, 80, average	0.486	0.0064	5.75	0.033

Первое, на что стоит обратить внимание, это разные соотношения качества самих референсных методов. Видно, что в задачах с недвижимостью бустинг показывает значительно лучшее качество, чем случайный лес. В то же время в задаче оценивания давления бустинг значительно отстает. В свою очередь предлагаемый метод всегда демонстрирует превосходство над аутсайдером. В задачах Prices и Costs при этом удалось только сравняться с лидером. В задаче Houses лидерство уже более явное — предлагаемый метод лидирует как по R^2 , так и по средней абсолютной ошибке. Наилучший же результат метод продемонстрировал в задаче оценивания систолического давления, где лидера пары референсных методов — на этот раз случайный лес — удалось значительно обойти по обоим критериям.

Что касается выбора гиперпараметров, то в очередной раз подтвердилась их неуниверсальность. Где-то преимущество дали высокие ν , где-то — наоборот. В задачах с недвижимостью хорошим корректором оказался случайный лес, а в прогнозе давления — простое усреднение.

Заключение. Представлен новый ансамблевый регрессионный метод. Дается дополнительное обоснование подхода, уточняющее вывод, который приведен в предыдущих работах. Также рассмотрены результаты тестирования метода, оценивающие возможность его использования при решении прикладных задач в бизнесе и медицине. Результаты экспериментов подтверждают перспективность предлагаемого подхода.

Дальнейшие исследования предполагается направить на повышение быстродействия метода, что возможно достигнуть, во-первых, за счет непосредственного построения элементов B_k как

деревьев со специальным функционалом качества, а во-вторых, за счет оптимизации построения этих деревьев, в том числе с помощью библиотеки `sython`.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Положение о ЦКП “Информатика” // [Электронный ресурс]. Режим доступа <http://www.frccsc.ru/ckp> (дата обращения 14.02.2023).
2. Zhou Z.H. Ensemble Methods: Foundations and Algorithms. N.Y.: Chapman and Hall/CRC, 2012.
3. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference, and Prediction. Springer Series in Statistics. N.Y.: Springer, 2009.
4. Breiman L. Random forests // Machine Learning. 2001. V. 45. № 1. P. 5–32.
5. Schapire R.E., Freund Y. Foundations and Algorithms. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 2012.
6. Ho T.K. The Random Subspace Method for Constructing Decision Forests // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1998. V. 20. № 8. P. 832–844.
7. Garcia-Pedrajas N., Ortiz-Boyer D. Boosting Random Subspace Method // Neural Networks. 2008. V. 21. № 9. P. 1344–1362.
8. Zhuravlev Yu.I., Senko O.V., Dokukin A.A., Kiselyova N.N., Saenko I.A. Two-Level Regression Method Using Ensembles of Trees with Optimal Divergence // Doklady Mathematics. 2021. V. 103. P. 1–4.
9. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A. et al. Scikit-learn: Machine Learning in Python // Machine Learning Research. 2011. V. 12. P. 2825–2830.
10. Wolpert D.H. Stacked Generalization // Neural Networks. 1992. V. 5. № 2. P. 241–259.
11. Braverman E.M., Muchnik I.B. Structural Methods for Processing Empirical Data. M.: Nauka, 1983.
12. Senko O.V., Dokukin A.A., Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Kuznetsova Yu.O. New Two-Level Ensemble Method and Its Application to Chemical Compounds Properties Prediction // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 1. P. 188–197.
13. Rafiei M.H., Adeli H. A Novel Machine Learning Model for Estimation of Sale Prices of Real Estate Units // J. Construction Engineering & Management. 2015. V. 142. № 2.
14. Сенько О.В., Чучупал В.Я., Докукин А.А. Неинвазивное оценивание уровня артериального давления с помощью кардиомонитора CardioQvark // Математическая биология и биоинформатика. 2017. Т. 2. № 12. С. 536–546.
15. Mostofi F., Toğan V., Başağa H.B. Real-estate Price Prediction with Deep Neuralnetwork and Principal Component Analysis // Organization, Technology and Management in Construction. 2022. V. 14. № 1. P. 2741–2759.

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.977

ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА: СВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПОВОРОТЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ

© 2023 г. В. С. Пацко^{а,*}, А. А. Федотов^а

^аИнститут математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

*e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 06.11.2022 г.

После доработки 12.12.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

В математической теории управления “машина Дубинса” — нелинейная модель движения, описываемая дифференциальными соотношениями, в которой скалярное управление определяет мгновенную угловую скорость поворота. Величина линейной скорости предполагается постоянной. Фазовый вектор системы является трехмерным. Он включает в себя две координаты геометрического положения и одну координату, имеющую смысл угла наклона вектора скорости. Подобная модель является очень популярной и используется в различных задачах управления, связанных с движением самолета в горизонтальной плоскости, с упрощенным описанием движения автомобиля или небольших надводных и подводных аппаратов и т.д. Скалярное управление может быть стеснено либо симметричным ограничением (когда минимальные радиусы поворота влево и вправо совпадают), либо несимметричным (когда поворот возможен в обе стороны, но минимальные радиусы поворотов не совпадают). Обычно задачи с симметричными и несимметричными ограничениями рассматриваются отдельно. Показано, что при построении множества достижимости “в момент” случай несимметричного ограничения может быть сведен к симметричному случаю.

DOI: 10.31857/S0002338823030113, EDN: EUWNCG

Введение. Термин “машина Дубинса” в настоящее время используется для обозначения управляемого объекта, который передвигается на двумерной плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и заданными ограничениями на мгновенную угловую скорость поворота.

К классическим работам, где рассматривался подобный объект, помимо статьи [1], следует отнести публикации [2, 3]. Количество работ, связанных с машиной Дубинса, огромно. Многие из них указаны в списке литературы к статье [4]. В [5, 6] описаны содержательные задачи, где применяется модель “машина Дубинса” и ее различные модификации/обобщения.

Отметим некоторые работы, выполненные в последние годы. В [7] исследуется задача перехвата машиной Дубинса за наименьшее время объекта, движение которого задано заранее. В [8] изучается весьма общая постановка задач управления с двумя геометрическими координатами и двумерным управлением. В качестве одного из частных случаев применения полученных результатов рассматривается задача быстродействия для машины Дубинса. В [9] предложен вариант алгоритмического построения оптимальных программных траекторий машины Дубинса в задаче быстродействия. Численное построение трехмерного множества достижимости для машины Дубинса при наличии движущихся препятствий на плоскости геометрических координат рассмотрено в [10]. Некоторые задачи управления гибридной системой, составленной с использованием машины Дубинса, исследованы в [11].

Настоящая работа посвящена исследованию трехмерного множества достижимости для машины Дубинса. Не теряя общности, величину линейной скорости объекта считаем равной единице, а начальное фазовое состояние полагаем нулевым. Под множеством достижимости $G(t_f)$ понимаем совокупность всех трехмерных фазовых состояний x, y, φ (x, y — координаты геометрического положения, φ — угол направления вектора скорости), в каждое из которых можно пе-

ревести объект в заданный момент времени t_f . Двумерное сечение множества $G(t_f)$ по угловой координате φ обозначим $G_\varphi(t_f)$ и назовем φ -сечением.

Каноническим считаем случай, когда скалярное управление u (имеющее смысл мгновенной угловой скорости поворота) стеснено ограничением $|u| \leq 1$. Задачи с несимметричными ограничениями $u \in [u_1, u_2]$, где $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, также рассматриваются в литературе (см., например, [12]).

В качестве практического примера несимметричных ограничений можно указать координированное движение (см., например, [13, с. 60, 61; 14, с. 764]) самолета в горизонтальной плоскости с постоянной величиной линейной скорости. Повороты при этом осуществляются изменением угла крена. Для модельного кинематического описания используется кинематика машины Дубинса. Нарушение симметрии ограничений по крену (в том числе за счет неправильной работы исполнительных механизмов) приводит к рассмотрению несимметричного случая.

Работа является продолжением статьи [15]. Показано, что исследование φ -сечений для произвольного несимметричного случая сводится к исследованию φ -сечений в каноническом случае. А именно установлено аффинное взаимно-однозначное соответствие между φ -сечениями множества достижимости для произвольного несимметричного случая и φ -сечениями для канонического случая. Аналитическое описание φ -сечений для канонического случая приведено в [4, 16].

Кратко опишем содержание статьи. В разд. 1 приводится постановка задачи о нахождении множества достижимости для машины Дубинса с несимметричными ограничениями $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ на управление. Множество достижимости $G(t_f)$ представляется в виде совокупности его сечений по угловой координате φ . Описание φ -сечений для общего случая требуется осуществить посредством сведения к рассмотрению φ -сечений в каноническом случае.

Исследование опирается на принцип максимума Л.С. Понтрягина [17], которому удовлетворяют движения и управления, ведущие на границу множества достижимости. В качестве несложного следствия принципа максимума в разд. 2 получаем, что при описании границы можно ограничиться кусочно-постоянными управлениями с конечным числом переключений и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$. В разд. 3 формулируются и доказываются утверждения о свойствах движений и управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Показано, что при построении границы множества достижимости достаточно взять шесть типов управлений с не более чем двумя переключениями. Этот результат распространяется на точки из внутренности множества достижимости при подходящем сужении ограничений на управление. В разд. 4 при зафиксированном значении угловой координаты $\varphi \geq 0$ дается описание движений, которые порождаются управлениями из разд. 3. Получаемые в момент t_f точки образуют непрерывную замкнутую кривую $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ на плоскости геометрических координат. Эта кривая содержит все точки границы рассматриваемого φ -сечения, но часть ее, вообще говоря, проходит и во внутренности φ -сечения. Важное свойство состоит в том, что кривая $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ симметрична относительно оси X некоторой вспомогательной прямоугольной системы координат X, Y (зависящей от φ).

Раздел 5 является центральным в статье. В нем при $\varphi \geq 0$ устанавливается соответствие между кривой $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ и некоторой кривой $\mathcal{A}_\varphi^c(t_f^c)$, рассматриваемой для канонического случая. Момент t_f^c задается определенной формулой и отличается от момента t_f . На базе этого соответствия выводится аналогичное соотношение между φ -сечениями $G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi^c(t_f^c)$ для исходного и канонического случаев во вспомогательной системе координат. В разд. 6 для значений $\varphi < 0$ описание φ -сечений получаем, опираясь на случай $\varphi > 0$.

Рассматриваемые в статье шесть типов управления совпадают в каноническом случае с шестью вариантами, указанными в работе [1] для задачи быстрогодействия. В связи с этим подчеркиваем, что в нашей статье речь идет об описании границы множества достижимости в заданный момент t_f . С логической точки зрения совокупность программных управлений, решающих задачу быстрогодействия, вообще говоря, является недостаточной для полного построения границы множества достижимости в момент.

1. Постановка задачи. Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < 0 < u_2. \quad (1.1)$$

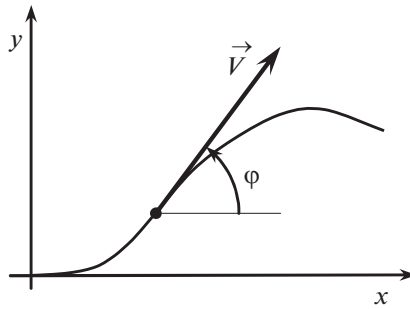


Рис. 1. Исходная система координат

Здесь x, y — координаты геометрического положения, φ — угол наклона вектора скорости (рис. 1), отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x . Величина скорости равна единице. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ считаем измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению $u_1 \leq u(t) \leq u_2$. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$. Фазовый вектор $(x, y, \varphi)^T$ системы (1.1) обозначим через z .

Зафиксируем z_0 — фазовое состояние системы (1.1) в начальный момент времени t_0 . Множество достижимости $G(t_f)$ в момент времени $t_f > t_0$ есть совокупность всех точек z трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1.1) в момент t_f при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $[t_0, t_f]$ из начальной точки z_0 .

Обозначим через $G_\varphi(t_f)$ двумерное φ -сечение множества $G(t_f)$. Отметим, что если некоторая точка $(x, y)^T$ принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, то точка $(x, y, \varphi)^T$ принадлежит $\partial G(t_f)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Здесь символ ∂ означает границу множества.

При изучении множеств достижимости, не ограничивая общности, полагаем $t_0 = 0$ и $z_0 = (0, 0, 0)^T$. Систему (1.1) в частном случае симметричных ограничений $u_1 = -1, u_2 = 1$ будем называть *канонической*. Соответствующее ей множество достижимости обозначим через $G^c(t_f)$.

Цель статьи — показать и обосновать способ получения φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ исходной системы (1.1) для произвольных $\varphi \in [t_f u_1, t_f u_2]$ на основе φ -сечений множества достижимости канонической системы.

2. Принцип максимума Понтрягина. Из общих результатов математической теории управления [18] следует, что множество достижимости $G(t_f)$ замкнуто и ограничено. Известно также, что управления, которые ведут на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Запишем соотношения принципа максимума для системы (1.1).

Пусть $u^*(\cdot)$ — некоторое допустимое управление, $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ — соответствующее движение системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы записываются в виде

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t). \quad (2.1)$$

ПМП означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ системы (2.1), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) = \\ & = \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u]. \end{aligned}$$

Таким образом, условие максимума имеет вид

$$\text{п.в.} \quad \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t) u, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (2.2)$$

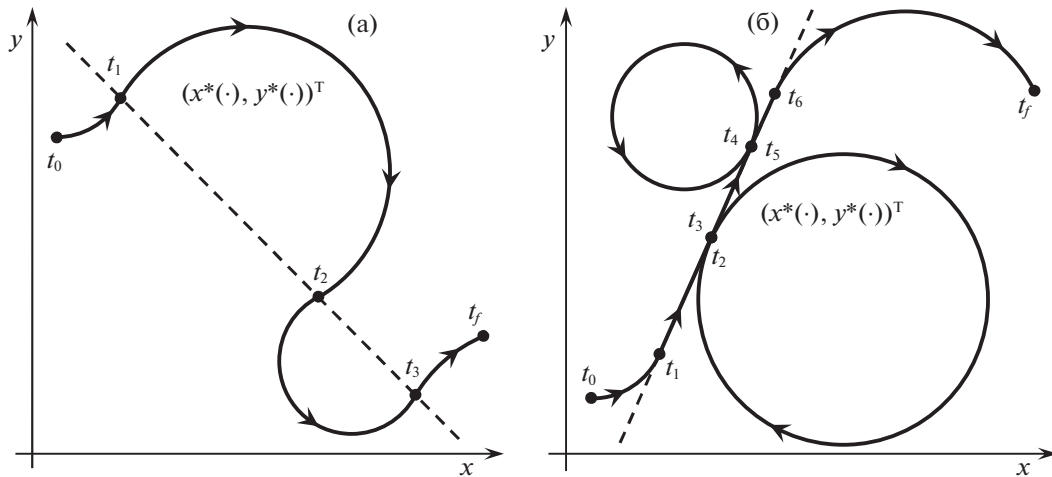


Рис. 2. Траектории принципа максимума и прямая переключения

Предполагая, что $u^*(\cdot)$ удовлетворяет (2.2), сформулируем несколько простых свойств. Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^* . Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на промежутке $[t_0, t_f]$. Следовательно, в этом случае либо п.в. $u^*(t) = u_2$, либо п.в. $u^*(t) = u_1$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^* , ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (1.1) и (2.1), можно записать выражение $\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C$. Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой:

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \quad (2.3)$$

Прямая переключения (2.3) не является универсальной: при смене движения, удовлетворяющего ПМП, изменяется, вообще говоря, и прямая переключения.

В силу соотношения (2.2), если $\psi_3^*(t) > 0$ ($\psi_3^*(t) < 0$) на некотором промежутке времени, то $u^*(t) = u_2$ ($u^*(t) = u_1$) п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y при этом идет по дуге окружности радиуса $1/u_2$ против часовой стрелки в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ (по дуге окружности радиуса $-1/u_1$ по часовой стрелке в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$). Условимся называть левым (правым) циклом участок движения длительностью $2\pi/u_2$ (соответственно длительностью $-2\pi/u_1$), на котором п.в. $u^*(t) = u_2$ ($u^*(t) = u_1$). Траектория движения на таком участке в проекции на плоскость x, y представляет собой окружность.

Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке времени, то на этом промежутке движение $(x^*(t), y^*(t))^T$ идет по прямой переключения. Стало быть, $\psi^*(t) = \text{const}$. Поэтому $u^*(t) = 0$ п.в. на этом промежутке.

На рис. 2 показаны движения системы (1.1), удовлетворяющие ПМП. Здесь и на последующих поясняющих рисунках для определенности полагаем $u_2 > -u_1$. Траектория на рис. 2, а имеет три момента переключения и последовательность управлений u_2, u_1, u_2, u_1 . На рис. 2, б показана траектория с шестью моментами переключения с последовательностью управлений $u_2, 0, u_1, 0, u_2, 0, u_1$; существуют левый и правый циклы.

Возможны лишь следующие три варианта взаимного расположения траектории движения $(x^*(t), y^*(t))^T$ и прямой переключения.

1. Траектория пересекает прямую (2.3) в некоторый момент под ненулевым углом (рис. 2, а). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей с одинаковым угловым раствором

между соседними точками пересечения прямой переключения. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ меняет знак на промежутке $[t_0, t_f]$ конечное число раз.

2. Траектория касается прямой (2.3) в некоторый момент (рис. 2, б). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей и прямолинейных участков. Прямолинейные участки лежат на прямой (2.3), дуги окружностей касаются этой прямой. При этом любой полный участок в виде дуги окружности, не являющийся крайним, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ либо не меняет знак, либо меняет его конечное число раз.

3. Траектория не пересекается с прямой (2.3). В этом случае функция $\psi_3^*(\cdot)$ имеет один и тот же знак на всем промежутке $[t_0, t_f]$ и траектория является дугой окружности.

Таким образом, если выполнено условие максимума (2.2), то функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ может менять знак лишь конечное число раз. Поэтому в качестве управления $u^*(\cdot)$, порождающего движение $z^*(\cdot)$ и удовлетворяющего ПМП, можно взять кусочно-постоянное управление со значениями $u_1, 0, u_2$ и конечным числом переключений на промежутке $[t_0, t_f]$. Для определенности будем считать такое управление кусочно-непрерывным справа. Момент t_f не включаем в число моментов переключения.

Изложенное выше позволяет сформулировать следующие два утверждения.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть движение $z^*(\cdot)$ системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается допустимым измеримым управлением и при этом выполнен ПМП. Тогда движение $z^*(\cdot)$ может быть реализовано при помощи кусочно-постоянного управления с конечным числом переключений и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть движение $z^*(\cdot)$ системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u^*(\cdot)$ и при этом выполнен ПМП. Тогда:

а) точки геометрического положения системы (1.1) на плоскости x, y в моменты переключения управления $u^*(\cdot)$ лежат на прямой переключения (2.3);

б) если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением, нет циклов и число переключений управления $u^*(\cdot)$ больше двух, то приращение угла между соседними моментами переключения одинаково по модулю;

в) если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением, есть хотя бы один цикл и число переключений управления $u^*(\cdot)$ больше одного, то все точки геометрического положения в моменты переключения совпадают;

г) если на движении $z^*(\cdot)$ есть участок с нулевым управлением, то любой участок движения между соседними моментами переключения, на котором реализуется постоянное управление u_1 или u_2 , представляет собой один или несколько подряд идущих циклов.

3. Свойства движений, удовлетворяющих ПМП. В основной части данного раздела будут доказаны несколько лемм и опирающаяся на них теорема 1 о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества $G(t_f)$. В соответствии с утверждением 1 рассматриваем кусочно-постоянные управления $u(t) \in \{u_1, 0, u_2\}$ с конечным числом моментов переключения. Таких управлений достаточно для построения границы множества достижимости. В леммах 1–3 исследуются движения без участков с нулевым управлением. В лемме 4 анализируется случай с участком нулевого управления. Итоговый результат сформулирован в теореме 1. Аналогом теоремы 1, но для управлений, ведущих в произвольную точку множества $G(t_f)$, является теорема 2. Для обозначения внутренней множества будем использовать символ int .

Л е м м а 1. Пусть движение $z(\cdot)$ на некотором промежутке $[\bar{t}, \hat{t}]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ с двумя моментами переключения t_1 и t_2 , где $\bar{t} < t_1 < t_2 < \hat{t}$. При этом управление последовательно принимает значения u_1, u_2, u_1 (соответственно u_2, u_1, u_2). Предположим, что $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$. Тогда на том же промежутке времени существует управление $\tilde{u}(\cdot)$ с неко-

торыми двумя моментами переключения $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$, где $\bar{t} < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \hat{t}$, которое осуществляет перевод из точки $\tilde{z}(\bar{t}) = z(\bar{t})$ в точку $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$ и последовательно принимает значения u_2, u_1, u_2 (соответственно u_1, u_2, u_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть управление $u(\cdot)$ последовательно принимает значения u_1, u_2, u_1 . Положим $\tilde{t}_1 = \bar{t} - (\hat{t} - t_2) u_1/u_2$, $\tilde{t}_2 = \hat{t} + (t_1 - \bar{t})u_1/u_2$. Очевидно, что $\bar{t} < \tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2 < \hat{t}$. Кроме того,

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = (\hat{t} - \bar{t}) \left(1 + \frac{u_1}{u_2} \right) - \frac{u_1}{u_2} (t_2 - t_1). \quad (3.1)$$

Равенство $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$ запишем в виде $u_1(t_1 - \bar{t}) + u_2(t_2 - t_1) + u_1(\hat{t} - t_2) = 0$. Отсюда $\hat{t} - \bar{t} = (t_2 - t_1)(u_1 - u_2)/u_1$. Подставляя в (3.1) полученное выражение для $\hat{t} - \bar{t}$, имеем

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = -\frac{u_2}{u_1} (t_2 - t_1). \quad (3.2)$$

Учитывая (3.2), получаем $\bar{t} < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \hat{t}$.

Зададим управление $\tilde{u}(\cdot)$ на промежутке $[\bar{t}, \hat{t}]$ двумя моментами переключения $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ и значениями u_2, u_1, u_2 на трех участках постоянства. Рассмотрим соответствующее движение $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot))^T$, выходящее в момент $\bar{t}$ из точки $\tilde{z}(\bar{t}) = z(\bar{t})$. Покажем, что $z(\hat{t}) = \tilde{z}(\hat{t})$.

Из определения моментов $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ и соотношения (3.2) имеем

$$-u_1(t_1 - \bar{t}) = u_2(\hat{t} - \tilde{t}_2), \quad u_2(t_2 - t_1) = -u_1(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1), \quad -u_1(\hat{t} - t_2) = u_2(\tilde{t}_1 - \bar{t}).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) - \varphi(\bar{t}) &= \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2) - \tilde{\varphi}(\bar{t}), \\ \varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1) - \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2), \\ \varphi(\hat{t}) - \varphi(t_2) &= \tilde{\varphi}(\bar{t}) - \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получаем $\varphi(\hat{t}) - \varphi(\bar{t}) = \tilde{\varphi}(\hat{t}) - \tilde{\varphi}(\bar{t})$. Отсюда с учетом условия $\tilde{\varphi}(\bar{t}) = \varphi(\bar{t})$ приходим к равенству $\tilde{\varphi}(\hat{t}) = \varphi(\hat{t})$. Подставляя это равенство вместе с равенством $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$ в первое и третье соотношения из (3.3), имеем

$$\varphi(t_1) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2), \quad \varphi(t_2) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1). \quad (3.4)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (1.1) в силу управления $u(\cdot)$ на $[\bar{t}, \hat{t}]$:

$$\begin{aligned} x(\hat{t}) &= x(\bar{t}) + \frac{1}{u_1} (\sin \varphi(t_1) - \sin \varphi(\bar{t})) + \frac{1}{u_2} (\sin \varphi(t_2) - \sin \varphi(t_1)) + \\ &+ \frac{1}{u_1} (\sin \varphi(\hat{t}) - \sin \varphi(t_2)) = x(\bar{t}) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (\sin \varphi(t_2) - \sin \varphi(t_1)). \end{aligned}$$

Интегрируя в силу управления $\tilde{u}(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\hat{t}) &= x(\bar{t}) + \frac{1}{u_2} (\sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1) - \sin \tilde{\varphi}(\bar{t})) + \frac{1}{u_1} (\sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2) - \sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1)) + \\ &+ \frac{1}{u_2} (\sin \tilde{\varphi}(\hat{t}) - \sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2)) = x(\bar{t}) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) (\sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1) - \sin \tilde{\varphi}(\tilde{t}_2)). \end{aligned}$$

С учетом (3.4) получаем $\tilde{x}(\hat{t}) = x(\hat{t})$. Непосредственным интегрированием также устанавливается равенство $\tilde{y}(\hat{t}) = y(\hat{t})$.

Случай, когда исходное управление последовательно принимает значения u_2, u_1, u_2 , рассматривается аналогично. Следует лишь поменять местами символы u_1 и u_2 . Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями u_1, u_2 и двумя моментами переключения t_1, t_2 , причем $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$. Предположим, что

$$|(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2))| > |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|. \quad (3.5)$$

Тогда $z(t_f) \in \text{int} G(t_f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (3.5) содержательно означает, что сумма приращений угла φ на первом и третьем участках постоянства управления, взятая по модулю, больше модуля приращения угла на среднем участке. Не теряя общности, примем следующую последовательность значений управления $u(\cdot)$: u_1, u_2, u_1 . Тогда условие (3.5) запишется в виде

$$-(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) - (\varphi(t_f) - \varphi(t_2)) > \varphi(t_2) - \varphi(t_1). \quad (3.6)$$

Предположим от противного, что $z(t_f) \in \partial G(t_f)$. Тогда любое управление, ведущее в эту точку, удовлетворяет ПМП.

1. Рассмотрим случай, когда точки $(x(t_1), y(t_1))^T$ и $(x(t_2), y(t_2))^T$ геометрического положения на плоскости x, y в моменты переключения t_1 и t_2 не совпадают. В силу утверждения 2в получаем, что движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ не имеет циклов.

Выберем моменты $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ и $\hat{t} \in (t_2, t_f)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$-(\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})) - (\varphi(\hat{t}) - \varphi(t_2)) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1). \quad (3.7)$$

Возможность выбора $\bar{t}$ и $\hat{t}$ с обеспечением (3.7) следует из монотонного изменения угла φ в зависимости от общей длины двух крайних промежутков с управлением u_1 . Можно взять, например,

$$\bar{t} = t_1 + q(t_0 - t_1), \quad \hat{t} = t_2 + q(t_f - t_2), \quad q = \left(1 + \frac{\varphi(t_0) - \varphi(t_f)}{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}\right)^{-1}.$$

В самом деле, неравенство $\varphi(t_0) - \varphi(t_f) > 0$ справедливо в силу условия (3.5), а неравенство $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) > 0$ выполнено, так как на интервале $[t_1, t_2)$ действует управление u_2 . Поэтому $q \in (0, 1)$ и, стало быть, $\bar{t} \in (t_0, t_1)$, $\hat{t} \in (t_2, t_f)$. Для введенных таким образом моментов $\bar{t}$ и $\hat{t}$ имеем

$$\varphi(\bar{t}) = (\varphi(t_1) - \varphi(t_0))q + \varphi(t_0), \quad \varphi(\hat{t}) = (\varphi(t_2) - \varphi(t_f))q + \varphi(t_f).$$

Подстановкой этих равенств в соотношение (3.7) убеждаемся в его выполнении. Соотношение (3.7) означает, что $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$.

Опираясь на лемму 1, рассмотрим на промежутке $[\bar{t}, \hat{t}]$ движение, выходящее из точки $z(\bar{t})$, приходящее в точку $z(\hat{t})$ и использующее последовательно управления u_2, u_1, u_2 с двумя моментами переключения $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$.

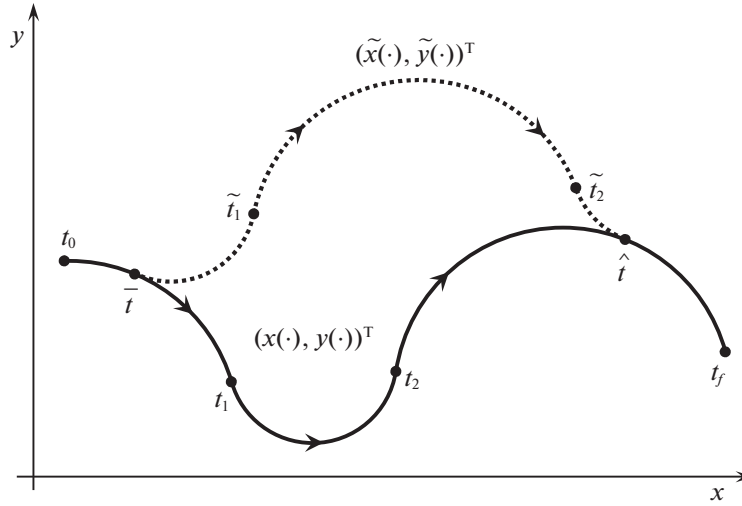


Рис. 3. Пояснение к п. 1 доказательства леммы 2

Наряду с исходным движением $z(\cdot)$, порождаемым управлением $u(\cdot)$, введем вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot))^T$, выходящее из начальной точки $\tilde{z}(t_0) = z(t_0)$ в силу управления:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_1, & t \in [t_0, \bar{t}), \\ u_2, & t \in [\bar{t}, \tilde{t}_1), \\ u_1, & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), \\ u_2, & t \in [\tilde{t}_2, \hat{t}), \\ u_1, & t \in [\hat{t}, t_f]. \end{cases}$$

Управление $\tilde{u}(\cdot)$ отличается от исходного управления $u(\cdot)$ только на промежутке $[\bar{t}, \hat{t})$. При этом $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$. Стало быть, $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$. Следовательно, $\tilde{z}(t_f) \in \partial G(t_f)$. Поэтому управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет ПМП.

Движение $\tilde{z}(\cdot)$ не имеет циклов на промежутке $[t_0, t_f]$. Это следует из определения управления $\tilde{u}(\cdot)$ и отсутствия циклов на движении $z(\cdot)$. В силу утверждения 2б получаем, что приращение угла φ по модулю между любыми соседними моментами переключения управления $\tilde{u}(\cdot)$ является постоянным вдоль данного движения.

Однако это не так. Возьмем подряд идущие моменты переключения $\bar{t}, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \hat{t}$ на вспомогательном движении. Для него приращение угла между соседними моментами переключения также постоянно по модулю. Обозначим такую величину через $\Delta\tilde{\varphi}$. Тогда $\tilde{\varphi}(\hat{t})$ можно выразить через $\tilde{\varphi}(\bar{t})$ с учетом последовательности значений управления $\tilde{u}(\cdot)$ на промежутке $[\bar{t}, \hat{t})$:

$$\tilde{\varphi}(\hat{t}) = \tilde{\varphi}(\bar{t}) + \Delta\tilde{\varphi} - \Delta\tilde{\varphi} + \Delta\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\bar{t}) + \Delta\tilde{\varphi}.$$

Поскольку $\Delta\tilde{\varphi} \neq 0$, то $\tilde{\varphi}(\hat{t}) \neq \tilde{\varphi}(\bar{t})$. Получили противоречие.

Стало быть, $z(t_f) \in \text{int} G(t_f)$ в случае $(x(t_1), y(t_1))^T \neq (x(t_2), y(t_2))^T$. Траектории исходного и вспомогательного движений для этого случая показаны схематично на рис. 3.

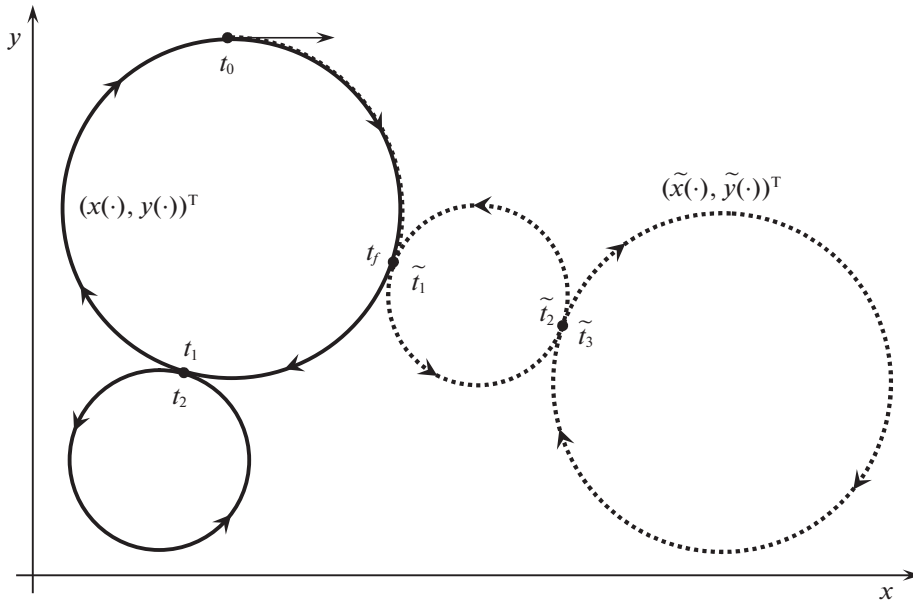


Рис. 4. Пояснение к п. 2 доказательства леммы 2

2. Пусть теперь $(x(t_1), y(t_1))^T = (x(t_2), y(t_2))^T$. В таком случае движение на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов с управлением u_2 . При этом в силу (3.6) суммарный накопленный угол на первом и третьем участках по модулю превышает 2π , т.е.

$$-u_1((t_1 - t_0) + (t_f - t_2)) > 2\pi. \quad (3.8)$$

Данный факт позволяет задать вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ (выходящее из точки $\tilde{z}(t_0) = z(t_0)$ и приходящее в точку $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$) посредством управления $\tilde{u}(\cdot)$:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_1, & t \in [t_0, \tilde{t}_1], \\ u_2, & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2], \\ u_1, & t \in [\tilde{t}_2, \tilde{t}_3], \\ u_2, & t \in [\tilde{t}_3, t_f] \end{cases}$$

с тремя моментами переключения:

$$\tilde{t}_1 = t_0 - ((t_1 - t_0)u_1 - (t_f - t_2)u_1 - 2\pi)/u_1 = t_f - (t_2 - t_1) + 2\pi/u_1,$$

$$\tilde{t}_2 = \tilde{t}_3 + 2\pi/u_1, \quad \tilde{t}_3 = t_f - \pi/u_2.$$

Можно убедиться с использованием (3.8), что $t_0 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \tilde{t}_3 < t_f$ и $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$.

Формирование вспомогательного движения для случая $(x(t_1), y(t_1))^T = (x(t_2), y(t_2))^T$ иллюстрируется на рис. 4. Здесь на промежутке $[t_1, t_2]$ исходное движение $(x(\cdot), y(\cdot))^T$ (сплошная линия) имеет цикл в силу управления u_2 . Геометрические положения в моменты t_1 и t_2 совпадают. Траектория вспомогательного движения $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))^T$ отмечена точечной линией. Моменты переключения $\tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ взяты так, чтобы выполнялись равенства $\tilde{t}_3 - \tilde{t}_2 = -2\pi/u_1$ и $t_f - \tilde{t}_3 = \pi/u_2$. Поэтому вспомогательное движение на участке $[\tilde{t}_3, t_f]$ представляет собой полуокружность, а на участке $[\tilde{t}_2, \tilde{t}_3]$ является целой окружностью (т.е. образует цикл). Геометрические положения на вспомогательном движении в моменты $\tilde{t}_1$ и t_f совпадают. Также совпадают положения в моменты $\tilde{t}_2$ и $\tilde{t}_3$.

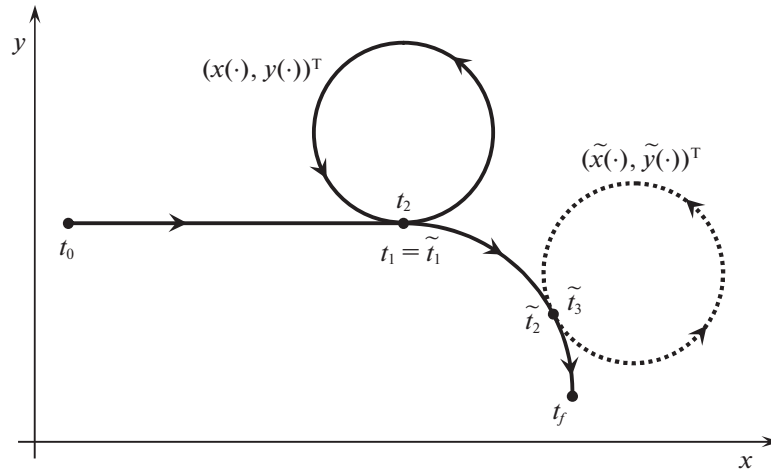


Рис. 5. Пояснение к доказательству леммы 4

Для вспомогательного движения имеем $(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)u_2 = (t_2 - t_1)u_2 - \pi$. Исходное движение на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов с управлением u_2 . Поэтому выражение $(t_2 - t_1)u_2$ кратно 2π . Стало быть, величина $(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)u_2$ не является кратной 2π . Отсюда следует, что геометрические положения вспомогательного движения в моменты $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ не совпадают. С учетом утверждения 2в получаем, что вспомогательное движение в силу управления $\tilde{u}(\cdot)$ не удовлетворяет ПМП. Поэтому $z(t_f) = \tilde{z}(t_f) \in \text{int}G(t_f)$ в случае, когда точки геометрического положения исходного движения в моменты переключения t_1 и t_2 совпадают. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями u_1, u_2 и тремя моментами переключения t_1, t_2, t_3 , причем $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_f$. Тогда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. Из двух средних промежутков $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ рассматриваемого движения возьмем тот, на котором изменение угла φ , взятое по модулю, меньше. Если изменение углов по модулю совпадает, то берем любой промежуток.

Предположим, что выбран промежуток $[t_2, t_3]$. Тогда $|\varphi(t_3) - \varphi(t_2)| \leq |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$. Дополнительно учитывая, что на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_f]$ управления совпадают, получаем

$$|\varphi(t_3) - \varphi(t_2)| < |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| + |\varphi(t_f) - \varphi(t_3)| = |\varphi(t_2) - \varphi(t_1) + \varphi(t_f) - \varphi(t_3)|.$$

Отсюда следует, что на $[t_1, t_f]$ движение $z(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Если выбран промежуток $[t_1, t_2]$, то условия леммы 2 выполнены для движения $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_3]$. Поэтому $z(t_3) \in \text{int}G(t_3)$ и, стало быть, $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями в множестве $\{u_1, 0, u_2\}$ и двумя моментами переключения. Предположим, что участок с нулевым управлением один и является одним из двух крайних участков постоянства управления. Тогда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. Пусть для определенности управление $u(\cdot)$ принимает последовательно значения $0, u_2, u_1$. Предположим от противного, что $z(t_f) \in \partial G(t_f)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет ПМП.

В силу утверждения 2г движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов (рис. 5). Поэтому $(x(t_1), y(t_1))^T = (x(t_2), y(t_2))^T$.

Рассмотрим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$, выходящее в момент t_0 из точки $z(t_0)$ и задаваемое управлением:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_1], \\ -1, & t \in [t_1, \tilde{t}_1], \\ 1, & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2], \\ -1, & t \in [\tilde{t}_2, t_f]. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{t}_1 = t_1 + \varepsilon$, $\tilde{t}_2 = t_2 + \varepsilon$, где величина ε взята из диапазона $(0, \min\{t_f - t_2, 2\pi/u_2\})$.

Движения $\tilde{z}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают на промежутке $[\tilde{t}_2, t_f]$. Следовательно, $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$. Поэтому $\tilde{z}(t_f) \in \partial G(t_f)$. Стало быть, управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет ПМП. Однако движение $\tilde{z}(\cdot)$ на промежутке $[t_1, \tilde{t}_1]$ не имеет циклов, что противоречит утверждению 2г.

Таким образом, $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$. Лемма 4 доказана.

Сформулируем основную теорему о характере управлений, ведущих на границу множества достижимости.

Т е о р е м а 1. В каждую точку границы множества достижимости $G(t_f)$ системы (1.1) можно перейти в момент t_f при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{aligned} \text{U1) } u_2, 0, u_2; & \quad \text{U2) } u_1, 0, u_2; & \quad \text{U3) } u_2, 0, u_1; \\ \text{U4) } u_1, 0, u_1; & \quad \text{U5) } u_2, u_1, u_2; & \quad \text{U6) } u_1, u_2, u_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В любую точку границы множества достижимости ведет управление, удовлетворяющее ПМП. В силу утверждения 1 его можно считать кусочно-постоянным с конечным числом переключений и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1, 0, u_2\}$.

Предположим от противного, что на границе множества достижимости $G(t_f)$ есть точка $\hat{z}$, перевод в которую возможен лишь при помощи управления с тремя или более переключениями. Если таких управлений несколько, то возьмем управление $u^\diamond(\cdot)$ с наименьшим числом переключений. Порождаемое им движение обозначим $z^\diamond(\cdot)$.

Рассмотрим движение $z^\diamond(\cdot)$ на четырех последних участках постоянства управления. Среди них может быть не более двух участков с нулевым управлением. При этом возможны следующие четыре случая.

1. Нет участков с нулевым управлением. Тогда $z^\diamond(t_f) \in \text{int } G(t_f)$ в силу леммы 3. Это противоречит тому, что $z^\diamond(t_f) = \hat{z} \in \partial G(t_f)$.

2. Участок с нулевым управлением один. В этом случае можно выделить три подряд идущих участка так, чтобы участок с нулевым управлением был расположен в начале или в конце такой тройки. Опираясь на лемму 4, имеем $z^\diamond(t_f) \in \text{int } G(t_f)$, что противоречит соотношению $z^\diamond(t_f) = \hat{z} \in \partial G(t_f)$.

3. Участков с нулевым управлением два, и они расположены по краям. Здесь аналогично предыдущему случаю при помощи леммы 4 устанавливаем, что $z^\diamond(t_f) \in \text{int } G(t_f)$, и получаем противоречие.

4. Участков с нулевым управлением два (из четырех), и между ними расположен только один участок с ненулевым управлением. Управление $u^\diamond(\cdot)$ удовлетворяет ПМП. Поэтому в силу утверждения 2г средний участок с ненулевым управлением, лежащий между участками с нулевым управлением, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов. Переносим все циклы со среднего участка в начальную точку первого прямолинейного участка либо в конечную точку второго прямолинейного участка. Склеивая во времени прямолинейные участки, получа-

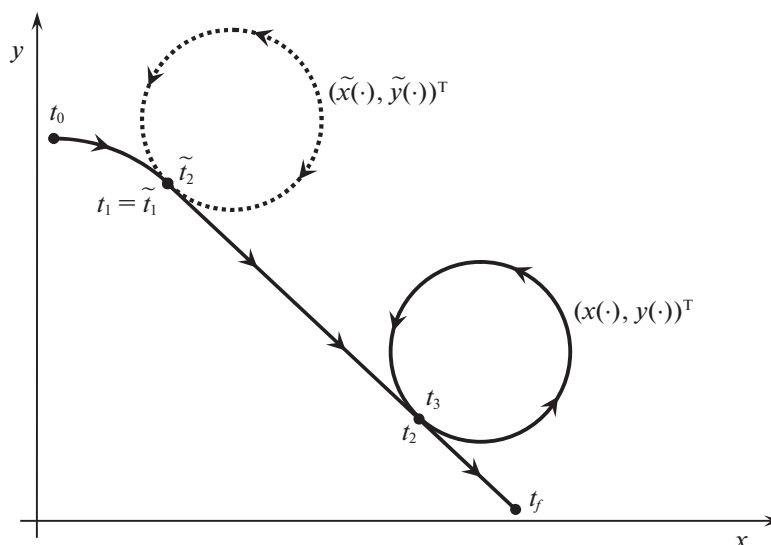


Рис. 6. Пояснение к доказательству теоремы 1

ем вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$, ведущее в ту же точку в момент времени t_f , что и исходное движение $z^\diamond(\cdot)$. При этом вспомогательное движение имеет на одно переключение меньше, чем исходное. Это противоречит сделанному предположению о выборе управления $u^\diamond(\cdot)$ с наименьшим числом переключений.

В качестве пояснения на рис. 6 показан пример движения с тремя моментами переключения t_1, t_2, t_3 и последовательностью управлений $u_1, 0, u_2, 0$. На третьем участке (от момента t_2 до момента t_3) реализуется один или несколько циклов с управлением u_2 . При формировании вспомогательного движения циклы со среднего участка исходного движения перенесены в начальную точку первого прямолинейного участка. Получаем на вспомогательном движении два момента переключения $\tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_1 + (t_3 - t_2)$ и последовательность управлений $u_1, u_2, 0$.

Таким образом, в любую точку на границе множества достижимости $G(t_f)$ можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

Перейдем к вопросу о виде последовательности управлений. Кроме указанных в формулировке теоремы 1 вариантов U1–U6 управлений с двумя переключениями, логически возможны еще шесть вариантов:

- 7) $0, u_2, u_1$; 8) $0, u_1, u_2$; 9) $u_2, u_1, 0$; 10) $u_1, u_2, 0$; 11) $0, u_2, 0$; 12) $0, u_1, 0$.

Управления вида 7)–10) не могут приводить на границу множества достижимости в силу леммы 4.

Рассмотрим варианты 11), 12). Здесь для каждого движения можно уменьшить число переключений на единицу аналогично тому, как это сделано для случая 4. Получим управление с одним переключением, ведущее в ту же точку на границе. Теорема 1 доказана.

С учетом лемм 1 и 2 можно уточнить результат теоремы 1 в зависимости от знака угла φ для рассматриваемой точки $z = (x, y, \varphi)^T$ на границе множества $G(t_f)$.

З а м е ч а н и е 1. Если $\varphi > 0$, то в перечне (3.9) из шести типов управлений можно оставить лишь четыре: U1, U2, U3, U6. В случае $\varphi < 0$ в перечне (3.9) можно ограничиться четырьмя типами: U2, U3, U4, U5. Если $\varphi = 0$, то в перечне (3.9) можно оставить типы U2, U3, U5, U6; при этом управления типов U5 и U6 порождают одну и ту же совокупность точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi = 0$. Любое управление типа U1 ведет в точку с $\varphi(t_f) > 0$. Для управлений типа U4 имеем $\varphi(t_f) < 0$. Поэтому типы U1, U4 исключаем. В силу леммы 1 управления U5 и U6 порождают одну и ту же совокупность точек при $\bar{t} = t_0$ и $\hat{t} = t_f$.

Пусть $\varphi > 0$. Управления типа U4 исключаем по аналогии со случаем $\varphi = 0$. Управления типа U5 также исключаем, поскольку в силу леммы 2 такие управления ведут во внутренность множества достижимости.

Случай $\varphi < 0$ разбирается аналогично. Здесь также получаем четыре варианта управлений: U2, U3, U4, U5. Замечание 1 доказано.

Опираясь на теорему 1, сформулируем теорему об управлениях, ведущих в произвольную точку множества достижимости $G(t_f)$.

Теорема 2. Пусть даны некоторые непрерывные строго возрастающие функции $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, определенные на $[0, 1]$ со значениями $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_1(1) = f_2(1) = 1$ в крайних точках. Тогда для любой точки $z = (x, y, \varphi)^T \in G(t_f)$ найдется такое $\alpha^b \in (0, 1]$, что в точку z можно перейти в момент t_f при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1^b, 0, u_2^b\}$, где $u_1^b = f_1(\alpha^b)u_1$ и $u_2^b = f_2(\alpha^b)u_2$. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{array}{lll} \text{U1}^b) & u_2^b, 0, u_2^b; & \text{U2}^b) & u_1^b, 0, u_2^b; & \text{U3}^b) & u_2^b, 0, u_1^b; \\ \text{U4}^b) & u_1^b, 0, u_1^b; & \text{U5}^b) & u_2^b, u_1^b, u_2^b; & \text{U6}^b) & u_1^b, u_2^b, u_1^b. \end{array} \quad (3.10)$$

Доказательство. Обозначим через $G(t_f, \alpha)$ при $\alpha \in [0, 1]$ множество достижимости управляемой системы, аналогичной системе (1.1) с тем лишь отличием, что управление u стеснено ограничением $u \in [u_1(\alpha), u_2(\alpha)]$, где $u_1(\alpha) = f_1(\alpha)u_1$, $u_2(\alpha) = f_2(\alpha)u_2$. Если $\alpha = 0$, то единственным допустимым управлением является управление $u(t) \equiv 0$ и множество $G(t_f, \alpha = 0)$ состоит из одной точки. Если $\alpha = 1$, то множество $G(t_f, \alpha = 1)$ совпадает с $G(t_f)$.

Пусть $z = (x, y, \varphi)^T \in \partial G(t_f)$. Тогда нужный результат следует из теоремы 1 при $\alpha^b = 1$. В частности, на границу множества $G(t_f)$ ведет управление, тождественно равное нулю. Действительно, в этом случае движение приходит в точку $z(t_f) = (t_f, 0, 0)^T$ с максимально возможным значением первой координаты.

Пусть теперь $z \in \text{int} G(t_f)$. Обозначим символом α^b наименьшее $\alpha \in [0, 1]$, при котором $z \in G(t_f, \alpha)$. Такое α^b существует в силу непрерывности функций f_1 и f_2 , непрерывной зависимости множества $G(t_f)$ в метрике Хаусдорфа от параметров u_1 и u_2 , а также в силу замкнутости множества достижимости. Непрерывность множества достижимости по параметрам u_1, u_2 вытекает из некоторого весьма общего свойства дифференциальных включений, описанного в [19] (гл. 4, теорема 5.4 (п. б) и следствие 5.5).

Отметим, что $\alpha^b > 0$. Действительно, при $\alpha^b = 0$ мы имели бы $z \in G(t_f, \alpha^b = 0)$. Это невозможно, поскольку, как отмечено выше, одноточечное множество $G(t_f, \alpha^b = 0)$ принадлежит $\partial G(t_f)$, в то время как $z \in \text{int} G(t_f)$.

Возьмем последовательность $\{\alpha_i\}$ положительных чисел, сходящуюся к α^b снизу. Имеем $z \notin G(t_f, \alpha_i)$. Пусть z_i — точка на границе множества $G(t_f, \alpha_i)$, ближайшая к точке z . Покажем, что последовательность $\{z_i\}$ сходится к точке z .

Учитывая монотонное возрастание функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, получаем монотонное возрастание (по включению) множеств $G(t_f, \alpha_i)$ с увеличением номера i . В силу непрерывности изменения множества $G(t_f, \alpha)$ по параметру α в метрике Хаусдорфа, имеем $h(G(t_f, \alpha^b), G(t_f, \alpha_i)) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Здесь h — хаусдорфово расстояние. Поскольку евклидово расстояние $r(z, G(t_f, \alpha_i))$ от точки z до множества $G(t_f, \alpha_i)$ не превышает $h(G(t_f, \alpha_i), G(t_f, \alpha^b))$, получаем $r(z, G(t_f, \alpha_i)) = r(z, z_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Так как $z_i \in \partial G(t_f, \alpha_i)$, то в силу теоремы 1 (рассматривая в ней ограничения $u_1(\alpha_i)$, $u_2(\alpha_i)$ на управление u) в точку z_i можно попасть при помощи управления с не более чем двумя переключениями со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1(\alpha_i), 0, u_2(\alpha_i)\}$, где $u_1(\alpha_i) = f_1(\alpha_i)u_1$ и $u_2(\alpha_i) = f_2(\alpha_i)u_2$. При этом в случае двух переключений можно ограничиться управлением вида

$$\begin{aligned} & 1) u_2(\alpha_i), 0, u_2(\alpha_i); \quad 2) u_1(\alpha_i), 0, u_2(\alpha_i); \quad 3) u_2(\alpha_i), 0, u_1(\alpha_i); \\ & 4) u_1(\alpha_i), 0, u_1(\alpha_i); \quad 5) u_2(\alpha_i), u_1(\alpha_i), u_2(\alpha_i); \quad 6) u_1(\alpha_i), u_2(\alpha_i), u_1(\alpha_i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из последовательности $\{\alpha_j\}$ выделим подпоследовательность $\{\alpha_j\}$ с одним и тем же числом переключений при каждом j . При этом на одном и том же по порядку следования во времени интервале постоянства управления (их не более трех) реализуется либо управление с одинаковым знаком, либо нулевое управление.

Длины участков постоянства управления ограничены. Поэтому из последовательности $\{\alpha_j\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_k\}$, для которой соответствующие длины промежутков постоянства управления имеют предел (возможно, равный нулю). Предельные значения этих длин определяют некоторое допустимое управление с не более чем двумя переключениями, которое ведет в точку z . Структура этого управления удовлетворяет свойствам, указанным в формулировке теоремы. Теорема 2 доказана.

Теорему 2 можно уточнить по аналогии с теоремой 1, учитывая знак угла φ для рассматриваемой точки $z = (x, y, \varphi)^T$ в множестве достижимости $G(t_f)$.

З а м е ч а н и е 2. Если $\varphi > 0$, то в перечне (3.10) управлений с двумя переключениями из шести типов можно оставить лишь четыре: $U1^b$, $U2^b$, $U3^b$, $U6^b$. В случае $\varphi < 0$ в перечне (3.10) можно ограничиться четырьмя типами: $U2^b$, $U3^b$, $U4^b$, $U5^b$. Если $\varphi = 0$, то в перечне (3.10) можно оставить типы $U2^b$, $U3^b$, $U5^b$, $U6^b$; при этом управления типов $U5^b$ и $U6^b$ порождают одну и ту же совокупность точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $z = (x, y, \varphi)^T \in \partial G(t_f)$, то доказательство сформулированного замечания следует из замечания 1 при $\alpha^b = 1$.

Предположим, что $z \in \text{int} G(t_f)$.

Пусть $\varphi = 0$. Этот случай анализируется так же, как и в замечании 1, с заменой типов $U1$, $U4$, $U5$, $U6$ на типы $U1^b$, $U4^b$, $U5^b$, $U6^b$.

Пусть $\varphi > 0$. При доказательстве теоремы 2 была рассмотрена последовательность $\{\alpha_j\}$, для которой точки z_i были выбраны на $\partial G(t_f, \alpha_i)$. Поскольку $\varphi > 0$, то, начиная с некоторого номера $\bar{i}$, имеем $\varphi_i > 0$. Для точек z_i , где $i > \bar{i}$, в качестве порождающих управлений с двумя переключениями будем рассматривать четыре варианта, указанные в замечании 1, с заменой крайних значений u_1 , u_2 на $u_1(\alpha_i)$, $u_2(\alpha_i)$ соответственно. При формировании подпоследовательности $\{z_k\}$ считаем реализующимся (в случае двух переключений) какой-то один из этих вариантов. Тогда для предельной точки z соответствующее предельное управление (если оно тоже имеет два переключения) принадлежит такому же варианту. Стало быть, для точки z в качестве возможных порождающих управлений с двумя переключениями при $\varphi > 0$ можно оставить лишь четыре варианта: $U1^b$, $U2^b$, $U3^b$, $U6^b$ (такие же, как в замечании 1).

Случай $\varphi < 0$ разбирается аналогично. Также получаем четыре варианта управлений: $U2^b$, $U3^b$, $U4^b$, $U5^b$. Замечание 2 доказано.

4. Формулы интегрирования экстремальных движений. Совокупность возможных значений φ системы (1.1) в момент $t_f > 0$ определяется ограничением $u \in [u_1, u_2]$ и представляет собой отрезок $[t_f u_1, t_f u_2]$. В этом и следующем разделах предполагаем, что $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Случай $\varphi \in [t_f u_1, 0]$ будет рассмотрен в последнем разделе статьи.

В соответствии с теоремой 1 в любую точку границы $\partial G(t_f)$ трехмерного множества достижимости ведет кусочно-постоянное управление с не более чем двумя переключениями. При этом, учитывая $\varphi \geq 0$, в случае двух переключений можно ограничиться управлениями четырех типов: U1, U2, U3, U6 (замечание 1). То же самое справедливо и для точек, лежащих на границе φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ при $\varphi \geq 0$.

В разд. 4.1–4.4 будем считать, что $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Крайнему значению $\varphi = t_f u_2$ соответствует однотоочечное множество $G_\varphi(t_f)$, которое описывается в разд. 4.5.

4.1. Однопараметрические кривые четырех типов в φ -сечениях. Зафиксируем некоторое $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Используя моменты переключения t_1 и t_2 , введем для каждого из четырех типов однопараметрическую кривую на плоскости x, y . Опираемся на то, что моменты переключения связаны между собой соотношением

$$\varphi = (\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2)), \quad (4.1)$$

где $\varphi(t_0) = 0$. Выражение (4.1) позволяет для каждого типа при помощи одного параметра описать управления, ведущие в зафиксированное φ -сечение, т.е. построить в плоскости x, y однопараметрическую кривую конечных положений с заданным φ в момент t_f .

1. Рассмотрим последовательность управлений $u_2, 0, u_2$ с двумя моментами переключения t_1, t_2 (тип U1). При этом $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_f$.

Условие (4.1) попадания на заданное φ -сечение принимает следующий вид:

$$\varphi = (t_1 - t_0)u_2 + (t_f - t_2)u_2. \quad (4.2)$$

Из формулы следует, что при фиксированном φ разность $t_2 - t_1$ (т.е. продолжительность среднего участка движения) является константой: $t_2 - t_1 = t_f - t_0 - \varphi/u_2$. Учитывая $t_0 = 0$, получаем

$$t_2 - t_1 = t_f - \frac{\varphi}{u_2}. \quad (4.3)$$

Взяв t_1 в качестве независимой переменной, получим при $\varphi \in (0, t_f u_2)$ диапазон $(0, \varphi/u_2)$ возможных значений t_1 . Интегрируя систему (1.1) на промежутке $[0, t_f]$ при фиксированном t_1 , а затем учитывая (4.3), придем к выражению геометрического положения в момент t_f :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi(t_1) \\ 1 - \cos \varphi(t_1) \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t_1) \\ \sin \varphi(t_1) \end{pmatrix} + \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin \varphi(t_1) \\ \cos \varphi(t_1) - \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t_1) \\ \sin \varphi(t_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t_1) \\ \sin \varphi(t_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Формула (4.4) задает непрерывную однопараметрическую кривую (по параметру t_1) на плоскости x, y .

Возьмем новый независимый параметр $s_1 = 2t_1 u_2 - \varphi$. Для него диапазон возможных значений $s_1 \in (-\varphi, \varphi)$ становится симметричным.

Подставляя в (4.4) выражение $\varphi(t_1) = t_1 u_2 = (s_1 + \varphi)/2$, получаем для $\varphi \in (0, t_f u_2)$ однопараметрическую кривую на плоскости x, y :

$$\begin{pmatrix} x_{U1}(s_1) \\ y_{U1}(s_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_1 + \varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_1 + \varphi}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

2. Действуя аналогично, устанавливаем, что движения, соответствующие типам управлений U_2, U_3, U_6 , также порождают однопараметрические кривые на плоскости x, y (при фиксированном φ). Для их описания введем обозначение

$$\theta = \frac{u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1}. \quad (4.6)$$

Очевидно, что при $\varphi \in [0, t_f u_2)$ выполнено неравенство $\theta > 0$. Параметры s_2, s_3, s_6 определим через t_1 и θ :

$$s_2 = t_1 u_1, \quad s_3 = t_1 u_2 - \varphi, \quad s_6 = -2t_1 u_1 - \theta. \quad (4.7)$$

Интегрируя систему (1.1), получаем следующие формулы:

$$\begin{pmatrix} x_{U_2}(s_2) \\ y_{U_2}(s_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \quad (4.8)$$

$$+ \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left((\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos s_2 \\ \sin s_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin s_2 \\ 1 - \cos s_2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\begin{pmatrix} x_{U_3}(s_3) \\ y_{U_3}(s_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \quad (4.9)$$

$$+ \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left((\theta - s_3) \begin{pmatrix} \cos(s_3 + \varphi) \\ \sin(s_3 + \varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(s_3 + \varphi) \\ 1 - \cos(s_3 + \varphi) \end{pmatrix} \right),$$

$$\begin{pmatrix} x_{U_6}(s_6) \\ y_{U_6}(s_6) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\varphi - s_6}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\varphi - s_6}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Формулы (4.8)–(4.10) задают однопараметрические кривые на плоскости x, y , соответствующие управлениям типа U_2, U_3, U_6 с двумя переключениями. Параметры s_2, s_3, s_6 изменяются в следующих диапазонах:

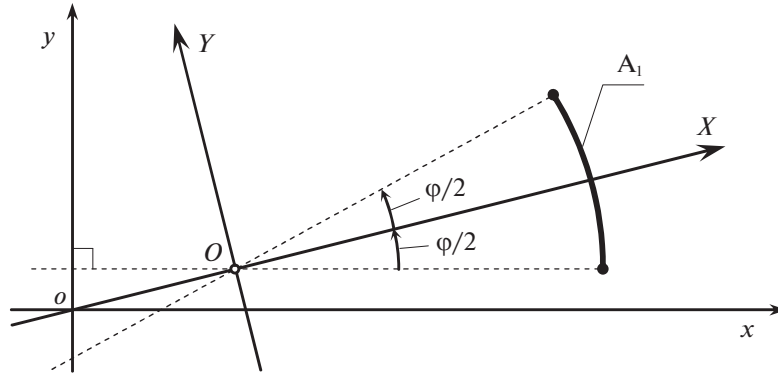
$$s_2 \in (-\theta, 0), \quad s_3 \in (0, \theta), \quad s_6 \in (-\theta, \theta). \quad (4.11)$$

3. Для $\varphi \in [0, t_f u_2)$ управления $u(\cdot)$ с одним переключением, удовлетворяющие ПМП, могут иметь только такую структуру: $0, u_2; u_2, 0; u_1, u_2; u_2, u_1$. Нетрудно убедиться, что движение, порождаемое каждым из таких вариантов, ведет в крайнюю точку хотя бы одной из кривых (4.5), (4.8)–(4.10). Управление без переключения (удовлетворяющее ПМП) является тождественно равным нулю. Соответствующее движение дает $\varphi(t_f) = 0, x(t_f) = t_f, y(t_f) = 0$. Это означает, что точка $(x(t_f), y(t_f))^T$, отвечающая нулевому управлению, может быть в φ -сечении множества $G(t_f)$ только при $\varphi = 0$. Получаемые значения $x(t_f), y(t_f)$ совпадают со значениями, рассчитанными по формуле (4.5) для $\varphi = 0, s_1 = 0$.

Таким образом, в силу теоремы 1, для $\varphi \in [0, t_f u_2)$ при описании границы $\partial G_\varphi(t_f)$ достаточно использовать кривые (4.5), (4.8)–(4.10) с замкнутыми областями определения:

$$s_1 \in [-\varphi, \varphi], \quad s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [0, \theta], \quad s_6 \in [-\theta, \theta]. \quad (4.12)$$

4.2. Вспомогательная система координат. Помимо исходной системы координат будем использовать вспомогательную ортогональную систему X, Y . Ось X вспомогательной системы проходит через начало отсчета исходной системы координат x, y и развернута на угол

Рис. 7. Вспомогательная система координат X, Y

$\varphi/2$ относительно оси x (рис. 7). Начало вспомогательной системы координат расположим в точке $O = (\sin\varphi, 1 - \cos\varphi)^T$. Пересчет во вспомогательную систему X, Y из исходной системы x, y осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} \right). \quad (4.13)$$

Вспомогательная система координат зависит только от угла φ . Формула (4.13) задает *взаимно-однозначное* аффинное соответствие (при фиксированном φ) между векторами $(x, y)^T$ и $(X, Y)^T$.

Кривые (4.5), (4.8)–(4.10), определенные для $\varphi \in [0, t_f u_2)$ параметрами s_1, s_2, s_3, s_6 в замкнутых интервалах (4.12), пересчитаем во вспомогательную систему координат X, Y и обозначим через A_1, A_2, A_3, A_6 соответственно. Для сокращения записи положим

$$\xi_\varphi(u_2) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Имеем

$$A_1(s_1) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\theta \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_1}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2), \quad (4.15)$$

$$A_2(s_2) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\left(\theta + s_2 \right) \begin{pmatrix} \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} - 2\sin\left(\frac{s_2}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2), \quad (4.16)$$

$$A_3(s_3) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\left(\theta - s_3 \right) \begin{pmatrix} \cos\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 2\sin\left(\frac{s_3}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2), \quad (4.17)$$

$$A_6(s_6) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[- \begin{pmatrix} 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{-s_6}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{-s_6}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2). \quad (4.18)$$

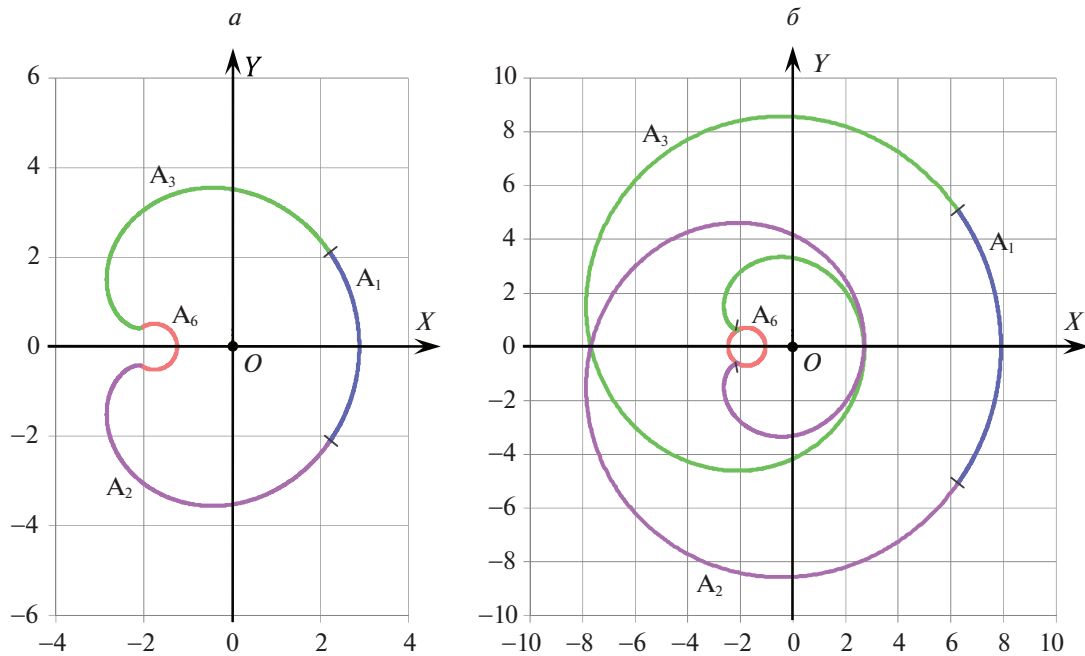


Рис. 8. Примеры кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ для несимметричного случая: $u_1 = -2$, $u_2 = 3$, $\varphi = 0.4\pi$; значения $t_f = 1.3\pi$ (a) и $t_f = 2.9\pi$ (б)

Подчеркнем структурную аналогию формул (4.15)–(4.18): квадратная скобка, один и тот же коэффициент перед ней, одно и то же последнее слагаемое. Параметры s_1, s_2, s_3, s_6 , входящие в квадратную скобку, изменяются в диапазонах (4.12).

Кривые A_1 и A_6 представляют собой дуги окружностей. Каждая из них симметрична относительно оси X в силу симметрии относительно нуля диапазонов изменения параметров s_1, s_6 . Кривые A_2 и A_3 взаимно симметричны относительно оси X . Это следует из того, что X -компоненты точек на кривых A_2 и A_3 при $s_2 = -s_3$ совпадают, а Y -компоненты отличаются только знаком.

4.3. Составная замкнутая кривая. При зафиксированном $\varphi \in [0, t_f u_2)$ набор кривых A_1, A_2, A_3, A_6 содержит в себе границу множества $G_\varphi(t_f)$. Рассмотрим эти кривые в последовательности A_1, A_3, A_6, A_2 с обходом их по возрастанию параметров s_1, s_2, s_3, s_6 . При крайних значениях (4.12) параметров имеем

$$A_1(\varphi) = A_3(0), \quad A_3(\theta) = A_6(-\theta), \quad A_6(\theta) = A_2(-\theta), \quad A_2(0) = A_1(-\varphi).$$

В результате склейки получаем непрерывную кусочно-гладкую замкнутую кривую на плоскости X, Y . Обозначим ее символом $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ и будем называть составной. Эта кривая симметрична относительно оси X и непрерывно зависит от u_1, u_2, t_f . Структура кривой при фиксированном φ усложняется с ростом t_f . Подчеркнем, что кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ составлена из кривых четырех типов и содержит в себе все точки границы множества $G_\varphi(t_f)$.

На рис. 8 даны два примера кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ для несимметричного случая $u_1 = -2, u_2 = 3$ при $\varphi = 0.4\pi$. Как было отмечено выше, сохраняется симметрия кривой относительно оси X вспомогательной системы координат. Точки сочленения дуг A_1, A_3, A_6, A_2 отмечены рисками. Для значения $t_f = 1.3\pi$ (рис. 8, а) кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ не имеет самопересечений. Для значения $t_f = 2.9\pi$ (рис. 8, б) на кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ есть точки самопересечения.

Кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ будет играть главную роль при решении основной задачи статьи, заключающейся в установлении соответствия между φ -сечениями $G_\varphi(t_f)$ множества достижимости для канонического и несимметричного случаев.

4.4. Семейство составных кривых. Пусть $\varphi \in [0, t_f u_2]$ и $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условию теоремы 2. Рассмотрим произвольную точку в множестве $G_\varphi(t_f)$. В силу теоремы 2 и замечания 2 найдется такое $\alpha^b \in (0, 1]$, что в данную точку можно перейти в момент t_f при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями и со значениями в трехэлементном множестве $\{u_1^b, 0, u_2^b\}$, где $u_1^b = f_1(\alpha^b)u_1$, $u_2^b = f_2(\alpha^b)u_2$. При этом в случае двух переключений можно ограничиться четырьмя типами управлений: $U1^b$, $U2^b$, $U3^b$, $U6^b$.

Обозначим при помощи символа $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$ склеенную кривую, аналогичную кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ и построенную с использованием формул (4.6), (4.14)–(4.18) при подстановке в них значений $u_1(\alpha) = f_1(\alpha)u_1$, $u_2(\alpha) = f_2(\alpha)u_2$ вместо значений u_1 , u_2 . Получаем, что семейство кривых $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$, где $\alpha \in (0, 1]$, заполняет все множество $G_\varphi(t_f)$, т.е.

$$G_\varphi(t_f) = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \{\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)\}. \quad (4.19)$$

Каждая кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$ (по аналогии с кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$) симметрична относительно оси X вспомогательной системы координат. Поэтому в силу (4.19) получаем симметрию множества $G_\varphi(t_f)$ относительно оси X .

4.5. Одноточечное φ -сечение в особом случае $\varphi = t_f u_2$. Крайнее значение $\varphi = t_f u_2$ реализуется на управлении $u(t) \equiv u_2$. Интегрируя систему (1.1), получаем точку с координатами $x(t_f) = \sin(t_f u_2)/u_2$, $y(t_f) = (1 - \cos(t_f u_2))/u_2$. Пересчитаем ее во вспомогательную систему координат и обозначим символом $e(t_f)$. Имеем

$$e(t_f) = \left(\frac{1}{u_2} - 1 \right) \begin{pmatrix} 2 \sin\left(t_f \frac{u_2}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Таким образом, φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ при $\varphi = t_f u_2$ состоит из одной точки $e(t_f)$.

5. Связь φ -сечений для несимметричного и канонического случаев. В этом разделе будет показано, что любое φ -сечение для общего несимметричного случая связано некоторым взаимно-однозначным аффинным соответствием с φ -сечением для канонического случая. Это будет означать, в частности, что φ -сечения для несимметричного случая могут быть получены на основе описания φ -сечений для канонического случая.

В рамках системы (1.1) зафиксируем некоторые значения $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Как и ранее, считаем $t_0 = 0$, $z(t_0) = (x_0, y_0, \varphi_0)^T = (0, 0, 0)^T$.

Наряду с общим рассмотрим канонический случай, для которого положим

$$u_1^c = -1, \quad u_2^c = 1, \quad t_f^c = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi, \quad \varphi^c = \varphi. \quad (5.1)$$

Отметим, что вводимый момент времени t_f^c зависит от значений u_1 , u_2 , t_f и φ . Видно, что $0 \leq \varphi^c \leq t_f^c$. Символом $G_\varphi^c(t_f^c)$ обозначим φ -сечение множества достижимости в момент t_f^c для канонического случая. По аналогии с (4.6) положим

$$\theta^c = \frac{u_1^c(\varphi^c - t_f^c u_2^c)}{u_2^c - u_1^c}.$$

С учетом (5.1) имеем

$$\theta^c = \frac{t_f^c - \varphi}{2}. \quad (5.2)$$

Прежде, чем установить формулу соответствия между φ -сечениями $G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi^c(t_f^c)$, получим при $\varphi \in [0, t_f u_2]$ аналогичную формулу для кривых $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ и $\mathcal{A}_\varphi(u_1^c, u_2^c, t_f^c)$. Здесь $\mathcal{A}_\varphi(u_1^c, u_2^c, t_f^c)$ – замкнутая кривая в виде склейки кривых $A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_6^c$, заданных формулами (4.15)–(4.18) при подстановке в них значений u_1^c, u_2^c, t_f^c и θ^c вместо u_1, u_2, t_f, θ . А именно покажем, что кривые $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ и $\mathcal{A}_\varphi(u_1^c, u_2^c, t_f^c)$, записанные во вспомогательной системе координат (она зависит только от φ), связаны соотношением

$$\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \mathcal{A}_\varphi(u_1^c, u_2^c, t_f^c) + \xi_\varphi(u_2). \quad (5.3)$$

Величина $\xi_\varphi(u_2)$ определена формулой (4.14). Доказательство соотношения (5.3) подскажет способ рассуждений при установлении соответствия между φ -сечениями $G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi^c(t_f^c)$.

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (5.3), достаточно проверить его для соответствующих пар кривых: $(A_1, A_1^c), (A_2, A_2^c), (A_3, A_3^c), (A_6, A_6^c)$. Подставляя значение t_f^c из (5.1) в (5.2), получаем равенство $\theta^c = \theta$, где θ определяется (4.6). Поэтому, учитывая равенство $\varphi^c = \varphi$, делаем вывод о совпадении диапазонов (4.12) изменения параметров s_1, s_2, s_3, s_6 при задании кривых A_1, A_2, A_3, A_6 с соответствующими диапазонами для кривых $A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_6^c$.

Рассмотрим кривые A_1 и A_1^c . Кривая A_1 задается формулой (4.15) и соответствует моменту t_f при ограничениях на управление u_1, u_2 . Кривая A_1^c соответствует моменту t_f^c при ограничениях на управление u_1^c, u_2^c . С учетом того, что $u_1^c = -1, u_2^c = 1$ и $\theta^c = \theta$, она имеет вид

$$A_1^c(s_1) = \theta^c \left(\frac{1}{u_2^c} - \frac{1}{u_1^c} \right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_1}{2}\right) \end{pmatrix} + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2^c} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\theta \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_1}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Используя формулы (4.15), (5.4), убеждаемся в справедливости равенства

$$A_1(s_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) A_1^c(s_1) + \xi_\varphi(u_2).$$

Аналогичные равенства (во вспомогательной системе координат) справедливы и для других пар кривых: $(A_2, A_2^c), (A_3, A_3^c), (A_6, A_6^c)$. Стало быть, выполнено соотношение (5.3).

Т е о р е м а 3. Пусть $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Сечения $G_\varphi(t_f)$ множества достижимости исходной системы (1.1) связаны во вспомогательной системе координат с сечениями $G_\varphi^c(t_f^c)$ множества достижимости канонической системы (5.1) соотношением

$$G_\varphi(t_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) G_\varphi^c(t_f^c) + \xi_\varphi(u_2). \quad (5.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале будем считать, что $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Воспользуемся схемой, использованной при установлении равенства (5.3). Потом предположим, что $\varphi = t_f u_2$.

1. Пусть $\varphi \in [0, t_f u_2]$. Для несимметричного случая рассмотрим функции

$$f_1^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)}, \quad f_2^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_1}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)}. \quad (5.6)$$

Эти функции удовлетворяют условиям, оговоренным в теореме 2.

Положим $u_1^{(1)}(\alpha) = f_1^{(1)}(\alpha)u_1, u_2^{(1)}(\alpha) = f_2^{(1)}(\alpha)u_2$. Кривые $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f)$ при переборе $\alpha \in (0, 1]$ заполняют все множество $G_\varphi(t_f)$ (разд. 4.4).

Для канонического случая, определенного в (5.1), рассмотрим функции

$$f_1^{(2)}(\alpha) = \alpha, \quad f_2^{(2)}(\alpha) = \alpha. \quad (5.7)$$

Положим $u_1^{(2)}(\alpha) = f_1^{(2)}(\alpha)u_1^c$, $u_2^{(2)}(\alpha) = f_2^{(2)}(\alpha)u_2^c$. Кривые $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^c)$ при переборе $\alpha \in (0, 1]$ заполняют все множество $G_\varphi^c(t_f^c)$.

Установим соответствие между введенными семействами кривых по формуле

$$\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^c) + \xi_\varphi(u_2), \quad \alpha \in (0, 1]. \quad (5.8)$$

Зафиксируем некоторое $\alpha \in (0, 1]$. В силу (5.6) и (5.7) получаем

$$u_1^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)}, \quad u_2^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)}, \quad (5.9)$$

$$u_1^{(2)}(\alpha) = -\alpha, \quad u_2^{(2)}(\alpha) = -u_1^{(2)}(\alpha) = \alpha. \quad (5.10)$$

Для упрощения записи положим $u_1^{(1)} = u_1^{(1)}(\alpha)$, $u_2^{(1)} = u_2^{(1)}(\alpha)$, $u_1^{(2)} = u_1^{(2)}(\alpha)$, $u_2^{(2)} = u_2^{(2)}(\alpha)$.

Используя (5.6) и неравенство $(u_2 + u_1) < (u_2 - u_1)$, а также учитывая, что $\alpha \neq 0$, имеем

$u_1 \leq u_1^{(1)} < 0$, $0 < u_2^{(1)} \leq u_2$. Видно, что $u_1^c \leq u_1^{(2)} < 0$, $0 < u_2^{(2)} \leq u_2^c$.

При зафиксированных значениях φ , t_f и t_f^c введем величины

$$\theta^{(1)} = \frac{u_1^{(1)}(\varphi - t_f u_2^{(1)})}{u_2^{(1)} - u_1^{(1)}}, \quad (5.11)$$

$$\theta^{(2)} = \frac{u_1^{(2)}(\varphi - t_f^c u_2^{(2)})}{u_2^{(2)} - u_1^{(2)}} = \frac{t_f^c u_2^{(2)} - \varphi}{2}. \quad (5.12)$$

Формулы (5.11), (5.12) аналогичны соотношениям (4.6), (5.2), в которых были задействованы управления u_1 , u_2 и u_1^c , u_2^c . Используя (5.11), (5.12), вводим кривые $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, t_f)$ и $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, t_f^c)$. Их составные части вычисляем по формулам (4.15)–(4.18), подставляя в них вместо u_1 , u_2 , θ значения $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ и $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $\theta^{(2)}$. Кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, t_f)$ (так же, как и кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$) лежит в множестве $G_\varphi(t_f)$, а кривая $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, t_f^c)$ лежит в множестве $G_\varphi^c(t_f^c)$.

Покажем, что $\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$. Подставляя в (5.11) выражения для $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ из (5.9), получим

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \frac{\left(\frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)} \right) \left(\varphi - t_f \left(\frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)} \right) \right)}{\left(\frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)} \right) - \left(\frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)} \right)} = \\ &= \frac{\varphi(\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)) - 2\alpha u_1 u_2 t_f}{2(u_2 - u_1)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Формула (5.12) при подстановке t_f^c из (5.1) и $u_2^{(2)}$ из (5, 10) принимает вид

$$\theta^{(2)} = \alpha \left(\frac{u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varphi}{2}. \quad (5.14)$$

Сравнивая (5.13) и (5.14), убеждаемся, что $\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$.

Составляющие кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, t_f)$ обозначим через $A_n^{(1)}$, а составляющие кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, t_f^c)$ — через $A_n^{(2)}$, $n = 1, 2, 3, 6$. Каждая составляющая $A_n^{(1)}$ кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, t_f)$ в соответствии с формулами (4.15)–(4.18) представима в виде

$$\left(\frac{1}{u_2^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(1)}} \right) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_n^{(1)}} + \xi_\varphi(u_2^{(1)}).$$

Здесь квадратная скобка $\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_n^{(1)}}$ (матрица-столбец) соответствует кривой $A_n^{(1)}$ и определяется значениями φ , $\theta^{(1)}$, а также параметром s_n . Для составляющих кривой $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, t_f^c)$ справедлива такая же формула, только в обозначениях вместо верхнего индекса (1) нужно подставить индекс (2).

Возьмем любую кривую $A_n^{(1)}$ из четырех в составе $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, t_f)$ и соответствующую ей кривую $A_n^{(2)}$ в составе $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, t_f^c)$. Запишем доказываемую формулу (5.8) для выбранных кривых:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{u_2^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(1)}} \right) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_n^{(1)}} + \xi_\varphi(u_2^{(1)}) = \\ & = \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2} \left(\left(\frac{1}{u_2^{(2)}} - \frac{1}{u_1^{(2)}} \right) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_n^{(2)}} + \xi_\varphi(u_2^{(2)}) \right) + \xi_\varphi(u_2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

В этой формуле квадратные скобки совпадают в силу равенства $\theta^{(1)} = \theta^{(2)}$. Используя определения величин $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ в силу формул (5.9) и (5.10), убеждаемся, что коэффициенты

$$\left(\frac{1}{u_2^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(1)}} \right), \quad \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2} \left(\frac{1}{u_2^{(2)}} - \frac{1}{u_1^{(2)}} \right)$$

при квадратных скобках также совпадают. Чтобы установить равенство между оставшимися слагаемыми слева и справа в формуле (5.15), следует (после подстановки выражений для ξ_φ) проверить соотношение

$$2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1}{u_2^{(1)}} - 1\right) = \left(\frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2}\right) 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1}{u_2^{(2)}} - 1\right) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1}{u_2} - 1\right).$$

Данное соотношение справедливо в силу определения величин $u_2^{(1)}$, $u_2^{(2)}$ при помощи формул (5.9), (5.10).

Таким образом, равенство (5.15) и, стало быть, равенство (5.8) доказаны. С учетом (4.19) имеем

$$G_\varphi(t_f) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \{ \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f) \}, \quad G_\varphi^c(t_f^c) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \{ \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^c) \}.$$

Получаем требуемую формулу (5.5) соответствия между φ -сечениями $G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi^c(t_f^c)$ для исходного и канонического вариантов ограничений на управление.

2. Пусть $\varphi = t_f u_2$. В этом случае множество $G_\varphi(t_f)$ состоит из одной точки, которая во вспомогательной системе координат записывается в виде (4.20). Для канонической системы величина t_f^c в силу (5.1) принимает значение $t_f^c = \varphi$. Тогда максимально возможное значение угловой

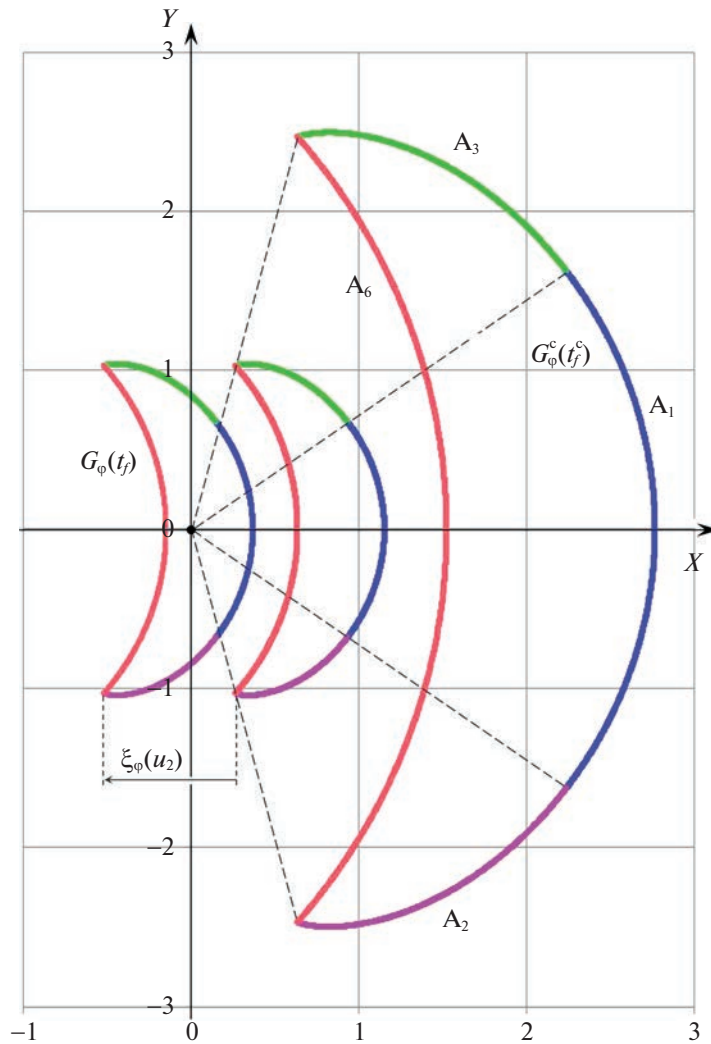


Рис. 9. Иллюстрация взаимного соответствия φ -сечений в несимметричном и каноническом случаях

координаты есть $t_f^c u_2^c = t_f^c = \varphi$. Поэтому множество $G_\varphi^c(t_f^c)$ также состоит из одной точки, которую обозначим $e^c(t_f^c)$. Она рассчитывается по аналогии с формулой (4.20):

$$e^c(t_f^c) = \left(\frac{1}{u_2^c} - 1 \right) \begin{pmatrix} 2 \sin \left(t_f^c \frac{u_2^c}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя $e(t_f)$ и $e^c(t_f^c)$ вместо $G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi^c(t_f^c)$ в (5.5), получаем равенство

$$\left(\frac{1}{u_2} - 1 \right) \begin{pmatrix} 2 \sin \left(t_f \frac{u_2}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое справедливо, поскольку $\varphi = t_f u_2$.

Таким образом, соотношение (5.5) выполнено и в случае, когда $\varphi = t_f u_2$. Теорема 3 доказана.

Рисунок 9 поясняет применение формулы (5.5). Исходные данные для несимметричного случая взяты в виде $u_1 = -2$, $u_2 = 3$, $\varphi = 0.4\pi$, $t_f = 0.5\pi$. Просчитанный по этим данным момент t_f^c ,

который надо использовать в канонической системе, равен 1.28π . Соответствующее этому моменту множество $G_\varphi^c(t_f^c)$ во вспомогательной системе координат показано на рисунке справа.

При умножении множества $G_\varphi^c(t_f^c)$ на коэффициент $(1/u_2 - 1/u_1)/2 \approx 0.417$ происходит его “сжатие” относительно нуля вспомогательной системы (изображено вторым справа). Сдвиг полученного множества вдоль оси X на величину $\xi_\varphi(u_2) \approx -0.784$ дает искомое множество $G_\varphi(t_f)$ (первое слева) для несимметричного случая.

З а м е ч а н и е 3. Формулу (5.5) можно переписать в исходных координатах x, y . Новая формула будет иметь тот же вид, но только в ней надо заменить сдвиг $\xi_\varphi(u_2)$ на

$$\xi_\varphi(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 4. В работе [20] рассмотрен случай одностороннего поворота, когда $0 = u_1 < u_2$. Здесь каждое φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ трехмерного множества достижимости представляет собой либо сегмент круга (при $\varphi < 2\pi$), либо целый круг (при $\varphi \geq 2\pi$). В силу непрерывной зависимости множества достижимости от параметра u_1 (считаем, что значение u_2 зафиксировано) такое φ -сечение представляет собой предел в метрике Хаусдорфа φ -сечений $G_\varphi(t_f)$ при $u_1 \rightarrow -0$. Подчеркнем, что при этом множества $G_\varphi(t_f)$ для $u_1 < 0$ не являются выпуклыми. Стало быть, формула соответствия (5.5) применима только для случая $u_1 < 0 < u_2$. С ее помощью нельзя получить предельное множество для $u_1 = 0$.

6. Случай $\varphi < 0$. Рассмотрим некоторое $\varphi \in [u_1 t_f, 0)$ при $t_f > 0$. Требуется получить описание множества $G_\varphi(t_f)$. Укажем в исходных координатах свойство симметрии, позволяющее сделать это.

Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление со значениями в промежутке $[u_1, u_2]$, ведущее в точку $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T \in G_\varphi(t_f)$, где $\varphi(t_f) = \varphi < 0$. Наряду с исходной задачей с ограничениями u_1, u_2 рассмотрим новую задачу с ограничениями $\tilde{u}_1 = -u_2, \tilde{u}_2 = -u_1$. Получаемое в ней при том же значении t_f трехмерное множество достижимости обозначим $\tilde{G}(t_f)$.

В новой задаче возьмем управление $\tilde{u}(t) = -u(t), t \in [0, t_f]$. Имеем $\tilde{u}_1 \leq \tilde{u}(t) \leq \tilde{u}_2$. Специфика уравнений движения машины Дубинса проявляется в том, что получаемые в момент t текущие значения $\tilde{\varphi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ фазовых переменных удовлетворяют соотношениям $\tilde{\varphi}(t) = -\varphi(t), \tilde{x}(t) = x(t), \tilde{y}(t) = -y(t)$. При этом $\tilde{\varphi}(t_f) > 0$.

Стало быть, чтобы найти множество $G_\varphi(t_f)$ при $\varphi < 0$, нужно взять множество $\tilde{G}_{\tilde{\varphi}}(t_f)$ в новой задаче и отразить его относительно оси x . Таким образом, случай $\varphi < 0$ в исходной задаче сводится к случаю $\tilde{\varphi} > 0$ в новой задаче.

Заключение. Изучается трехмерное множество достижимости для нелинейного управляемого объекта, называемого “машина Дубинса”. Предполагается, что повороты возможны как “влево”, так и “вправо”. Рассматривается случай с несимметричными, вообще говоря, возможностями (допусками) таких поворотов. Основные результаты статьи опираются на ПМП и состоят в следующем.

Известная для симметричного случая теорема о шести типах кусочно-постоянных управлений с не более чем двумя переключениями, ведущих на границу множества достижимости, распространяется на несимметричный случай. Аналогичная теорема доказана и для точек из внутренней области множества достижимости (при уменьшении допусков на повороты влево и вправо).

Используемые типы управлений при фиксированном значении $\varphi \geq 0$ угловой координаты порождают непрерывную замкнутую кривую на плоскости геометрических координат. Совокупность таких кривых, получаемая при уменьшении допусков на повороты влево и вправо, полностью заполняет рассматриваемое φ -сечение. Это позволяет обосновать для $\varphi \geq 0$ формулу расчета φ -сечения множества достижимости в несимметричном случае через соответствующее сечение в каноническом симметричном случае. При этом в каноническом случае берем то же самое значение φ угловой координаты, но некоторый другой момент времени, для которого просчиты-

вается φ -сечение. Формула имеет вид аффинного преобразования и задает взаимно-однозначное соответствие таких φ -сечений. Анализ φ -сечений при $\varphi < 0$ осуществляется на основе φ -сечений для $\varphi > 0$.

В итоге построение множества достижимости машины Дубинса в несимметричном случае сводится к каноническому случаю. В силу взаимной однозначности полученного в работе соответствия это означает, что наличие описания трехмерного множества достижимости для каких-то конкретных допусков на повороты влево и вправо позволяет получить описание множества достижимости для произвольного случая с двусторонними поворотами.

Исследование подобного вопроса в рамках случая строго одностороннего поворота [21] (поворот возможен только в одну сторону с ограничениями сверху и снизу на мгновенный радиус поворота), скорее всего, также имеет положительный ответ. Авторы попробуют обосновать это в одной из следующих работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubins L.E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American J. Math. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.
2. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1889. Т. 1. Вып. 2. С. 250–276.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
4. Patsko V.S., Fedotov A.A. Three-dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description // Commun. Optim. Theory. 2022. V. 2022. Article ID 23. P. 1–42.
5. Laumond J.-P. (ed.) Robot Motion Planning and Control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998 (Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 229).
6. LaValle S.M. Planning Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
7. Бузиков М.Э., Галеев А.А. Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021. № 5. С. 3–19.
8. Ардентов А.А., Локуцкий Л.В., Сачков Ю.Л. Решение серии задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 86–92.
9. Хабаров С.П., Шилкина М.Л. Геометрический подход к решению задачи для машин Дубинса при формировании программных траекторий движения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21. № 5. С. 653–663.
10. Зимовец А.А., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В., Ушаков В.Н. Свойство стабильности в игровой задаче о сближении при наличии фазовых ограничений // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 27–45.
11. Бортаковский А.С. Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 49–59.
12. Bakolas E., Tsiotras P. Optimal Synthesis of the Asymmetric Sinistral / Dextral Markov-Dubins Problem // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 150. № 2. P. 233–250.
13. Миле А. Механика полета. М.: Наука, 1965.
14. Pecsvaradi T. Optimal Horizontal Guidance Law for Aircraft in the Terminal Area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. 17. № 6. P. 763–772.
15. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
16. Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 182–197.
17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
18. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
19. Tolstonogov A.A. Differential Inclusions in a Banach Space. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 2000 (Mathematics and Its Applications. V. 524).
20. Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 143–155.
21. Пацко В.С., Федотов А.А. Структура множества достижимости для машины Дубинса со строго односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 171–187.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 629.7

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНОЛОГИИ УТОЧНЕНИЯ ЭФЕМЕРИД КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ГЛОНАСС НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ АППАРАТНЫХ СРЕДСТВ МЕЖСПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2023 г. М. Н. Красильщиков^а, Д. М. Кружков^{а,*}, В. В. Пасынков^а

^аМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: kruzchkovd@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 17.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Обосновываются необходимые условия реализации информационной технологии, обеспечивающей автономность функционирования при одновременном повышении точности эфемерид и часов существующего средневисотного сегмента ГЛОНАСС. Обсуждаемая технология включает методы и алгоритмы повышения точности прогноза и уточнения эфемерид навигационных космических аппаратов в инерциальной системе координат, прогноза и уточнения эволюции параметров вращения Земли, высокоточной синхронизации бортовых часов. Уделяется внимание созданию необходимых условий реализации первой из перечисленных выше компонент предлагаемой технологии, обеспечивающей прогнозирование и уточнение эфемерид навигационных космических аппаратов в инерциальной системе координат, в том числе в автономном режиме функционирования спутниковых группировок. Компонента реализуется в форме блока специальных процедур использования аппаратуры для проведения измерений дальностей между спутниками. При этом возникает ряд технических проблем и сопутствующих ограничений, препятствующих успешному применению подобной аппаратуры в интересах решения задачи уточнения эфемерид навигационных космических аппаратов. Описаны предлагаемые авторами подходы и методы, призванные парировать часть проблем и ограничений и, в конечном итоге, повысить точность формируемых оценок эфемерид навигационных космических аппаратов на основе обработки формируемых с помощью бортовых аппаратных средств межспутниковых измерений.

DOI: 10.31857/S0002338823040091, EDN: OCWQKA

Введение. Как известно в [1], улучшение потребительских характеристик современных спутниковых навигационных систем обеспечивается путем решения совокупности взаимосвязанных технических проблем, снижающих значение ключевого показателя точности навигационного поля — эквивалентной погрешности определения псевдодальности потребителя (ЭППД) навигационных сигналов [2]. Интегрально значение ЭППД определяется суммой составляющих, обусловленных следующими факторами:

погрешностями определяемых в инерциальной системе эфемерид навигационных космических аппаратов (НКА);

неопределенностью эволюционирующих значений параметров вращения Земли (смещение полюса и поправка к Всемирному времени);

уходом бортовых часов НКА относительно системной шкалы и др.

Анализ показывает [3], что одной из существенных по ее вкладу в итоговую погрешность навигационной задачи потребителя является ошибка эфемерид НКА при их прогнозировании на средних и длительных временных интервалах (от половины суток и до нескольких недель). В настоящий момент эта проблема решается на основе периодической реализации ряда процедур, приводящих в итоге к формированию в наземной инфраструктуре нового пакета точных эфемерид КА, загружаемых далее на борт. Таким образом, перманентное требование повышения точности эфемерид приводит к необходимости выполнять эти процедуры как можно чаще и более эффективно, что в результате входит в очевидное противоречие с техническими и ресурсными

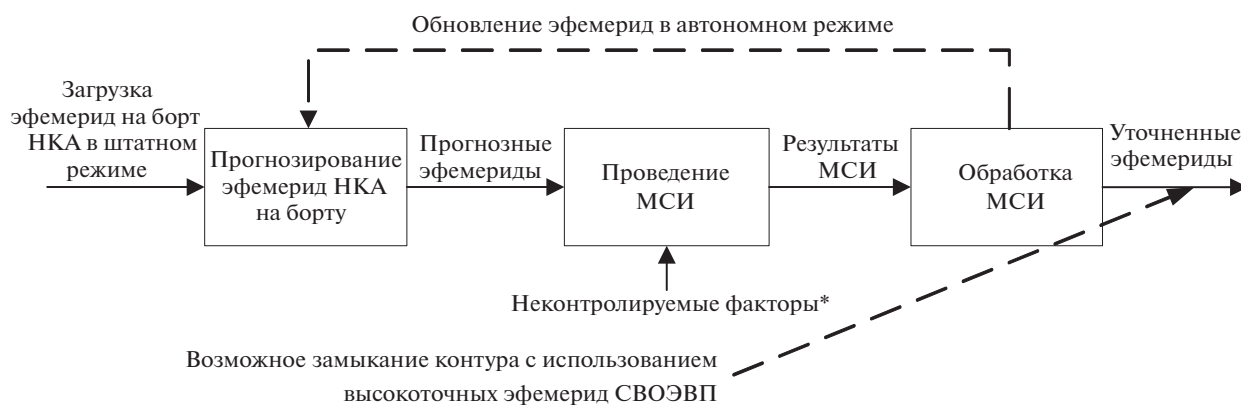


Рис. 1. Функциональная схема использования МСИ в интересах уточнения прогнозных эфемерид НКА.

ограничениями, включая возможности наземной и бортовой аппаратуры. Дополнительным недостатком реализации подобных процедур является зависимость от наземной инфраструктуры и отсутствие возможности функционирования НКА ГЛОНАСС в автономном режиме. Избежать более частой загрузки данных на борту можно, например, путем реализации на борту процедур высокоточного прогнозирования движения НКА, но на текущий момент существующие и применяемые для этого инструменты неприемлемы в силу неудовлетворительной точности прогноза для средних и длительных интервалов времени. Основной проблемой, препятствующей реализации на борту высокоточного прогноза, является наличие неопределенных факторов в модели движения КА, связанных с ошибками системы ориентации КА и определением ускорения, вызываемого давлением солнечного света.

Возникающую задачу совершенствования процедур уточнения прогнозных эфемерид без участия наземной инфраструктуры предлагается решать непосредственно на борту НКА на основе обработки формируемых с использованием аппаратных средств, позволяющих проводить межспутниковые измерения (МСИ) и обмен информацией между парами НКА созвездия орбитальной группировки (ОГ) [4, 5]. Как показали результаты предварительного анализа, применения подобных средств с учетом обработки формируемых в процессе опытной эксплуатации данных в интересах решения задачи уточнения эфемерид КА, среднеквадратическое отклонение (СКО) ошибки измеренной межспутниковой дальности имеет сантиметровый порядок, что является весьма обнадеживающим. Тем не менее, трудности применения аппаратных средств для межспутниковых измерений (АС МСИ) в актуальных рабочих циклах НКА связаны, прежде всего, со следующими факторами:

- наличием значительной неопределенной составляющей в ошибках измерений (не менее единиц метров);

- существенным различием технических характеристик АС МСИ на разных НКА ОГ;

- различными значениями задержек в антенно-фидерных системах (АФС) на разных частотах;

- задержкой сигнала в плазмосфере;

- релятивистскими поправками;

- неопределенными погрешностями величин так называемых “выносов” фазовых центров антенн (ФЦ) НКА ГЛОНАСС относительно опорных (формулярных) значений.

С учетом сказанного задача комплексного уточнения эфемерид навигационных аппаратов всей ОГ с использованием АС МСИ требует решения отдельных частных подзадач по разработке методов и алгоритмов применения данной аппаратуры с целью устранения большей части существующих технических проблем и влияния неопределенных факторов.

1. Техническая постановка задачи уточнения эфемерид. Как уже упоминалось, аппаратные средства для проведения МСИ являются перспективными с точки зрения возможностей реализации информационной технологии уточнения эфемерид НКА ГЛОНАСС. Наиболее вероятная функциональная схема применения подобных средств с учетом технических особенностей этой аппаратуры представлена на рис. 1.

Очевидно, что эффективному с точки зрения достижения потребной точности эфемерид использованию такой функциональной схемы препятствует наличие перечисленных выше случайных и неопределенных неконтролируемых факторов (рис. 1: неконтролируемые факторы).

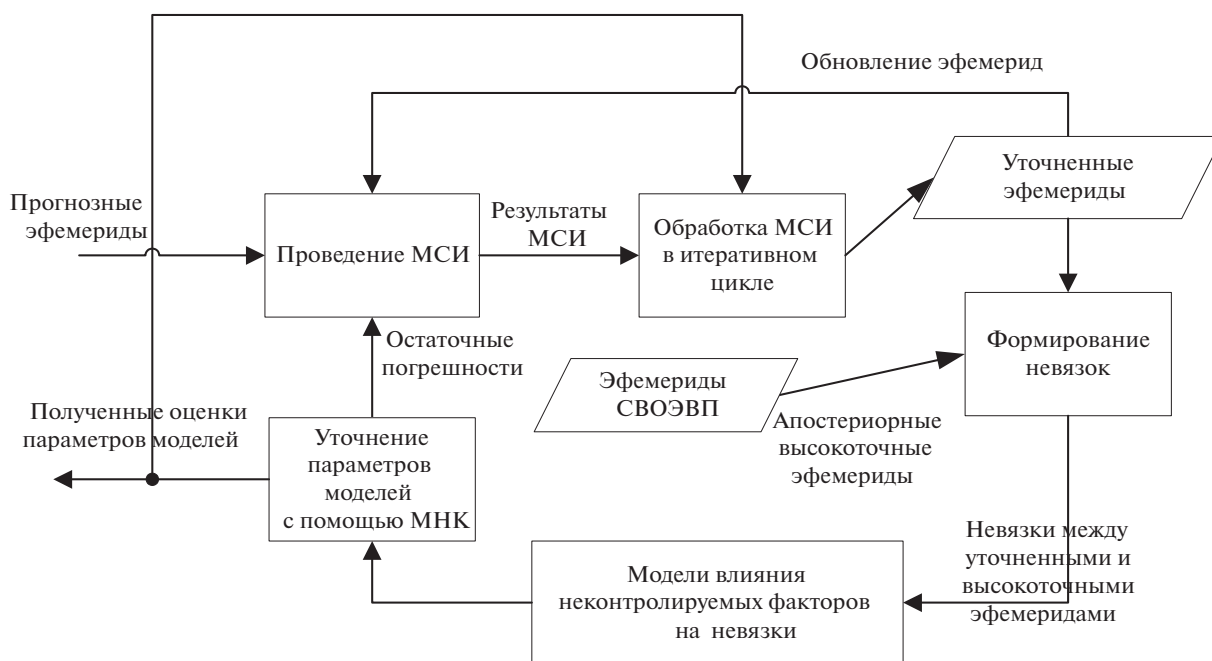


Рис. 2. Функциональная схема использования эфемерид СВОЭВП в интересах повышения эффективности применения АС МСИ для уточнения эфемерид.

Необходимым условием для компенсации их влияния на процесс уточнения эфемерид является калибровка соответствующей аппаратуры НКА ГЛОНАСС. Однако в рамках функциональной схемы рис. 1 это сделать невозможно, так здесь объективно присутствуют одновременно как ошибки эфемерид, так и ошибки измерений, в результате чего фактические погрешности уточненных эфемерид не известны. Таким образом, чтобы оценить потенциальный результат использования АС МСИ для уточнения эфемерид уже на этапе разработки процедуры (рис. 1), необходимы эталонные данные, в качестве которых предлагается применять итоговые эталонные эфемериды системы высокоточного определения эфемеридно-временной информации (СВОЭВИ), поскольку такие эфемериды имеют остаточную случайную погрешность, подчиняющуюся гауссовскому распределению с известными значениями СКО и математические ожидания ошибок по бинормали, вдоль радиус-вектора и вдоль орбиты НКА [6]. Заметим, что в дальнейших экспериментах при использовании эфемерид СВОЭВП в качестве эталонных и оценке разностных измерений, содержащих уходы часов КА, необходимо также применение апостериорных частотно-временных поправок (ЧВП).

Использование эфемерид СВОЭВП в качестве эталонных позволяет “замкнуть” функциональную схему рис. 1 по невязкам эталонных и опорных эфемерид, определяемых в рамках обсуждаемой процедуры их уточнения. В результате функциональная схема процедуры уточнения эфемерид оказывается итеративной и “замкнутой” (рис. 2).

Реализация процедуры в соответствии с функциональной схемой рис. 2 требует в свою очередь формирования математической модели МСИ с учетом влияния перечисленных выше неопределенных и случайных неконтролируемых факторов. При этом предполагается, что конкретные значения параметров таких моделей должны определяться на основании проводимых экспериментов, а результаты экспериментов обрабатываться методом наименьших квадратов.

2. Математическая постановка задачи. Формализуем поставленную техническую задачу уточнения эфемерид с использованием приведенных далее математических моделей. Перспективная аппаратура проведения МСИ формирует и передает по определенной циклограмме сигнала для приема другими НКА, находящимися в зоне радиовидимости. Одновременно осуществляется прием сигнала и измерение его временного сдвига относительно шкалы бортового синхронизирующего устройства (БСУ), т.е. фактически происходит измерение беззапросной дальности. Для анализа измерений необходимо вычислить расчетные аналоги дальностей, при формировании которых будут применены высокоточные эфемериды и ЧВП (там, где необходимо) СВОЭВП. Полученные таким образом невязки будут обработаны в методе наименьших квадратов (МНК),

где в число компонент оцениваемого вектора включены уточняемые параметры неконтролируемых факторов, перечисленные ранее во Введении, а в качестве частных производных МНК использованы производные от приведенных далее соотношений, описывающих различные типы расчетных аналогов измерений дальностей. Таким образом, ключевым условием успешного решения данной задачи является корректное и полное (с точки зрения возможности обработки всех накопленных измерений) математическое описание неконтролируемых факторов, поскольку, в конечном итоге, формируемые невязки расчетных и фактических измерений должны сходиться к нулю. При этом формируемые оценки должны соответствовать адекватным, предполагаемым на физическом уровне значениям. Если соответствующие модели, учитывающие влияние неконтролируемых факторов на результаты измерений, будут неполными, произойдет взаимная компенсация различных компонент вектора этих факторов, и их оценки не будут адекватными, несмотря на сходимость процедуры МНК и получение нулевых невязок.

Математическую модель измеренной межспутниковой псевдодальности (i -й НКА принимает сигнал от j -го НКА) представим в следующем виде:

$$S^{ij} = c\tau^{ij} + c(\Delta t^i - \Delta t^{i\text{рел(пм)}}) - c(\Delta t^j - \Delta t^{j\text{рел(пд)}}) + a_0^{i\text{пм}} + a_0^{j\text{пд}}, \quad (2.1)$$

где $a_0^{i\text{пм}}$ и $a_0^{j\text{пд}}$ – литерные задержки, Δt^i и Δt^j – поправки к шкалам времени i -го и j -го КА соответственно, $\Delta t^{i\text{рел(пм)}}$ и $\Delta t^{j\text{рел(пд)}}$ – поправки на релятивизм, $c\tau^{ij}$ – “геометрическая задержка”, определяемая соотношением (1.2)

$$c\tau^{ij} = \rho^{ij} + \delta S_{\text{п}} + \delta S_{\text{грав}}^{ij} + \delta S_{\text{пм}}^i + \delta S_{\text{пм}}^j, \quad (2.2)$$

и включающая, помимо запаздывания ρ^{ij} при распространении сигнала в атмосфере, плохо изученную для данного типа МСИ задержку в плазмосфере $\delta S_{\text{п}}$, значения геометрических выносов приемных $\delta S_{\text{пм}}^i$ и передающих антенн $\delta S_{\text{пд}}^j$ на каждом из НКА, а также эффект гравитационного искривления пространства $\delta S_{\text{грав}}^{ij}$.

В радиотехнических трактах МСИ предполагается частотное разделение сигналов, которое (как и в случае наземных измерений) приводит к появлению так называемых литерных (систематических) задержек $a_0^{i\text{пм}}$ и $a_0^{j\text{пд}}$. Оцифровка (“привязка” измерений ко времени) осуществляется в приемной аппаратуре. “Уходы” часов приемника (i -й НКА) и передатчика (j -й НКА) имеют противоположный знак. Таким образом, при уточнении часов знак частной производной по часам для приемника и передатчика – противоположный. Релятивистская поправка, наоборот: для приемника (i -й НКА) входит в модель с отрицательным знаком, а для передатчика (j -й НКА) – с положительным.

Расчетный аналог такого измерения (так называемая “геометрическая” дальность) определяется соотношением

$$\rho^{ij} = D_2^{ij}(\bar{R}_{\text{пд}}(t^i - \rho^{ij}/c), \bar{R}_{\text{пм}}(t^j)), \quad (2.3)$$

где $\bar{R}_{\text{пд}}(t^i - \rho^{ij}/c)$ – геоцентрическое положение передающего НКА в момент излучения сигнала $t^i - \rho^{ij}/c$, $\bar{R}_{\text{пм}}(t^j)$ – геоцентрическое положение приемного НКА в момент приема сигнала t^j .

При проведении “прямых” и “встречных” измерений (соответственно от i -го до j -го КА и наоборот) S^{ij} и S^{ji} на близких эпохах (в течение рабочего цикла аппаратуры АС МСИ) удастся сформировать суммарно-дальномерные и разностно-дальномерные навигационные измерения. При условии необходимой синхронности по какой-то единой шкале времени формируется точечное измерение “геометрической” псевдодальности с учетом суммы и разностей калибровок (оценок задержек в аппаратуре каждого из КА) в приеме-передающих трактах НКА, участвующих во взаимных измерениях:

$$S_+^{ij} = (S^{ij} + S^{ji}) = c(\tau^{ij} + \tau^{ji}) + a_0^{i\text{пм}} + a_0^{j\text{пд}} + a_0^{j\text{пм}} + a_0^{i\text{пд}}. \quad (2.4)$$

В результате появляется возможность уточнить суммарные задержки в приеме-передающих трактах каждого из КА при наличии не менее трех НКА:

$$S_+^{ij} = (S^{ij} + S^{ji}) = c(\tau^{ij} + \tau^{ji}) + a_0^{i+} + a_0^{j+}, \quad (2.5)$$

В (2.5) a_0^{i+} и a_0^{j+} – суммарные задержки i -го и j -го НКА соответственно:

$$a_0^{i+} = a_0^{ипд} + a_0^{ипм}, \quad (2.6)$$

$$a_0^{j+} = a_0^{ипд} + a_0^{ипм}. \quad (2.7)$$

Система линейных уравнений для определения суммарных систематических задержек в приемо-передающих трактах для минимально достаточного состава из трех НКА имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta S_+^{12} &= a_0^{1+} + a_0^{2+}, \\ \Delta S_+^{13} &= a_0^{1+} + a_0^{3+}, \\ \Delta S_+^{23} &= a_0^{2+} + a_0^{3+}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где ΔS_+^{ij} – невязка между измеренным и расчетным значением (см. рис. 2).

Определитель такой системы трех уравнений с тремя неизвестными равен минус двум, и, следовательно, система имеет очевидное решение при наличии, например, высокоточных апостериорных эфемерид, что и было предложено ранее для решения данной задачи. Погрешность расчета суммарных задержек, помимо вклада случайных (шумовых) ошибок измерений, будет определяться точностью апостериорных эфемерид в проекции на межспутниковую дальность.

Уточнение суммарных задержек в приемо-передающих трактах также возможно и по совокупности прямых и встречных измерений без перехода к суммарным измерениям, но требует также знания высокоточных частотно-временных поправок. Поясним это подробнее.

В случае разностно-дальномерных измерений геометрическая задержка парируется, а модель измерения эквивалентна разности ухода часов i -го относительно j -го НКА с учетом релятивистских задержек их шкал и разностей калибровок в приемо-передающих трактах КА, участвующих во взаимных измерениях:

$$S_-^{ij} = (S^{ij} - S^{ji}) = 2c(\Delta t^i - \Delta t^{i\text{рел}(i)}) - 2c(\Delta t^j - \Delta t^{j\text{рел}(j)}) + a_0^{ипм} + a_0^{ипд} - a_0^{ипм} - a_0^{ипд},$$

т.е. релятивистская задержка удваивается.

По аналогии с суммарными для разностных измерений можно уточнить разность задержек в приемо-передающих трактах:

$$a_0^{i-} = a_0^{ипм} - a_0^{ипд}, \quad (2.9)$$

$$a_0^{j-} = a_0^{ипд} - a_0^{ипм}. \quad (2.10)$$

С учетом (2.6) и (2.7), суммируя (2.9) с (2.6) и (2.10) с (2.7), получим

$$a_0^{ипм} = (a_0^{i+} + a_0^{i-})/2, \quad (2.11)$$

$$a_0^{ипд} = (a_0^{j+} + a_0^{j-})/2. \quad (2.12)$$

Далее, подстановкой (2.11) в (2.6) и (2.12) в (2.7), находим

$$a_0^{ипд} = (a_0^{i+} - a_0^{i-})/2, \quad (2.13)$$

$$a_0^{ипм} = (a_0^{j+} - a_0^{j-})/2. \quad (2.14)$$

Таким образом, совместная обработка суммарных и разностных измерений от не менее трех КА, реализующих прямые и встречные измерения, позволяет получить оценки задержек в приемо-передающих трактах АС МСИ. Проверка этих оценок на формулярных значениях подтверждает, что при наличии корректных оценок для суммарных (2.6), (2.7) и разностных (2.9), (2.10) значений фактические значения задержек в приемном и передающих трактах НКА разделимы, т.е. наблюдаемы, как при работе на прием и передачу на одну антенну, так и на разные.

В результате процедура уточнения влияния неконтролируемых факторов на точность эфемерид включает следующие шаги:

1. Анализ комплектации приемо-передающих трактов и антенных систем АС МСИ с точки зрения присутствия максимальных значений возможных задержек, проверка наличия априорных (формулярных или уточненных кем-либо) данных по задержкам в приемо-передающих трактах.

2. Определение невязок прямых и встречных измерений на основе апостериорной эфемеридно-временной информации (ЭВИ) и сравнение этих невязок с априорными данными (при их наличии).

3. Уточнение суммарных задержек в приемно-передающих трактах по суммарным измерениям, сравнение полученных результатов с априорными данными.

4. Уточнение разностных задержек, анализ точности средних (за сеанс) оценок, анализ технических характеристик (ТХ) БСУ по апостериорной ЭВИ, выбор НКА с лучшим и худшим БСУ в смысле стабильности и точности формируемых измерений, определение ЧВП по измерениям АС МСИ и сравнение их с апостериорными ЧВП.

5. Формирование заключения о возможности уточнения на основе предложенной процедуры и математических моделей учитываемых неконтролируемых факторов.

3. Исходные данные задачи. При подготовке материалов статьи были использованы результаты сеансов измерений, проведенных в следующих интервалах: март–апрель 2016 г. (11 НКА серии “Глонасс-М”), январь–февраль 2022 г. (4 НКА серии “Глонасс-М” и 2 НКА серии “Глонасс-К”).

Среди накопленных измерений в 2016 г. есть 12 КА, из которых по 11 КА есть встречные измерения, что позволило сформировать суммарные и разностные и провести более расширенную оценку погрешностей. Для 3 КА R05(734), R22(731), R24(735), которые присутствуют на интервале в марте–апреле 2016 г., имелись в наличии априорные исходные данные о задержках в передающем и приемном трактах, которые составили в среднем 462 и 23 нс соответственно (для каждого номера КА – свое значение). В результате выполнения специальных процедур были получены оценки погрешности вариаций задержек от среднего, которые составили не более 0.6 м для передающего тракта (734), и 0.9 м – для приемного (735). Эти отличия, безусловно, значительны, однако поскольку невязки наблюдаемых и априорных значений имеют большие величины, на данном этапе анализа свойств измерений вариации менее метра можно считать незначимыми.

В начале 2022 г. проведена группа МСИ по 6 НКА с системными номерами: R09(702), R11(705) – “Глонасс-К”, R12(758), R18(754), R22(735), R24(760) – “Глонасс-М”, из которых по всем НКА есть встречные измерения, что позволило сформировать суммарные и разностные измерения и провести экспериментальную оценку с использованием новых НКА серии “Глонасс-К”.

4. Результаты. Заметим, что предварительный анализ свойств прямых измерений S^{ij} и S^{ji} , накопленных в сеансах, показал, что некалиброванные значения задержек $a_0^{i\text{пм}} = c\Delta t_{\text{пм}}^{i f_i}$, $a_0^{j\text{пл}} = c\Delta t_{\text{пл}}^{j f_j}$, $a_0^{i\text{пл}} = c\Delta t_{\text{пл}}^{i f_i}$, $a_0^{j\text{пм}} = c\Delta t_{\text{пм}}^{j f_j}$, участвующих во взаимных измерениях, могут достигать десятков и иногда даже сотен метров, т.е. без калибровки такие измерения для эфемеридно-временного обеспечения (ЭВО) использоваться не могут. Иными словами, здесь необходима обработка прямых и встречных измерений, как уже указывалось, не менее, чем 3 НКА. Поэтому далее обсуждаются результаты обработки полусумм и полуразностей накопленных в проведенных сессиях измерений.

Подчеркнем еще раз, что приведенные ниже в тексте и соответствующих таблицах результаты подтверждают возможность с использованием развиваемой информационной технологией получения оценок с необходимой точностью параметров, характеризующих влияние неконтролируемых факторов на процесс уточнения эфемерид ГЛОНАСС с применением аппаратуры межспутниковых измерений. Конкретно оценивались следующие параметры: задержки в приемных и передающих трактах АС МСИ НКА $a_0^{i\text{пм}}$ и $a_0^{j\text{пл}}$, суммарные a_0^{i+} и разностные a_0^{i-} задержки в приемно-передающих трактах для различных пар КА ГЛОНАСС, погрешности синхронизации бортового излучателя навигационного сигнала (БИНС) и АС МСИ, входящие в состав Δt^i и Δt^j как систематические ошибки, выносы ФЦ приемной и передающей антенн $\delta S_{\text{пм}}^i$ и $\delta S_{\text{пл}}^j$.

Результаты обработки полусумм измерений. Ниже в табл. 1 и 2 приведены оценки суммарной задержки, полученные в сессиях 2016 и 2022 гг. соответственно (в том числе результаты эксперимента от 2012 г., который проводился вместе с наземными станциями).

В табл. 1, 2 использованы следующие обозначения: спутниковая точка (СТ) – позиция НКА в орбитальной группировке, номер – системный номер, a^+ – оценка суммарной задержки в метрах, sig – СКО оценки задержки.

Результаты оценки суммарных задержек показывают, что они сохраняют свои значения на длительных интервалах (до 10 лет), что говорит о приемлемости предлагаемого подхода и

Таблица 1. Оценки суммарной задержки по результатам сессии 2016 г.

СТ	Номер	a^+ , м	sig	2012 г.
R02	747	92.668	0.009	91.828 90.110
R03	744	91.566	0.010	
R04	742	89.906	0.009	
R05	734	78.965	0.009	
R07	745	91.254	0.009	
R08	743	92.579	0.011	
R16	736	80.405	0.008	
R17	751	90.293	0.008	
R18	754	87.762	0.007	
R22	731	79.666	0.010	
R24	735	77.687	0.007	

Таблица 2. Оценки суммарной задержки в сессии 2022 г.

СТ	Номер	a^+ , м	sig	2016 г.
R09	702	74.717	0.012	77.687 87.762
R11	705	90.140	0.010	
R22	735	77.500	0.013	
R18	754	87.958	0.012	
R12	758	88.428	0.013	
R24	760	88.872	0.012	

Таблица 3. Задержки в трактах НКА ГЛОНАСС, рассчитанные по априорным данным

СТ	Номер	$a_0^{\text{пм}}$	$a_0^{\text{пл735}}$	a_0^+ (прямые)	$a_0^{\text{пм735}}$	$a_0^{\text{пл}}$	a_0^- (встречные)	$a+/-2$	$a-/-2$
R05-R24	734–735	8.0	139.9	147.9	7.2	135.5	142.6	145.2	2.6
R22-R24	731–735	7.7	139.9	147.6	7.2	139.7	146.8	147.2	0.4

возможности применения данной технологии на практике. Дополнительно делалась попытка уточнения выносов антенных систем относительно центра масс НКА, что позволило снизить их СКО до 7–8 см.

Проведем также сравнение априорных значений задержек (в метрах) в приемных и передающих трактах с наблюдаемыми для 3 КА: R22(731), R24(735), R05 (734). В табл. 3 по априорным значениям упомянутых задержек проведен расчет ожидаемых задержек в прямых и встречных измерениях (без учета задержек в антенно-фидерных устройствах (АФУ), в метрах), а также ожидаемых значений полусумм и полуразностей оцениваемых задержек (в метрах).

Для указанных пар прямых и встречных измерений даже для различных литер БИНС и АС МСИ невязки задержек примерно одинаковые: прямые на 3–4 м больше априорных, а встречные – на 16 м. Таким образом, учет задержек при реализации технологии обработки МСИ должен производиться после их калибровки, а не по априорным значениям.

Измерения, соответствующие интервалу 2022 г., отражают факт появления пары НКА серии “Глонасс-К”, т.е. НКА с другой аппаратурой, что в контексте данной задачи имеет принципиальное значение. В табл. 4 приведены значения невязок прямых и встречных измерений с учетом апостериорных ЧВП для упомянутых НКА и других НКА, участвующих в сессии измерений 2022 г.

В табл. 4 дополнительно обозначены Л – номер литеры, в ячейках – значения задержек при проведении прямых и встречных измерений соответственно (в метрах). Заметен резкий рост вариаций представленных значений, который достигает 95 м (пара R09-R11). Приведем также

Таблица 4. Значения невязок прямых и встречных измерений с учетом апостериорных ЧВП

Номер		702	705	758	754	735	760
СТ		R09	R11	R12	R18	R22	R24
СТ	Л	–2	0	–1	–3	–3	2
R09	3	***	(165)/(–47.7)		(163)/(–14.2)	(152)/(–7.1)	(164)/(–11.9)
R11	3	(117)/(212)	***	(179)/(+35.5)	(178)/(+31.3)	(168)/(+39.9)	(180)/(+35.8)
R12	3		(214)/(143)	***	(176)/(–3.9)	(167)/(+3.6)	
R18	5	(148)/(177)	(211)/(145)	(172)/(180)	***		(177)/(+3.9)
R22	6	(145)/(160)	(206)/(130)	(170)/(163)		***	(177)/(+3.7)
R24	6	(153)/(175)	(215)/(143)		(181)/(173)	(181)/(173)	***

Таблица 5. Сравнение априорных задержек в трактах НКА с наблюдаемыми

Номер	СТ	$a_0^{\text{пм}}$	$a_0^{\text{пл}735}$	a_0^+ (прямые)	$a_0^{\text{пм}735}$	$a_0^{\text{пл}}$	a_0^- (встречные)	$a+/2$	$a-/2$
705–735	R11–R22	102.5	139.9	242.4	7.2	110.	117.1	179.8	62.6
705–735	R11–R22			206			130	168	39.9
Δ				–36 м			+13 м		

сравнение для этих 2 КА: R11(705) и R22(735) априорных (первая строка) значений задержек (в метрах) с наблюдаемыми (вторая строка) (табл. 5).

Заметны существенные различия между априорными и наблюдаемыми задержками, измеряемые десятками метров (третья строка Δ). Заметим, что для двух сочетаний пар “Глонасс–М” в 2016 г. было существенно лучшее согласование. Данный факт говорит о том, что априорные задержки содержат значительные неопределенности и использовать их в рабочей процедуре нецелесообразно, перейдя непосредственно к обработке измерений.

Предварительные выводы по обработке полусумм измерений. Предлагаемая процедура расчета задержек приемных и передающих трактов НКА, получаемых при обработке суммарных измерений, показывает повторяющийся результат, проверенный на 10-летнем интервале, для которого получены стабильные во времени значения суммарных задержек. Проведенная оценка выносов антенных систем показала наличие существенных отклонений от формулярных значений (примерно до 5–8 см по осям $Y_{\text{св}}$, $Z_{\text{св}}$, и до 15–25 см по $X_{\text{св}}$, где св – связанная с НКА система координат). Реализация предлагаемых процедур может обеспечить повышение эффективности использования АС МСИ в интересах уточнения эфемерид и устранение в канале измерений систематических ошибок, вызванных неконтролируемыми факторами.

Результаты обработки полуразностей измерений. Как уже было сказано ранее, на интервале сессии 2016 г. участвовало 11 КА (R02, R03, R04, R05, R07, R08, R16, R17, R22, R24). По трем известна априорная информация о задержках МРЛ (R05, R22, R24). Расчет систематических ошибок полуразностей относительно апостериорных ЧВП приведен в табл. 6. Расчеты проведены с применением апостериорных эфемерид и ЧВП центра анализа СВОЭВИ.

Таким образом, были получены оценки погрешностей в разностных задержках от –1.4 до 7.0 м. Подобный разброс, предположительно, может быть обусловлен взаимной некалиброванностью трактов различных аппаратных средств НКА–БИНС и канала обмена МСИ.

5. Выводы по результатам обработки данных проведенных сессий сеансов МСИ для НКА ГЛОНАСС. Значения полусумм задержек измерений относительно стабильны во времени при определении их с использованием апостериорных эфемерид. При уточнении эфемерид можно оценивать их значения (задержек) без предварительного уточнения, например, с запросными измерениями наземного комплекса управления (НКУ). Полуразности существенно зависят от актуальных ЧВП и при текущих средствах калибровки разрешены быть не могут. Ситуацию с калибровкой, предположительно, можно будет разрешить с привлечением дополнительных средств, например, бортовых квантовых оптических систем (БКОС). Измерений БКОС должно быть достаточно для получения эталонных ЧВП, которые будут применяться в обсуждаемой процедуре как исходные данные.

Таблица 6. Оценка разностных задержек $a-$ (в метрах) по МСИ

СТ	Номер	Литер		$a-$	sig
		БИНС	АС МСИ		
R02	747	–4	1	–1.447	0.111
R03	744	5	1	6.573	0.113
R04	742	6	1	6.016	0.107
R05	734	1	2	–1.049	0.107
R07	745	5	2	5.301	0.101
R08	743	6	2	6.999	0.132
R16	736	–1	4	–0.342	0.093
R17	751	4	5	–0.611	0.097
R18	754	–3	5	0.045	0.085
R22	731	–3	6	6.956	0.122
R24	735	2	6	2.040	0.083

Заключение. Изложены основы информационной технологии, обеспечивающей автономность функционирования при одновременном повышении точности эфемерид и часов существующего средневысотного сегмента ГЛОНАСС. Предлагаемая технология базируется на использовании бортовой аппаратуры МСИ и включает:

математические модели МСИ с учетом широкого спектра неконтролируемых факторов различной физической природы;

алгоритмы предварительного анализа характеристик результатов МСИ и их обработки с целью формирования оценок параметров, характеризующих влияние неконтролируемых факторов на процесс уточнения эфемерид ГЛОНАСС с использованием аппаратных средств проведения МСИ.

Приведены результаты экспериментальной отработки предложенной технологии, полученные на основе обработки реальных измерений на нескольких сессиях с аппаратами ГЛОНАСС. Продемонстрирована сходимость результатов оценивания систематических погрешностей МСИ, которые могли препятствовать ранее использованию подобной аппаратуры в рабочих процедурах без потери точности. Оценивались следующие параметры: задержки в приемных и передающих трактах АС МСИ КА, суммарные и разностные задержки в трактах для различных пар КА ГЛОНАСС, погрешности синхронизации БИНС и АС МСИ, выносы ФЦ антенн.

Выявлена необходимость периодического повторения экспериментальной отработки предложенной технологии, а также проведения дополнительных калибровочных процедур используемой аппаратуры. Подготовлены исходные данные для реализации технологии уточнения эфемерид НКА с помощью канала обмена информацией о МСИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kruzhkov D.M., Pasyukov V.V. National Global Navigation Satellite System GLONASS: Features of Creation, Development and Use. M.: Moscow Aviation Institute, 2022.
2. [Электронный ресурс], <https://glonass-iac.ru/glonass/technical>, 13.03.2022.
3. Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M. On the Issue of Autonomous Refining of the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft. Analysis of the Possibilities of Developed Information Technology // Cosmic Research. 2021. V. 59. № 5. P. 357–365.
4. Grechkoseev A.K. Study of Observability of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. I // Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 2. С. 293–308.
5. Grechkoseev A.K. Study of Observability of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. II // Computer and Systems Sciences International. 2011. T. 50. № 3. С. 472–482.
6. SVOEVI, <http://www.glonass-svoevp.ru>, 10.12.2022.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.977,681.514.5

ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНЕЧНОМЕРНЫЙ РЕГУЛЯТОР СОСТОЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ПО ЕГО ВЫХОДУ. I. НЕПОЛНЫЕ ТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

© 2023 г. Е. А. Руденко

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.01.2023 г.

После доработки 10.02.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается известная задача синтеза оптимального в среднем и на заданном интервале времени инерционного закона управления непрерывным стохастическим объектом, если точно измеряется только часть его переменных состояния. Из-за практической нереализуемости ее классического бесконечномерного решения Стратоновича—Мортенсена предлагается ограничиться оптимизацией структуры конечномерного динамического регулятора, порядок которого выбирает пользователь. Эта конечномерность позволяет использовать усеченную версию апостериорной плотности вероятности, которая удовлетворяет детерминированному интегродифференциальному уравнению в частных производных. С помощью принципа расширения Кротова получены достаточные условия оптимальности структурных функций регулятора и уравнения Лагранжа—Понтрягина для нахождения их экстремалей. Показано, что в частных случаях отсутствия измерений, полных измерений и учета только значений неполных измерений предлагаемый регулятор оказывается статическим (безынерционным), а соотношения для его синтеза совпадают с известными. Для динамического регулятора приведены алгоритмы нахождения каждой из его структурных функций.

DOI: 10.31857/S000233882304011X, EDN: OCXDOU

Введение. Известна принципиальная сложность классического подхода к решению задачи оптимального, в смысле минимума среднего значения интегрально-терминального функционала качества, управления нелинейным стохастическим объектом по вектору его измеряемого выхода, не совпадающему с вектором состояния [1–6]. Она состоит в чрезмерно высокой сложности получаемого в результате ее решения *динамического* (инерционного) регулятора Стратоновича—Мортенсена, который *накапливает информацию об измерениях*. Этот оптимальный регулятор имеет распределенные параметры, так как задается уравнениями в частных и вариационных производных, что практически не позволяет реализовать необходимые вычисления в требуемом реальном масштабе времени, т.е. в темпе с поступлением измерений.

Основной способ борьбы с этим недостатком состоит в применении метода достаточных координат (статистик), который позволяет заменить распределенный регулятор на сосредоточенный, но имеющий бесконечное число переменных состояния [1, 4, 6]. Тогда, ограничиваясь конечным числом этих переменных в виде набора из нескольких достаточных координат младших порядков, которыми являются апостериорные моменты, кумулянты или квазимоменты неизмеряемого вектора состояния, можно получить его реализуемые субоптимальные приближения.

Обычно применяют приемлемые по скорости вычислений ковариационные приближения к регулятору, ограничиваясь учетом достаточных координат первого и второго порядков. При этом для восстановления вектора состояния объекта в качестве инерционной части регулятора используют обобщенный (extended) фильтр Калмана, более точный фильтр нормальной аппроксимации, а также занимающие промежуточное положение между ними кубатурный, нечувствительный (unscented) и т.п. фильтры Калмана. Тогда безынерционная часть субоптимального регулятора определяется как функция вектора оценки состояния объекта и матрицы ковариаций его ошибки, получаемая решением соответствующего “стохастического” уравнения Беллмана.

Другой способ борьбы с нереализуемостью оптимального инерционного регулятора возможен в случае точного измерения части вектора состояния объекта. Он состоит в отказе от накопления информации о неизмеряемой части переменных состояния. В результате получены различные версии частично позиционного регулятора, легко реализуемые вследствие их *безынерционности* (статичности). Это версия централизованная, с зависимостью всех компонент вектора управления от всего измеряемого вектора [7, 8], или децентрализованная, когда определенные компоненты вектора управления зависят лишь от некоторых элементов измеряемой части вектора состояния [9]. Однако этот отказ приводит к очевидному ухудшению возможного качества управления, увеличивая получаемое в итоге значение минимизируемого функционала.

Только в частной *линейно-квадратично-гауссовской* задаче стохастического управления справедлива теорема (принцип) разделения [10], согласно которому регулятор Стратоновича—Мортенсена распадается на два легко реализуемых блока: оптимально обрабатывающий измерения линейный фильтр Калмана и оптимально вырабатывающий управление по получаемой оценке вектора состояния линейный позиционный регулятор. Этот удобный факт дает возможность, например, строить более быстрый субоптимальный регулятор для нелинейной системы, применяя условно-оптимальный фильтр Пугачева [11], или управлять линейным объектом при измерении негауссовском возмущении [12].

В настоящей работе рассматривается строго оптимальный подход, позволяющий и в общем случае получить точный алгоритм динамического управления любого желаемого порядка. Этот порядок выбирается с учетом располагаемой мощности реализующего его вычислителя. Используя известное уравнение в частных производных для соответствующей усеченно-апостериорной (условной) плотности вероятности, исходная стохастическая задача сводится к эквивалентной ей детерминированной. Решение последней выполняется путем получения с помощью принципа расширения Кротова достаточных условий оптимальности предлагаемого регулятора, а также уравнений для нахождения его экстремальной версии. Все они проверяются на примере синтеза статической версии регулятора.

Способ построения конечномерного регулятора для зависящего от времени *оперативного* критерия качества предложен в [13].

1. Постановка задачи при неполных измерениях. 1.1. Объект управления и критерий оптимальности. Рассмотрим парную (двойную) марковскую модель подверженного случайным воздействиям объекта управления в виде системы из двух стохастических дифференциальных уравнений, понимаемых в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t, Y_t, U_t)dt + B(t, X_t, Y_t, U_t)dW_t, \\ dY_t &= c(t, X_t, Y_t, U_t)dt + D(t, X_t, Y_t, U_t)dW_t, \end{aligned} \quad t \in [0, T], \quad \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \sim p_0(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь $X_t \in \mathbb{R}^n$, $Y_t \in \mathbb{R}^m$ — не измеряемая и измеряемая точно части случайного вектора состояния объекта соответственно, $U_t \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ — случайное кусочно-непрерывное ограниченное управление, $W_t \in \mathbb{R}^k$ — центрированный и нормированный винеровский процесс. Последний не зависит от случайных начальных условий X_0 , Y_0 , имеющих плотность вероятности $p_0(x, y)$. При этом закон распределения начального значения неизмеряемого вектора X_0 определяется известной условной плотностью вероятности $p_0(x|y)$, тогда как маргинальная (частная) плотность вероятности $q_0(y)$ измеряемого вектора Y_0 может быть произвольной, так что

$$p_0(x, y) = p_0(x|y)q_0(y) \quad \forall q_0(y). \quad (1.2)$$

Отметим, что вектор-функции сноса (смещения) $a(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$, $c(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^m$ двухкомпонентного диффузионного марковского процесса (X_t, Y_t) задают детерминированное поведение (траекторию) объекта управления, тогда как матричные функции диффузии $B(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $D(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ определяют влияние на нее случайного возмущения в виде одного и того же гауссовского белого шума $V_t = dW_t/dt$. Независимость шумов каждого из двух уравнений (1.1) обеспечивается условием $B(\cdot)D^T(\cdot) \equiv 0$ [13].

Пусть начальные условия X_0 , Y_0 имеют конечные вторые моменты $M|X_0|^2 + M|Y_0|^2 < \infty$, где M — оператор математического ожидания, а измеримые по Борелю функции сноса $a(\cdot)$, $c(\cdot)$ и

диффузии $B(\cdot)$, $D(\cdot)$ удовлетворяют достаточным условиям существования и единственности непрерывного по времени потракторного решения уравнений Ито [14]. Эти условия гарантируют конечность вторых моментов случайных векторов X_t , Y_t и в любой другой момент времени $M|X_t|^2 + M|Y_t|^2 < \infty \forall t \geq 0$.

Требуется найти такую неупреждающую зависимость управления U_t от всех предыдущих измерений

$$U_t = \vartheta(t, Y_0^t), \quad Y_0^t = \{Y_\tau | \tau \in [0, t]\}, \quad (1.3)$$

которая при любом распределении $q_0(y)$ вектора Y_0 обеспечивает минимум критерия качества управления (1.3) объектом (1.1) в виде среднего значения случайного функционала Больца:

$$I'[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^T \mu'(t, X_t, Y_t, U_t) dt + v'(X_T, Y_T) \right] \rightarrow \min \quad \forall q_0(y). \quad (1.4)$$

Конечный момент времени T будем считать фиксированным, а заданные функции потерь $\mu'(t, x, y, u)$, $v'(x, y)$ — неотрицательными.

1.2. Известный закон управления. Как отмечено во Введении, классическое решение задачи (1.1)–(1.4) ищется как функционал $U_t = \chi[t, p(t, \cdot | Y_0^t)]$ мгновенного случайного значения апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^t)$. Этот функционал $\chi[\cdot]$ можно получить методом динамического программирования с помощью решаемого в обратном времени, от $t = T$ до $t = 0$, уравнения Беллмана–Мортенсена в вариационных производных Фреше [2–4]. Апостериорная же плотность находится путем интегрирования в прямом времени, от $t = 0$ до $t = T$, стохастического интегродифференциального уравнения Стратоновича–Кушнера (Дункана–Мортенсена–Закаи) с начальным условием $p|_{t=0} = q_0(x | Y_0)$. В это уравнение входит то же управление U_t , в чем проявляется известная дуальность оптимального стохастического управления. Тем самым оптимальный закон управления по выходу (1.3) оказывается инерционным, а реализующее его устройство управления состоит из управляемого стохастического фильтра Стратоновича и безынерционного регулятора Мортенсена.

Такой закон управления обычно слишком сложен для его практической реализации, поэтому ограничиваются приближенным конечномерным решением задачи методом достаточных координат [1, 4], приводящим лишь к субоптимальным динамическим регуляторам. К тому же их порядок (число дифференциальных уравнений состояний) весьма быстро растет с повышением желаемой точности аппроксимации апостериорной плотности отрезками гауссовоподобных рядов Эджворта (по кумулянтам) или Грама–Шарлье (по квазимоментам) из-за факториально быстрого роста количества элементов старших апостериорных статистик неизмеряемого вектора состояния X_t [15].

1.3. Предлагаемый регулятор и более общий критерий. С целью гарантированной реализации инерционного закона управления в темпе со временем ограничим класс функционалов (1.3) предыдущих наблюдений. Вместо использования для управления бесконечномерного фильтра Стратоновича будем искать конечномерный регулятор с вектором состояния $Z_t \in \mathbb{R}^p$ произвольной размерности $p = 0, 1, 2, \dots$, задавая его дифференциальным уравнением состояния:

$$dZ_t = f(t, Y_t, Z_t)dt + G(t, Y_t, Z_t)dY_t, \quad Z_0 = h(Y_0), \quad (1.5)$$

а значение управления U_t в момент времени t определим как функцию последнего измерения Y_t и полученного к этому моменту состояния регулятора, задавая формулу выхода регулятора:

$$U_t = u(t, Y_t, Z_t). \quad (1.6)$$

Этот регулятор при ненулевой размерности (порядке) $p = 1, 2, \dots$ вектора его состояния Z_t является *динамическим* (инерционным), а при нулевой $p = 0$, когда переменная Z_t и уравнение (1.5) исчезают, он становится *статическим* (безинерционным) и определяется только формулой выхода $U_t = u(t, Y_t)$.

З а м е ч а н и е 1. Заданный уравнением (1.5) p -мерный вектор Z_t является функционалом всех проведенных до момента времени t измерений $Z_t = \theta(t, Y_0^t)$, он накапливает в себе информацию о них. Поэтому он представляет собой массив оперативной памяти об измерениях, и чем больше размерность p этого вектора, тем более эффективным будет получаемый из (1.6) закон конечномерного управления $U_t = u[t, Y_t, \theta(t, Y_0^t)]$, все более приближаясь к бесконечномерному закону управления Стратоновича–Мортенсена.

Определяющие нелинейную структуру регулятора (1.5), (1.6) неизвестные функции его *начального состояния* $h(y) \in \mathbb{R}^p$, *смещения* $f(t, y, z) \in \mathbb{R}^p$, *усиления* $G(t, y, z) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ и *выхода* $u(t, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ должны быть найдены из условия оптимальности управления (1.4). При этом в связи с появлением новой переменной Z_t добавим в функции потерь критерия оптимальности (1.4) возможную их зависимость и от состояния регулятора. На решениях уравнений (1.1), (1.5), (1.6) будем минимизировать более общий критерий качества всей замкнутой системы управления:

$$I[u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot)] = M \left[\int_0^T \mu(t, X_t, Y_t, U_t, Z_t) dt + v(X_T, Y_T, Z_T) \right] \rightarrow \min \quad \forall q_0(y) \quad (1.7)$$

с неотрицательными функциями потерь $\mu(t, x, y, u, z) \geq 0$, $v(x, y, z) \geq 0$, что позволяет накладывать условия и на желаемую эффективность регулятора. Например, можно так доопределить целевые функции $\mu'(\cdot)$, $v'(\cdot)$ критерия I' до функций $\mu(\cdot)$, $v(\cdot)$ критерия I , чтобы p -мерный вектор Z_t был в определенном смысле еще и некоторой “оценкой” неизмеряемого n -мерного вектора X_t . Отметим, что функционал (1.7) при любых его аргументах ограничен снизу:

$$I[u, f, G, h] \geq 0 \quad \forall u, f, G, h.$$

Предлагаемые уравнения регулятора (1.5) обеспечивают совместную марковость его случайного состояния Z_t вместе с компонентами X_t, Y_t вектора состояния объекта. Действительно, включая управление U_t из уравнений (1.1) с помощью формулы (1.6) и добавляя к ним (1.5), получим систему из трех уравнений Ито:

$$\begin{aligned} dX_t &= a''(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + B''(t, X_t, Y_t, Z_t)dW_t, \\ dY_t &= c''(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + D''(t, X_t, Y_t, Z_t)dW_t, \\ dZ_t &= e''(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + F''(t, X_t, Y_t, Z_t)dW_t. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь функции сноса и диффузии третьего уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} e''(t, x, y, z) &= f(t, y, z) + G(t, y, z)c''(t, x, y, z), \\ F''(t, x, y, z) &= G(t, y, z)D''(t, x, y, z), \end{aligned}$$

а верхним индексом u отмечены сложные функции, содержащие функцию выхода регулятора $u(\cdot)$, например

$$a''(t, x, y, z) = a(t, x, y, u(t, y, z)). \quad (1.9)$$

Поэтому допустимыми функциями двух уравнений регулятора $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $u(\cdot)$ являются те, которые вместе с функциями объекта $a(\cdot)$, $B(\cdot)$, $c(\cdot)$, $D(\cdot)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения системы (1.8). Таковыми, например, являются условия липшицевой непрерывности этих функций по переменным x, y, z и ограниченной скорости их роста при $|x| + |y| + |z| \rightarrow \infty$. Они вместе с условием конечности второго момента начального состояния регулятора $M|Z_0|^2 = M|h(Y_0)|^2 < \infty$ дают конечность вторых моментов всех трех случайных векторов в любой момент времени $M|X_t|^2 + M|Y_t|^2 + M|Z_t|^2 < \infty \quad \forall t \geq 0$.

2. Сведение задачи к детерминированной. Подставляя формулу выхода регулятора (1.6) также и в функционал (1.7), операцию усреднения M в нем запишем через *совместную* плотность веро-

ятности $r(t, x, y, z)$ всех элементов случайного вектора состояния $\Xi_t = (X_t^T, Y_t^T, Z_t^T)^T$ замкнутой системы управления (1.8):

$$I = \int_0^T \langle \mu^u(t, x, y, z), r(t, x, y, z) \rangle dt + \langle v(T, x, y, z), r(T, x, y, z) \rangle \rightarrow \min \quad \forall q_0(y). \quad (2.1)$$

Здесь угловыми скобками $\langle \eta, r \rangle$ для краткости обозначен интеграл усреднения функции $\eta(t, \cdot)$ с весом в виде этой плотности $r(t, \cdot)$:

$$\langle \eta, r \rangle = M[\eta(t, X_t, Y_t, Z_t)] = \iiint \eta(t, x, y, z) r(t, x, y, z) dx dy dz.$$

При этом интегралы по переменным x, y, z берутся по всему евклидову пространству соответствующей размерности, например

$$\int \alpha(x) dx \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx.$$

Из (1.8) следует [14, 16], что при заданных функциях регулятора $u(\cdot)$, $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$ и известной начальной плотности $p_0(\cdot)$ случайный вектор Ξ_t является диффузионным марковским процессом. Его совместная плотность вероятности $r(\cdot)$ при определенных условиях дифференцируемости функций сноса $\omega^{ufG}(\cdot)$ и диффузии $\Sigma^{uG}(\cdot)$ всей системы

$$\omega^{ufG}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} a^u(t, x, y, z) \\ c^u(t, x, y, z) \\ f(t, y, z) + G(t, y, z)c^u(t, x, y, z) \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{uG}(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} B^u(t, x, y, z) \\ D^u(t, x, y, z) \\ G(t, y, z)D^u(t, x, y, z) \end{bmatrix}$$

определяется как дифференцируемое один раз по t и дважды по x, y, z решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial r(t, x, y, z)}{\partial t} = K_{xyz}^{ufG}[r(t, x, y, z)], \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

где K_{xyz}^{ufG} — прямой производящий оператор этого процесса:

$$K_{xyz}^{ufG}[r] = -\nabla^T(\omega^{ufG} r) + 0.5 \operatorname{tr}[\nabla \nabla^T(\Sigma^{uG} \Sigma^{uG^T} r)].$$

Здесь tr — след матрицы, $\nabla = (\nabla_x^T, \nabla_y^T, \nabla_z^T)^T$ — оператор градиента. В подробной форме записи этот оператор имеет вид

$$K_{xyz}^{ufG} = -\nabla_x^T a^u - \nabla_y^T c^u - \nabla_z^T(f + Gc^u) + 0.5 \operatorname{tr}[\nabla_x \nabla_x^T Q^u] + \operatorname{tr}[\nabla_x \nabla_y^T S^{uT} + 0.5 \nabla_y \nabla_y^T R^u] + \\ + \operatorname{tr}[\nabla_x \nabla_z^T G S^{uT} + \nabla_y \nabla_z^T G R^u + 0.5 \nabla_z \nabla_z^T G R^u G^T],$$

где сгруппированы следы от матриц одинаковых порядков $n \times n$, $m \times m$, $p \times p$, а через Q^u, R^u, S^u обозначены коэффициенты диффузии исходного процесса $(X_t^T, Y_t^T)^T$:

$$Q^u = B^u B^{uT}, \quad R^u = D^u D^{uT}, \quad S^u = B^u D^{uT}.$$

Начальным для уравнения (2.2) является условие

$$r(0, x, y, z) = p_0(x | y) q_0(y) \delta[z - h(y)], \quad (2.3)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Граничные же условия на бесконечности для плотности $r(\cdot)$ и вектора потока вероятности $\pi = \omega^{ufG} r - 0.5[\nabla^T(\Sigma^{uG} \Sigma^{uG^T} r)]^T$ будут нулевыми.

Такие граничные условия приводят к справедливости для любой функции $\eta(t, \xi)$, дважды непрерывно дифференцируемая по переменной $\xi = (x, y, z)$, формулы интегрирования по частям [4]

$$\langle \eta, K_{\xi}^{ufG}[r] \rangle = \langle K_{\xi}^{*ufG}[\eta], r \rangle, \quad (2.4)$$

где K_{ξ}^{*ufG} — обратный (сопряженный к K_{ξ}^{ufG}) производящий оператор процесса:

$$K_{\xi}^{*ufG} = \omega^{ufG^T} \nabla + 0.5 \operatorname{tr}[\Sigma^{uG} \Sigma^{uG^T} \nabla \nabla^T].$$

В подробной форме записи результат его действия на пробную функцию $\eta(\cdot)$ имеет вид

$$K_{xyz}^{*ufG}[\eta] = a^{uT} \eta_x + c^{uT} \eta_y + (f + Gc^u)^T \eta_z + 0.5 \operatorname{tr}[Q^u \eta_{xx}] + \operatorname{tr}[S^{uT} \eta_{xy} + 0.5 R^u \eta_{yy}] + \\ + \operatorname{tr}[GS^{uT} \eta_{xz} + GR^u \eta_{yz} + 0.5 GR^u G^T \eta_{zz}]. \quad (2.5)$$

Здесь одинарными или двойными нижними индексами обозначены столбцы первых и матрицы вторых частных производных скалярной функции $\eta(\cdot)$ соответственно. Например $\eta_x = \nabla_x \eta$ есть n -мерный столбец, тогда как матрица $\eta_{xy} = \nabla_x \nabla_y^T \eta$ имеет порядок $n \times m$.

В случае отсутствия требуемой дифференцируемости функций сноса $\omega^{ufG}(\cdot)$ и диффузии $\Sigma^{uG}(\cdot)$ системы (1.8) по переменным x, y, z плотность вероятности $r(\cdot)$ тоже может быть негладкой. Это заставляет понимать решение уравнения (2.2) в обобщенном смысле, как удовлетворяющее справедливому для любой достаточно гладкой пробной функции

$$\eta(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}$$

интегродифференциальному тождеству [15, 17]

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, r \rangle = \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG}[\eta], r \right\rangle, \quad \forall \eta(\cdot) \quad (2.6)$$

с начальным условием

$$\langle \eta, r \rangle|_{t=0} = \iint \eta[0, x, y, h(y)] p_0(x|y) q_0(y) dx dy.$$

Однако неопределенность в этом начальном условии, как и в (2.3), плотности вероятности $q_0(y)$ начального измерения Y_0 и функции $h(y)$ начального состояния регулятора Z_0 приводит к неопределенности совместной плотности вероятности $r(t, x, y, z)$ и при $t > 0$. Представляя же ее в виде произведения *маргинальной* плотности вероятности $q(t, y, z)$ только случайных величин Y_t, Z_t на соответствующую ей плотность $\rho(t, x|y, z)$ распределения вероятности случайной величины X_t при условиях $Y_t = y, Z_t = z$:

$$r(t, x, y, z) = q(t, y, z) \rho(t, x|y, z), \quad q(t, y, z) = \int r(t, x, y, z) dx, \quad (2.7)$$

можно показать [17], что эта неопределенность касается только плотности $q(\cdot)$, тогда как *условная плотность вероятности* $\rho(\cdot)$ полностью определяется некоторым уравнением. Для их компактной записи операцию *условного усреднения* функции будем обозначать чертой над ней:

$$\bar{\eta}(t, y, z) = \int \eta(t, x, y, z) \rho(t, x|y, z) dx. \quad (2.8)$$

Повторяя приведенные в [17] доказательства этого факта применительно к рассматриваемому здесь управляемому объекту (1.1) добавлением в них переменной U_t и функции $u(t, y, z)$, аналогичным образом легко получим следующие утверждения.

Л е м м а 1 [17]. Если маргинальная плотность вероятности $q(t, y, z)$ дифференцируема по времени, то она удовлетворяет аналогичному (2.6) линейному интегродифференциальному тождеству

$$\frac{d}{dt} \iint \xi q dy dz = \iint \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + L_{yz}^{*ufG}[\xi] \right) q dy dz \quad \forall \xi(t, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2} \quad (2.9)$$

с начальным условием $\iint \xi q dy dz|_{t=0} = \int \xi[0, y, h(y)] q_0(y) dy$ и с оператором

$$L_{yz}^{*ufG}[\xi] = \xi_y^T \bar{c}^u + \xi_z^T (f + G \bar{c}^u) + 0.5 \operatorname{tr}[\bar{R}^u \xi_{yy}] + \operatorname{tr}[G \bar{R}^u \xi_{yz} + 0.5 G \bar{R}^u G^T \xi_{zz}],$$

коэффициенты которого $\bar{c}^u(\cdot), \bar{R}^u(\cdot)$, согласно (2.8), зависят от условной плотности $\rho(\cdot)$.

Л е м м а 2 [17]. Если дифференцируемая по времени условная плотность $\rho(t, x | y, z)$ дважды непрерывно дифференцируема по своим переменным y, z , то она полностью определяется известным начальным значением $\rho(0, x | y, z) = \rho_0(x | y)$ и нелинейным интегродифференциальным тождеством

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \eta \rho dx = \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG}[\eta] \right) \rho dx - L_{yz}^{*ufG} \left[\int \eta \rho dx \right] \quad \forall \eta(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}. \quad (2.10)$$

С л е д с т в и е [17]. Пусть условная плотность $\rho(t, x | y, z)$ дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z , тогда как функции $a(\cdot), B(\cdot)$ из (1.1) непрерывно дифференцируемы по x 1 и 2 раза соответственно. Тогда из (2.10) следует, что эта плотность удовлетворяет интегродифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = K_x^u[\rho] - L_{yz}^{*ufG}[\rho], \quad K_x^u[\rho] = -\nabla_x^T(a^u \rho) + 0.5 \text{tr}[\nabla_x \nabla_x^T(Q^u \rho)]. \quad (2.11)$$

При этом граничные условия на бесконечности по переменной x для плотности $\rho(\cdot)$ и ее производных равных нулю, в то время как на их асимптотическое поведение по переменным y, z никаких ограничений не наложено.

З а м е ч а н и е 2. В рассматриваемой задаче синтеза конечномерного регулятора условная плотность $\rho(\cdot)$ заменяет обычно используемую в классической задаче *апостериорную плотность* вероятности $p(t, x | Y_0^t)$. Последняя в каждый момент времени t несет в себе всю информацию о возможных значениях неизмеряемой части вектора состояния объекта X_t , полученную в результате проведенных изменений. В отличие от этого такой информации в плотности $\rho(\cdot)$ содержится меньше из-за вносимого уравнением (1.5) сжатия (усечения) всей предыстории измерений Y_0^t путем помещения ее в вектор состояния регулятора Z_t , так как последний является функционалом накопленных измерений $Z_t = \theta(t, Y_0^t)$. Поэтому здесь вместо апостериорной плотности $p(t, x | Y_0^t)$ используется плотность $\rho[t, x | Y_t, \theta(t, Y_0^t)]$, что позволяет считать ее *усечено-апостериорной*.

В результате исходная стохастическая задача (1.5)–(1.7) сведена к следующей задаче управления на отрезке времени $t \in [0, T]$ детерминированным объектом (2.11) с распределенными параметрами в виде функций его состояния $\rho(\cdot)$ и управления $f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot), u(\cdot)$. Требуется на множестве допустимых функций

$$\mathbf{D}_\rho = \{u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot), \rho(\cdot)\},$$

связанных уравнением (2.11) для условной плотности $\rho(\cdot)$ или соответствующим тождеством (2.10), найти минимум функционала (2.1):

$$I \rightarrow \min_{\mathbf{D}_\rho}. \quad (2.12)$$

Отметим, что функционал I определен на множестве функций

$$\mathbf{D}_r = \{u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot), r(\cdot)\},$$

связанных более общим уравнением ФПК (2.2) для совместной плотности $r(\cdot)$ или ее тождеством (2.6). Из формулы умножения плотностей вероятности (2.7) и лемм 1, 2 следует, что множество $\mathbf{D}_r$ шире, чем $\mathbf{D}_\rho$, так как содержит и множество маргинальных плотностей $q(\cdot)$, связанных с функциями из $\mathbf{D}_\rho$ тождеством (2.9), так что

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{D}_\rho \cup \{q(\cdot)\}.$$

В результате так как $\mathbf{D}_\rho \subset \mathbf{D}_r$, то искомым минимум I на $\mathbf{D}_\rho$ можно искать его минимизацией на $\mathbf{D}_r$ при любых маргинальных плотностях $q(\cdot)$:

$$\min_{\mathbf{D}_\rho} I = \min_{\mathbf{D}_r, \forall q} I.$$

3. Достаточные условия оптимальности регулятора. Для того чтобы при минимизации критерия (2.1) избавиться от уравнения связи (2.2), образуем функционал Лагранжа

$$L = I + \int_0^T \left\langle \varphi, \frac{\partial r}{\partial t} - K_{xyz}^{ufG} [r] \right\rangle dt,$$

где $\varphi(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}$ — неопределенный множитель (сопряженная функция) Лагранжа—Кротова. Функционал L определим на более широком, чем $\mathbf{D}_r$, множестве $\mathbf{V}$ функций, не связанных уравнением (2.2), причем на нем функция $r(\cdot)$ может иметь разрывы первого рода при $t = 0$ и $t = T$. Очевидно, что $\mathbf{D}_r \subset \mathbf{V}$ и на множестве $\mathbf{D}_r$ справедливо равенство $L|_{\mathbf{D}_r} = I|_{\mathbf{D}_r, \forall q}$.

Тогда, согласно принципу расширения Кротова [18, 19], если при любых $q(\cdot)$ минимум функционала L на множестве $\mathbf{V}$ достигается на функциях из $\mathbf{D}_p$, то последние доставляют искомым минимум функционалу I на $\mathbf{D}_p$, причем

$$\min_{\mathbf{D}_p} I = \min_{\mathbf{V} \forall q} L.$$

При этом из неотрицательности I на $\mathbf{D}_p$ следует и неотрицательность L на $\mathbf{V}$:

$$L[u, f, G, h, p, q] \geq 0.$$

Производя в выражении для L интегрирование одного из слагаемых по частям:

$$\int_0^T \left\langle \varphi, \frac{\partial r}{\partial t} \right\rangle dt = \langle \varphi, r \rangle_0^T - \int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, r \right\rangle dt,$$

учитывая вид (2.1) критерия I , выражение (2.3) для начального вида плотности $r(\cdot)$ и сопряженность операторов (2.4), получаем

$$L = \langle \varphi + v, r \rangle|_T - \int \varphi(0, x, y, h(y)) \rho_0(x|y) q_0(y) dx dy - \int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG} [\varphi] - \mu^u, r \right\rangle dt.$$

Так как на множестве $\mathbf{V}$ функция $r(\cdot)$ допускает разрывы при $t = 0$ и $t = T$, то минимум последнего выражения для L на нем можно находить для каждого из трех слагаемых в отдельности. Используя при этом свойство монотонности операции интегрирования по t , представление (2.7) совместной плотности $r(\cdot)$ как произведения маргинальной $s(\cdot)$ и условной $\rho(\cdot)$ плотностей, а также неотрицательность плотностей вероятности $q(\cdot) \geq 0$, $q_0(y) \geq 0$, находим

$$\min_{\mathbf{V} \forall q(\cdot)} L = \iint \alpha(y, z) q(T, y, z) dy dz - \int \beta(y) q_0(y) dy - \int_0^T dt \iint \gamma(t, y, z) q(t, y, z) dy dz. \quad (3.1)$$

Здесь обозначены

$$\begin{aligned} \alpha(y, z) &= \min_{\rho(\cdot)} \int (\varphi + v) \rho dx|_{t=T}, \\ \beta(y) &= \max_h \int \varphi(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx, \\ \gamma(t, y, z) &= \max_{u, f, G, \rho(\cdot)} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG} [\varphi] - \mu^u \right) \rho dx. \end{aligned}$$

Кроме этого, благодаря произволу в выборе сопряженной функции $\varphi(\cdot)$ нетрудно показать, аналогично [7], что функции $\alpha(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ без ограничения общности можно положить равными нулю. Учтем также, что в выражении для $\gamma(\cdot)$ производная $\partial \varphi / \partial t$ не зависит от оптимизируемых переменных u, f, G , а для зависимой от них его части введем обозначение

$$H_{yz}^{ufG} [\varphi, \rho] = \int \left(K_{xyz}^{*ufG} [\varphi] - \mu^u \right) \rho dx. \quad (3.2)$$

Этот линейный относительно функций $\varphi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ функционал H с параметрами t, y, z, u, f, G является условным средним известной из “стохастического” принципа максимума Понтрягина функции Гамильтона. В результате доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Достаточным условием оптимальности в смысле (1.7) регулятора (1.5), (1.6) является наличие такой дифференцируемой функции $\varphi(t, x, y, z)$, что экстремумы

$$\alpha(y, z) = \min_{\rho(\cdot)} \int (\varphi + v) \rho \, dx \big|_{t=T} = 0 \quad \forall y, z, \quad (3.3)$$

$$\beta(y) = \max_h \int \varphi(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx \quad \forall y, \quad (3.4)$$

$$\gamma(t, y, z) = \max_{\rho(\cdot)} \left\{ \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho \, dx + \max_{u, f, G} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \right\} = 0 \quad \forall t \in (0, T), y, z \quad (3.5)$$

существуют и достигаются на множестве функций $\mathbf{D}_\rho$, связанных тождеством (2.10) или соответствующим ему уравнением (2.11). При этом минимальное значение критерия (1.7) находится по функции (3.4)

$$\min_{\mathbf{D}_\rho} I = \min_{\mathbf{V}} L = - \int \beta(y) q_0(y) dy,$$

что требует знания плотности $q_0(y)$ распределения начального измерения Y_0 .

В результате, как следует из (3.5), три оптимальные структурные функции регулятора $u^o(\cdot)$, $f^o(\cdot)$, $G^o(\cdot)$ находятся максимизацией определенного на функциях $\varphi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ гамильтониана (3.2) по трем его параметрам u, f, G при любых значениях трех других:

$$\{u^o(t, y, z), f^o(t, y, z), G^o(t, y, z)\} = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, f \in \mathbb{R}^p, G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \quad \forall t, y, z. \quad (3.6)$$

Функцию же начального состояния $h(y)$ регулятора получим из (3.4) в результате максимизации условного среднего начального значения функции $\varphi(\cdot)$:

$$h^o(y) = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^p} \int \varphi(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx \quad \forall y. \quad (3.7)$$

Теорема 1 позволяет проверить найденные каким-либо образом структурные функции регулятора $u(\cdot)$, $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$ и соответствующую им условную плотность $\rho(\cdot)$ на оптимальность на всем отрезке времени $t \in [0, T]$. Для этого, задавшись подходящей дифференцируемой функцией $\varphi(\cdot)$, следует убедиться в достижении экстремумов (3.3)–(3.5) на проверяемых функциях. Эта процедура проще исходной вариационной задачи (2.12) на *условный экстремум функционала* (2.1) тем, что сводится сначала к *максимизации двух функций* (3.6), (3.7) параметров u, f, G и h соответственно, а затем к нахождению в (3.3), (3.5) *безусловных экстремумов функционалов* одного лишь аргумента $\rho(\cdot)$.

Если результат положительный, то полученные функции являются оптимальными, если же отрицательный, то следует попытаться выбрать другую пробную функцию $\varphi(\cdot)$. Эта неопределенность полученных достаточных условий требует поиска более регулярной процедуры решения исходной задачи, которую и рассмотрим ниже.

4. Соотношения для экстремалей. Назовем экстремалами регулятора функции $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot)$, $\tilde{G}(\cdot)$, получаемые максимизацией гамильтониана (3.2), определенного на порождаемой ими экстремальной плотности $\tilde{\rho}(\cdot)$ и на некоторой соответствующей ей функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$:

$$(\tilde{u}(t, y, z), \tilde{f}(t, y, z), \tilde{G}(t, y, z)) = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, f \in \mathbb{R}^p, G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{ufG}[\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}] \quad \forall t, y, z. \quad (4.1)$$

На этих экстремалах достаточное условие (3.5) принимает вид

$$\gamma(t, y, z) = \max_{\rho(\cdot)} \int \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + K_{xyz}^{* \tilde{u} \tilde{f} \tilde{G}}[\tilde{\varphi}] - \mu^{\tilde{u}} \right) \rho \, dx.$$

Используем здесь необходимое условие экстремума функционала – равенство нулю его вариационной производной (интегрального ядра вариации функционала). Вследствие линейности этого функционала получаем уравнение для функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$:

$$-\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x, y, z)}{\partial t} = K_{xyz}^{* \tilde{u} \tilde{f} \tilde{G}}[\tilde{\varphi}] - \mu^{\tilde{u}}. \quad (4.2)$$

Это равенство также является и условием независимости функции (3.5) от $\rho(\cdot)$, что гарантирует существование этого экстремума. Аналогичным образом находим необходимое условие минимума и для функционала (3.3):

$$\tilde{\Phi}|_{t=T} = -v. \quad (4.3)$$

В результате доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Соотношения (4.1)–(4.3) вместе с уравнением (2.11) для экстремальной условной плотности

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t, x|y, z)}{\partial t} = K_x^{\tilde{u}}[\tilde{\rho}] - L_{yz}^{*\tilde{u}\tilde{G}}[\tilde{\rho}], \quad \tilde{\rho}|_{t=0} = \rho_0(x|y) \quad (4.4)$$

или с соответствующим ему тождеством (2.10) образуют двухточечную краевую задачу, решая которую можно найти эти экстремали и функцию $\tilde{\Phi}(\cdot)$. После этого экстремаль $\tilde{h}(y)$ определяется из (3.4):

$$\tilde{h}(y) = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^p} \int \tilde{\Phi}(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx \quad \forall y.$$

Приведенные здесь соотношения являются аналогом известных уравнений принципа максимума Понтрягина, возникающих в задачах управления детерминированным объектом с распределенными параметрами.

5. Случай оптимальности статического регулятора. Для проверки правильности полученных соотношений сначала рассмотрим три известных случая статического (безынерционного) оптимального управления объектом (1.1).

5.1. Программное управление. Случай отсутствия наблюдений за состоянием объекта получим удалением из уравнений (1.1) вектора измеряемого выхода Y_t , положив его размерность равной нулю: $m = 0$. В результате имеем уравнение объекта управления

$$dX_t = a(t, X_t, U_t)dt + B(t, X_t, U_t)dW_t, \quad X_0 \sim p_0(x) \quad (5.1)$$

с неизмеряемым вектором состояния $X_t \in \mathbb{R}^n$. При этом формула выхода регулятора (1.6) вырождается в зависимость $U_t = u(t, Z_t)$, а уравнение его состояния становится независимым:

$$dZ_t = f(t, Z_t)dt, \quad Z_{t_0} = h.$$

Следовательно, Z_t — произвольная функция времени, из-за чего искомое управление оказывается зависящим лишь от времени:

$$U_t = u_o(t).$$

Это позволяет положить порядок регулятора равным нулю: $p = 0$ и исключить из приведенных выше выражений две переменные y, z вместе с их функциями $f(t, y, z), G(t, y, z)$.

В результате соотношения для экстремалей изменяются следующим образом. Условная плотность превращается в безусловную: $\rho(t, x|y, z) = p(t, x)$, ее уравнение (4.4) вырождается в уравнение ФПК с известным начальным условием

$$\frac{\partial \tilde{p}(t, x)}{\partial t} = K_x^{\tilde{u}_o}[\tilde{p}] = -\nabla_x^T (a(t, x, \tilde{u}_o(t))\tilde{p}) + 0.5 \text{tr}[\nabla_x \nabla_x^T (Q(t, x, \tilde{u}_o(t))\tilde{p})], \quad \tilde{p}|_0 = p_0(x),$$

а соотношения (4.2), (4.3) дают уравнение и конечное условие для сопряженной функции

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + a^T(t, x, \tilde{u}_o(t))\varphi_x + 0.5 \text{tr}[Q(t, x, \tilde{u}_o(t))\varphi_{xx}] = \mu^{\tilde{u}_o}, \quad \varphi|_T = -v(x).$$

Гамильтониан (3.2) в этом случае принимает более простой вид

$$H^u[\varphi, p] = \int (K_x^{*u}[\varphi] - \mu^u) p dx = \int (a^T(t, x, u)\varphi_x + 0.5 \text{tr}[Q(t, x, u)\varphi_{xx}] - \mu(t, x, u)) p dx$$

и, согласно (4.1), достигает на экстремали $\tilde{p}(\cdot)$ максимума по переменной u :

$$\tilde{u}_o(t) = \arg \max_{u \in \Omega} H^u[\varphi, \tilde{p}].$$

Эти выражения для экстремалей совпадают с известными необходимыми условиями “стохастического” принципа максимума Понтрягина [4, 15] и позволяют найти программное управление $\tilde{u}_0(t)$, оптимальное только для заданной плотности вероятности $p_0(x)$ начального состояния объекта (5.1).

5.2. Позиционное управление. Случай полных измерений всего вектора состояния объекта управления получим удалением из уравнений (1.1) неизмеряемого вектора X_r , положив его размерность равной нулю: $n = 0$. В результате имеем уравнение объекта управления

$$dY_t = c(t, Y_t, U_t)dt + D(t, Y_t, U_t)dW_t, \quad Y_0 \sim q_0(y), \quad (5.2)$$

с полностью измеряемым вектором состояния $Y_t \in \mathbb{R}^m$.

Тогда в найденных выше соотношениях переменная x вместе с ее условной плотностью $\rho(t, x|y, z)$ пропадают, так что $\int \eta \rho dx = \eta$, а совместная плотность совпадает с маргинальной $r(t, x, y, z) = q(t, y, z)$. Поэтому достаточные условия (3.3)–(3.5) с независимой теперь от переменной x функцией $\varphi(\cdot)$ принимают вид

$$\frac{\partial \varphi(t, y, z)}{\partial t} + \max_{u, f, G} H[t, y, z, u, f, G; \varphi] = 0, \quad (5.3)$$

$$\varphi(T, y, z) = -v(y, z), \quad (5.4)$$

$$\beta(y) = \max_h \varphi(0, y, h). \quad (5.5)$$

При этом операция интегрирования в гамильтониане (3.2) исчезает:

$$H_{yz}^{ufG}[\varphi] = K_{yz}^{ufG}[\varphi] - \mu^u, \quad (5.6)$$

где, согласно (2.5),

$$K_{yz}^{ufG}[\varphi] = c^{uT} \varphi_y + (f + Gc^u)^T \varphi_z + 0.5 \operatorname{tr}[R^u \varphi_{yy}] + \operatorname{tr}[GR^u \varphi_{yz} + 0.5GR^u G^T \varphi_{zz}]. \quad (5.7)$$

Частная максимизация в (5.3) гамильтониана (5.6) при любых u, G только по переменной f из-за его линейности по ней дает условие $\varphi_z = 0$ независимости функции $\varphi(t, y, z)$ и от переменной z . Поэтому имеем $\varphi = \varphi(t, y)$, выражение (5.7) упрощается:

$$K_y^{*u}[\varphi] = c^{uT} \varphi_y + 0.5 \operatorname{tr}[R^u \varphi_{yy}],$$

так что гамильтониан (5.6) оказывается не зависящим от параметров f, G :

$$H_{yz}^u[\varphi] = K_y^{*u}[\varphi(t, y)] - \mu^u(t, x, y, z), \quad (5.8)$$

а из (5.5) получаем, что $\beta(y) = \varphi(0, y)$ и не зависит от выбора h . В результате достаточные условия (5.3)–(5.5) с гамильтонианом (5.8) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \max_u H_{yz}^u[\varphi] = 0, \quad (5.9)$$

$$\varphi(T, y, z) = -v(y, z), \quad (5.10)$$

$$\beta(y) = \varphi(0, y).$$

В эти соотношения функции $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$ уравнения состояния регулятора не входят, а потому могут быть выбраны любыми. Это приводит, согласно (1.5), к произвольности состояния регулятора Z_t для любых $t \geq 0$, что можно учесть выбором управления (1.6) в виде его статической (безынерционной) зависимости от полного вектора состояния объекта (5.2):

$$U_t = u^o(t, Y_t),$$

т.е. также считать порядок регулятора $p = 0$. В результате переменную z следует опустить везде, и тогда достаточные условия (5.9), (5.10) оказываются такими

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \max_{u^o \in \Omega} \{c^T(t, y, u^o) \varphi_y + 0.5 \operatorname{tr}[R(t, y, u^o) \varphi_{yy}] - \mu(t, y, u^o)\} = 0, \quad \varphi(T, y) = -v(y). \quad (5.11)$$

Это решаемое в обратном времени уравнение с точностью до знака и типа экстремума совпадает с известным “стохастическим” уравнением Беллмана [4, 15] для объекта (5.2) с полностью измеряемым состоянием Y_t . Действительно, положив $\psi(t, y) = -\varphi(t, y)$, вместо (5.11) получаем более привычный вид уравнения Беллмана

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t} + \min_{u^o \in \Omega} \{c^T(t, y, u^o) \psi_y + 0.5 \operatorname{tr}[R(t, y, u^o) \psi_{yy}] + \mu(t, y, u^o)\} = 0, \quad \psi(T, y) = v(y).$$

Оно позволяет в обратном времени найти управление с полной обратной связью $u^o(t, y)$, которое оптимально при любых распределениях $q_0(y)$ начального состояния объекта (5.2).

5.3. Частично позиционное управление. Если для управления парной моделью объекта (1.1) ограничиться нахождением только статического (безынерционного) закона управления

$$U_t = u(t, Y_t),$$

то в регуляторе (1.5), (1.6) размерность вектора состояния регулятора Z_t достаточно также выбрать равной нулю: $p = 0$. Тогда во всех соотношениях для экстремалей (3.2), (4.1)–(4.4) пропадает переменная z и связанные с ней функции $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$. В частности, теперь

$$a''(t, x, y) = a(t, x, y, u(t, y)).$$

В результате для урезанных удалением аргумента z экстремальной условной плотности $\tilde{\rho}(t, x|y)$ и соответствующей ей сопряженной функции $\tilde{\varphi}(t, x, y)$ из (4.1)–(4.4) имеем такую систему уравнений на отрезке управления $t \in [0, T]$:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t, x|y)}{\partial t} = K_x^{\tilde{u}}[\tilde{\rho}] - L_y^{\tilde{u}}[\tilde{\rho}], \quad \tilde{\rho}|_0 = \rho_0(x|y), \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x, y)}{\partial t} + K_{xy}^{\tilde{u}}[\varphi] = \mu^{\tilde{u}}(t, x, y), \quad \varphi|_T = -v(x, y), \quad (5.13)$$

где оператор $K_x^u[\rho]$ задан в (2.11), тогда как два других определяются выражениями

$$L_y^{*u}[\rho] = \rho_y^T \bar{c}^u + 0.5 \operatorname{tr}[\bar{K}^u \rho_{yy}],$$

$$K_{xy}^{*u}[\varphi] = a^{uT} \varphi_x + c^{uT} \varphi_y + 0.5 \operatorname{tr}[Q^u \varphi_{xx}] + \operatorname{tr}[S^{uT} \varphi_{xy} + 0.5 R^u \varphi_{yy}],$$

а входящая в них функция управления $\tilde{u}(t, y)$ находится как частный максимум

$$\tilde{u}(t, y) = \arg \max_{u \in \Omega} H_y^u[\varphi, \tilde{\rho}] \quad (5.14)$$

упрощенной версии гамильтониана (3.2):

$$H_y^u[\varphi, \tilde{\rho}] = \int \left(K_{xy}^{*u}[\varphi] - \mu^u \right) \tilde{\rho} dx. \quad (5.15)$$

Полученные соотношения (5.13)–(5.14) совпадают с известными из [7, 8], отличаясь от них лишь обозначениями неизмеряемой $x = x_{(2)}$ и измеряемой $y = x_{(1)}$ частей вектора состояния объекта (1.1), его функций сноса $[a^T(\cdot), c^T(\cdot)]^T$ и диффузии $[B^T(\cdot), D^T(\cdot)]^T$ как $f(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ соответственно, а оператора $K_{xy}^{*u}[\varphi]$ — как $A_{u(\cdot)}^* \varphi$. Однако использование здесь уравнения (5.12) для условной плотности $\tilde{\rho}(t, x|y)$ вместо применявшегося в [7, 8], в предположении о полностью известной начальной плотности (1.2), уравнения ФПК для совместной плотности $p(t, x, y)$ и формул ее пересчета в $\tilde{\rho}(t, x|y)$ делает найденные здесь соотношения справедливыми для любых плотностей вероятности $q_0(y)$ начального измерения Y_0 .

6. Оптимальная структура динамического регулятора. Конкретизируем теперь процедуры получения функций $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(y)$, $u(\cdot)$ уравнения состояния (1.5) и формулы выхода (1.6) регулятора при его порядке $p \neq 0$. Как следует из (3.6), первые три из них определяются нахождением частного максимума по параметрам u , f , G гамильтониана (3.2) при любых значениях трех других его аргументов t, y, z . Функция же $h(y)$ определяется из (3.7).

Выражение (3.2), используя вид оператора (2.5), запишем подробнее:

$$H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = \int \left(-\mu^u + a^{uT} \varphi_x + c^{uT} \varphi_y + (f + Gc^u)^T \varphi_z + 0.5 \operatorname{tr}[Q^u \varphi_{xx}] + \right. \\ \left. + \operatorname{tr}[S^{uT} \varphi_{xy}] + 0.5 R^u \varphi_{yy}] + \operatorname{tr}[G(S^{uT} \varphi_{xz} + R^u \varphi_{yz}) + 0.5 G R^u G^T \varphi_{zz}] \right) \rho dx. \quad (6.1)$$

Здесь уже верхний индекс u у ряда функций просто подчеркивает их зависимость от этой переменной. Так, в отличие от (1.9), теперь $a^u = a(t, x, y, u)$. Видно, что гамильтониан (6.1) линеен по переменной $f \in \mathbb{R}^p$, квадратичен по $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ и нелинеен по $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$. Поэтому, снова применяя принцип сечений

$$\max_{u, f, G} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = \max_u \left[\max_G \left(\max_f H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \right) \Big|_{\forall u, G} \right]_{\forall u}, \quad (6.2)$$

последовательно, от нахождения простого экстремума к сложному, получим следующее.

6.1. Ф у н к ц и я с м е щ е н и я. Максимизируем сначала функцию (6.1) по векторному параметру $f \in \mathbb{R}^p$ при любых допустимых u, G . Выделяя в ней слагаемые, зависящие только от f , имеем задачу на экстремум линейной функции

$$H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = f^T \int \varphi_z \rho dx + \operatorname{invar}(f) \rightarrow \max_f \quad \forall u, G,$$

где $\operatorname{invar}(f)$ — не зависящие от f инвариантные слагаемые. Ее решением является требуемое для существования этого экстремума условие независимости H от f :

$$\overline{\varphi_z} = \int \varphi_z(t, x, y, z) \rho(t, x|y, z) dx = 0. \quad (6.3)$$

В результате гамильтониан оказывается инвариантен к функции $f(\cdot)$ смещения регулятора

$$H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = \operatorname{invar}(f),$$

т.е. ее выбор на его значение никак не влияет.

Выражение для функции смещения найдем дифференцированием равенства (6.3) по времени. Используя при этом тождество (2.10), линейность входящих в него операторов K_{xyz}^{*ufG} , L_{yz}^{*ufG} по функции $f(\cdot)$ и ее независимость от переменной интегрирования x , получим

$$f(t, y, z) = -(\overline{\varphi_{zz}})^{-1} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_z + K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_z] \right) \rho dx. \quad (6.4)$$

Здесь чертой сверху по-прежнему отмечено условное среднее (2.8), а действие оператора K_{xyz}^{*u0G} на вектор-функцию φ_z осуществляется поэлементно:

$$K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_z] = [K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_{z_i}]]_{i=1, \overline{p}}.$$

Значением же этого первого частного максимума гамильтониана является функция

$$H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] = \max_f H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \Big|_{\forall u, G}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Если выполняется условие инвариантности (6.3), то частный максимум гамильтониана H по f существует, а соответствующий вид функции смещения определяется формулой (6.4).

6.2. Ф у н к ц и я у с и л е н и я. Теперь в серии частных экстремумов (6.2) найдем максимум по G полученной функции $H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho]$ при любых допустимых u . В результате определим *частично оптимальную* (парциальную) функцию усиления регулятора:

$$G^u(t, y, z) = G_p(t, y, z; u) = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] \quad \forall t, y, z, u \quad (6.5)$$

и соответствующее ей значение второго частного максимума гамильтониана:

$$H_{yz}^u[\varphi, \rho] = H_{yz}^{u0G^u}[\varphi, \rho] = \max_G H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] \Big|_{\forall u} \quad (6.6)$$

для его последующей максимизации по переменной u . Оптимальную же функцию усиления $G(\cdot)$ найдем только после определения функции выхода $u(t, y, z)$, подставляя последнюю в частично оптимальную функцию (6.5):

$$G(t, y, z) = G^{u(t, y, z)}(t, y, z) = G_p(t, y, z; u(t, y, z)). \quad (6.7)$$

Выделяя в (6.1) слагаемые, зависящие только от G , и используя матричное равенство $(Gc^u)^T \varphi_z = \text{tr}[Gc^u \varphi_z^T]$, получим

$$H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] = \int \text{tr}[G \Delta_{xyz}^u[\varphi] + 0.5 G R^u G^T \varphi_{zz}] \rho dx + \text{invar}(G) \rightarrow \max_G \quad \forall u,$$

где $\Delta_{xyz}^u[\varphi]$ — не зависящая от G функция

$$\Delta_{xyz}^u[\varphi] = c^u \varphi_z^T + S^{uT} \varphi_{xz} + R^u \varphi_{yz}.$$

Максимум этого гамильтониана, квадратичного по переменной $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$, найдем с помощью необходимых и достаточных условий экстремума. Используя известные формулы матричного дифференцирования [15]

$$\frac{\partial}{\partial G} \text{tr}(G \Delta) = \Delta^T, \quad \frac{\partial}{\partial G} \text{tr}(G R G^T \varphi_{zz}) = \varphi_{zz} G R + \varphi_{zz}^T G R^T$$

и учитывая симметричность матриц R и φ_{zz} , получим уравнение и неравенство

$$\frac{\partial H}{\partial G} = \int (\Delta_{xyz}^{uT}[\varphi] + \varphi_{zz} G R^u) \rho dx = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial G^2} = \int (\varphi_{zz} \otimes R^u) \rho dx < 0,$$

где $\otimes$ — символ прямого (внешнего, кронекерова) произведения матриц

$$\varphi_{zz} \otimes R^u = [\varphi_{z z_j} R_{kl}^u]_{i,j=1,p}^{k,l=\overline{1,m}}.$$

Так как искомая функция (6.5) не зависит от переменной интегрирования x , то полученное уравнение для нее является алгебраическим и может быть записано, используя обозначение условного среднего (2.8), в многомерном матричном виде

$$\bar{\Lambda}_z^u[\varphi] ** G = -\bar{\Delta}_{xyz}^{uT}[\varphi].$$

Его коэффициент $\bar{\Lambda}_z^u[\varphi]$ и свободный член $\bar{\Delta}_{xyz}^{uT}[\varphi]$ определяются по формулам

$$\bar{\Lambda}_z^u[\varphi] = \int (\varphi_{zz} \otimes R^u) \rho dx, \quad \bar{\Delta}_{xyz}^u[\varphi] = \int (c^u \varphi_z^T + S^{uT} \varphi_{xz} + R^u \varphi_{yz}) \rho dx, \quad (6.8)$$

а символом $**$ отмечена операция двойного умножения (свертки по двум индексам) попарно симметрической четырехмерной $p \times p \times m \times m$ -матрицы (тензора) его коэффициентов $\bar{\Lambda}_z^u$ на двумерную (плоскую) $p \times m$ -матрицу G , которая дает другую $p \times m$ -матрицу:

$$\Lambda ** G = \left[\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^m \Lambda_{ijkl} G_{jl} \right]_{i=1,p}^{k=\overline{1,m}}, \quad \Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{jilk} = \Lambda_{ijlk}.$$

При этом для выполнения достаточного условия $\partial^2 H / \partial G^2 < 0$ искомого максимума (6.6) при условии невырожденности в (1.1) шума изменения $R^u(\cdot) = D^u(\cdot) D^{uT}(\cdot) > 0$ и при очевидной неотрицательности условной плотности $\rho(\cdot) \geq 0$ требуется отрицательная определенность матрицы $\varphi_{zz}(\cdot) < 0$. Тогда в точках с ненулевыми значениями плотности $\rho(\cdot) \neq 0$ функция $H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho]$ при любых u достигает частного максимума по G . Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Если шум измерителя не вырожден, т.е. $R^u(\cdot) > 0$, а матричная функция $\varphi_{zz}(\cdot)$ отрицательно определена, то частично-оптимальная функция усиления (6.5) является единственным решением линейного матричного уравнения

$$\bar{\Lambda}_z^u[t, y, z; \varphi] ** G^u(t, y, z) = -\bar{\Delta}_{xyz}^{uT}[t, y, z; \varphi] \quad \forall t, y, z, u,$$

с матрицами (6.8), а соответствующее максимальное значение гамильтониана (6.6) имеет вид

$$H_{yz}^u[\varphi, \rho] = \int \left(-\mu^u + a^{uT} \varphi_x + c^{uT} \varphi_y + 0.5 \operatorname{tr}[Q^u \varphi_{xx}] + \right. \\ \left. + \operatorname{tr}[S^{uT} \varphi_{xy} + 0.5 R^u \varphi_{yy}] + \operatorname{tr}[G^u \Delta_{xyz}^u[\varphi] + 0.5 G^u R^u G^{uT} \varphi_{zz}] \right) \rho dx. \quad (6.9)$$

6.3. Функция выхода. Согласно (6.2), остается максимизировать функцию (6.9) по переменной $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$. Вследствие неопределенного пока конкретного вида этой зависимости ограничимся следующим очевидным утверждением.

Теорема 5. Если функция (6.9) выпукла по переменной u , то оптимальная функция выхода регулятора $u(t, y, z)$ определяется как единственное решение задачи параметрического нелинейного программирования:

$$u(t, y, z) = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l} H_{yz}^u[\varphi, \rho], \quad \forall t, y, z.$$

После этого из (6.7) становится известной и оптимальная функция усиления регулятора $G(\cdot)$.

6.4. Функция начального состояния. Для нахождения максимали (3.7) также используем необходимые и достаточные условия экстремума, в результате чего легко получаем такое утверждение.

Теорема 6. Оптимальная функция $h(y)$ определяется из условий

$$\int \varphi_z(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx = 0 \quad \forall y, \quad \int \varphi_{zz}(0, x, y, h) \rho_0(x|y) dx < 0 \quad \forall y, h,$$

первое из которых есть алгебраическое уравнение относительно переменной h , а второе гарантирует наличие соответствующего максимума.

Заключение. С целью ускорения практической реализации инерционного процесса оптимального в среднем и на отрезке времени $t \in [0, T]$ управления стохастическим объектом по его измеряемому выходу предложен способ синтеза конечномерного динамического регулятора состояния объекта. Этот регулятор учитывает всю предысторию измерений, но не требует восстановления вектора состояния объекта. В отличие от различных конечномерных приближений к использующему апостериорную плотность вероятности оптимальному регулятору Стратоновича—Мортенсена, получаемых методом достаточных координат, он является точным. Его размерность не требуется изменять большими скачками, как при учете очередной группы многомерных апостериорных моментов следующего порядка. Более того, размерность регулятора, влияющая на скорость обработки измерений, может быть выбрана не только много меньше порядка наиболее простого ковариационного приближения к регулятору Стратоновича—Мортенсена, в котором участвуют различные нелинейные обобщения фильтра Калмана, но даже и меньше порядка самого объекта управления.

Синтез предлагаемого регулятора основан на использовании, благодаря его конечномерности, усеченной версии апостериорной плотности вероятности, которая удовлетворяет детерминированному интегродифференциальному уравнению в частных производных. Оно позволило получить достаточные условия оптимальности структурных функций регулятора и уравнения для нахождения их экстремалей. Для случая синтеза статической версии регулятора они проверены сравнением с тремя известными результатами. Приведены и алгоритмы нахождения каждой из структурных функций динамического регулятора.

В второй части статьи планируется рассмотреть случай стохастических измерений состояния объекта и на примере линейно-квадратично-гауссовской задачи проверить полученные здесь алгоритмы синтеза регулятора сравнением их результатов с известной теоремой разделения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратонович Р.Л. К теории оптимального управления. Достаточные координаты // АиТ. 1962. № 7. С. 910–917.
2. Mortensen R.E. Stochastic Optimal Control with Noisy Observations // Int. J. Control. 1966. V. 4. № 5. P. 455–466.
3. Davis M.H.A., Varaiya P.P. Dynamic Programming Conditions for Partially Observable Stochastic Systems // SIAM J. Control. 1973. V. 11. № 2. P. 226–262.

4. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
5. *Benes V.E., Karatzas I.* On the Relation of Zakai's and Mortensen's Equations // *SIAM J. Control and Optimization*, 1983. V. 21. № 3. P. 472–489.
6. *Bensoussan A.* Stochastic Control of Partially Observable Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 364 p.
7. *Пантелеев А.В., Семенов В.В.* Оптимальное управление нелинейными вероятностными системами по неполному вектору состояния // *АиТ*. 1984. № 1. С. 91–100.
8. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // *АиТ*. 2018. № 1. С. 130–146.
9. *Хрусталева М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // *Изв. РАН. ТиСУ*. 1995. № 6. С. 194–208.
10. *Wonham W.M.* On the Separation Theorem of Stochastic Control // *SIAM J. Control*. 1968. V. 6. № 2. P. 312–326.
11. *Босов А.В.* Применение условно-оптимального фильтра для синтеза субоптимального управления в задаче оптимизации выхода нелинейной дифференциальной стохастической системы // *АиТ*. 2020. № 11. С. 32–45.
12. *Босов А.В.* Задача управления линейным выходом нелинейной неуправляемой стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. № 5. С. 52–73.
13. *Руденко Е.А.* Оперативно-оптимальный конечномерный динамический регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. I. Общий нелинейный случай // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 5. С. 12–28.
14. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
15. *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С.* Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
16. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
17. *Руденко Е.А.* Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2013. № 6. С. 25–51.
18. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
19. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997.

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.958

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ОБРАЗЦА СЛОИСТОГО ДВУХФАЗНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА¹

© 2023 г. А. А. Егорова^{a,*}, А. С. Шамаев^{b,**}

^aМИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: alena.egorova@gmail.com

**e-mail: sham@rambler.ru

Поступила в редакцию 07.03.2023 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача граничного управления одномерными колебаниями эффективной (усредненной) среды, соответствующей двухфазной среде, состоящей из периодически чередующихся слоев упругого и вязкоупругого материалов с долговременной памятью или различных вязкоупругих материалов с трением Кельвина–Фойгта и с долговременной памятью. Усредненная модель описывается краевой задачей для интегродифференциального уравнения. Показано, что для этой модели силовым воздействием за один конец полосы невозможно привести за конечное время (в отличие от уравнения колебаний струны) колебания в состояние покоя. Формулируется гипотеза о возможности приведения в состояние покоя указанного объекта с помощью силовых воздействий, распределенных по всей длине объекта.

DOI: 10.31857/S0002338823040030, EDN: OCGDZR

Введение. Исследуется проблема приведения в состояние покоя за конечное время одномерных поперечных или продольных колебаний для усредненной (эффективной) модели слоистого композита, занимающих полосу $0 < x_1 < \pi$. Эта эффективная модель соответствует колебаниям в слоистой двухфазной среде, состоящей из периодически чередующихся слоев упругого и вязкоупругого материалов с долговременной памятью или различных вязкоупругих материалов с трением Кельвина–Фойгта и свойствами долговременной памяти. Усреднение происходит по малому параметру $\epsilon > 0$, равной толщине каждого периодически повторяющегося слоя и много меньшей толщины образца композита. Предполагается, что колебания распространяются вдоль оси Ox_1 перпендикулярно (если они параллельны плоскости Ox_2x_3) или параллельно слоям (если последние параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3).

Силовое воздействие прилагается к одному краю полосы $0 < x_1 < \pi$ и рассматривается вопрос о возможности приведения в состояние покоя системы для любых начальных условий (см. рис. 1).

Для корректной постановки начально-краевой задачи о колебаниях в слоистой двухфазной среде и соответствующей усредненной модели используются результаты работ [1–3]. Рассматриваемая усредненная модель содержит нестационарные интегро-дифференциальные уравнения. Из анализа спектра собственных одномерных колебаний в усредненной среде в публикациях [4–6] вытекает, что спектр имеет предельные точки с конечными координатами, откуда следует бесконечность значения характеристики плотности множества собственных значений. Далее доказывается, что система экспоненциальных функций, соответствующая точкам из спектра, не может быть минимальной на любом конечном отрезке. Согласно результатам работы [7], рассматриваемая задача управления неразрешима. Вообще, бесконечное значение характеристики плотности собственных значений оказывается препятствием к управляемости за границу области.

¹ Работа поддержана грантом РНФ № 21-110151.



Рис. 1. Эффективная модель слоистого композита, с приложением силового воздействия с одного конца

В статье описывается происхождение рассматриваемых систем из так называемых “задач усреднения”, хотя такие задачи возникают и в других областях механики и физики. Усредненные (или “эффективные”) модели для микронеоднородных комбинированных сред, состоящих из упругого или вязкоупругого материала и вязкой или слабовязкой жидкости, а также различных комбинаций вязкоупругих материалов, были построены в [1–3, 8–14]. Спектральному анализу усредненных моделей комбинированных сред посвящены работы [5, 6, 14]. В некоторых случаях, например в [1–3], усредненные модели описывают колебания в сплошных (предельных) вязкоупругих материалах с долговременной памятью. Управляемость за границу одномерными колебаниями в таких материалах зависит от структуры спектра уравнения. Структуры спектров некоторых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости, были исследованы, например, в [6, 15, 16].

Задачи распределенного управления для систем, где уравнения не содержат интегральные слагаемые, изучены ранее в монографии [17]. Было показано, что малой силой, приложенной ко всей области, можно привести в покой колебания мембран и пластин.

Проблемы управления механическими системами, где соответственные уравнения содержат интегральные слагаемые, рассмотрены в [18]. В ней было сформулировано условие, при котором движение, описываемое уравнением теплопроводности с интегральной “памятью”, невозможно с помощью граничного управления привести в состояние покоя за конечное время. Условие состоит в существовании корня некоторой аналитической функции комплексного переменного (именно преобразования Лапласа от ядра свертки) в области его голоморфности.

В то же время если управляющее воздействие прилагается ко всей области, то задача приведения колебаний в покой может быть разрешима, и даже в ряде случаев наличие интегральных членов типа свертки способствует сокращению времени приведения системы в заданное состояние, по сравнению со временем приведения к покою системы без нелокальных слагаемых. С помощью спектрального метода в [19] было сделано построение такого управления для случая, если ядро свертки состоит из суммы конечного числа убывающих экспонент. Заметим, что это свойство управляемости по всей области для систем с интегродифференциальным уравнением, где ядро свертки состоит из конечной суммы экспоненциально убывающих функций, является “негрубым”: в [20] показано, что можно найти малое возмущение ядра свертки, при котором свойство управляемости данной системы по всей области теряется. Вопросы управляемости систем со слагаемыми типа свертки были также рассмотрены в работах [21–23].

Возможность *управления за границу* области была установлена впервые в монографии [24], где были получены результаты, относящиеся к уравнению колебания струны и уравнению теплопроводности. Эти результаты были далее обобщены на многомерный случай в [25]. Управление *за границу области* для системы с нелокальными членами типа свертки является, как правило, свойством исключительным. Другими словами, существуют такие начальные состояния, из которых за конечное время нельзя привести систему в заданное состояние (например, в полный покой), прилагая управление к части области, в которой задана система, или к границе области. Данное свойство было замечено в [18] применительно к одномерным по пространственным переменным системам. Результаты этой работы указывают на то, что если управление прилагается к части области или к ее границе, то свойство полной управляемости выполняется только для некоторого класса систем интегродифференциальных уравнений. Как показано в [21], управление за границу также возможно в системе, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина, когда ядро свертки состоит из одной убывающей экспоненты.

Казалось бы, что наличие слагаемых типа свертки, которые соответствуют внутреннему трению в материале, могли бы способствовать затуханию колебаний при воздействии на него через границу области, но этого не происходит. Более того, эта сумма из убывающих экспонент является препятствием к приведению системы в заданное состояние с помощью граничного управления.

В следующем разделе поясним происхождение рассматриваемых систем с последствием в теории композиционных материалов и исследуем задачу граничного управления для усредненной системы.

1. Математическая модель слоистого композита. Рассмотрим ограниченную полосу $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с гладкой границей, заполненную двухфазной микронеоднородной средой с периодической структурой. Возьмем в качестве ячейки периодичности куб εY , где $Y = (0, 1)^3$ — единичный куб, а величина $\varepsilon > 0$ много меньше линейных размеров области Ω . Обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}$ подмножества области Ω , занятые соответственно первой и второй фазой среды с ε -периодической структурой. Будем предполагать, что первой фазой может быть упругий материал (УМ), либо вязкоупругий материал с трением Кельвина—Фойгхта (ВУМ I), либо вязкоупругий материал с памятью, но без трения Кельвина—Фойгхта (ВУМ II), либо вязкоупругий материал, обладающий и тем и другим свойством вязкости (ВУМ III). Второй фазой могут быть вязкоупругие материалы всех перечисленных видов. Это означает, что уравнения состояния в $\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}$ имеют вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{(s)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}^{(s)} e_{kh} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) - d_{ijkh} \left(\frac{x}{\varepsilon}, t \right) * e_{kh}(u^\varepsilon),$$

$$x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s = 1, 2.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3, $u^\varepsilon(x, t)$ — вектор перемещений, σ_{ij}^ε — компоненты тензора напряжений, $e_{kh}(u^\varepsilon)$ — компоненты тензора деформаций:

$$e_{kh}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right),$$

знаком $*$ обозначена свертка двух функций по переменной t :

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t - \tau) g_2(\tau) d\tau,$$

$a_{ijkh}^{(s)}(y), b_{ijkh}^{(s)}(y)$ — Y -периодические гладкие функции, для которых выполнены условия симметрии:

$$a_{ijkh}^{(s)(y)} = a_{jikh}^{(s)(y)} = a_{khij}^{(s)}(y), \quad s = 1, 2,$$

$$b_{ijkh}^{(s)}(y) = b_{jikh}^{(s)}(y) = b_{khij}^{(s)}(y), \quad s = 1, 2,$$

и положительной определенности

$$a_{ijkh}^{(s)}(y) \xi_{kh} \xi_{ij} \geq \alpha_1^{(s)} \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_1^{(s)} > 0, \quad s = 1, 2.$$

$$b_{ijkh}^{(s)}(y) \xi_{kh} \xi_{ij} \geq \alpha_2^{(s)} \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_2^{(s)} > 0, \quad s = 1, 2.$$

Тензор $d^{(s)}(y, t)$ представим в виде произведения

$$d_{ijkh}^{(s)}(y, t) = V_s(t) w_{ijkh}^{(s)}(y),$$

где $V_s(t)$ — убывающая функция следующего вида:

$$V_s(t) = \sum_{n=1}^N V_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t}, \quad V_n^{(s)}, \quad \gamma_n^{(s)} \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i^{(s)} < \gamma_j^{(s)}, \quad i < j,$$

$w^{(s)}(y)$ — тензор, компоненты которого являются Y -периодическими гладкими функциями и удовлетворяют условиям симметрии:

$$w_{ijkh}^{(s)}(y) = w_{jikh}^{(s)}(y) = w_{khij}^{(s)}(y).$$

Для различных видов фазы Ω_{se} верны следующие равенства:

- 1) УМ: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \equiv 0, d^{(s)}(y, t) \equiv 0$;
- 2) ВУМ I: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \neq 0, d^{(s)}(y, t) \equiv 0$;
- 3) ВУМ II: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \equiv 0, d^{(s)}(y, t) \neq 0$;
- 4) ВУМ III: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \neq 0, d^{(s)}(y, t) \neq 0$.

Математическая модель, описывающая колебания в слоистой двухфазной среде, имеет вид

$$\rho^\varepsilon(x) \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$[u^\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, \quad S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}, \quad (1.2)$$

$$u^\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

В ряде работ, в том числе в [1–3], были выведены эффективные модели для колебания композита со слоями из различных комбинаций рассматриваемых материалов. В них было показано, что если колебания проходят параллельно слоям и хотя бы один из слоев содержит ненулевой тензор вязкости Кельвина–Фойгхта (ВУМ I, ВУМ III), то, за исключением некоторых специальных случаев, эффективная модель соответствует ВУМ III. А если колебания перпендикулярны слоям, то наличие трения Кельвина–Фойгхта в исходной модели не влечет его присутствие в усредненной модели. Для того чтобы усредненный материал обладал трением Кельвина–Фойгхта, необходимо, чтобы *оба* материала в исходной модели имели данное свойство. Если в обеих фазах нет интегральных членов (например, в комбинациях ВУМ I + ВУМ I или УМ + ВУМ I), то в усредненной модели присутствует слагаемое в виде свертки с *одной* убывающей экспонентой. Если хотя бы в одной из фаз есть интегральный член, то в усредненной модели ядро свертки равно сумме не менее двух экспоненциально убывающих функций.

Таким образом, математическая модель, описывающая одномерные колебания усредненной среды вдоль оси Ox_1 , имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t), \quad x_1 \in (0; \pi), \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \quad t > 0, \quad u(x_1, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \quad (1.6)$$

где $u(x_1, t)$ – смещение точки по оси x_1 в момент времени t ; $f(x_1, t)$ – внешняя сила, направленная вдоль оси Ox_1 ; $\alpha, \beta, g(t)$ – соответственно эффективные коэффициенты упругости, вязкости и усредненное ядро релаксации. Их значения зависят от толщины слоев, характеристик материалов исходной среды и от расположения слоев относительно направления колебания. Заметим, что функция $g(t)$ равна некоторой конечной сумме убывающих экспонент.

Сходимость решений допредельных задач (1.1)–(1.4) к усредненной задаче (1.5)–(1.6) доказана в [26].

Теорема 1. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.4). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $t \in [0, T]$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{в} \quad (L_2(0; \pi))^3,$$

$$\left\| u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right\|_{(H^1(0; \pi))^3} \rightarrow 0,$$

где $u(x, t)$ – решение усредненной задачи (1.5)–(1.6),

$$u_1(x, y, t) = Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t) + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, t),$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y), W^{kh}(y, t)$ – решения периодических задач, соответствующих различным моделям двухфазных сред.

Из этой теоремы следует, что выводы о приближенном поведении решения задачи для многослойного композита рассматриваемого вида можно сделать из анализа поведения решений усредненной задачи.

2. Задача граничного управления для эффективной (усредненной) модели слоистого композита. Рассмотрим теперь следующую задачу управления для приведенных выше эффективных моделей слоистого композита:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \in (0; \pi), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = v(t), \quad u(\pi, t) = 0; \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u(x_1, 0) = \varphi_0(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, 0) = \varphi_1(x_1). \quad (2.3)$$

Целью задачи управления является нахождение функции $v(t) \in L_2(0, +\infty)$, приводящей систему в покой за конечное время. Говорят, что система, описываемая краевой задачей (2.1)–(2.3), *приводима в покой*, если для любых начальных условий $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1)$ можно найти функцию $v(t)$, тождественно равную нулю на множестве $t : t > T$ для некоторого $T > 0$, такого, что соответствующее решение $u(x_1, t)$ задачи (2.1)–(2.3) также при данном управлении обратилось в ноль на множестве $t : t > T$.

Заметим, что в [18, 21] была показана неразрешимость задачи управления за один конец вязкоупругой струны с долговременной памятью в случае $\beta = 0$, если некоторая комплексная аналитическая функция, связанная с ядром, имеет корни или ядро релаксации $g(t)$ равно конечной сумме убывающих экспонент, причем количество слагаемых должно быть не меньше двух. Но если рассматривать ядро, состоящее из одной убывающей экспоненты, то можно привести пример, когда управление за один край струны все же возможно. В дальнейшем будем считать, что $\beta \neq 0$.

Приведем необходимое определение из [21].

О п р е д е л е н и е. Система функций $\{e^{\mu_j t}\}_{j=1}^{+\infty}, \mu_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots$, называется *минимальной* в $L_2(0, T)$, если по норме этого пространства никакая из этих функций не может быть приближена линейной комбинацией остальных функций из этой системы.

Пусть $\{\mu_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – счетный набор комплексных чисел. Определим характеристику плотности этого множества как

$$A^*(\mu_j) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{R} \int_0^R \frac{n(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где $n(\tau)$ – количество чисел из набора $\{\mu_j\}_{j=1}^{+\infty}$, попавших в круг радиуса R . В работе [7] была доказана следующая лемма.

Л е м м а 1. Если $A^*(\mu_j) = +\infty$, то система $\{e^{\mu_j t}\}_{j=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0, T]$ не является минимальной для любого $T > 0$.

С помощью данной леммы покажем, что рассматриваемая система не может быть приведена в состояние покоя за конечное время.

Пусть $v \in L_2(0, T)$ с произвольным $T > 0$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in L_2(0, \pi)$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Если для спектра $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ системы (2.1)–(2.3) характеристика $A^*(\lambda_i) = +\infty$, тогда для произвольных начальных условий $\varphi_0, \varphi_1 \in L_2(0, \pi)$ управление в покой за граничную точку невозможно.

Доказательство. Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$w(x_1, t) = u(x_1, t) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) v(t).$$

Тогда для новой неизвестной функции $w(x_1, t)$ получаем следующую краевую задачу:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \rho \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

$$x_1 \in (0; \pi), \quad t > 0,$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0; \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$w(x_{1,0}) = \varphi_0(x_1) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) v(0), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, 0) = \varphi_1(x_1) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \frac{\partial v}{\partial t}(0). \quad (2.7)$$

Лемма 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$ — спектр задачи (2.4)–(2.7). Тогда, если система функций $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{+\infty}$ не является минимальной на $[0, T]$, то систему (2.4)–(2.7) невозможно привести в состояние покоя за конечное время $T > 0$ управлением через граничную точку при произвольных начальных условиях.

Доказательство. Предположим, что задача управления (2.4)–(2.7) разрешима для любых начальных условий $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1) \in L_2(0, \pi)$. Решение будем искать в виде

$$w(x_1, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(t) \sin kx_1.$$

Подставив его в (2.4)–(2.7) и приравнявая множители при соответствующих слагаемых с $\sin kx_1, k = 1, 2, \dots$, получим

$$\rho \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \alpha k^2 w_k + \beta k^2 \frac{\partial w_k}{\partial t} - g(t) * w_k k^2 = -\rho \frac{2}{\pi k} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$w_k(0) = \varphi_{0k} - \frac{2v(0)}{\pi k}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t}(0) = \varphi_{1k} - \frac{2}{\pi k} \frac{\partial v}{\partial t}(0), \quad (2.9)$$

где $\varphi_{0k}, \varphi_{1k}$ — коэффициенты разложения функций $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1)$ в ряд Фурье.

Сделаем преобразование Лапласа (2.8)–(2.9) и получим следующие равенства:

$$\widehat{w}_k(\lambda) = \frac{-\frac{2\rho}{\pi k} \hat{v}(\lambda) \lambda^2 + \rho(\varphi_{0k} + \varphi_{1k}) + \frac{2k}{\pi} \beta v(0) - \beta \varphi_{0k} k^2}{\rho \lambda^2 + \beta k^2 \lambda + \alpha k^2 - \hat{g}(\lambda) k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

где $\widehat{w}_k(\lambda), \hat{v}(\lambda), \hat{g}(\lambda)$ — преобразования Лапласа функций $w_k(t), v(t), g(t)$ соответственно.

В силу теоремы Винера–Пэли функции $\widehat{w}_k(\lambda)$ должны быть целыми, поэтому верхняя часть выражения (2.10) должна обращаться в ноль на корнях знаменателя, а эти корни — спектр задачи (2.4)–(2.7). Следовательно, справедливы равенства:

$$\hat{v}(\lambda) \equiv \int_0^T v(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{\rho \pi k (\varphi_{0k} + \varphi_{1k}) + 2k^2 \beta v(0) - \beta \pi \varphi_{0k} k^3}{2\rho \lambda^2} \quad (2.11)$$

при $\lambda \in \{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$. По предположению леммы система функций $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{+\infty}$ не является минимальной на отрезке $[0, T]$. Следовательно, существует функция, которую можно представить в виде линейной комбинации остальных функций этой системы. Тогда появится условие связи между правыми частями равенства (2.11) для разных λ , что противоречит выполнению равенства для произвольных начальных условий. Лемма 2 доказана.

Таким образом, из лемм 1 и 2 следует, что для доказательства невозможности управления за граничную точку системы (2.1)–(2.3) достаточно показать, что $A^*(\lambda_j)$ бесконечна. Из работ [4–6] следует, что в спектре рассматриваемой модели присутствуют бесконечные накопления. Следовательно, упомянутое свойство выполняется. Теорема 2 доказана.

Следует отдельно заметить, что на первый взгляд диссипация механической энергии за счет внутреннего трения в вязкоупругих слоях композита должна способствовать быстрейшему приведению в состояние покоя управляемой системы. Ведь в работе [24], результаты которой дали первый толчок к исследованию управляемости систем с распределенными параметрами, доказана управляемость в состояние покоя для модели струны без диссипации, а кажется, что трение должно только помогать управляемости. Однако это совершенно не так. Как правило, внутреннее трение является препятствием к управляемости. При этом трение о внешнюю среду препятствием к управляемости не является.

В дальнейшем планируется изучение управляемости рассмотренной системы (1.5)–(1.6) за всю область или часть области. В [22] доказана управляемость системы с ядром последействия в виде суммы конечного числа убывающих экспонент при отсутствии трения Кельвина–Фойгхта. Доказательство управляемости основано на представлении решения в виде ряда, аналогичного ряду Фурье для решения уравнения колебаний струны. Если в системе присутствует трение Кельвина–Фойгхта, то такое представление решения в виде аналога ряда Фурье также имеет место. Из результатов диссертации [27] следует представление решения задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда из экспонент. Приведем соответствующее утверждение.

Будем считать, что плотность $\rho \equiv 1$. Тогда спектр задачи (2.1)–(2.3) совпадает со спектром оператор-функции:

$$L_0(\lambda) := \lambda^2 - \beta\lambda \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \hat{g}(\lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Пусть

$$l_n(\lambda) := \lambda^2 + \beta n^2 \lambda + \alpha n^2 - \hat{g}(\lambda) n^2.$$

Полагаем, что ядро релаксации имеет вид

$$g(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t},$$

где выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1.$$

В [16] доказывается, что для каждого натурального n число невещественных корней функции $l_n(\lambda)$ не более двух, причем они являются комплексно-сопряженными. Из этого следует, что спектр рассматриваемой задачи (2.1)–(2.3) имеет не более чем счетное число точек, причем в [27] показано, что невещественные точки спектра локализуются в некоторой области, полностью лежащей в левой полуплоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $v(L_0)$ это число невещественных точек спектра. Тогда решение задачи (2.1)–(2.3) может быть представлено в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{v(L_0)} \frac{(\lambda_n^+ + \beta n^2) \varphi_{0n} + \varphi_{1n}}{l_n'(\lambda_n^+)} e^{\lambda_n^+ t} \sin nx_1 + \sum_{n=1}^{v(L_0)} \frac{(\lambda_n^- + \beta n^2) \varphi_{0n} + \varphi_{1n}}{l_n'(\lambda_n^-)} e^{\lambda_n^- t} \sin nx_1 \\ & + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{nk}}{l_n'(\lambda_{nk})} e^{\lambda_{nk} t} \right) \varphi_{0n} \sin nx_1 \\ & + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{l_n'(\lambda_{nk})} e^{\lambda_{nk} t} \right) n^2 \varphi_{0n} \sin nx_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{l_n'(\lambda_{nk})} e^{\lambda_{nk} t} \right) \varphi_{1n} \sin nx_1, \end{aligned}$$

где $\lambda_n^\pm, \lambda_{nk}$ – соответственно невещественные и вещественные точки спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$:

$$-\gamma_k < \lambda_{nk} < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \gamma_0 := 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С помощью этого представления можно по аналогии со случаем отсутствия трения Кельвина–Фойгхта показать возможность управляемости с помощью распределенного воздействия на всю область.

Следует заметить, что для данного случая в совокупности функций, по которым ведется разложение решения, как правило, лишь конечное число осциллирует, остальные же с экспоненциальной скоростью стремятся к нулю без колебаний. Это следствие наличия в системе трения Кельвина–Фойгхта. Таким образом можно в явном виде представить распространяющуюся в композите волну, только погасить ее граничным воздействием для произвольных начальных условий невозможно. Однако это можно сделать с помощью распределенного по всему объему силового воздействия.

Отдельная область исследования – изучение проблем управляемости с помощью сил, приложенных к движущейся подобласти. В ряде случаев переход от управления через неподвижную подобласть к движущейся подобласти позволяет утверждать, что имеет место управляемость (см. [28] и приведенную там литературу). Эти исследования основаны на анализе ряда тонких спектральных свойств рассматриваемых систем с интегральным последствием.

Заключение. При асимптотическом усреднении двухфазных слоистых сред с диссипацией в зависимости от направления колебаний (перпендикулярно или параллельно слоям) наличие вязкости приводит к системе с интегро-дифференциальными уравнениями и трением Кельвина–Фойгхта. Установлено, что одномерные колебания невозможно привести в состояние покоя за конечное время приложением воздействия на один конец полосы. На основании приведенной выше теоремы о сходимости решений исходной модели к решениям усредненной утверждается, что управление за границу колебаниями по одному направлению в полосе двухфазной слоистой среды также невозможно.

Тем не менее, можно предполагать, что задача минимизации амплитуды колебаний на некотором отрезке разрешима численными методами, хотя, вероятно, это потребует значительных вычислительных ресурсов.

В виде гипотезы приводится утверждение о разрешимости задачи управляемости в случае, когда ограниченная по абсолютной величине управляющая сила приложена ко всей области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // Докл. АН. 2011. Т. 436. № 2. С. 199–202.
2. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 92–103.
3. Шумилова В.В. Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 3. С. 451–454.
4. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журнал индустр. математики. 2012. Т. 15. № 4. С. 124–134.
5. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгхта // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 2. С. 282–290.
6. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре одного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в теории вязкоупругости // Пробл. матем. анализа. 2012. Вып. 63. С. 189–192.
7. Седлецкий А.М. Негармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры 2006. Т. 96. С. 106–211.
8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
9. Nguetseng G. Asimptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 6. P. 1396–1414.
10. Gilbert R.P., Mikeli A. Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed. Pt I // Nonlinear Anal. 2000. Т. 40. P. 185–212.
11. Clopeau Th., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikeli A. Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed. Pt II // Math. and Comput. Modelling. 2001. V. 33. P. 821–841.
12. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 3. С. 645–667.

13. *Meirmanov A.* A Description of Seismic Acoustic Wave Propagation in Porous Media via Homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* 2008. V. 40. № 3. P. 1272–1289.
14. *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // *Изв. РАН. МТТ.* 2009. № 6. С. 75–114.
15. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // *Совр. математика. Фундаментальные направления.* 2011. Т. 39. С. 36–65.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin-Pipkin Type Equations // *SIAM J. Math. Anal.* 2011. V. 43. P. 2296–2306.
17. *Chernousko F.L.* Bounded Control in Distributed-Parameter Systems // *J. Applied Mathematics and Mechanics.* 1992. V. 56. № 5. P. 707–723.
18. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // *J. Mathematical Analysis and Applications.* 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
19. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by String Equation with Memory // *J. Dynamical and Control Systems.* 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
20. *Романов И.В.* Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. № 2. С. 58–61.
21. *Romanov I., Shamaev A.* Some Problems of Distributed and Boundary Control for System with Integral Aftereffect // *J. Mathematical Sciences.* 2018. V. 234. № 4. P. 470–484.
22. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by Wave Equation with Memory // *arXiv.* Doi <https://doi.org/1503.04461>
23. *Shamaev A., Romanov I.* Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two-Dimensional Wave Equation // *J. Optimization Theory and Applications.* 2021. V. 188. № 3. P. 925–938.
24. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
25. *Lions J.L.* Exact Controllability. Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // *SIAM Review.* 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
26. *Шумилова В.В.* Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // *Мат. заметки.* 2013. Т. 94. № 3. С. 441–454.
27. *Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгхта, возникающих в теории вязкоупругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук по специальности 1.1.1 2022. <https://istina.msu.ru/dissertations/507229766/>.
28. *Biccari U., Micu S.* Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // *J. Differential Equations.* 2019. V. 265. № 2. P. 1376–1422.

СИГНАТУРЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ И ИХ СВЯЗЬ С ВЕКТОРАМИ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН¹

© 2023 г. Т. Ю. Гольцова^а, Е. К. Егорова^{б,с}, В. Ю. Леонов^с, А. В. Мокряков^{а,б,*}

^аРГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), Москва, Россия

^бМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^сФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: MokryakovAlVik@gmail.com

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.

После доработки 06.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Матрицы смежности экстремальных 3-однородных гиперграфов занимают существенный объем памяти компьютера. Рассмотрено решение двух задач: предложить эффективный способ представления и хранения таких матриц и найти быстрые алгоритмы, позволяющие оперировать только векторами степеней вершин и сигнатурами (характеристиками матриц смежности), без разворачивания матриц смежности в памяти. В рамках выполнения первой задачи была описана сигнатура второго порядка, задающая однозначно экстремальный 3-однородный гиперграф, без использования его матрицы смежности. Также предложен механизм сжатия сигнатуры второго порядка, что способствует большей эффективности хранения. Для второй задачи был представлен ряд алгоритмов, позволяющих описать взаимоотношения между вектором степеней вершин и сигнатурами как первого, так и второго порядков. Кроме того показано, что произвольная сигнатура второго порядка, построенная с выполнением ряда ограничений, всегда имеет соответствующий ей экстремальный 3-однородный гиперграф.

DOI: 10.31857/S0002338823040042, EDN: OCGQCV

Введение. Графы и гиперграфы широко применяются как в современных фундаментальных исследованиях, так и при решении практических задач. Причем достаточно часто возникает потребность в выделении определенных классов гиперграфов [1], предназначенных для использования в виде моделей или проверки работы ряда алгоритмов. К таким классам, например, относятся гиперсети [2], динамические геометрические гиперграфы [3]. Отдельно стоит сказать о топологии, где одно из основных понятий — комплекс [4], также относится к одному из классов гиперграфов — однородным гиперграфам. Данный класс гиперграфов используется в двух крупных направлениях фундаментальных исследований: раскраска однородного гиперграфа и различные экстремальные задачи, в том числе для случайных гиперграфов. Таких работ достаточно много, так что отметим наиболее современные и актуальные из них [5–9]. Однако есть направления практического применения однородных гиперграфов в различных областях науки и техники [10–17] от комбинаторики и шифрования до математического представления баз данных.

В теориях графов и гиперграфов является важным дать эффективное представление различных крупных структур [18], такие, как деревья [19, 20], матрицы смежности [21, 22], однородные гиперграфы. К поиску подобных способов определения крупных структур подталкивают реальные задачи. Например, практическая задача хранения гиперграфов и работы с ними является достаточно важной для анализа социальных сетей, которые имеют сотни миллионов сложных связей.

При этом хранение гиперграфов в общем случае не особенно эффективно, так как основной способ хранения — матрица инцидентности или список гиперребер. Если объем такого хранения не слишком велик, то работа с ними не удобна. Для k -однородных гиперграфов [21] есть возмож-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-53019 ГФЕН_а).

ность задания матрицы смежности, но ее объем равен n^k байт, где n — количество вершин гиперграфа. Для экстремальных однородных гиперграфов появляется возможность использовать базу [21] в виде объекта хранения, она занимает в памяти меньше места, чем список гиперребер, но не всегда удобна с практической точки зрения.

В [23] описана сигнатура экстремального 2-однородного гиперграфа, которая представляет собой целое неотрицательное число и однозначно характеризует гиперграф. Кроме того, приводится доказательство теоремы о мощности множества соответствующих объектов, а также представлены алгоритмы, связанные с их перечислением. Предоставление данных алгоритмов позволило упростить хранение экстремальных 2-однородных гиперграфов в памяти компьютера, так как механизм преобразования из сигнатуры в матрицу смежности или базу позволяет легко получать из числа матрицу или список ребер, что дает возможность максимально эффективно хранить и обрабатывать экстремальные 2-однородные гиперграфы.

Данная работа продолжает исследование [23]. Здесь рассматривается новая характеристика экстремального 3-однородного гиперграфа — сигнатура второго порядка. Также рассматриваются некоторые ее свойства и взаимоотношение сигнатур первого и второго порядков между собой и по отношению к векторам степеней вершин. В частности, построены алгоритмы быстрого нахождения сигнатуры из вектора и, наоборот, для сигнатур обоих порядков.

1. Экстремальные однородные гиперграфы и сигнатура первого порядка. Для дальнейшего обсуждения приведем определения гиперграфов, их однородности и экстремальности.

О п р е д е л е н и е 1. *Гиперграф* $H(V_n, E)$ — совокупность множества V_n из n вершин и множества непустых подмножеств множества вершин E [1], e_i — элементы множества E , где $i = \overline{1, |E|}$ — гиперребра.

О п р е д е л е н и е 2. Гиперграф $H^k = H^k(V_n, E)$ называют k -однородным гиперграфом (uniform hypergraph (UH)), если $|e_i| = k, \forall e_i \in E$.

Определенные классы UH известны также под другими именами. При $k = 2$ можно говорить о ненаправленных графах без петель. При больших k однородные гиперграфы известны как k — 1 комплексы [24]. Этот термин пришел из топологии [4].

Одной из важных особенностей UH является их представление в виде k -индексной матрицы смежности $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$, где индексы $i_j = \overline{1, n}$ при $j = \overline{1, k}$. Это позволяет эффективнее взаимодействовать с ними. Однако память тратится менее эффективно, чем при использовании матрицы инцидентности.

Особый интерес для исследования представляют экстремальные UH . Сформулируем определение экстремальности через матрицу смежности. Для этого зададим правило разделения доменов нулей и единиц. Нам понадобится ввести несколько определений.

О п р е д е л е н и е 3. *Значимыми ячейками* матрицы смежности однородного гиперграфа назовем те, у которых все индексы попарно не равны.

О п р е д е л е н и е 4. *Доменом нулей* — $D_0(X_n^k)$ (*единиц* — $D_1(X_n^k)$) называется множество значимых ячеек матрицы смежности, равных нулю (единице), при этом не существует значимой единичной (нулевой) ячейки, отличающейся от пары ячеек из D_0 (D_1) только одним индексом и находящейся между ними.

О п р е д е л е н и е 5. Однородный гиперграф H_n^k называется *экстремальным*, если для соответствующей ему матрицы смежности $X_n^k(H_n^k)$ выполняется правило разделения доменов нулей и единиц, состоящее из следующих условий:

- 1) все единичные ячейки образуют домен единиц;
- 2) все значимые нулевые ячейки образуют домен нулей;
- 3) ячейка $x_{1 \dots k} \in D_1(X_n^k)$ или $D_1(X_n^k) = \emptyset$;
- 4) ячейка $x_{n-k+1 \dots n} \in D_0(X_n^k)$ или $D_0(X_n^k) = \emptyset$.

Другими словами правило разделения доменов нулей и единиц можно сформулировать следующим образом: домен единиц сгруппирован около ячейки с минимальными индексами, а домен нулей — около ячейки с максимальными индексами, и между ними находится граница, которая изолирует нули и единицы в своих доменах.

	1	1	1	1	1	1	
1		1	1	1	1	1	0
1	1		1	0	0	0	
1	1	1		0	0	0	
1	1	0	0		0	0	
1	1	0	0	0		0	
1	0	0	0	0	0		

Рис. 1. Матрица смежности EUH_7^2 и граница доменов

	1	1	0	1	1	1	0
1		0	1	1	1	0	0
1	0		1	0	0	0	1
0	1	1		0	1	0	1
1	1	0	0		0	0	1
1	1	0	1	0		0	0
1	0	0	0	0	0		1
0	0	1	1	1	0	1	

Рис. 2. Матрица смежности UH_8^2

Пример 1. Рассмотрим экстремальный 2-однородный гиперграф. Для этого изучим матрицу, представленную на рис. 1. Здесь на главной диагонали находятся незначимые ячейки, а остальные явно разделены на D_1 и D_0 . Также между ними проведена граница, обозначим ее b . Граница определена только на верхней половине матрицы, так как мы рассматриваем исключительно ненаправленные невзвешенные однородные гиперграфы без петель.

Пример 2. Теперь посмотрим на матрицу смежности 2-однородного, но не экстремального гиперграфа. Она представлена на рис. 2. Здесь мы можем легко найти пары ячеек, которые демонстрирует, что правило разделения доменов тут не действует. Например, это $x_{13} = x_{15} = 1$ с нулевой ячейкой между ними, $x_{36} = x_{56} = 0$ с единичной ячейкой между ними. Наличие хотя бы одной подобной пары однозначно свидетельствует о неэкстремальности рассматриваемого UH_8^2 .

Большой интерес представляет вектор степеней вершин однородного гиперграфа, так как он позволяет однозначно восстановить (при наличии соответствующего алгоритма [24–26]) всю матрицу смежности, а соответственно и сам UH , а занимает в памяти меньший объем, чем матрица смежности.

Для 2-однородного гиперграфа вектор степеней вершин A легко получить, просуммировав все ячейки в каждой из строк матрицы смежности. Каждая из этих сумм и будет степенью вершины, а соответственно и координатой вектора степеней вершин.

Ранее в работе [23] было дано определение сигнатуры EUH_n^2 . Сформулируем его в упрощенном виде.

Определение 6. Сигнатурой первого порядка σ^1 (или просто сигнатурой σ) экстремального 2-однородного гиперграфа H_n^2 называется характеристика в виде целого числа, отождествленная с границей разделения доменов нулей и единиц b . Она задается следующим образом: проходим по границе от правой верхней точки до нижней левой точки окончания границы. Граница b состоит из n сегментов, которые расположены либо вертикально, либо горизонтально. Каждому вертикальному сегменту b устанавливается 1, а каждому горизонтальному — 0. Проходя по границе получаем разряды двоичного целого числа от старшего к младшему. Соответственно сигнатура представляется целым (двоичным или десятичным) числом.

	1	2	...	k	...	n
1	0			0		
2		0		0		
...			0	0		
k	0	0	0	0	0	0
...				0	0	
n				0		0

Рис. 3. k -срез матрицы смежности X_n^3

Для дальнейших работ с сигнатурами, в том числе сигнатурами второго порядка, введем понятие длины сигнатуры и обозначим способ обращения к конкретному двоичному разряду сигнатуры.

Определение 7. Обозначим операцию получения *длины сигнатуры* σ как $\text{len}\sigma$, равную длине отождествленной границы и соответственно количеству двоичных разрядов сигнатуры.

Замечание 1. Заметим, что при представлении сигнатуры в десятичном виде есть неоднозначность при определении ее длины, а именно $\text{len}\sigma > \lfloor \log_2 \sigma \rfloor$ (где $\lfloor x \rfloor$ — взятие целой части от x). Таким образом длина сигнатуры в десятичном виде имеет нижнюю грань, но верхняя не определена и может зависеть от задачи.

Определение 8. Запишем значение k -го разряда сигнатуры σ как $\sigma_{(k)} = \sigma \& 2^k$, где операция $\&$ — операция побитового “и”. Стоит отметить, что разряды нумеруются с нуля справа налево.

2. Сигнатуры второго порядка и их свойства. Сигнатура первого порядка задает EUH^2 . Для получения характеристики, позволяющей определить EUH^3 , нужно рассмотреть его кубическую матрицу смежности.

Пусть $X_n^3 = X_n^3(H_n^3)$ — кубическая матрица смежности экстремального 3-однородного гиперграфа H_n^3 , построенного на n вершинах. Представим ее как последовательность срезов (квадратных матриц). Набор срезов получаем перебором одного из индексов с фиксацией его внутри среза. Так как в UH предполагается, что ребро соединяет только различные вершины, то главные диагонали в каждом срезе не рассматриваются (и традиционно обозначаются нулем). Также не рассматриваются строка и столбец с номерами, равными номеру среза, так как иначе совпадают минимум пара координат, что противоречит структуре UH . Таким образом k -срез матрицы X^3 имеет вид, представленный на рис. 3. Здесь серым обозначены ячейки, которые не являются значимыми при построении 3-однородного гиперграфа. Остальные ячейки могут иметь значения 0 или 1.

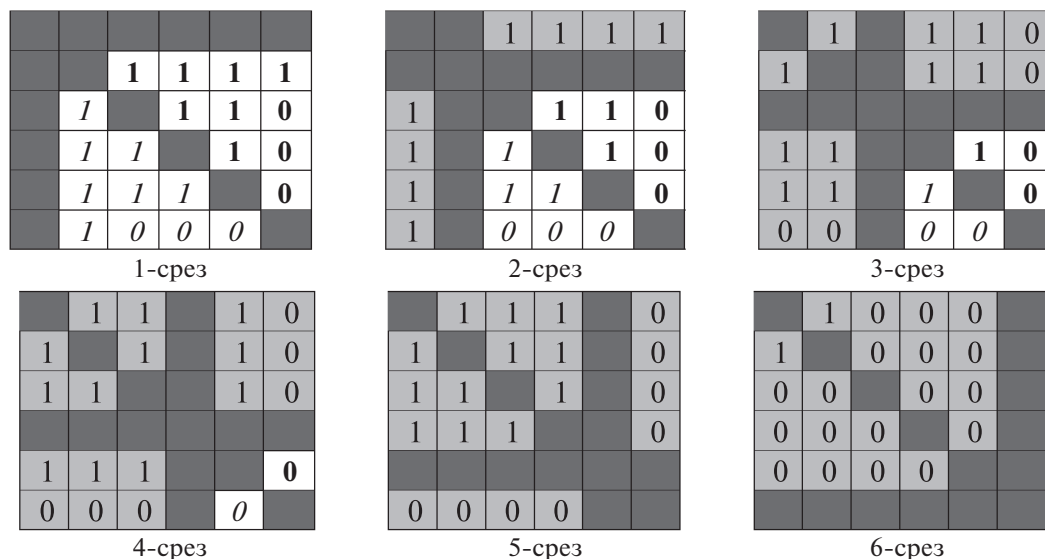
Кроме того, так как исследуются ненаправленные UH , то их матрицы смежности симметричны, а следовательно, симметричны и каждый из срезов относительно главной диагонали. Отсюда также можно сделать вывод, что выбор координаты $(i, j$ или $k)$ для построения срезов не важен.

Из-за симметричности матрицы X_n^3 проистекает следующее свойство.

Свойство. Так как $x_{ijk} = x_{ikj} = x_{jik} = x_{jki} = x_{kij} = x_{kji}$, то значения t -среза задают значения с индексом t в других срезах матрицы. Таким образом можно представить декомпозицию кубической матрицы как набор срезов, где каждый t -срез определяет значения x_{ij} только для $i = t + 1, n - 1$ и $j = i + 1, n$. Остальные значения либо незначимы (при равенстве любой пары индексов), либо заданы на p срезах, где $p = \overline{1, t - 1}$, либо равны симметричным ячейкам в данном срезе.

Проиллюстрируем описанное свойство кубической матрицы смежности на примере.

Пример 3. Пусть дан $H_6^3 = H_6^3(U, E)$, где U — множество из шести вершин, а множество гиперребер $E = \{\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_1, u_2, u_5\}, \{u_1, u_2, u_6\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_1, u_4, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\},$

Рис. 4. Декомпозиция матрицы смежности X_6^3

$\{u_2, u_3, u_5\}, \{u_2, u_4, u_5\}, \{u_3, u_4, u_5\}$. Его матрицу смежности $X_6^3 = X_6^3(H_6^3)$ можно представить в виде срезов (рис. 4), где темно-серым фоном без чисел показаны незначимые области матрицы, светло-серым фоном с числами обозначаются определенные ранее ячейки, курсивом — значения заданные симметрией текущего среза, а полужирным шрифтом — значения, которые определены на текущем срезе.

Определение 9. Областью определения t -среза кубической матрицы смежности однородного гиперграфа будем называть набор значений x_{ijk} , где $i = t$, $j = \overline{t+1, n-1}$ и $k = \overline{j+1, n}$.

Из примера легко заметить, что два последних среза не имеют ячеек, значения которых не зависят от предыдущих срезов. Это общее правило для всех матриц смежности. Отсюда соответственно можно вывести область определения всей матрицы смежности.

Определение 10. Областью определения кубической матрицы смежности однородного гиперграфа будем называть набор значений совокупности областей определения t -срезов, где $t = \overline{1, n-2}$.

Если представить кубическую матрицу смежности в виде куба, состоящего из $n \times n \times n$ единичных кубов, то область определения матрицы представляет собой усеченную ступенчатую призму (рис. 5).

Теперь перейдем к экстремальным 3-однородным гиперграфам (EUH^3). Здесь, как и в EUH^2 , домены нулей и единиц отделены друг от друга. Под этим мы понимаем, что в области определения матрицы смежности $EUH^3 \forall x_{ijk} = 1$ не существует $x_{pqt} = 0$ при $i \geq p$, $j \geq q$, $k \geq t$ и $\forall x_{ijk} = 0$ не существует $x_{pqt} = 1$ при $i \leq p$, $j \leq q$, $k \leq t$. Следовательно, каждый из срезов матрицы смежности можно представить в виде сигнатуры. Однако так как область определения каждого из срезов сужается, то и сигнатуры для каждого из них состоят из меньшего количества бит.

Определение 11. Сигнатурой второго порядка (или вектором сигнатур) экстремального 3-однородного гиперграфа на n вершинах (H_n^3) будем называть $\sigma^2(H_n^3) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2})$, где σ_i — сигнатура области определения i -среза кубической матрицы смежности $X_n^3 = X_n^3(H_n^3)$.

Пример 4. Воспользуемся гиперграфом из примера 3. Его матрица смежности представлена на рис. 4. Нетрудно убедиться, что данный гиперграф является экстремальным, так как его множество гиперребер E имеет две максимальные тройки вершин $\{u_1, u_2, u_6\}$ и $\{u_3, u_4, u_5\}$, которые в свою очередь образуют базу $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\}\}$ [21].

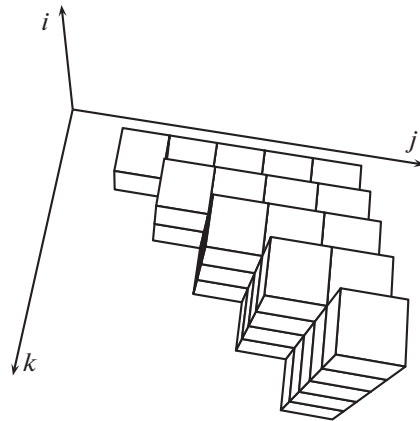


Рис. 5. Визуализация области определения матрицы смежности UH^3

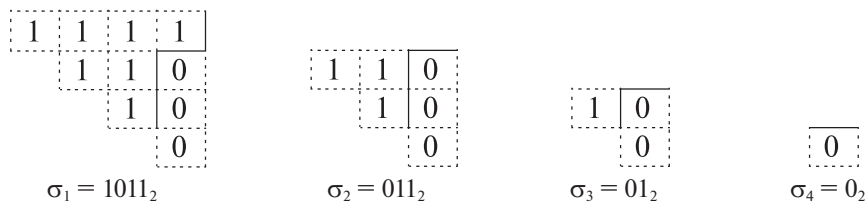


Рис. 6. Сигнатуры срезов $X_6^3(H_6^3)$

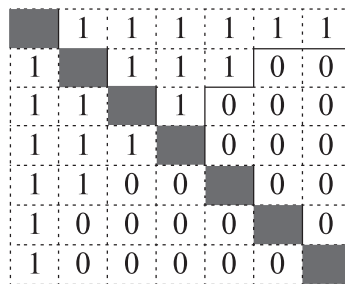


Рис. 7. Матрица смежности $X^2(\sigma)$ и граница доменов

Для наглядности отобразим только области определения срезов и границы их доменов нулей и единиц. Последняя будет отображена сплошной линией. Стоит напомнить, что сигнатура определяется как двоичное число, кодирующее границу между доменами по следующему принципу: если граница идет вниз, то ей соответствует 1, а если влево, то — 0. Границу проходим справа налево и сверху вниз. Разряды в сигнатуре заполняем от старшего к младшему. На рис. 6 представлены области определения, границы и их сигнатуры в двоичном виде. Конечный вид сигнатуры второго порядка для рассматриваемого H_6^3 : $\sigma^2 = (1011_2, 011_2, 01_2, 0_2) = (11, 3, 1, 0)$.

Для такого объекта как сигнатура второго порядка можно оценить объем памяти, необходимый для ее хранения. Так как сигнатура второго порядка представляет собой вектор сигнатур, первая из которых имеет размер, равный $n - 2$ бита, а каждая следующая на 1 бит меньше, то общий объем памяти, занимаемый сигнатурой второго порядка EUH_n^3 , равен $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) = C_{n-1}^2$ — числу сочетаний из $n - 1$ по 2 бита. Так как для хранения единого значения чаще используется целое

число байт, то объем памяти вектора сигнатур можно оценить как $\left\lceil \frac{1}{8} C_{n-2}^2 \right\rceil$ байт (здесь $\lceil x \rceil$ – ближайшее целое большее x).

Найденный объем не является минимально возможным, но для того чтобы его уменьшить, нам потребуется рассмотреть сигнатуру второго порядка подробнее.

3. Связь между координатами вектора сигнатур. Напомним общее правило взаимного расположения доменов единиц и нулей в экстремальном 3-однородном гиперграфе. Оно требует не только разделения доменов внутри среза, но и между срезами. Если вернуться к представлению области определения матрицы в виде ступенчатой усеченной призмы (рис. 5), то можно сказать, что наличие единицы в любой ячейке призмы требует наличия единиц во всех ячейках под ней. Аналогично при наличии нуля на любом слое требуется отсутствие единиц ровно над ним.

Таким образом каждая координата в векторе сигнатур ограничивает следующую за ней координату. Далее опишем логику данного ограничения.

Рассмотрим соседние срезы в кубической матрице смежности. Не теряя общности, можем рассмотреть первый и второй срезы и их сигнатуры. Пусть сигнатура σ_1 отождествляет некоторую междоменную границу b_1 1-среза, а сигнатура σ_2 – границу b_2 2-среза. Сигнатура σ_2 на один разряд меньше, чем σ_1 , а длина границы b_2 на один сегмент короче, чем граница b_1 .

Для дальнейшей работы нам необходимо сравнивать сигнатуры по длине. Для этого введем операцию усечения сигнатуры.

О п р е д е л е н и е 12. *Усеченной сигнатурой* $\hat{\sigma}$ называется сигнатура, полученная из σ путем последовательного выполнения двух операций. Пусть n – количество разрядов в σ , а p – номер старшего разряда сигнатуры, равного единице, тогда

$$\hat{\sigma}_{(k)} = \begin{cases} \sigma_{(k)}, & k = \overline{1, p-1}, \\ 0, & k = \overline{p, n-1}. \end{cases}$$

Отметим, что усеченная сигнатура имеет на один разряд меньше, чем в σ .

Операция усечения необходима, так как она означает сдвиг границы на одну строку области определения вниз.

З а м е ч а н и е 2. Если сигнатура $\sigma = 0$ и имеет больше одного разряда, то $\hat{\sigma} = 0$.

З а м е ч а н и е 3. Если сигнатура σ имеет один разряд, то $\hat{\sigma}$ не существует.

Вернемся к нашим сигнатурам 1-среза и 2-среза. Пусть мы нашли $\hat{\sigma}_1$, тогда ей соответствует граница $\hat{b}_1$. Если представить обе границы наложенными на одну плоскость, согласно их координатам, то для выполнения ограничения по доменам единиц и нулей необходимо, чтобы граница b_2 проходила на всех своих участках не дальше от начала координат, чем $\hat{b}_1$. Аналитически это можно описать следующим образом: количество спусков в границе b_2 не должно превосходить количество спусков границы $\hat{b}_2$ на протяжении всей длины b_2 .

Перейдем к определению данного ограничения в терминах сигнатур. Для этого необходимо найти отношение сравнения для сигнатур.

О п р е д е л е н и е 13. При условии равенства длин сигнатур будем говорить, что $\sigma_1 \leq \sigma_2$, если

$$\sum_{k=1}^i \sigma_{1(n-k)} \leq \sum_{k=1}^i \sigma_{2(n-k)},$$

где $i = \overline{1, n}$. При этом $\sigma_1 = \sigma_2$, только если их значения равны.

Теперь введем отношение включения сигнатур.

О п р е д е л е н и е 14. Пусть даны сигнатуры σ_1 и σ_2 . Будем говорить, что сигнатура σ_2 *включена в* σ_1 ($\sigma_2 \subset \sigma_1$), если $\sigma_2 \leq \hat{\sigma}_1$.

Таблица 1. Сигнатуры и списки сигнатур, имеющих отношения включения

σ	Включаемые σ	σ	Включаемые σ
0	(0)	8, 16	(0)
1	(0)	9, 17	(0, 1)
2	(0)	10, 18	(0, 1, 2)
3	(0, 1)	11, 19	(0, 1, 2, 3)
4	(0)	12, 20	(0, 1, 2, 4)
5	(0, 1)	13, 21	(0, 1, 2, 3, 4, 5)
6	(0, 1, 2)	14, 22	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
7	(0, 1, 2, 3)	15, 23	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
	σ	Включаемые σ	
	24	(0, 1, 2, 4, 8)	
	25	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9)	
	26	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)	
	27	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)	
	28	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12)	
	29	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)	
	30	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	
	31	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)	

Пример 5. Проиллюстрируем отношения включения, которые представлены в табл. 1.

Из отношения включения можно вывести следующую теорему.

Теорема. Пусть дан произвольный набор сигнатур $\hat{\sigma}^2 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Данный набор образует сигнатуру второго порядка экстремального 3-однородного гиперграфа построенного на $n - 2$ вершинах тогда и только тогда, когда $\sigma_{i+1} \subset \sigma_i$, где $i = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Предположим, что существует такая пара сигнатур, что $\sigma_{k+1} \not\subset \sigma_k$, но при этом $\hat{\sigma}^2$ является сигнатурой второго порядка, т.е. существует такой EUH_{n-2}^3 , что его матрица смежности может быть представлена в виде срезов соответствующих набору сигнатур. Из предположения следует: нельзя сказать, что $\sigma_{k+1} \leq \hat{\sigma}_k$. Это возможно в следующих случаях:

1) $\text{len } \sigma_k - \text{len } \sigma_{k+1} \neq 1$ (см. определение 7) — области определения k -среза и $k+1$ -среза также различаются более чем на одну строку, что невозможно по определению среза матрицы смежности;

2) $\sigma_k \neq \sigma_{k+1}$ и $\sigma_k \leq \sigma_{k+1}$ — это приведет к противоречию с экстремальностью однородного гиперграфа, так как найдется такое значение $x_{k+1\ p q} = 1$, что $x_{k\ p q} = 0$, что нарушает правило разделения доменов единиц и нулей;

3) отношение сравнения между σ_k и σ_{k+1} определить нельзя — мы получим две границы, которые пересекают друг друга, т.е. не находятся в упорядоченном состоянии, что, как и в предыдущем случае, приводит к нарушению правила разделения доменов нулей и единиц.

Мы пришли к противоречию, таким образом данное предположение неверно.

Теперь рассмотрим обратный случай: условие включения выполняется среди всех пар соседних сигнатур, но соответствующая данному набору матрица смежности не является матрицей экстремального 3-однородного гиперграфа. Согласно определению 5, условие разделения домена нулей и единиц в матрице смежности — необходимый и достаточный критерий экстремальности соответствующего однородного гиперграфа. По определению отношения включения на каждой паре соседних срезов матрицы выполняется условие разделения доменов нулей и единиц, так как границы, определенные сигнатурами соседних срезов, не пересекаются, а в худшем случае касаются друг друга. Таким образом, если между каждой парой соседних срезов выполня-

ется правило разделения доменов нулей и единиц, то оно действует и на области определения всей матрицы смежности, а значит, она будет матрицей смежности экстремального 3-однородного гиперграфа. Мы и здесь пришли к противоречию, следовательно, теорема доказана.

Однако, несмотря на однозначность соответствия между σ^2 и EUN^3 , вопрос экономии памяти при хранении собственно сигнатуры второго порядка в памяти еще открыт. Одним из решений представляется введение сокращения каждой сигнатуры в наборе до размера своих значащих разрядов.

З а м е ч а н и е 4. усть даны сигнатуры σ_1 и σ_2 . Если $\sigma_2 \subset \sigma_1$, то количество значащих разрядов в σ_2 не может быть больше, чем $p + 1$, где p — номер старшего ненулевого разряда в $\hat{\sigma}_1$.

Действительно, так как $\sigma_2 \leq \hat{\sigma}_1$, то старший ненулевой разряд второй сигнатуры не может иметь номер больший, чем старший ненулевой разряд усеченной сигнатуры предыдущего среза.

Отсюда можно вывести определение сжатой сигнатуры второго порядка.

О п р е д е л е н и е 15. Пусть σ_1 — первая сигнатура из σ^2 и $\text{len} \sigma_1 = n - 2$. Тогда без потери однозначности можно для σ_2 зарезервировать $p + 1$ бит, где p — номер старшего ненулевого разряда $\hat{\sigma}_1$. Обозначим такую *сжатую сигнатуру* как $\bar{\sigma}_2$. Если $\hat{\sigma}_k = 0$ или не существует, но $\hat{\sigma}_{k-1} \neq 0$, то сжатая сигнатура второго порядка $\bar{\sigma}^2 = (\sigma_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_k)$.

Так как объем памяти, зарезервированный для $\bar{\sigma}^2$, зависит от σ^2 , то точная оценка не возможна. Минимальный объем, занимаемый $\bar{\sigma}^2$, равен $n - 2$ бита, если EUN^3 является вполне несвязным. Максимальный объем $\bar{\sigma}^2$ равен объему σ^2 , если EUN^3 — полный или почти полный — без одного ребра, соединяющего три максимальных по номеру вершины. В этом случае σ_i представляют собой двоичные числа вида $\underbrace{1 \dots 1}_{n-1-i}$, где $i = \overline{1, n-3}$.

4. Связь векторов степеней вершин и сигнатур. Сначала объясним алгоритм нахождения вектора степеней вершин по сигнатуре, а после дадим его формальное определение.

П р и м е р 6. Пусть дана сигнатура $\sigma = 37_{10} = 100101_2$. Здесь для наглядности сигнатура представлена в десятичной и двоичной системах счисления. Так как нам не дано количество вершин соответствующего EUN^2 H^2 , то считаем $\text{len} \sigma = 6$, что определяет наличие в H^2 связной компоненты из семи вершин и некоторого количества изолированных вершин. Не теряя смысла, допускаем, что изолированных вершин в H^2 нет, хотя на алгоритм это предположение не оказывает серьезного влияния.

Построим матрицу смежности $X^2 = X^2(\sigma) = X^2(H^2)$. Так как сигнатура есть двоичное описание границы разделения доменов единиц и нулей, то сделать это достаточно просто [23]. Ставим начало границы в правом верхнем углу матрицы. Идем по двоичному представлению сигнатуры справа налево. Если встречаем 1, то ведем границу вниз, иначе — влево. После последнего действия граница коснется одной из ячеек главной диагонали. Слева и сверху от границы находятся единицы, а справа и снизу — нули. Результат можно видеть на рис. 6.

Полученная матрица симметрична, так что сигнатура задает верхнюю треугольную матрицу, а нижняя треугольная симметрично отображается. Центральная диагональ не рассматривается при описании UH^2 , поэтому выделена серым и без значений.

На самом деле для построения вектора степеней вершин нет необходимости строить матрицу смежности. Однако принцип получения вектора степеней в целом работает на тех же принципах. Так как старший разряд сигнатуры равен единице, то спускаемся вниз, что задает строку единиц в матрице смежности или первую координату вектора степеней вершин, так как сумма значений по строке матрицы смежности и дает степень соответствующей вершины. Кроме того, суммируя значения по столбцу в силу симметричности матрицы смежности, также получаем степень соответствующей вершины.

Для простоты подсчета установим две переменные $t = 6$ и $b = 0$, отвечающие за подсчет степени вершины по строке и по столбцу соответственно. При встрече 1 в сигнатуре увеличиваем b , а при встрече 0 — уменьшаем t . Также нам понадобится два номера вершин $s = 1$ и $e = 7$, для которых сохраняем текущие степени вершины. При встрече 1 в сигнатуре устанавливаем $a_s = t$ и увеличиваем s , а при 0 — устанавливаем $a_e = b$ и уменьшаем e .

Таблица 2. Сигнатуры первого порядка и соответствующие им векторы

σ	$\mathbf{A}$	σ	$\mathbf{A}$	σ	$\mathbf{A}$	σ	$\mathbf{A}$
0	(0)	8	(4,1,1,1,1)	16	(5,1,1,1,1,1)	24	(5,5,2,2,2,2)
1	(1,1)	9	(4,2,2,1,1)	17	(5,2,2,1,1,1)	25	(5,5,3,3,2,2)
2	(2,1,1)	10	(4,3,2,2,1)	18	(5,3,2,2,1,1)	26	(5,5,4,3,3,2)
3	(2,2,2)	11	(4,3,3,3,1)	19	(5,3,3,3,1,1)	27	(5,5,4,4,4,2)
4	(3,1,1,1)	12	(4,4,2,2,2)	20	(5,4,2,2,2,1)	28	(5,5,5,3,3,3)
5	(3,2,2,1)	13	(4,4,3,3,2)	21	(5,4,3,3,2,1)	29	(5,5,5,4,4,3)
6	(3,3,2,2)	14	(4,4,4,3,3)	22	(5,4,4,3,3,1)	30	(5,5,5,5,4,4)
7	(3,3,3,3)	15	(4,4,4,4,4)	23	(5,4,4,4,4,1)	31	(5,5,5,5,5,5)

Итак, $\sigma_{(5)} = 1$, следовательно, $a_1 = 6$, $s = 2$, $b = 1$. Далее $\sigma_{(4)} = 0 \Rightarrow a_7 = 1$, $e = 6$, $t = 5$. Следующий разряд также равен 0, т.е. $a_6 = 1$, $e = 5$, $t = 4$. Второй разряд равен 1, что приводит к нахождению второй координаты: $a_2 = 4$, $s = 3$, $b = 2$. Далее $\sigma_{(1)} = 0 \Rightarrow a_5 = 2$, $e = 4$, $t = 3$. И, наконец, самый правый разряд равен 1: $a_3 = 3$, $s = 4$, $b = 3$.

Анализ сигнатуры завершился, но мы не нашли координаты с номером 4. Однако этот номер хранит и e , и s . А значение хранится в переменных b или t , поэтому не важно какое значение мы возьмем. В результате получим вектор $\mathbf{A}(H^2) = (6, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$.

Теперь формально опишем процесс построения вектора степеней вершин по сигнатуре.

А л г о р и т м 1. Построение вектора степеней вершин по сигнатуре экстремального 2-одно-родного гиперграфа H^2 .

Входные данные: σ — сигнатура (целое неотрицательное число), n — количество вершин в H^2 .

Локальные переменные: $s = 1$, $e = n$ — индексы координат вектора $\mathbf{A}$; $b = 0$ и $t = n - 1$ — временные значения; $i = n - 2$ — счетчик, указывающий на текущий разряд сигнатуры.

Выходные данные: $\mathbf{A} = (a_i)$ — n -координатный вектор степеней вершин H^2 .

Шаг 1. Если $\text{len}\sigma \geq n$, то построить вектор степеней вершин по данной сигнатуре невозможно.

Шаг 2. Если $\text{len}\sigma < n - 1$, то устанавливаем $\text{len}\sigma = n - 1$ с требуемым количеством нулевых старших разрядов.

Шаг 3. Если $\sigma_{(i)} = 1$, то переходим к шагу 4, иначе переходим к шагу 5.

Шаг 4. Устанавливаем $a_s = t$, $s = s + 1$, $b = b + 1$. Переходим к шагу 6.

Шаг 5. Устанавливаем $a_e = b$, $e = e - 1$, $t = t - 1$. Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Устанавливаем $i = i - 1$.

Шаг 7. Если $i \geq 0$, то переходим к шагу 3.

Шаг 8. Устанавливаем $a_s = b$.

Шаг 9. Вектор степеней вершин готов.

З а м е ч а н и е 5. Легко видеть что алгоритм 1 имеет логарифмическую сложность относительно размера сигнатуры или линейную — относительно количества координат в искомым векторе.

Проиллюстрируем работу алгоритма 1 таблицей значений сигнатур и соответствующих им векторов степеней (табл. 2).

Опишем также обратный алгоритм получения сигнатуры первого порядка по вектору степеней вершин.

А л г о р и т м 2. Построение сигнатуры первого порядка из вектора степеней вершин n -вершинного EUH_n^2 .

Входные данные: $\mathbf{A} = (a_i)$ — вектор степеней вершин EUH_n^2 , n — количество координат вектора $\mathbf{A}$.

Локальные переменные: $p = n - 1$ – номер индекса сигнатуры; $t = n - 1$ – временное значение; $i = 1$ – индекс координаты вектора $\mathbf{A}$.

Выходные данные: σ – сигнатура (целое неотрицательное число).

Шаг 1. Если $a_i < t$, то переходим к шагу 2, иначе переходим к шагу 3.

Шаг 2. Установим $t = t - 1$. Переходим к шагу 4.

Шаг 3. Установим $\sigma_{(p)} = 1$ и $i = i + 1$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Установим $p = p - 1$.

Шаг 5. Если $p > 0$, то переходим к шагу 1.

Шаг 6. Сигнатура построена.

З а м е ч а н и е 6. Аналогично замечанию 5 сложность алгоритма линейная или логарифмическая в зависимости от отношения к начальным данным.

5. Взаимосвязь вектора степеней вершин с сигнатурой второго порядка. Принцип построения вектора с сигнатурой второго порядка сложнее, чем с сигнатурой первого порядка. Так как каждый срез определяет не только свои значения, но и значения следующих срезов. Следовательно, строить вектор будем, согласно накопительной схеме: строим вектор, соответствующий первой координате вектора сигнатур, его координаты суммируются и делятся пополам для сохранения первой координаты вектора. Остальные координаты сохраняются как промежуточные. На следующем шаге подобным образом находим вторую координату и добавляем ее к уже имеющейся временной. Остальные координаты добавляем к накопленным. Повторяем, пока не переберем все координаты вектора сигнатур. Таким образом вектор степеней вершин будет построен.

Теперь рассмотрим данный алгоритм с точки зрения формального описания.

Алгоритм 3. Построения вектора степеней вершин $\mathbf{A} \in EUH_n^3$ из сигнатуры второго порядка.

Входные данные: $\sigma^2 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ – сигнатура второго порядка (вектор сигнатур), n – количество вершин в H^3 .

Локальные переменные: $\mathbf{V}$ – временный вектор для отдельной координаты сигнатуры второго порядка; j – индекс для переноса координат временного вектора в накопительный; $i = 1$ – счетчик, указывающий на текущую координату вектора сигнатуры.

Выходные данные: $\mathbf{A} = (a_i)$ – n -координатный вектор степеней вершин H^2 .

Шаг 1. Установим $\mathbf{A} = (0, \dots, 0)$.

Шаг 2. Если $\sigma_i = 0$, то переходим к шагу 11.

Шаг 3. С помощью алгоритма 1 получаем вектор $\mathbf{V}(\sigma_i)$.

Шаг 4. Установим $a_i = a_i + \frac{1}{2} \sum_j b_j$.

Шаг 5. Установим $j = 1$.

Шаг 6. Установим $a_{j+i} = a_{j+i} + b_j$.

Шаг 7. Увеличим $j = j + 1$.

Шаг 8. Если $j + i \leq n$, то переходим на шаг 6.

Шаг 9. Увеличим $i = i + 1$.

Шаг 10. Если $i < n - 1$, то переходим на шаг 2.

Шаг 11. Вектор степеней вершин $\mathbf{A}$ получен.

Также проиллюстрируем разработанный алгоритм табл. 3. Здесь в первом столбце приведены все сигнатуры второго порядка в векторном виде, а во втором – соответствующие векторы степеней вершин EUH_6^3 .

Теперь представим обратный алгоритм преобразования из вектора степеней вершин в сигнатуру второго порядка. Данный алгоритм базируется на свойстве разделения доменов нулей и единиц. Основная идея состоит в том, что первая координата должна быть задействована со второй координатой и с остальными. После этого проводится усечение в векторе первой и второй координаты на $n - 2$, а других – на 1, при этом $\sigma_{1(n-2)} = 1$. Если от первой координаты вектора что-то осталось, то повторяем операцию, только выбираем третью координату к первой в пару. Если

Таблица 3. Сигнатуры второго порядка и соответствующие им векторы

σ^2	A	σ^2	A
(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	(13, 2, 0, 0)	(8, 6, 6, 4, 4, 2)
(1, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 0, 0, 0)	(13, 3, 0, 0)	(8, 7, 6, 5, 5, 2)
(2, 0, 0, 0)	(2, 2, 1, 1, 0, 0)	(13, 3, 1, 0)	(8, 7, 7, 6, 6, 2)
(3, 0, 0, 0)	(3, 2, 2, 2, 0, 0)	(13, 4, 0, 0)	(8, 7, 7, 4, 4, 3)
(3, 1, 0, 0)	(3, 3, 3, 3, 0, 0)	(13, 5, 0, 0)	(8, 8, 7, 5, 5, 3)
(4, 0, 0, 0)	(3, 3, 1, 1, 1, 0)	(13, 5, 1, 0)	(8, 8, 8, 6, 6, 3)
(5, 0, 0, 0)	(4, 3, 2, 2, 1, 0)	(14, 0, 0, 0)	(9, 4, 4, 4, 3, 3)
(5, 1, 0, 0)	(4, 4, 3, 3, 1, 0)	(14, 1, 0, 0)	(9, 5, 5, 5, 3, 3)
(6, 0, 0, 0)	(5, 3, 3, 2, 2, 0)	(14, 2, 0, 0)	(9, 6, 6, 5, 4, 3)
(6, 1, 0, 0)	(5, 4, 4, 3, 2, 0)	(14, 3, 0, 0)	(9, 7, 6, 6, 5, 3)
(6, 2, 0, 0)	(5, 5, 5, 3, 3, 0)	(14, 3, 1, 0)	(9, 7, 7, 7, 6, 3)
(7, 0, 0, 0)	(6, 3, 3, 3, 3, 0)	(14, 4, 0, 0)	(9, 7, 7, 5, 4, 4)
(7, 1, 0, 0)	(6, 4, 4, 4, 3, 0)	(14, 5, 0, 0)	(9, 8, 7, 6, 5, 4)
(7, 2, 0, 0)	(6, 5, 5, 4, 4, 0)	(14, 5, 1, 0)	(9, 8, 8, 7, 6, 4)
(7, 3, 0, 0)	(6, 6, 5, 5, 5, 0)	(14, 6, 0, 0)	(9, 9, 7, 7, 5, 5)
(7, 3, 1, 0)	(6, 6, 6, 6, 6, 0)	(14, 6, 1, 0)	(9, 9, 8, 8, 6, 5)
(8, 0, 0, 0)	(4, 4, 1, 1, 1, 1)	(14, 6, 2, 0)	(9, 9, 9, 9, 6, 6)
(9, 0, 0, 0)	(5, 4, 2, 2, 1, 1)	(15, 0, 0, 0)	(10, 4, 4, 4, 4, 4)
(9, 1, 0, 0)	(5, 5, 3, 3, 1, 1)	(15, 1, 0, 0)	(10, 5, 5, 5, 4, 4)
(10, 0, 0, 0)	(6, 4, 3, 2, 2, 1)	(15, 2, 0, 0)	(10, 6, 6, 5, 5, 4)
(10, 1, 0, 0)	(6, 5, 4, 3, 2, 1)	(15, 3, 0, 0)	(10, 7, 6, 6, 6, 4)
(10, 2, 0, 0)	(6, 6, 5, 3, 3, 1)	(15, 3, 1, 0)	(10, 7, 7, 7, 7, 4)
(11, 0, 0, 0)	(7, 4, 3, 3, 3, 1)	(15, 4, 0, 0)	(10, 7, 7, 5, 5, 5)
(11, 1, 0, 0)	(7, 5, 4, 4, 3, 1)	(15, 5, 0, 0)	(10, 8, 7, 6, 6, 5)
(11, 2, 0, 0)	(7, 6, 5, 4, 4, 1)	(15, 5, 1, 0)	(10, 8, 8, 7, 7, 5)
(11, 3, 0, 0)	(7, 7, 5, 5, 5, 1)	(15, 6, 0, 0)	(10, 9, 7, 7, 6, 6)
(11, 3, 1, 0)	(7, 7, 6, 6, 6, 1)	(15, 6, 1, 0)	(10, 9, 8, 8, 7, 6)
(12, 0, 0, 0)	(7, 4, 4, 2, 2, 2)	(15, 6, 2, 0)	(10, 9, 9, 9, 7, 7)
(12, 1, 0, 0)	(7, 5, 5, 3, 2, 2)	(15, 7, 0, 0)	(10, 10, 7, 7, 7, 7)
(12, 2, 0, 0)	(7, 6, 6, 3, 3, 2)	(15, 7, 1, 0)	(10, 10, 8, 8, 8, 7)
(12, 4, 0, 0)	(7, 7, 7, 3, 3, 3)	(15, 7, 2, 0)	(10, 10, 9, 9, 8, 8)
(13, 0, 0, 0)	(8, 4, 4, 3, 3, 2)	(15, 7, 3, 0)	(10, 10, 10, 9, 9, 9)
(13, 1, 0, 0)	(8, 5, 5, 4, 3, 2)	(15, 7, 3, 1)	(10, 10, 10, 10, 10, 10)

получится связать первую, третью и последнюю координаты снова, то следующий разряд первой координаты вектора сигнатуры также устанавливается в единицу, иначе устанавливаем разряд в ноль и пытаемся связать первую, третью и предпоследнюю координаты и т.д., пока a_1 не станет равной нулю. В этом случае остальные разряды σ_1 будут нулями, и найдем полностью определенную первую компоненту сигнатуры второго порядка.

Получив в процессе усеченный вектор A_1 без первой координаты, передаем его для нахождения σ_2 тем же образом, что и σ_1 . Если на k -м этапе вектор $A_k = (0, \dots, 0)$, то $\sigma_p = 0$, $\forall p = k + 1, n - 2$.

Перейдем к формальному описанию алгоритма.

А л г о р и т м 4. Построение сигнатуры второго порядка из вектора степеней вершин $\mathbf{A} \in UH_n^3$.

Входные данные: $A_0 = (a_i)$ – вектор степеней вершин UH_n^3 ; n – размерность вектора $\mathbf{A}$.

Локальные переменные: p – номер старшего разряда сигнатуры; $t = n - 2$ – временное значение; $i = 0$ – индекс координаты вектора $\mathbf{A}$; j – вспомогательный счетчик.

Выходные данные: $\sigma^2 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2})$ – сигнатура (целое неотрицательное число).

Шаг 1. Увеличим $i = i + 1$.

Шаг 2. Присвоим $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1}$.

Шаг 3. Если $\mathbf{A}_i = (0, \dots, 0)$, то переходим к шагу 11.

Шаг 4. Присвоим $p = n - 2 - i$.

Шаг 5. Установим $j = i + 1$ и $t = n - j$.

Шаг 6. Если $a_i \geq t$ и $a_j \geq t$ и $a_{j+t} > 0$, то переходим к шагу 7, иначе переходим к шагу 10.

Шаг 7. Уменьшим $\mathbf{A}_i$: $a_i = a_i - t$, $a_j = a_j - t$, $a_k = a_k - 1$ для $k = \overline{j+1, j+t}$.

Шаг 8. Установим $\sigma_{i(p)} = 1$. Уменьшим $p = p - 1$.

Шаг 9. Если $a_i = 0$, то переходим к шагу 1, иначе перейдем к шагу 5.

Шаг 10. Уменьшим $t = t - 1$ и $p = p - 1$. Перейдем к шагу 6.

Шаг 11. Сигнатура второго порядка σ^2 получена.

Два последних рассмотренных алгоритма позволяют быстро преобразовать вектор степеней вершин в сигнатуру второго порядка и обратно, что, предположительно, найдет применение в задачах хранения и обработки больших данных.

Заключение. Полученные представления экстремального 3-однородного гиперграфа позволяют эффективнее хранить данные объекты в памяти. Отдельно стоит отметить сжатую сигнатуру второго порядка, исследование которой в дальнейшем позволит оценить средний объем потребляемой памяти в зависимости от количества вершин.

Также крайне полезной представляется возможность перечисления векторов степеней своих вершин экстремальных 2-однородных гиперграфов, так как позволит рассмотреть механизмы образования таких векторов. Кроме того, быстрый алгоритм преобразования между сигнатурой и вектором степеней вершин завершает цикл алгоритмов преобразования между всеми характеристиками UH_n^2 : сигнатурой, базой, матрицей смежности и вектором степеней вершин.

В дальнейшем на множествах сигнатур первого и второго порядков соответственно предполагается разработать алгебраическую структуру с набором замкнутых относительно данных множеств операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
2. Попков В.К. О моделировании городских транспортных систем гиперсетями // АиТ. 2011. № 6. С. 179–189.
3. Миков А.И., Миков А.А. Свойства геометрических гиперграфов беспроводных компьютерных сетей // Информатизация и связь. 2020. № 4. С. 60–66.
<https://doi.org/10.34219/2078-8320-2020-11-4-60-66>
4. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.: Гостехтеориздат, 1947. 660 с.
5. Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М. О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечением // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53. № 4. С. 16–42.
6. Балобанов А.Е., Шабанов Д.А. О числе независимых множеств в простых гиперграфах // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 1. С. 38–48.
<https://doi.org/10.4213/mzm11508>
7. Денисов И.О., Шабанов Д.А. О концентрации значений чисел независимости случайных гиперграфов // Дискретная математика. 2021. Т. 33. № 4. С. 32–46.
<https://doi.org/10.4213/dm1676>

8. Захаров П.А., Шабанов Д.А. О максимальном разрезе в случайном гиперграфе // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 501. № 1. С. 26–30. <https://doi.org/10.31857/S2686954321060187>
9. Райгородский А.М., Черкашин Д.Д. Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // УМН. 2020. Т. 75. № 1 (451). С. 95–154. <https://doi.org/10.4213/rm9905>
10. Бондаренко В.А., Николаев А.В. Об одном классе гиперграфов и о вершинах релаксаций разрезного многогранника // ДАН. 2012. Т. 442. № 3. С. 300–302.
11. Егорова Е.К., Мокряков А.В., Суворова А.А., Цурков В.И. Алгоритм передачи многомерных данных с использованием экстремальных однородных гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 73–78.
12. Каменев А.Р., Ирбитский И.С., Пашковская Е.А. Методы подбора ключа для алгоритмов шифрования на графах // Сб. тез. работ ММНК XLVIII Гагаринские чтения – 2022. М.: Перо, 2022. С. 252.
13. Лежинский М.В. Концепция топологически-ориентированных хэш-функций // Сб. тез. работ ММНК XLVIII Гагаринские чтения – 2022. М.: Перо, 2022. С. 252.
14. Mironov A.A. Minimax under Transportation Constraints. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 309 p.
15. Миронов А.А. Равномерные обобщенные графы // ДАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 465–468.
16. Мокрозуб В.Г., Немтинов В.А., Мордвин А.С., Илясов А.А. Применение n -ориентированных гиперграфов и реляционных баз данных для структурного и параметрического синтеза технических систем // Прикл. информатика. 2010. № 4 (28). С. 115–122.
17. Суворова А.А., Берецкий И.С. Алгоритм потокового шифрования на экстремальных k -однородных гиперграфах // Сб. тез. работ ММНК Гагаринские чтения – 2020. М.: МАИ, 2020. С. 510–511.
18. Корельяно Л.Н., Разборов А.А. Семантические пределы плотных комбинаторных объектов // УМН. 2020. Т. 75. № 4(454). С. 45–152. <https://doi.org/10.4213/rm9956>
19. Prüfer H. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. V. 27. P. 742–744.
20. Кузьмин О.В., Чернигова А.Г. Автоматизация комбинаторного кодирования и декодирования корневых деревьев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 1 (45). С. 84–88.
21. Мокряков А.В. Представление гиперграфов в качестве алгебраической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 53–59.
22. Погребной В.К., Погребной А.В. Исследование полиномиальности метода вычисления интегрального описателя структуры графа // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2013. Т. 323. № 5. С. 146–151.
23. Гольцова Т.Ю., Егорова Е.К., Мокряков А.В., Цурков В.И. Сигнатуры экстремальных 2-однородных гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. Т. 6. № 6. С. 52–60.
24. Мокряков А.В., Цурков В.И. Восстановление 2-комплексов по целочисленному неотрицательному вектору // АиТ. 2011. № 12. С. 130–143.
25. Миронов А.А. Геометрия точек пространства R^n , реализуемых в граф // УМН. 1977. Т. XXXII. № 6 (198). С. 232–233.
26. Костяной Д.С., Мокряков А.В., Цурков В.И. Алгоритмы восстановления гиперграфов по заданному вектору степеней вершин // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 43–48.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ В ПРОБЛЕМЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ДОЛГА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

© 2023 г. В. В. Качанов^{a,b,*}, С. И. Марков^{a,**}, В. И. Цурков^{c,***}

^aИСП РАН, Москва, Россия

^bМФТИ, Долгопрудный, МО, Россия

^cФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: vkachanov@ispras.ru

**e-mail: markov@ispras.ru

***e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 27.02.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

При модернизации программного обеспечения возникает проблема технического долга, когда часть исходного кода напрямую не участвует в обновлении, а исправляется во вторую очередь как устаревшее. Представлены три соответствующие модели. Для поиска и исправления дефектов используется машинное обучение. Устанавливается эффективность подхода для конкретных данных и намечается перспектива расширения на большее количество различных случаев.

DOI: 10.31857/S0002338823040078, EDN: OCRJMR

Введение. Одна из основных задач разработчика программного обеспечения (ПО) заключается в развитии продукта. Процесс постоянного внесения новой функциональности не может продолжаться вечно, так как из-за нарастающей сложности программного продукта и сжатых сроков качество написанного исходного кода (текста программы) ухудшается. Иногда настолько, что дальнейшее расширение функциональности становится невозможным. В литературе принято такое явление называть “техническим долгом” [1]. Можно провести параллель с обычным. Технический долг — это деньги, которые вы берете на разработку новой функциональности (расширение своего производства), а процесс рефакторинга (приведение вашего исходного кода ПО в должный вид, который не приносит для пользователей ничего нового, но занимает какое-то время) — выплаты по этому долгу. Соответственно чем чаще вы гонитесь за быстрым развитием функциональности, не погашая долг, тем больше проценты по нему придется платить, а значит, более долгий и значительный рефакторинг придется совершать. Стоит также заметить, что технический долг не всегда оказывается чем-то безусловно плохим, иногда приоритет быстрого решения проблемы над надежным необходим для продвижения проекта. Одни из ярких представителей симптомов технического долга называются “запахи кода” [1, 2] (англ. code smells) — антипаттерны программирования. Такие участки текста программы затрудняют понимание, отладку, тестирование, расширение программы в целом. Они не являются технически некорректными и не препятствуют функционированию программы [3]. Вместо этого они указывают на уязвимые места в архитектуре, которые могут замедлить разработку или увеличить риск ошибок и сбоев в будущем. В данный термин включены архитектурные неточности, недостатки дизайна ПО и проблемы реализации. Одна из особенностей запахов кода — отсутствие строгого определения и четких характеристик, по которым можно было бы сказать, считается ли исходный код плохим. Однако можно выделить список из 5–6 основных наиболее изученных типов антипаттернов [1, 2].

Запахи кода могут охватывать различные уровни абстракции разработки ПО. Так Божественный Класс (англ. God Class) — это некоторый объект в исходном коде программы, который управляет слишком многими другими объектами в системе, превратившись в класс, который делает все. Например, класс Customer, который содержит в себе имя и фамилию человека, его адрес проживания, страну, город и почтовый код. Кроме простого хранения информации, необходи-

мы ещё методы взаимодействия с данными полями и, возможно, некоторые служебные функции. С одной стороны, в этом нет ничего критического, однако намного удобнее иметь отдельный класс Address, который хранит внутри себя всю информацию об адресе и методы работы с ней, а в Customer держать только ссылку на объект класса Address. Более масштабный и неопределенный пример антипаттерна программирования — это Стрельба дробью (англ. Shotgun Surgery), который описывает ситуацию, когда при изменении незначительного поведения вашей программы в одном месте приходится делать дополнительные изменения в большом количестве других классов. Этот запах кода не ограничивается сущностью одного класса, для его обнаружения необходимо следить за историей изменения проекта и искать ситуации подобного множественного исправления текста программы. Кажется, что одними из наиболее простых для обнаружения и исправления запахами кода являются Длинный Метод (англ. Long Method) и Сложный Метод (англ. Complex Method). Названия данных антипаттернов программирования говорят сами за себя, это слишком разросшиеся в “длину” или “ширину” функции. Сложность их обнаружения заключается в том, что иногда такая реализация необходима и иным способом ее не сделать. Например методы, содержащие большое количество switch/case конструкций либо большое количество схожих операций преобразования чисел/строк, которые проблематично вынести в подфункции. Также понятие “длинности” или “сложности” зависит от конкретного проекта, языка программирования, команды разработчиков. Исследования в рамках данной области ставят перед собой цель наиболее точно и без пропусков определять наличие запахов кода.

Инструменты поиска элементов технического долга являются актуальным предметом исследования уже более 20 лет [4]. В последнее время для улучшения качества определения таких дефектов используются методы машинного обучения [5–7]. В основе подобных методов стоит задача обучения с учителем на наборе размеченных данных. В области создания таких наборов данных есть два направления: ручная [8–10] и автоматическая [7, 11] разметки. Наиболее актуальный представитель первой группы работ [8] содержит набор данных, где собрано большое количество ручных разметок примеров. Большинство из них оказались размечены как отрицательные примеры (без какого-либо дефекта). Представители второй группы используют готовый инструмент поиска дефектов исходного кода для обнаружения запахов кода на большом наборе, анализируя текущие версии проектов, а не историю изменений.

Основная проблема такого метода сбора примеров заключается в том, что исследователи/дефекторы/оракулы, которые размечают положительные случаи, не являются разработчиками данного ПО, соответственно совершенно не знакомы с его строением и идеями архитектора ПО. Длинные и Сложные Методы вне зависимости от замыслов разработчиков — плохая практика. Другое дело Завистливые Методы (англ. Feature Envy) и Божественные Классы: такие случаи технического долга сложно определить без детального анализа структуры проекта. Есть инструменты, которые принимают на вход полноценный проект, анализируют связи между классами/методами/переменными и меняют структуру, решая задачу оптимизации зависимостей между сущностями [12], предлагая свой вид проекта. У такого подхода основным недостатком является сложность проведения генерального рефакторинга, так как в автоматическом режиме проводить столь масштабные изменения рискованно.

Еще один подход к созданию набора данных с исправлениями исходного кода представлен в ManySStuBs4J Dataset [13]. В этой публикации авторы собирают исправления реальных разработчиков, которые те посчитали необходимым сделать. Однако исправления, которые ищут, являются однострочными: замена переменной, сделанной константой, имени метода. Такой подход мы хотим применить к поиску примеров запахов кода. А именно, будем искать в истории изменения проектов с открытым исходным кодом те исправления, в которых разработчики исправляли имеющиеся дефекты своего проекта.

Основным результатом данной работы являются:

- предложенный новый подход к созданию набора данных в области запахов кода, который легко масштабируется;
- открытый набор примеров исправлений, содержащий около 6 тыс. пар (ДО и ПОСЛЕ), со ссылкой на коммиты в которых они проводились.

1. Существующие подходы. Авторы статьи [14] одними из первых опубликовали открытые наборы данных с примерами запахов кода, представили 243 примера дефектов пяти типов. Однако на данный момент (февраль 2023 г.) результаты недоступны. В работах [9, 15] говорится о 17 350 и 40 888 примерах 13 различных типов проявлений технического долга. Однако сами наборы данных закрыты, и получить к ним доступ не удалось. Открытый набор данных приведен в [10], здесь рассмотрен набор из 1986 примеров для четырех типов запахов кода. Недостатком можно

считать то, что примеры взяты из набора проектов Qualitas Corpus [16], последняя дата обновления которого была в 2012 г., что означает меньшую актуальность кодовой базы. Более новой публикацией подобного плана является [8], в которой авторы попросили 20 специалистов, имеющих различный опыт в разработке ПО, оценить некоторое количество примеров исходного кода на наличие в них симптомов технического долга. Итоговый набор данных содержит 14 739 пометок для 4770 фрагментов кода. Безусловным плюсом данной работы можно отметить открытый доступ к самой разметке и опросам, на которые отвечали специалисты. К недостаткам стоит отнести довольно небольшое количество примеров, которые специалисты разметили как фрагменты, содержащие тот или иной дефект (1504 пометки “critical” или “major” для 795 различных примеров на четырех типах дефектов).

Описанные выше наборы данных объединяет ручная разметка примеров некоторым количеством проверяющих, что само по себе очень хорошо влияет на качество набора данных. Недостаток такого подхода следующий: этот процесс занимает значительное количество ресурсов опытных разработчиков, соответственно не может быть масштабируемым на большие наборы данных в десятки тысяч примеров.

Другой подход используется в [7, 11]. Для получения наборов данных в этих работах применяются существующие инструменты поиска проявлений технического долга на большом количестве проектов с открытым исходным кодом. В [11] проводился анализ 33 проектов при помощи инструмента SonarQube¹, в [7] было проанализировано 1,072 C# и 100 Java проектов инструментами Designite² и DesigniteJava³ соответственно. Эти публикации содержат большое количество размеченных фрагментов кода, однако они получены некоторым инструментом, а не разработчиками. Разметку, составленную при помощи DesigniteJava, будем использовать в дальнейшем, так как сам инструмент имеет открытый исходный код и мы имеем доступ непосредственно к алгоритму детекторов запахов кода. Основными ограничениями предложенных выше наборов данных являются две крайности. Во-первых, их трудозатратность для создания и масштабирования при высокой точности разметки. Во-вторых, вызывающее сомнение качество данных при практически неограниченном количестве примеров.

2. Построение набора данных. Рассмотрим схему получения набора данных, который доступен публично на Zenodo⁴.

2.1. Выбор проектов с историей изменений. Для дальнейшего анализа было загружено топ-100 проектов с Github по количеству положительных отметок, основным языком которых является Java. Полный список и версии проектов можно найти в отдельном файле *projects.csv* вместе с набором данных. Большинство исследуемых проектов находятся в стадии активной разработки, 30% проанализированных изменений исходного кода приходятся на последние три года.

2.2. Инструмент сбора примеров. Инструмент анализирует каждый проект по очереди, проходя всю историю его изменений. На каждом шаге при помощи созданных детекторов запахов кода происходит анализ изменившихся в коммите файлов. Если анализ показал, что в коммите есть случаи исправления определенного дефекта, то каждый такой пример попадает в итоговый список своего детектора.

Определение исправлений кода. Будем считать парой ДО и ПОСЛЕ фрагменты кода перед исправлением, вносимым разработчиком, и после него соответственно. Детекторы ищут дефекты в версии файлов ДО и в версии файлов ПОСЛЕ. Затем отчеты этих двух запусков сравниваются. Если в файле пропал дефект в каком-то методе или классе, то этот случай фиксируется и происходит дополнительная проверка двух фрагментов.

Детекторы запахов кода. В текущем эксперименте использовались три детектора: Божественный Класс (God Class), Сложный Метод (Complex Method), Длинный Метод (Long Method).

Для обучения базовых моделей применялись наборы данных MLCQ [8] и DLS [7], численные характеристики которых указаны в табл. 1.

В силу ограниченности количества примеров для Длинных Методов и Божественных Классов был использован подход, основанный на подсчете метрик по коду и модель машинного обучения Случайный Лес (Random Forest) для бинарной классификации фрагментов кода. Для

¹ <https://www.sonarsource.com/>.

² <https://www.designite-tools.com/>.

³ <https://github.com/tushartushar/DesigniteJava/>.

⁴ <https://doi.org/10.5281/zenodo.7612725/>.

Таблица 1. Описание обучающей выборки базовых моделей

Тип дефекта	Набор данных	Положительных	Отрицательных
Сложный Метод	DLS	22000	22000
Длинный Метод	MLCQ	140	2119
Божественный Класс	MLCQ	246	1719

Таблица 2. Аннотация полученных примеров

Тип дефекта	Всего	Положительных	Отрицательных	Положительных, %
Сложный Метод	164	106	58	0.65
Длинный Метод	132	97	35	0.73
Божественный Класс	32	24	8	0.75

Длинных Методов применялись LOC, NCLOC, MCC, TokenCount; для Божественных Классов — LCOM5, NAD, NMD [2]. Для работы со Сложными Методами была реализована сверточная нейронная сеть (CNN-2D), описанная в [7].

Постфильтры. В ходе валидации результатов сбора примеров стало ясно, что некоторые из исправлений, которые мы находили, не были нацелены на исправление дефектов, связанных с запахами кода. В “положительные” примеры исправления Длинных Методов попадали ситуации, в которых разработчик вносил незначительные стилистические исправления в свой код. В противоположной ситуации весь Длинный Метод переносился, оставляя в старом только вызов нового метода.

Для фильтрации таких примеров были написаны проверки на основе количественных метрик вносимых изменений. Итоговые фильтры получились следующими (срабатывание хотя бы одного из условий исключает данное исправление).

Длинный Метод:

- тело метода ПОСЛЕ меньше пяти строк;
- разница длин методов ДО и ПОСЛЕ меньше 12;
- относительное уменьшение длины метода меньше 0.2;
- нет достаточно длинного сплошного участка удаления кода из фрагмента ДО с заменой на небольшой участок в ПОСЛЕ.

Сложный Метод:

- тело метода ПОСЛЕ меньше пяти строк;
- относительное уменьшение сложности (по McCabe’s Cyclomatic Complexity⁵) фрагмента меньше 0.25.

Божественный Класс:

- разница между количеством удаленных и добавленных методов меньше трех.

Все пороговые значения были получены экспериментально исходя из тестовой выборки объемом ~5%. Полученные детекторы и дополнительные фильтрации были использованы в анализе истории изменений 100 проектов.

2.3. Валидация полученных примеров. Для более удобного просмотра и валидации примеры отправлялись в LabelStudio⁶ — инструмент для совместной аннотации примеров. Вручную было размечено 132 примера Длинных Методов, 164 примера Сложных Методов и 32 примера Божественных Классов. Аннотацию полученных примеров (табл. 2) проводили два опытных разработчика. Коэффициент согласия составил 92%.

Не очень высокий уровень положительных разметок, однако, не означает, что остальные пары не имеют дефекта в коде ДО, разметка проводилась с целью оценки пар с исправлениями дефектов. В остальных ~25–35% пар изменения не были явно направлены на рефакторинг или исправления искомого дефекта.

⁵ <https://radon.readthedocs.io/en/latest/intro.html#cyclomatic-complexity/>.

⁶ <https://github.com/heartexlabs/label-studio/>.

Таблица 3. Общие характеристики полученных данных

Характеристика	Значение
Общее число примеров	5912
Сложных Методов	2967
Длинных Методов	2517
Божественных Классов	428
Проанализировано проектов	100
Проанализировано коммитов	788485

3. Характеристики данных. Ниже представлены численные характеристики собранных данных и описание предоставляемого архива.

3.1. **За па х и ко да.** Основные численные характеристики приведены в табл. 3. При анализе 100 проектов было получено около 6000 пар фрагментов исходного кода (с дефектом и без него).

3.2. **Ст р у к т у р а д а н н ы х.** Основная директория архива dataset содержит три поддиректории по каждому типу запахов кода: ComplexMethod, GodClass, LongMethod, в каждой из которых хранится список директорий с примерами before.java и after.java. Также на верхнем уровне находятся файлы с описанием примеров: ComplexMethod.csv, GodClass.csv, LongMethod.csv. Каждая запись о примере содержит следующую информацию:

- **project** – имя проекта, из которого взят пример,
- **path** – относительный путь к файлу в директории репозитория,
- **entity** – идентификатор интересующей нас сущности в формате ИмяКласса:ИмяМетода(типы аргументов),
- **url** – гиперссылка на коммит,
- **before file** – путь к файлу, содержащему метод/класс до изменения, относительно директории dataset,
- **after file** – путь к файлу, содержащему метод/класс после изменения, относительно директории dataset.

Также в корневой директории dataset содержится файл projects.csv, описывающий использованные для анализа проекты.

4. Апробация данных. Полученный набор данных можно использовать для обучения новых моделей машинного обучения для создания более точных детекторов технического долга. Из этих пар примеры до исправлений брались как код с дефектом, а примеры после исправлений – как код без дефекта. Количество примеров Длинных Методов стало значительно больше, чем в наборе данных MLCQ, соответственно, появилась возможность обучить более сложную модель, а именно LSTM, описанную в [7]. В данном эксперименте сравниваем модели, обученные на новых данных с предыдущими результатами. В качестве валидационных данных применялись размеченные вручную примеры из проектов: ant⁷, drill⁸, error-prone⁹, giraph¹⁰, hive¹¹, truth¹². При разметке этого валидационного набора данных использовались три пометки: истинные срабатывания (TP), ложные срабатывания (FP) и истинные срабатывания, не требующие исправления (WF). Применение пометки “не требующие исправления” вызвано тем, что в данном случае “дефект” мог вноситься осознанно и специально, либо исправление такого участка кода потребует значительных затрат ресурсов. Оценивались точность (PR), полнота (RE) и F1-мера (F1).

Как видно из табл. 4, результаты моделей по всем типам дефектов улучшились. Для Длинных Методов за счет перехода на более сложную модель удалось получить значительное улучшение точности при незначительной потере полноты. Таким образом показано, что данный набор данных можно использовать для обучения новых более точных детекторов дефектов исходного кода.

⁷ <https://github.com/apache/ant.git, f61ac1296>.

⁸ <https://github.com/apache/drill.git, 85d270f3>.

⁹ <https://github.com/google/error-prone.git, 54fa3f38>.

¹⁰ <https://github.com/apache/giraph.git, 2c63aa23>.

¹¹ <https://github.com/apache/hive.git, de0a7ecb>.

¹² <https://github.com/google/truth.git, eaddc49f>.

Таблица 4. Результаты валидации обученных моделей

Модель	F1	PR	RE	WF	TP	FP
Длинный Метод						
Базовая	0.277	0.163	0.928	116	39	84
Новая	0.493	0.346	0.857	47	36	21
Сложный Метод						
Базовая	0.518	0.35	1.0	36	70	94
Новая	0.757	0.626	0.957	23	67	17
Божественный Класс						
Базовая	0.092	0.05	0.625	68	5	27
Новая	0.141	0.079	0.625	37	5	21

5. Текущие ограничения подхода. Очевидно, что мы нашли не все участки исправлений данных типов запахов кода на рассматриваемых проектах. С другой стороны, применение моделей, основанных на методах машинного обучения, и ручные эвристики могут вносить и ложноположительные срабатывания, однако такие примеры, скорее, не являются исправлениями дефекта. Метод/класс так или иначе стал меньше и проще для понимания, однако, возможно, не настолько, насколько это можно было сделать, если бы рефакторинг проводился целенаправленно.

Еще встречается рефакторинг вынесения значительного участка кода из метода/класса, который нельзя считать хорошим, если он был выделен целиком и стал новым примером запаха кода. Также в работе не были рассмотрены ситуации с переименованием файлов в коммитах, учитывались только изменения в рамках одного файла. Данный набор был собран исключительно на проектах с Java. Применять такой подход возможно и для других языков программирования, однако это требует наличия относительно неплохих базовых детекторов.

Заключение. Представлен набор данных существующих исправлений проявлений технического долга исходного кода, запахов кода. Отличительной чертой данного набора является предложенный способ сбора подобных примеров в автоматическом режиме, используя опыт непосредственных разработчиков ПО. Новые детекторы, обученные на собранном наборе данных, превосходят по точности классификации первоначальные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fowler M. Refactoring: Improving the Design of Existing Code. Boston, MA, USA: Addison-Wesley, 1999.
2. Качанов В.В., Ермаков М.К., Панкратенко Г.А., Спиридонов А.В., Волков А.С., Марков С.И. Технический долг в жизненном цикле разработки ПО: запахи кода // Тр. Института системного программирования РАН. 2021. Т. 33. № 6. С. 95–110.
3. Tufano M., Palomba F., Bavota G. et al. When and Why Your Code Starts to Smell Bad // IEEE/ACM 37th IEEE Intern. Conf. on Software Engineering. Florence, Italy, 2015. P. 403–414.
4. Kokol P., Kokol M., Zagoranski S. Code Smells: A Synthetic Narrative Review // Available at: <https://arxiv.org/abs/2103.01088> (дата обращения 2023-01-25).
5. Fontana F. A., Zanoni M. Code Smell Severity Classification Using Machine Learning Techniques // Knowledge-Based Systems. 2017. V. 128. С. 43–58.
6. Barbez A., Khomh F., Guéhéneuc Y. G. A Machine-learning Based Ensemble Method For Anti-patterns Detection // J. Systems and Software. 2020. V. 161. P. 110486.
7. Sharma T., Efstathiou V., Louridas P. et al. On the Feasibility of Transfer-learning Code Smells Using Deep Learning // Available at: <https://arxiv.org/abs/1904.03031> (дата обращения 2023-01-25).
8. Madeyski L., Lewowski T. MLCQ: Industry-relevant Code Smell Data Set // Proc. Evaluation and Assessment in Software Engineering. 2020. P. 342–347.
9. Palomba F., Bavota G., Di Pentaet M. et al. A Large-scale Empirical Study on the Lifecycle of Code Smell Co-occurrences // Information and Software Technology. 2018. V. 99. P. 1–10.

10. *Arcelli Fontana F., Mantyla M., Zanoniet M. et al.* Comparing and Experimenting Machine Learning Techniques for Code Smell Detection // *Empirical Software Engineering*. 2016. V. 21 C. 1143–1191.
11. *Lenarduzzi V., Saarimäki N., Taibi D.* The Technical Debt Dataset // *Proc. 15th Intern. Conf. on Predictive Models and Data Analytics in Software Engineering*. Recife, Brazil, 2019. P. 2–11.
12. *Wang Y., Yu H., Zhu Zh. et al.* Automatic Software Refactoring Via Weighted Clustering in Method-level Networks // *IEEE Transactions on Software Engineering*. 2017. V. 44. № 3. P. 202–236.
13. *Karampatsis R. M., Sutton C.* How Often do Single-statement Bugs Occur? The ManySSuBs4J Dataset // *Proc. 17th Intern. Conf. on Mining Software Repositories*. Online, 2020. P. 573–577.
14. *Palomba F., Di Nucci D., Tufano M. et al.* Landfill: An Open Dataset of Code Smells With Public Evaluation // *IEEE/ACM 12th Working Conf. on Mining Software Repositories*. IEEE. Florence, Italy, 2015. P. 482–485.
15. *Palomba F., Bavota G., Di Pentaet M. et al.* On The Diffuseness and The Impact on Maintainability of Code Smells: a Large Scale Empirical Investigation // *Proc. 40th Intern. Conf. on Software Engineering*. Gothenburg, Sweden, 2018. P. 482–482.
16. *Qualitas Corpus*. Available at: <http://qualitascorpus.com/docs/history/20120401.html>, (дата обращения 2023-01-25).

УДК 623.74

ОПЕРАТИВНОЕ ЦЕЛЕПОЛАГАНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ ГРУППАХ АКТИВНЫХ ОБЪЕКТОВ. I. ВЫДЕЛЕННАЯ ГРУППА

© 2023 г. С. К. Галиханов*, Б. Е. Федун^{б, **}, Н. Д. Юневич^{б, *}

^аМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^бФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: galikbwat@gmail.com

**e-mail: boris_fed@gosnias.ru

Поступила в редакцию 30.06.2022 г.

После доработки 18.11.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Статья посвящена проблематике оперативного целеполагания в иерархических группах активных (антропоцентрических) объектов, под которыми авторы понимают, прежде всего, группы летательных аппаратов, объединенные начальными и ситуационно возникающими миссиями. Перед началом функционирования группа объектов получает задание на миссию. При выполнении группой заданной миссии в целенаправленно или пассивно противодействующей среде возникает коллизия “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению миссии”. Это заставляет группу решать задачу оперативного целеполагания. Создана методология решения таких задач, которая предусматривает: проведение системного анализа предметной области для выявления состава и взаимодействия необходимых для решения этих задач бортовых интеллектуальных систем тактического уровня; наличие ранее разработанных предметно независимых обличий баз знаний выявленных интеллектуальных систем; насыщение баз знаний этих систем конкретикой (выполняемой миссии, возникшей угрозы и конкретикой имеющихся в наличии на объектах средств противодействия ей). Полученное решение задачи оперативного целеполагания на беспилотных объектах сразу отправляется на реализацию, а на объектах, имеющих экипаж, решение реализуется только при его согласии. Приводится иллюстративный пример решения практически значимой задачи оперативного целеполагания в авиационной проблематике.

DOI: 10.31857/S0002338823030046, EDN: EUKMBU

Введение. Иерархически упорядоченная группа обитаемых активных объектов (антропоцентрических объектов [1]) состоит из объектов, каждый из которых имеет бортовые измерительные системы, кабину экипажа с информационно-управляющим полем (ИУП), бортовые цифровые вычислительные машины (БЦВМ), бортовые исполнительные системы, системы связи между объектами группы. Предполагается, что бортовые системы объектов и их экипажа полностью дееспособны.

Группа получает перед началом функционирования миссию, которая будет исполняться в агрессивной внешней среде. При возникновении на этапе миссии коллизии “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению миссии” у группы встает задача оперативного целеполагания, т.е. каким способом выполнять заданную миссию при появлении непосредственной угрозы ее выполнению. Эту задачу можно решить, отвлекая от выполнения миссии: а) всю группу, б) часть группы (выделенная группа), в) или решать ее в рамках выполняемого этапа миссии, нагружая отдельных членов группы дополнительными обязанностями. В альтернативах а) и б) соответственно группа или выделенная группа должны выполнять новую миссию “Противодействовать возникшей угрозе” и после этого они обязаны вернуться к выполнению прерванной миссии. В случае альтернативы в) в выполняемом этапе миссии в задании на ее выполнение предусматривается проблемная субситуация, в рамках которой группа противодействует угрозе, не прерывая выполнение текущего этапа миссии. Обоснованный выбор альтернативы противодействия угрозе выполняют бортовые интеллектуальные системы тактического уровня (БИС-ТУ), реализованные в БЦВМ. Альтернатива в) рассмотрена ниже; альтернатива б) обсуждается в этой статье, а альтернативе а) будет посвящена следующая публикация.

В разд. 1 описана предметная область: иерархия группы; условия, в которых у группы возникают задачи оперативного целеполагания; выявлен состав и взаимодействие тех БИС-ТУ, которые необходимы для решения возникающих у группы задач оперативного целеполагания.

В разд. 2 представлен предметно независимый облик баз знаний БИС-ТУ из упомянутого в разд. 1 их состава. В разд. 3 для конкретной предметной области показано, как предметно независимый облик баз знаний упомянутых БИС-ТУ (разд. 2) используется при конструировании баз знаний бортовых оперативно советующих экспертных систем, решающих задачи оперативного целеполагания в иерархической группе активных объектов, которая действует в этой конкретной предметной области.

1. Описание предметной области: системный анализ. Рассматривается иерархическая группа активных объектов, каждый из которых имеет экипаж. Руководителю группы РГ-I подчиняются несколько руководителей подгрупп РГ-II, подгруппы которых составляют группу РГ-I.

Перед началом функционирования группе выдается задание на миссию (обозначим ее как миссия-1), включающее в себя конструктивное описание:

генеральной цели миссии,

последовательности этапов достижения генеральной цели миссии,

перечень ожидаемых при выполнении миссии коллизий “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению этапа/миссии” (далее в ряде случаев используем сокращенную запись: коллизия “Этап миссии – Угроза”).

Для каждого этапа миссии оговорена его цель, способ ее достижения, выделены те проблемные субситуации, появление которых связано с возникновением на этом этапе таких возможных коллизий, которым можно противостоять, не прерывая выполнение этапа миссии.

Появившаяся в процессе выполнения миссии коллизия требует от руководителя группы РГ-I решение задачи оперативного целеполагания: как противодействовать непосредственной угрозе [1]. Для решения этой задачи РГ-I должен оперативно выбрать одно из трех возможных альтернатив противодействия угрозе:

противодействовать всей группой активных объектов, прекратив выполнение группой текущего этапа миссии-1 и назначив для группы новую миссию-2 “Противодействие угрозе”,

противодействовать подгруппой группы (далее выделенная группа), определив ее состав, ее руководителя РГ-II и назначив для нее миссию-3 “Противодействие угрозе”, которую выделенная группа будет выполнять автономно (при этом остальная часть группы активных объектов будет продолжать выполнять текущий этап миссии-1),

организовать противодействие угрозе в рамках предусмотренной (в задании на миссию-1) для выполняемого этапа миссии проблемной субситуации противодействия этому типу угроз, продолжая выполнение всей группой текущего этапа миссии-1.

При завершении группой выполнения миссии-2, а выделенной группой – миссии-3 группы должны вернуться к выполнению миссии-1. Следует отметить, что миссия-1 разрабатывается до начала процесса функционирования группы активных объектов, а миссия-2 и миссия-3 должны оперативно конструироваться на борту РГ-I.

На рис. 1 показаны варианты решения задачи оперативного целеполагания руководителем группы активных объектов, выполняющих автономно некоторую заданную группе миссию.

Остановимся на выполнении миссии-2 группой, которой, напомним, руководит РГ-I. В процессе выполнения этой миссии могут возникать коллизии (а значит, и соответствующие им задачи оперативного целеполагания), которым РГ-I будет противодействовать одной из описанных выше альтернатив (рис. 1).

При завершении миссии-2 у РГ-I возникает особая коллизия “Закончена миссия-2 – Что делать дальше?”. В рассматриваемом случае ответ на этот вопрос очевидный – вернуться к выполнению прерванной миссии-1, если осталась дееспособной хотя бы часть группы. Решение возникшей при этом задачи оперативного целеполагания следующее: выбор альтернативы/прецедента возврата группы к выполнению миссии-1 принимает РГ-I (рис. 2).

Несколько сложнее ситуация у РГ-II выделенной группы. При выполнении выделенной группой миссии-3 она полностью самостоятельна. В процессе выполнения миссии-3 у РГ-II могут возникать коллизии (а значит, и соответствующие им задачи оперативного целеполагания), которым РГ-II будет противостоять способом, описанным выше для РГ-I. Но при завершении миссии-3 у РГ-II также возникает особая коллизия “Закончена миссия-3 – Что делать дальше?”, которая отличается следующим.



Рис. 1. Рекомендации БОСЭС-целеполагание в группе, автономно выполняющей заданную миссию-1

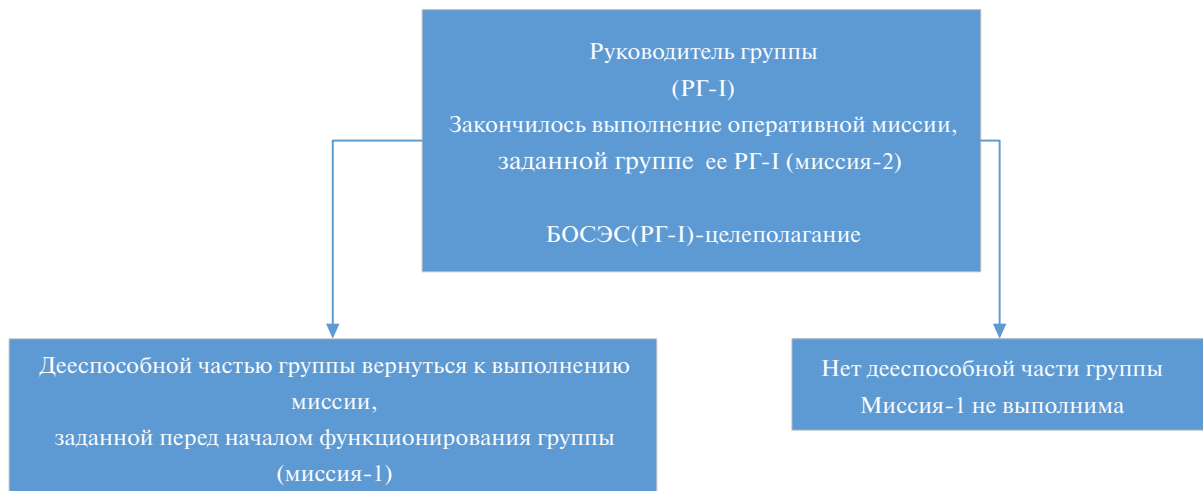


Рис. 2. Задача целеполагания при завершении/окончании группой оперативно назначенной миссии-2. Случай: миссия-2 назначена самим руководителем группы

Выделенная группа РГ-II после выполнения миссии-3 должна вернуться (своей дееспособной частью) в группу, которой руководит РГ-I и которая выполняет миссию-1 (рис. 3). Не зная текущую ситуацию у РГ-I, руководитель РГ-II должен согласовать с РГ-I приемлемый им способ возвращения выделенной группы РГ-II в группу РГ-I. Решение задачи оперативного целеполагания у РГ-II производится совместно с РГ-I. При этом РГ-II генерирует возможные варианты возврата своей группы, а РГ-I выбирает среди них приемлемый для него вариант и пересылает его РГ-II для реализации. Назовем такое решение РГ-II возникшей у него задачи целеполагания “вмененным целеполаганием”.

Перечислим те БИС-ТУ, которые оказывают интеллектуальную поддержку руководителям групп активных объектов в решении ими описанных выше задач.

Руководитель любой автономно действующей группы, выполняющей заданную ей миссию (миссия-1 или миссия-2 для группы РГ-I, миссия-3 для группы РГ-II), всегда получает интеллектуальную поддержку от БИС-ТУ, которые настраиваются на ранг руководителя группы и наблюдаемую текущую внешнюю обстановку [1, 2]. Так при появлении коллизии “Этап миссии – Угроза” руководитель группы (рис. 1) оповещается о ней бортовой интеллектуальной



Рис. 3. Задача целеполагания при завершении окончания/группой оперативно назначенной миссии-3. Случай: миссия-3 назначена вышестоящим руководителем

информационной системой “Ситуационная осведомленность экипажа” (ИИС-СОЭ). Возникшую коллизию разрешает бортовая оперативно советующая экспертная система “Оперативное целеполагание” (БОСЭС-целеполагание), которая рекомендует руководителю группы один из трех упомянутых выше вариантов противодействия возникшей угрозе: а) противодействовать угрозе всей группой, оперативно сконструировав для группы новую миссию-2 (цель миссии-2, этапы достижения этой цели); б) противодействовать угрозе частью группы, определив для этого ее состав, руководителя этой части группы и оперативно сконструировав для этой группы новую миссию-3 (цель миссии-3, этапы достижения этой цели), в) противодействовать угрозе, не прерывая выполнение группой текущего этапа заданной миссии. Для этого в базе знаний бортовой оперативно советующей экспертной системы этого этапа полета (БОСЭС-“Этап миссии”) предусматривается проблемная субситуация “Противодействие угрозе этого типа”. После выполнения оперативно заданной миссии (миссия-2 для группы РГ-I, миссия-3 для группы РГ-II) руководители этих групп должны вернуть дееспособные части этих групп к выполнению исходной миссии-1. Рекомендацию на возврат группы вырабатывает БОСЭС-целеполагание, а сам возврат группы имеет следующие особенности.

Для группы, которая получила оперативную миссию-2 от своего руководителя (рис. 2, группа РГ-I), рекомендуемый способ возврата вырабатывает БОСЭС(РГ-I)-целеполагание.

Для выделенной группы (группа РГ-II), которая получила оперативную миссию-3 от своего вышестоящего руководителя (от РГ-I, рис. 3), рекомендуемый способ возврата вырабатывают совместно РГ-II и РГ-I:

РГ-II вырабатывает несколько возможных способов возврата своей группы в группу РГ-I. Рекомендации по возможным миссиям РГ-II получают от БОСЭС(РГ-II)-целеполагание, а детализацию каждой миссии через последовательность этапов этой миссии рекомендует ему соответствующие БОСЭС(РГ-II)-“Этап миссии”;

РГ-I выбирает из полученных от РГ-II способов возврата его группы один способ, который должен реализовать РГ-II (вмененное для РГ-II целеполагание). Выбор РГ-I производит с учетом коллизий, которые вновь появились на выполняемом группой РГ-I этапе миссии-1. Рекомендации РГ-I вырабатывают БОСЭС(РГ-I)-“Выполняемый этап миссии-1” и БОСЭС(РГ-I)-“Этапов миссий, назначаемых для противодействия вновь появившимся угрозам”.

Заметим, что для случая выполнения заданной миссии (миссии-1) одним активным объектом решение задачи оперативного целеполагания описано в [3, 4].

2. Предметно независимый облик баз знаний БИС-ТУ, решающих задачи оперативного целеполагания. Интеллектуальную поддержку руководителю группы в решении задачи оперативного целеполагания оказывают упомянутые выше три типа БИС-ТУ, каждая из которых настраивается на ранг руководителя [1]:

интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа” (ИИС-СОЭ), опознающая возникшую коллизию “Этап миссии – Угроза” и рекомендуемая ее руководителю группы для противодействия;

БОСЭС–целеполагание, рекомендуемая руководителю текущую цель функционирования группы и последовательность этапов ее достижения – облик способа противодействия возникшей коллизии, поступившей из ИИС-СОЭ;

БОСЭС-этапа полета, которая конкретизирует полученный от БОСЭС-целеполагание облик способа противодействия возникшей коллизии, рекомендуя его руководителю группы для реализации.

Рекомендацию каждой БИС-ТУ руководитель группы может: 1) сразу отправить на реализацию бортовыми исполнительными системами активного объекта или 2) отправить, предварительно откорректировав ее, или 3) отказаться от рекомендации вовсе и решать задачу самостоятельно. Два последних случая для соответствующей интеллектуальной системы определяются как семантический отказ в ее базе знаний [2].

В базах знаний БИС-ТУ все процедуры решения задачи ориентированы на специфику предметной области и постоянно используют априорную информацию о выполняемой миссии и текущую информацию о сложившейся вокруг группы внешней обстановке. В разд. 3 статьи на примере конкретной предметной области показана эта ориентация, здесь же представим предметно независимый облик (термин введен В.И. Городецким) баз знаний названных типов БИС-ТУ.

2.1. Интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа”. Система выявляет на каждом текущем этапе выполнения миссии среди обнаруженных группой потенциальных угроз выполнению миссии непосредственную угрозу, представляемую в форме коллизии “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению миссии” [5].

База знаний ИИС-СОЭ содержит два типа математических моделей (мат/модели).

Первый тип. Мат/модели развития каждой возможной потенциальной угрозы, характерной для заданной группе миссии и для каждого этапа выполнения этой миссии. Эти мат/модели определяют возможность отнести каждую наблюдаемую потенциальную угрозу к типу непосредственной угрозы – сформировать коллизию “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению миссии”.

Второй тип. Мат/модели каждой пары “Непосредственная угроза из коллизии – Способ ей противодействовать”. В этих мат/моделях для каждой такой пары определяется момент времени, начиная с которого предотвратить угрозу этим способом уже невозможно. Эти моменты времени определяются как точки невозврата [6]. Непосредственная угроза с ближайшей точкой невозврата сообщается экипажу и передается в базу знаний БОСЭС-целеполагание.

2.2. БОСЭС-целеполагание. Определение облика способа противодействия опознанной в ИИС-СОЭ непосредственной угрозе – задача БОСЭС-целеполагание. Один из способов решения в базе знаний БОСЭС-целеполагание задач – решение по прецеденту [1].

В общем случае база знаний БОСЭС-целеполагание ориентирована на использование в ней следующей информации:

по иерархии группы активных объектов,

по выполняемой миссии и выполняемому этапу миссии,

по возникшей коллизии “Этап миссии – Угроза”,

по функциональным возможностям активных объектов как входящих в группу активных объектов, так и не входящих в нее, но взаимодействующих с ней или ей противодействующих;

по информации из мат/моделей активных объектов как цифровых копий реальных объектов, оперативно настраиваемых на наблюдаемые объекты. При этом полнота представления возможностей каждого не входящего в группу активного объекта зависит от функциональных возможностей систем наблюдения, размещенных на объекте, который наблюдает этот не входящий в группу активный объект;

по информации из мат/моделей взаимодействия активных объектов.



Рис. 4. БОСЭС-целеполагание: облик базы знаний и размещение БОСЭС в бортовой информационной среде активного объекта

В базу знаний БОСЭС-целеполагания (рис. 4) включены: процедурная матрицы знаний, разработанная на основе экспериментальной матрицы знаний, и процедура расчета количественных значений координат ситуационного вектора SV (Задача – Прецеденты), соответствующих текущей внешней обстановке. По ним определяется количественное значение приоритета прецедентов, включенных в процедурную матрицу знаний. Способ решения задачи: прецедент с наибольшим приоритетом рекомендуется для использования.

Упомянутые матрицы знаний и способ решения задач по прецедентам подробно описаны в [7].

2.3. БОСЭС – “Этап миссии”. Облик базы знаний таких систем описан в [8]. Этап миссии представляется набором проблемных субситуаций (ПрС/С), в которых заранее подготовленному этапу миссии может мешать угроза возникшей коллизии “Этап миссии – Угроза”.

База знаний этих БОСЭС – “Этап миссии” имеет два иерархических уровня (рис. 5). На первом иерархическом уровне продукционными правилами активизируется ПрС/С, адекватная текущей внешней обстановке.

На втором иерархическом уровне базы знаний конструируется способ решения активизированной ПрС/С. Способы решения задач в ПрС/С: по прецеденту [1], по многокритериальному выбору альтернативы [9], оптимизационный [1].

Входная информация в БОСЭС-“Этап миссии”:

априорная: из системы подготовки миссии,

текущая из: 1) штатных БЦВМ-алгоритмов, 2) бортовых измерительных систем, 3) ИУП кабины экипажа.

Выходная информация из БОСЭС-“Этап миссии”:

на ИУП кабины: рекомендации экипажу,

в бортовую систему объективного контроля: полное или частичное принятие экипажем рекомендации БОСЭС-“Этап миссии” или игнорирование рекомендации. При этом два последних случая помечаются как семантические отказы базы знаний БОСЭС и регистрируются в системе объективного контроля, размещаемой на борту активного объекта [2].

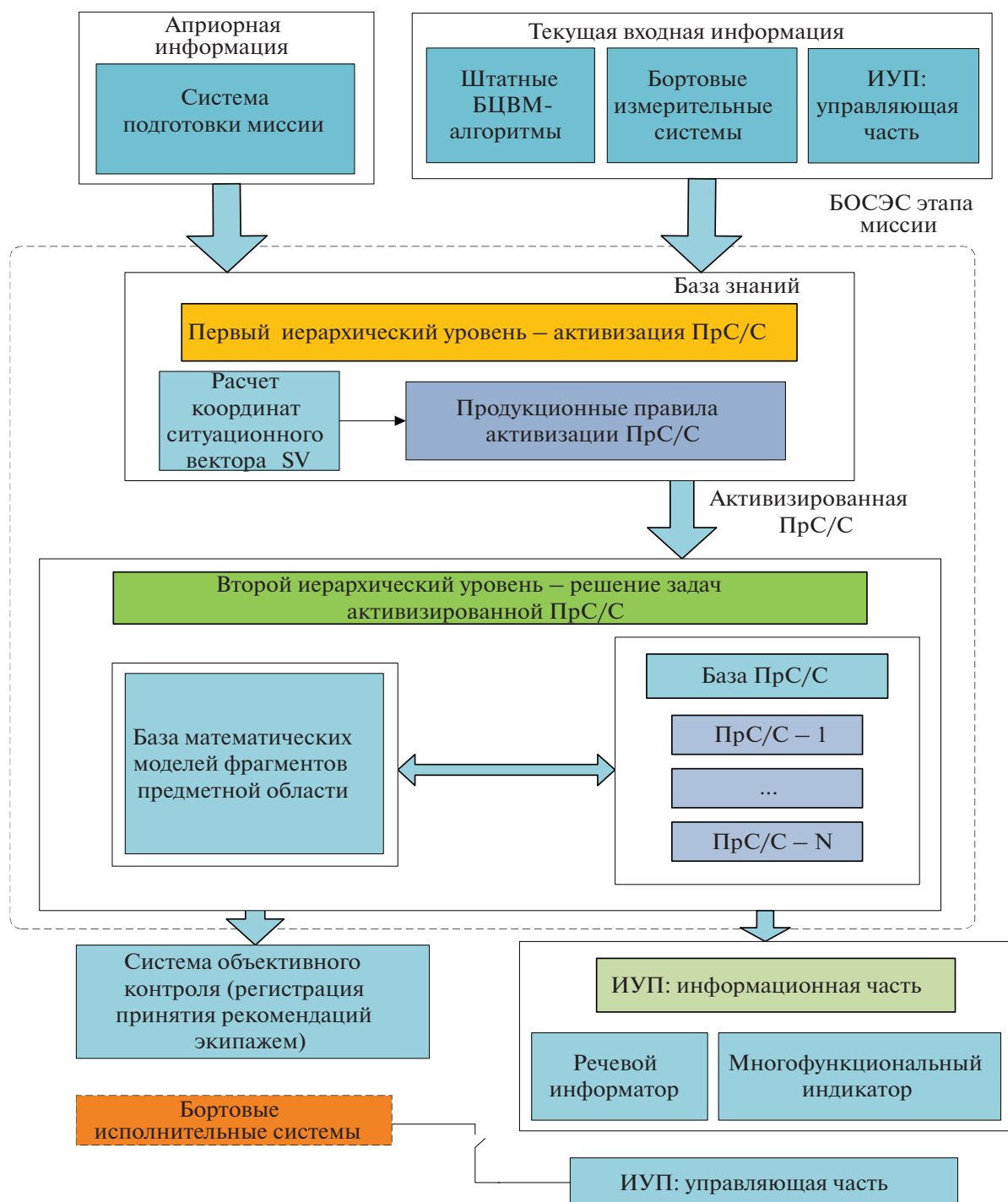


Рис. 5. Облик базы знаний БОСЭС-“Этап миссии” и ее связи с бортовой информационной средой активного объекта

3. Практически значимый пример. Интеллектуальная поддержка командиров иерархически упорядоченной группы истребителей при решении ими задачи “Возврат выделенной группы истребителей сопровождения в строй сопровождения УС”. Иерархически упорядоченная группа истребителей выполняет генеральную задачу вылета “Сопровождение ударных самолетов”. Группу истребителей (истребителей сопровождения (ИС)) возглавляет командир первого ранга К(ИС)-I, которому подчинены несколько подгрупп ИС. Каждую из этих подгрупп возглавляет командир второго ранга К(ИС)-II.

При выполнении группой истребителей генеральной задачи вылета командир группы К(ИС)-I на этапе полета “Маршрут-1” может столкнуться со следующими коллизиями (Клз) [10]:

Клз-1: появилось атакоопасное направление, с которого истребители противника могут атаковать сопровождаемые ударные самолеты (УС);

Клз-2: появились (с этого или другого направления) изготовившиеся к атаке истребители противника (ИП).

Остановимся на коллизии Клз-2. При ее появлении интеллектуальную поддержку командиру К(ИС)-I оказывают две БОСЭС-ТУ: БОСЭС(К(ИС)-I) – “Маршрут-1” [10] и БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание [1].

Пусть БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание рекомендовала командиру К(ИС)-I разрешить эту коллизия, не меняя этапа полета группы Маршрут-1. В ПрС/С “Отражение атаки ИП” базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)–“Маршрут-1” выделена подгруппа истребителей сопровождения, назначен ее командир К(ИС)-II и поставлена ему задача “Отразить атаку истребителей противника”. Для группы К(ИС)-II это новая (текущая/оперативная) задача вылета.

Выделенная группа отразила атаку ИП. Командир выделенной группы К(ИС)-II собрал боеспособную часть группы (число боеспособных истребителей N), определил функциональные возможности боеспособной части выделенной группы (возможные точки ее выхода на траекторию полета УС), подготовил информацию (N , точки выхода) и передал ее командиру К(ИС)-I. Интеллектуальную поддержку командиру К(ИС)-II в решении этих задач оказывает БОСЭС(К(ИС)-II)-целеполагание и БОСЭС(К(ИС)-II)–“Возврат выделенной группы в строй сопровождения УС” (далее БОСЭС(К(ИС)-II)–“Возврат группы”).

Вернемся к командиру К(ИС)-I. Получив от командира выделенной группы К(ИС)-II сигнал о возможности ее возврата к выполнению задачи “Сопровождения ударных самолетов” вместе с информацией о нескольких способах возврата выделенной группы в строй сопровождения УС, командир К(ИС)-I соотносит их с появившимися ближайшими коллизиями Клз-1, Клз-2, (Клз-1 + Клз-2) или с фактом отсутствия коллизий. В результате этого анализа командир К(ИС)-I должен выбрать один из полученных способов возврата выделенной группы и передать его для реализации командиру выделенной группы К(ИС)-II.

Интеллектуальную поддержку командиру К(ИС)-I при решении этих задач оказывает БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание и БОСЭС(К(ИС)-I)–“Маршрут-1”, базу знаний которой для решения упомянутых выше задач покажем ниже.

3.1. Борт К(ИС)-I: интеллектуальная поддержка командира К(ИС)-I в решении задачи возврата выделенной группы в строй сопровождения УС. Интеллектуальную поддержку К(ИС)-I оказывают взаимодействующие между собой БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание и БОСЭС(К(ИС)-I)–“Маршрут-1”.

3.1.1. Облик базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание: фрагмент базы знаний, работающей при появлении информации о готовности выделенной группы вернуться в строй сопровождения. В таблице представлен облик базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание.

База знаний этой БОСЭС имеет два иерархических уровня.

На первом иерархическом уровне базы знаний БОСЭС продукционными правилами определяется активная коллизия из следующих возможных коллизий (Клз) на этапе полета группы “Маршрут-1”:

Клз-А: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы””,

Клз-Б: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Истребители противника””,

Клз-В: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Атакоопасное направление””,

Клз-Г: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Истребители противника” + “Атакоопасное направление””.

На втором иерархическом уровне базы знаний БОСЭС описанными ниже процедурами А-1, А-2, Б-1, Б-2, Б-3 определяются условия подключения соответствующих БОСЭС–“Этап полета”, которые вместе с указанными процедурами выбирают (среди полученных от К(ИС)-II точек встречи и точек выхода) точку, в которую должна выйти подгруппы командира К(ИС)-II.

Рассмотрим перечисленные коллизии (табл. 1).

На втором иерархическом уровне базы знаний при активизации Клз-А БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание рекомендует командиру К(ИС)-I вернуть выделенную группу в ближайшую точку

Таблица 1. Облик базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание: режим “Вмененное целеполагание командиром выделенной группы”

БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание			
Первый иерархический уровень базы знаний	Второй иерархический уровень базы знаний		
Состав возможных у К(ИС)-I коллизий (Клз) Клз-А: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы”” Клз-Б: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Отражение атаки истребителей противника (ИП)”” Клз-В: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Прикрытие атакоопасного направления)”” Клз-Г: “Маршрут-1 – “Возврат выделенной группы” + “Отражение атаки истребителей противника (ИП)” + “Прикрытие атакоопасного направления)””	Процедуры в базе знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание Процедура А-1 “Назначение точки прибытия из числа точек встречи” Процедура Б-1: а) $N_{\text{потр}}(\text{ИС}) < N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, б) $N_{\text{потр}}(\text{ИС}) \geq N_{\text{налч}}(\text{ИС})$. Процедура Б-2. “Точка блокировки атаки ИП на УС” Процедура А-1 Процедура Б-1 “Необходимое число ИС для отражения атаки ИП”: а) $N_{\text{потр}}(\text{ИС}) < N_{\text{налч}}(\text{ИС})$ Процедура А-1, б) $N_{\text{потр}}(\text{ИС}) > N_{\text{налч}}(\text{ИС})$ Процедура Б-2. “Точка блокировки атаки ИП на УС”. Процедура А-2 “Назначения точки прибытия из числа точек выхода”, в) $N_{\text{потр}}(\text{ИС}) = N_{\text{налч}}(\text{ИС})$. Процедура Б-3. “Точка блокировки атакоопасного направления”. Процедура А-2	Подключаемые БОСЭС(К(ИС)-I)-этапа полета Нет БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод группы в воздушный бой” БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1”. БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод группы в воздушный бой”. БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод группы в воздушный бой”	Рекомендуемая командиром К(ИС) – II точка прибытия Ближайшая точка встречи Ближайшая точка встречи. Точка блокировки атаки ИП на УС Ближайшая точка встречи Ближайшая точка встречи. Точка блокировки атаки ИП на УС. “Точка блокировки атакоопасного направления”

встречи выделенной группы с УС. Эта точка выбирается процедурой А-1 из числа возможных точек встречи, переданных командиром К(ИС)-II.

На втором иерархическом уровне базы знаний при активизации Клз-Б запускается процедура Б-1 “Определение числа ИС, необходимого для отражения атаки ИП. В процедуре Б-1 определяется $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ – потребное число ИС, боевой потенциал которых не ниже боевого потенциала группы атакующих ИП [10].

Если потребное число ИС $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ меньше числа наличного числа $N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, в текущий момент находящихся в группе сопровождения УС, то БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

рекомендует командиру К(ИС)-I вернуть выделенную группу в ближайшую точку встречи выделенной группы с УС, которая выбирается из числа возможных точек встречи, переданных командиром К(ИС)-II;

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” с выбором в ее базе знаний ПрС/С “Отражение атаки ИП частью группы ИС”, которая рекомендует командиру К(ИС)-I способ решения этой ПрС/С [10].

Если $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ больше и равно числу $N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, в текущий момент находящихся в группе сопровождения УС, то БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

подключает в БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод всей группы в бой с ИП”, которая рекомендует командиру К(ИС)-I тактический прием ввода группы в бой и вариант тактического целераспределения [1];

подключает процедуру Б-2 “Определение точки блокировки атаки ИП на УС”, в которую следует вернуть выделенную группу для поддержки ИС, вступающих в бой с ИП. Этой точкой является точка пересечения траектории атаки ИП-УС с траекторией полета УС.

На втором иерархическом уровне базы знаний при активизации Клз-В БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” с выбором в ее базе знаний ПрС/С “Прикрытие атакоопасного направления”, получая из БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” точку прикрытия. Этой точке процедурой А-1 ставится в соответствие одна из возможных точек возврата, полученных от К(ИС)-II. Эта точка передается К(ИС)-II для реализации выхода в нее (вмененное целеполагание для К(ИС)-II).

На втором иерархическом уровне базы знаний при активизации Клз-Г “Возврат выделенной группы” + “Истребители противника” + “Атакоопасное направление” БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание подключает процедуру Б-1 расчета $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ потребного числа ИС, боевой потенциал которых не ниже боевого потенциала группы атакующих ИП.

Если $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ меньше числа $N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, в текущий момент находящихся в группе сопровождения УС, то БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

рекомендует командиру К(ИС)-I вернуть выделенную группу в ближайшую точку встречи выделенной группы с УС, которая выбирается процедурой А-1 из числа возможных точек встречи, переданных командиром К(ИС)-II;

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” с выбором в ее базе знаний ПрС/С “Отражение атаки ИП частью группы ИС”, которая рекомендует командиру К(ИС)-I способ решения этой ПрС/С.

Если $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ больше числа $N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, в текущий момент находящихся в группе сопровождения УС, то БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод всей группы в бой с ИП”, которая рекомендует командиру К(ИС)-I тактический прием ввода группы в бой и вариант тактического целераспределения;

подключает процедуру Б-2 “Определение точки блокировки атаки ИП на УС”, в которую следует вернуть выделенную группу для поддержки ИС, вступающих в бой с ИП. Этой точкой является точка пересечения траектории атаки ИП-УС с траекторией полета УС.

Если $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ равно числу $N_{\text{налч}}(\text{ИС})$, в текущий момент находящихся в группе сопровождения УС, то БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание:

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод всей группы в бой с ИП”, которая рекомендует командиру К(ИС)-I тактический прием ввода группы в бой и вариант тактического целераспределения;

подключает БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1”, которая определяет точку блокировки атакоопасного направления.

3.1.2. Процедуры второго иерархического уровня базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание. На втором иерархическом уровне базы знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание используются следующие процедуры.

Процедура А-1 “Назначения точки прибытия из числа точек встречи”. Это процедура выбора ближайшей к УС точки встречи из числа точек встречи, полученных от командира К(ИС)-II.

Процедура А-2 “Назначения точки прибытия из числа точек выхода”. В этой процедуре: 1) точке блокировки атаки ИП на УС ставится в соответствие точка выхода, выбранная из числа точек выхода, присланных командиром К(ИС)-II, 2) точке блокировки атакоопасного направления ставится в соответствие точка выхода, выбранная также из числа точек выхода, присланных командиром К(ИС)-II.

Процедура Б-1 “Необходимое число ИС для отражения атаки ИП”. Входная информация в процедуру: число и тип ИП и ИС.

В базе знаний БОСЭС(К(ИС)-I)-целеполагание находятся таблицы боевых потенциалов различных типов ИП и боевых потенциалов различных типов ИС [10], по которым по числу и типу ИП, типу ИС определяется $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ – потребное число ИС имеющегося типа, которое необходимо для отражения атаки ИП, число и тип которых определен.

Если число $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ меньше числа наличных ИС, находящихся вблизи УС, то подключается БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1”, в проблемной субситуации которой “Отражение атаки ИП частью группы ИС” решается возникшая проблема противодействия истребителям противника [10]. Предписываемая командиру К(ИС)-II точка прибытия (ближайшая точка встречи выделенной группы с УС) определяется процедурой А-1.

Если число $N_{\text{потр}}(\text{ИС})$ больше или равно числу ИС, находящихся вблизи УС, то подключается БОСЭС(К(ИС)-I)-“Ввод группы ИС в воздушный бой с ИП”.

Предписываемая командиру К(ИС)-II точка прибытия определяется из процедуры Б-2: “Точка блокировки атаки ИП на УС”. Точка блокировки атаки ИП в эту процедуру поступает из БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1”. Там по вектору скорости атакующих ИП определяется точка пересечения траектории атаки ИП с траекторией полета УС [10], которая в процедуре Б-2 определяется как “Точка блокировки атаки ИП на УС”. Она пересылается в процедуру А-2.

Процедура Б-3. “Точка блокировки атакоопасного направления”. Точка блокировки атакоопасного направления в эту процедуру поступает из БОСЭС(К(ИС)-I)-“Маршрут-1” [10]. Она пересылается в процедуру А-2.

3.2. Борт К(ИС)-II: интеллектуальная поддержка командира при решении задачи возврата выделенной группы в строй сопровождения УС. Интеллектуальную поддержку командиру К(ИС)-II оказывает БОСЭС(К(ИС)-II)-“Возврат группы”. Как и БОСЭС-“Этапа полета”, эта БОСЭС(К(ИС)-II)-“Возврат группы” имеет структуру базы знаний, описанную в [8]. В ее базу знаний включены ПрС/С: “Выделение боеспособной части выделенной группы”, “Определение точки сбора боеспособной части выделенной группы с сопровождаемыми УС”, “Конструирование траекторий встреч боеспособной части выделенной группы с сопровождаемыми УС”, “Конструирование траекторий выхода боеспособной части, выделенной на заданный отрезок траектории полета сопровождаемых УС”.

Остановимся на описании фрагментов базы знаний БОСЭС(К(ИС)-II)-“Возврат группы” для двух последних ПрС/С. Итак, выделенная группа ИС выполнила задачу “Отразить атаку ИП” (таблица). Ее командир К(ИС)-II сформировал боеспособную часть выделенной группы и собрал ее самолеты в точке сбора. В этот момент сопровождаемые УС находятся в точке маршрута, которая известна на борту самолета К(ИС)-II.

Для возврата боеспособной части выделенной группы (далее выделенная группа ИС) в строй сопровождения УС на борту самолета К(ИС)-II конструируются траектории встречи ИС с УС и траектории упреждающего выхода ИС на траекторию УС.

3.2.1. Задача конструирования траекторий встречи [11, 12]. Для возврата боеспособной части выделенной группы (далее выделенная группа ИС) на борту самолета К(ИС)-II конструируются траектории встречи ИС с УС и траектории упреждающего выхода ИС на траекторию УС.

Траектория встречи ИС с УС определяется в классе траекторий с характеристиками:

профиль полета: “набор с начальной высоты полета ИС заданной высоты (высота полки)” – полет на полке” – снижение на заданную конечную высоту”;

начальная и конечная высота ИС равна высоте УС;

проекция траектории ИС на горизонтальную плоскость является прямой линией.

Для задачи конструирования траектории возврата выделенной группы сформируем ее графическое представление, показанное на рис. 6.

Отложим в начале траектории УС отрезок S_{12} и в конце траектории УС в окрестности искомой точки встречи – отрезок S_{22} . Определение этих отрезков дадим ниже.

Введем прямоугольную систему координат на горизонтальной плоскости полета УС. Ось OZ направлена параллельно траектории УС. Ось OX направлена от ИС, находящегося слева от УС, в сторону УС. Начало координат выбрано слева от ИС и ниже его. Отметим начальное расположение выделенной группы ИС(x, z) и УС(x, z) и спроектируем на горизонтальную плоскость

Напомним, что в представленных зависимостях $V_{\text{ИС}}$ — скорость полета ИС на заданной полке, а наименьший положительный корень квадратного уравнения τ_0 определяет время полета ИС на полке. Тогда время полета ИС до встречи с УС равно

$$T_{\text{встречи}} = \Delta t_1 + \tau_0 + \Delta t_2.$$

Координаты точки встречи (т.в) ИС с УС равны:

$$\begin{aligned} X_{\text{т.в}} &= X_{\text{УС}}, \\ Z_{\text{т.в}} &= Z_{\text{УС}} + V_{\text{УС}} T_{\text{встречи}}. \end{aligned}$$

Длина проекции траектории ИС на горизонтальную плоскость

$$L_{\text{встречи ИС, УС}} = S_1 + V_{\text{полки ИС}} \tau_0 + S_2.$$

Заметим, что в описанных процедурах, не используется математическая модель ИС на этапах “набор высоты” и “спуск”. Необходимые для расчетов проекции длины участков S_1 , S_2 и времена Δt_1 и Δt_2 прохождения ИС этих участков, могут быть получены на основании обработки результатов летных испытаний [11].

3.2.2. Задача конструирования траекторий ИС, обеспечивающих упреждающий выход ИС на точки маршрута полета УС. Исходными данными для решения задачи конструирования с упреждающим выходом на траекторию сопровождаемых УС являются:

длина участка точек упреждения, размещаемого дальше всех рассчитанных выше точек встречи, положение начальной точки выхода на траектории полета УС, заданная высота полки траектории выделенной группы ИС, скорость полета выделенной группы на полке,

длина горизонтальных проекций участков подъема ИС на высоту полки S_1 и спуска с высоты полки S_2 для заданной высоты полки,

время, необходимое выделенной группе для подъема Δt_1 , и время спуска с высоты Δt_2 .

Высота полета до точек выхода определяется согласно следующему алгоритму:

находится длина L отрезка прямой, соединяющей проекцию на горизонтальную плоскость точки сбора выделенной группы и проекцию на горизонтальную плоскость выбранной точки упреждающего выхода,

проверяется возможность полета выделенной группы до заданной точки выхода на траекторию УС по траектории с полкой на заданной высоте.

Если $(S_1 + S_2) < L$, то реализация траектории выхода ИС на полку возможна. В противном случае (при невыполнении условия) данное неравенство формируется для оговоренных высот полков и соответствующих наборов S_1 и S_2 для них. Если не для одного из этих наборов условие не выполняется, то полет до заданной точки выхода производится без выхода на полку на начальной высоте полета выделенной группы.

Скорость полета выделенной группы на определенной высоте, как и длина горизонтальных проекций участков подъема и спуска с этой высоты и время полета выделенной группы, соответствующее этим участкам, поступает из ранее сформированной базы данных.

Определение траекторий выхода будем проводить также в ранее сформированной системе координат на горизонтальной плоскости полета УС.

Покажем вид зависимости времени выхода ИС в точки упреждающего выхода [50; 450 км] для $S_1 + S_2 = 2.5$ км, $\Delta t_1 + \Delta t_2 = 55$ с и скорости полета ИС на полке 0.58 км/с (рис. 7).

Полученная зависимости неплохо аппроксимируются полиномом второй степени.

Таким образом К(ИС)-II передает на борт К(ИС)-I, представленные ему БОСЭС(К(ИС)-II)-“Возврат группы” данные через координаты отрезка траектории УС и коэффициенты полинома, аппроксимирующего время прибытия ИС в точки упомянутого отрезка.

Возможный вид предъявления этой информации на многофункциональном индикаторе кабины К(ИС)-I показан на рис. 8. Здесь ППМ — поворотный пункт маршрута УС; точка встречи ИС с УС на высоте $H = XX$, где символом XX обозначены в точках встречи при полете ИС по траектории без выхода на полку (полет на начальной высоте $H_{\text{нач}}$) $XX = H_{\text{нач}}$, в точках встречи с выходом на полку $XX = 8000$ м, с выходом на полку $XX = 10000$ м, с выходом на полку $XX = 12000$ м;

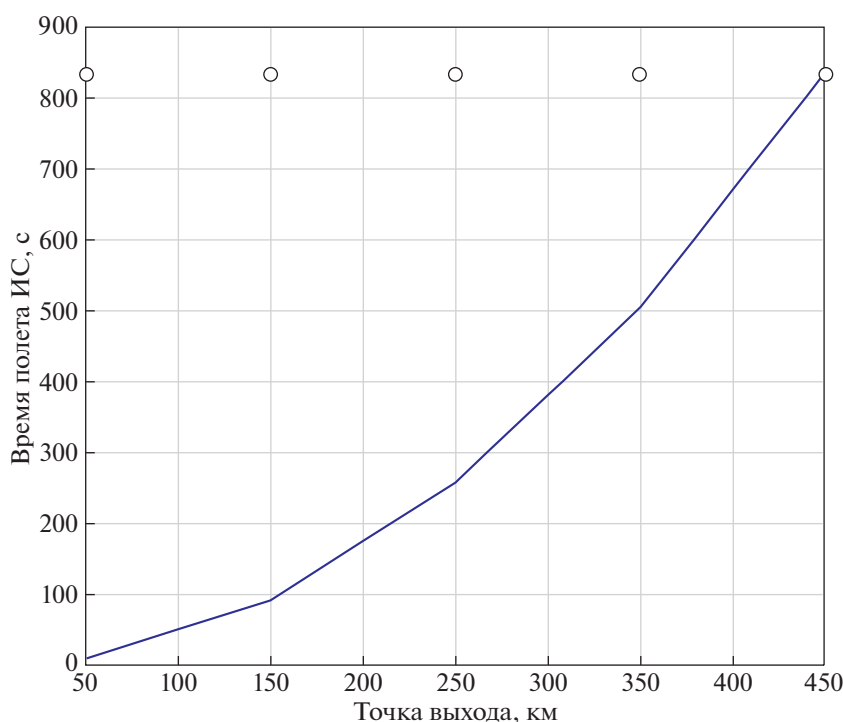


Рис. 7. Аппроксимация полиномом второй степени времен выхода ИС в точки заданного отрезка траектории УС

упреждающий участок выхода — выделенный участок траектории УС и времена выхода ИС в точки этого участка, определяемые аппроксимирующим полиномом, коэффициенты которого были переданы К(ИС)-II на борт К(ИС)- I.

4. О решении задач целеполагание в повседневной жизни. Задачи целеполагания часто возникают в повседневной жизни. Существуют различные методы решения этих задач, ориентированные на непосредственное привлечение к их решению заинтересованных профессионалов [13–17]. Наиболее проработанным на наш взгляд является метод типа SMART-целеполагание [13]. Он применяется в ситуациях, когда цель слабо формализована, а условия появления задачи постоянные или “быстро меняются”.

Этапы технологии метода:

- 1) конкретизация цели и возможных способов ее достижения (*specific* — конкретизация, формализация),
- 2) выбор критериев оценки цели (*measurable* — измерение),
- 3) прогнозирование и оценка степени достижения цели (*achievable* — достижимая),
- 4) обоснование цели как необходимой, так и не противоречащей ценностям сферы жизнедеятельности (*relevant* — релевантная, актуальная),
- 5) определение допустимого времени решения задачи (*time-bound*: ограниченная по времени).

Каждый этап представляется текстовой инструкцией, в которой указано, что нужно получить на этом этапе (цель этапа). Предполагается, что способ достижения цели этапа определяют привлеченные к решению задачи профессионалы.

В отличие от этого разработанный в статье метод не требует непосредственного участия профессионалов в процессе решения задачи оперативного целеполагания. Кроме этого, при ее решении всегда учитывается необходимость безусловного выполнения заданной миссии.

5. О решении задач достижения цели, определившейся после решения задачи оперативного целеполагания. При решении любой задачи оперативного целеполагания требует всегда учитывать особенности каждого компонента возникшей триады “Выполняемый этап миссии — Возникшая непосредственная угроза выполнению миссии — Доступные средства противодействия угрозе”.

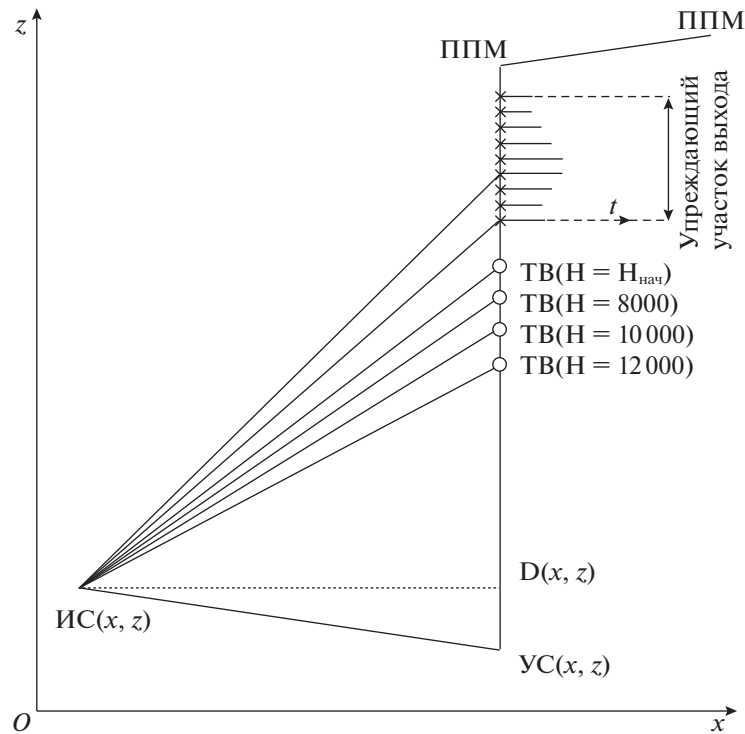


Рис. 8. Представление на информационном кадре многофункционального индикатора кабины К(ИС)- I точек встречи ИС с УС и времен прибытия ИС в точки выделенного отрезка траектории УС

Публикации [18–22], рассматриваемые с позиции создания способов достижения цели, поставленной группе активных объектов в решенной задаче оперативного целеполагания, интересны разрабатываемыми в них различными конструктивными подходами, которые могут быть использованы в интеллектуальных системах, конструирующих способы достижения группой оперативно назначенных целей.

Подробное изложение приложений этих фундаментальных результатов в области управления подвижными объектами и их группами в конфликтных средах, в том числе результатов опытной эксплуатации разработанных программно-аппаратных средств на объектах управления в реальной среде, является предметом специальных публикаций.

Заключение. Для предметной области, которая представима компонентами “группа объектов, заранее заданная группе миссии, целенаправленно или пассивно противодействующая среде выполнению миссии”, разработана методология решения возникающих задач оперативного целеполагания. Эти задачи появляются, когда в процессе выполнения группой этапа миссии возникают коллизия “Выполняемый этап миссии – Непосредственная угроза выполнению миссии”. Методология включает в себя: системный анализ предметной области, позволяющий выявить состав и взаимодействие необходимых БИС-ТУ; использование ранее разработанного предметно независимого облика баз знаний этих систем; “насыщение” этого облика указанных БИС-ТУ конкретиками выбранной предметной области, выполняемой миссии и возникшей коллизии.

Использование так “насыщенных” и так взаимодействующих БИС-ТУ дает возможность конструктивно решить возникшую задачу оперативного целеполагания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федун Б.Е. Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов (примеры для пилотируемых летательных аппаратов). М.: Де Либри. 2018. 246 с.
2. Федун Б.Е. Бортовые оперативно советующие экспертные системы тактического уровня для пилотируемых летательных аппаратов – объекты разработки и эксплуатации // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 4. С. 113–132.

3. Желтов С.Ю., Федунов Б.Е. Оперативное целеполагание в антропоцентрических объектах с позиции концептуальной модели “Этап”. I. Структуры алгоритмов поддержки процесса решения задачи экипажем // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 57–71.
4. Желтов С.Ю., Федунов Б.Е. Оперативное целеполагание в антропоцентрических объектах с позиции концептуальной модели “Этап”. II. Режимы работы бортовой оперативно-советующей экспертной системы и диалоги ее с экипажем // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 55–69.
5. Грибков В.Ф., Федунов Б.Е. Бортовая информационная интеллектуальная система “Ситуационная осведомленность экипажа боевых самолетов” // Интеллектуальные системы управления / Под ред. акад. РАН С.Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2010. С. 108–116.
6. Федунов Б.Е. “Электронный летчик”: “Точка невозврата” пройдена не будет. Бортовые оперативно-советующие экспертные системы тактического уровня для пилотируемых летательных аппаратов // Авиапанорама. 2016. № 1. С. 9–20 (свободный доступ в Интернете).
7. Федунов Б.Е. Решение задач по прецеденту в базах знаний бортовых интеллектуальных систем тактического уровня на этапах выполнения миссии подвижным объектом // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 1.
8. Патент на изобретение № 275 13 77 “Способ интеллектуальной поддержки экипажа летательного аппарата при выполнении этапа полета”. Патентообладатель ФГУП ГосНИИАС. Приоритет изобретения 29 октября 2020 г.
9. Федунов Б.Е., Юневич Н.Д. Оперативный способ решения задач многокритериального выбора альтернативы в базах знаний бортовых оперативно-советующих экспертных систем // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 111–128.
10. Патент на изобретение № 272 45 73 “Система интеллектуальной поддержки командира группы истребителей сопровождения для этапа полета “Маршрут-1””. Патентообладатель ФГУП ГосНИИАС. Приоритет изобретения 22 ноября 2019 г.
11. Гревцов Н.М., Перчиц С.Н., Федунов Б.Е., Юневич Н.Д. Интеллектуальная поддержка командира группы истребителей сопровождения при решении им задачи возврата части группы, отразившей атаку истребителей противника // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 139–152.
12. Галиханов С.К., Федунов Б.Е., Шигина М.А. Конструирование траекторий встречи в базах знаний БОСЭС-этапа полета // М. Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 3. С. 104–115.
13. Архангельский Глеб. Корпоративный тайм-менеджмент. Энциклопедия решений. М.: ООО “Альпина Бизнес Букс”. 2008.
14. Yitzhak F., Slowik L.H. Enriching Goal-Setting Theory With Time: An Integrated Approach // Academy of Management Review. 2004. V. 29. № 3. P. 404–422.
15. Latham G.P. The Motivational Benefits of Goal-Setting // Academy of Management Executives. 2004. V. 18. № 4. P. 126–129.
16. Locke E.A., Latham G.P. Building a Practically Useful Theory of Goal Setting and Task Motivation: A 35-Year Odyssey // American Psychologist. 2002. V. 57. № 9. P. 705–717.
17. Terpstra D.E., Rozell El., J. The Relationship of Goal Setting to Organizational Profitability // Group & Organization Management. 1994. V. 19. P. 285–295.
18. Buzikov M.E., Galyaev A.A., Guryev Yu.V., Titov K.B., Yakushenko E.I., Vassilyev S.N. Intelligent control of autonomous and anthropocentric on-board systems. // XIIIth Intern. Symposium “Intelligent Systems” (INTELS’18), St. Petersburg, Russia. Procedia Computer Science. 2019. V. 150. P. 10–18.
19. Zabaranin M., Uryasev S., Murphey R. Aircraft Routing under the Risk of Detection // Naval Research Logistics, 2006. V. 53 (8). P. 728–747.
20. Якушенко Е.И., Гурьев Ю.В., Эйдук В.И., Васильев С.Н., Добровидов А.В., Кулида Э.Л., Маслов Е.П., Ткаченко И.В., Вишневецкий А.М., Шлемов Ю.Ф. Бортовой комплекс управления для секретности морского подводного объекта с оперативно-консультативной системой // Информационные бюллетени компьютерных информационных технологий. 2012. Т. 10. С. 9–16.
21. Galyaev A.A., Maslov E.P. On the Border Patrolling Problem // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2011. V. 50 (5). P. 837–846.
22. Lomuscio A., Michaliszyn J. Verifying Multi-Agent Systems by Model Checking Three-valued Abstractions Imperial College London // Proc. 14th Intern. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS’2015). Istanbul. 2015. P. 189–198.

УДК 004.93.

ПРИВИЛЕГИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ПОЗЫ ЧЕЛОВЕКА

© 2023 г. М. С. Каприелова^{а,*}, Р. Г. Нейчев^{б,**}, А. Д. Тихонова^{б,***}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

^бМосковский физико-технический институт, Москва, Россия

*e-mail: kapriellova.ms@phystech.edu

**e-mail: neychev@phystech.edu

***e-mail: tikhonova.ad@phystech.edu

Поступила в редакцию 03.01.2022 г.

После доработки 08.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Решается задача оценки позы человека по видеоданным. Производится анализ различных ключевых точек тела человека. Исследуется изменение точности фиксированной модели при использовании различных пропорций в регуляризационном слагаемом функции потерь. Показано, что при фиксированном количестве тренировочных эпох точность модели отличается в зависимости от выбранных пропорций. Кроме того, продемонстрировано, что линейная корреляция между траекториями ключевых точек, входящих в состав регуляризационного слагаемого, не является основным критерием при прогнозировании эффективности применения регуляризационного слагаемого функции потерь.

DOI: 10.31857/S000233882303006X, EDN: EULHZW

Введение. Оценка позы человека является одной из активно исследуемых задач в компьютерном зрении. Интерес к решению данной задачи обусловлен как прямыми прикладными результатами, так и возможностью получения простого и информативного описания тела и поведения человека. В качестве иллюстрации прямого применения могут выступать такие прикладные задачи, как оценка корректности определенных позиций в технически сложных видах спорта (например, в гимнастике, фигурном катании, гольфе), отслеживание движений в виртуальной реальности или же управление различными устройствами (такими, как дроны или персональные компьютеры) без использования дополнительных физических устройств. Эти приложения получили широкое развитие в последнее десятилетие, в первую очередь благодаря интенсивному продвижению области глубокого обучения и значительным результатам в построении искусственных нейронных сетей. Промежуточные, или скрытые, латентные представления данных внутри нейронных сетей также широко применяются в решении других задач. Например, для распознавания языка жестов (определенных последовательностей движений рук) могут использоваться представления из нейронных сетей для оценки позы с предпоследних слоев. Обнаружение аномалий в поведении также может производиться как на основе итоговой оценки позы, так и на базе латентных представлений, порождаемых моделью. Еще одной задачей, решаемой с помощью предварительной оценки позы, является распознавание движений человека. Аналогично задаче распознавания изображений обучение моделей оценки позы человека позволяет построить достаточно простое и информативное признаковое описание тела человека, которое потом может быть использовано в других областях: безопасности, медицине и т.д. Учитывая возможные условия съемки, решения задачи оценки позы человека должны быть устойчивы к частичному или полному перекрытию ключевых точек, различиям в телосложении людей и силуэтов одежды и изменению количества людей в кадре. Для этого могут применяться априорные предположения [1] о структуре тела человека и характере его движений. Наличие информации о некоторых инвариантах в наблюдаемых данных часто используется в задачах компьютерного зрения [2]. В случае оценки позы в качестве априорной информации могут быть применены пропорции тела человека: они не зависят от угла съемки и расстояния до объекта. Один из способов учета априорной информации непосредственно на этапе обучения модели — добавление регуля-

ризационного слагаемого к оптимизирующей функции потерь. В данной работе в качестве априорной рассматривается информация о различных пропорциях человека. Предшествующие этой работе исследования показали, что некоторые пропорции могут выступать в роли регуляризатора более эффективно, чем остальные. Данная работа представляет анализ различных ключевых точек тела человека. Проводится исследование процесса обучения модели оценки позы человека при использовании различных пропорций в регуляризационном слагаемом. Экспериментальная проверка осуществляется на реальных данных о движениях человека, представленных в датасете Human3.6m [3].

1. Обзор литературы. Задача распознавания активности человека требует анализа временных рядов и построения информативных признаков представлений. В работе [4] приводится подход распознавания активности человека с помощью временных данных, полученных с IMU-датчиков, которые включают в себя показания акселерометров и гироскопов. Эти данные позволяют оценить траекторию движения частей тела человека в пространстве. Для упрощения работы с временными рядами высокой сложности предлагается построение матрицы фазовых траекторий. Но активность человека описывается информацией о движении множества точек, которая часто может быть избыточной. Для построения более простого признакового пространства [5] могут использоваться методы сравнения временных рядов и оценки связи между ними, описываемые в [6]. Также при анализе сложных зависимостей крайне полезными будут априорные предположения [2], включающие в себя как информацию о физических свойствах рассматриваемых процессов, так и некоторые ограничения на решение задачи. В анализе одновременно могут использоваться данные различной природы и частоты, что позволяет получить избыточное описание процесса и построить более точное решение, устойчивое к шумам и возможным проблемам в данных (например, из-за перекрытия частей тела на этапе оценки позы человека). Также дополнительные данные выступают в роли привилегированной информации [1]. Кроме того, в литературе встречаются работы, где знания о физике взаимодействий применяют в качестве предпосылки для разработки новых архитектур, для использования в виде дополнительного слагаемого в функции ошибки или жестких ограничений на выходные данные нейросети [8]. Однако количество ключевых точек, взаимодействия которых требуется описать для реализации такого подхода, значительно повышает вычислительную сложность решения [9]. Анализ данных разметки может сократить размерность признакового пространства и снизить вычислительную сложность решений на основе согласованности с физическими принципами.

2. Определение наиболее эффективных пропорций. В общем случае задачу оценки позы по видеоданным можно сформулировать следующим образом. Существует последовательность кадров $Q = \{q_1, \dots, q_t\}$. Также существует набор ключевых точек $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_i \in \mathbb{R}^3$, $\forall i : j_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ на теле человека для каждого кадра. Количество ключевых точек может меняться в зависимости от специфики конкретного практического приложения задачи, но обычно ключевые точки выбираются на запястьях, локтях, плечах, голове, корпусе, бедрах, коленях и лодыжках. Моделью оценки позы человека назовем отображение $f : Q \mapsto J$. В этой части работы мы проанализировали датасет Human3.6m [9]. Пусть J — множество ключевых точек на теле человека. Каждой ключевой точке j_i соответствует три координаты $\{x_i, y_i, z_i\}$. Временным рядом ключевой точки для видеоряда будем называть последовательность значений, принимаемых $x_i = \{x_1, \dots, x_t\}$, $y_i = \{y_1, \dots, y_t\}$ или $z_i = \{z_1, \dots, z_t\}$ на отрезке времени, соответствующем длине видеоряда. Гипотеза: временные ряды некоторых ключевых точек имеют линейную корреляцию. Обработка временных рядов производится по следующему алгоритму:

- 1) гауссово сглаживание,
- 2) дифференцирование.

Затем для временных рядов считается линейная корреляция. Используется линейная корреляция Пирсона:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^t (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^t (x_k - \bar{x})^2 \sum_{k=1}^t (y_k - \bar{y})^2}},$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние x и y соответственно. Результаты анализа датасета представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результат анализа данных

Группа	Ноги	
	Колено—лодыжка	Бедро—лодыжка
Среднее значение	0.43	0.27
Группа	Руки	
	Локоть—кисть	Плечо—кисть
Среднее значение	0.76	0.56
Группа	Корпус	
	Шея—таз	Голова—таз
Среднее значение	0.73	0.66
Группа	Бедра	
	Плечи	
Среднее значение	0.89	0.79

Таким образом, все рассмотренные группы точек имеют линейно скоррелированные ряды, но средние значения линейной корреляции отличаются в зависимости от группировки точек. Так, руки в группировке локоть—кисть в среднем сильнее скоррелированы, чем в группировке плечо—кисть. То же самое можно сказать о группировке колено—лодыжка и бедро—лодыжка: первый вариант группировки показывает более сильную корреляцию, чем второй. На основании проведенного анализа данных можно предположить, что наиболее скоррелированные группы точек могут быть использованы в качестве регуляризационного слагаемого функции потерь, накладывающего ограничения на пропорции человека. Применение именно этих пропорций в составе регуляризатора предположительно наиболее эффективно для улучшения сходимости модели.

3. Сравнение регуляризаторов. Проанализируем, как использование в регуляризационных слагаемых точек из разных групп влияет на точность решения. В качестве исследуемых групп точек рассматриваем руки (локоть—кисть), корпус (голова—таз), корпус (шея—таз), ноги (колено—лодыжка), бедра и плечи. Мы обучали модель Poseformer [10] на датасете Human36M [3] с оригинальной функцией ошибки (MPJPE) и модифицированной (MPJPE + ProportionLoss) для каждой группы точек. Для предсказания положения человека в 3D используем реальные 2D-позы людей с 81 кадра. Для моделей с регуляризатором функция ошибки строится следующим образом:

$$L = L_{mpjpe} + L_{prop} = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^J \|a_k - \hat{a}_k\|_2 + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (p_n - \hat{p}_n)^2,$$

где a_k и $\hat{a}_k$ — реальное и предсказанное положение k -й ключевой точки в 3D, p_n и $\hat{p}_n$ — реальное и предсказанное евклидово расстояние между двумя точками n -й группы. Другими словами, к стандартной MPJPE добавим регуляризатор на расстояние между крайними точками внутри каждой группы, который можно интерпретировать как информацию о пропорциях человеческого тела. Обучение всех моделей проводилось с дефолтными параметрами, как в оригинальной имплементации Poseformer [10], оптимизатором Adam с начальными гиперпараметрами $lr = 0.0001$ и $weightdecay = 0.1$. Разбиение датасета на обучающую и тестовую выборку проводится по аналогии [10]. Мы оценивали точность модели с помощью метрик, использованных в оригинальной статье Poseformer [10]. MPJPE — стандартная метрика, которая является усредненным Евклидовым расстоянием между реальными и предсказанными ключевыми точками в миллиметрах. P-MPJPE — это MPJPE после ригидного выравнивания предсказаний относительно реальных точек.

4. Результаты эксперимента. Для каждой группы точек результаты усреднялись по пяти запускам. Результаты представлены в табл. 2. Из результатов эксперимента видно, что вне зависимости от величины корреляции использование регуляризационного слагаемого положительно влияет на обучение модели. Интересно, что некоторые менее скоррелированные группы эффективнее, чем более скоррелированные. Примером таких групп являются ноги (колено—лодыжка) и корпус (голова—таз). Скорее всего, это объясняется тем, что некоторые точки, входящие в более скоррелированные группы, часто подвержены окклюзиям. Окклюзиями называется частичное

Таблица 2. Результаты обучения модели с учетом различных пропорций

Группа	MPJPE	P-MPJPE
Руки (локоть—кисть)	37.73	28.32
Корпус (голова—таз)	37.95	28.10
Корпус (шея—таз)	38.22	28.58
Ноги (колени—лодыжки)	38.62	29.61
Бедра	40.60	31.12
Плечи	41.44	32.21
Без регуляризатора	42.87	32.30

или полное перекрытие одной или нескольких ключевых точек. Появление такого эффекта обусловлено возможностью съемки с разных ракурсов. Примерами таких групп могут быть бедра и плечи.

Заключение. Временные ряды, характеризующие движение различных ключевых точек тела человека, проанализированы на наличие линейных корреляций. В результате были выявлены наиболее и наименее скоррелированные группы ключевых точек. Кроме того, исследовали процесс обучения фиксированной модели при помощи различных пропорций в регуляризационном слагаемом. Результаты показали, что при использовании регуляризатора, основанного на пропорциях человека, линейная корреляция может быть критерием выбора, однако не является единственным фактором, влияющим на эффективность регуляризационного слагаемого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vapnik V., Vashist A.* A New Learning Paradigm: Learning Using Privileged Information // *Neural Networks*. 2009. V. 22. P. 544–557.
2. *Lehrmann A., Gehler P., Nowozin S.* A Non-parametric Bayesian Network Prior of Human Pose // *Proc. IEEE Intern. Conf. On Computer Vision*. Sydney, 2013. P. 1281–1288.
3. *Ionescu C., Papava D., Olaru V., Sminchisescu C.* Human3.6m: Large Scale Datasets and Predictive Methods for 3d Human Sensing in Natural Environments // *IEEE Trans. On Pattern Analysis And Machine Intelligence*. 2013. V. 36. P. 1325–1339.
4. *Ignatov A., Strijov, V.* Human Activity Recognition Using Quasiperiodic Time Series Collected from a Single Tri-axial Accelerometer // *Multimedia Tools And Applications*. 2016. V. 75. P. 7257–7270.
5. *Katrutsa A., Strijov V.* Stress Test Procedure for Feature Selection Algorithms // *Chemometrics And Intelligent Laboratory Systems*. 2015. V. 142. P. 172–183.
6. *Cliff O., Lizier J., Tsuchiya N., Fulcher B.* Unifying Pairwise Interactions in Complex Dynamics // *ArXiv 2022. ArXiv Preprint ArXiv:2201.11941*.
7. *Trumble M., Gilbert A., Malleson C., Hilton A., Collomosse J.* Total Capture: 3d Human Pose Estimation Fusing Video and Inertial Sensors // *Proc. Of 28th British Machine Vision Conf.* London, 2017. P. 1–13.
8. *Márquez-Neila P., Salzmann M., Fua P.* Imposing Hard Constraints on Deep Networks: Promises and Limitations // *ArXiv Preprint ArXiv:1706.02025* (2017).
9. *De Luca G., Lampoltshammer T., Scholz, J.* How Many Equations of Motion Describe a Moving Human? // *ArXiv Preprint ArXiv:2207.14331* (2022).
10. *Zheng C., Zhu S., Mendieta M., Yang T., Chen C., Ding, Z.* 3d Human Pose Estimation with Spatial and Temporal Transformers // *Proc. IEEE/CVF Intern. Conf. On Computer Vision*. Montreal, 2021. P. 11656–11665.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.78

АНАЛИТИЧЕСКИЙ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА¹

© 2023 г. А. В. Молоденков^{а,*}, Я. Г. Сапунков^а

^аИнститут проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

*e-mail: molalexey@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.10.2022 г.

После доработки 12.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Исследуется задача оптимального программного управления угловым движением космического аппарата как твердого тела с квадратичным функционалом энергии, затраченной на маневр космического аппарата, и фиксированным временем переходного процесса. Динамическая конфигурация космического аппарата и граничные условия произвольны, вектор-функция управления не ограничена. В рамках концепции Пуансо с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие численные примеры, показывающие близость квазиоптимального решения к оптимальному решению задачи.

DOI: 10.31857/S0002338823030101, EDN: EUUEGE

Введение. По проблеме программного управления пространственным угловым движением космического аппарата (КА) опубликовано большое количество работ (например, [1–4] и обширные ссылки на литературу в них; [5, 6]), но аналитическая нерешенность задачи в общем виде оставляет актуальной эту тематику исследований. При произвольных краевых условиях точное решение не известно даже в случае сферически-симметричного КА, поэтому в общем случае применяют только приближенные решения задачи. Явное решение задачи оптимального управления угловым движением КА имело бы не только теоретическую, но и большую прикладную значимость, так как позволило бы использовать в системе управления заранее полученные значения для управления и траектории КА. Это касается, например, КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

В статье исследуется классическая задача оптимального управления угловым движением КА как твердого тела с квадратичным функционалом энергии, затраченной на маневр КА, и фиксированным временем переходного процесса. Динамическая конфигурация КА и граничные условия произвольны, вектор-функция управления не ограничена. С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина получены формулы краевой задачи оптимизации. Кратко описано численное решение этой краевой задачи [7] на основе алгоритма Левенберга–Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Основываясь на проведенных численных экспериментах для различных параметров задачи, сделан вывод о не существенной зависимости кинематических характеристик оптимальной переориентации КА от его динамических параметров. Это обеспечивает близость решений классической задачи и ниже описываемой модифицированной задачи оптимального управления угловым движением КА при его произвольной динамической конфигурации.

Получено явное решение модифицированной задачи оптимального по энергии управления угловым движением КА с произвольными краевыми условиями по угловой скорости и ориентации КА, доведенное до алгоритма. В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением КА, а его траектория задана в этом классе движений. При этом общ-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00218) и в рамках темы FFNM-2022-0007.

ность исходной задачи практически не нарушается: известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного КА в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают. В других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач относительная погрешность между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая угловые маневры КА на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче оптимального углового движения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула вектора управляющего момента КА.

Предлагаемый в статье метод решения задачи ранее был успешно применен к задаче оптимальной по быстродействию переориентации КА произвольной динамической конфигурации с ограниченным по модулю вектором управления [8] и задаче поворота осесимметричного КА без ограничений с комбинированным функционалом и не фиксированным временем переходного процесса [9].

Отметим, что в литературе известны некоторые квазиоптимальные решения задачи поворота КА с использованием обратной задачи динамики твердого тела, например [10, 11]. В [10] решение получено с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана на основе задачи оптимальной переориентации КА в кинематической постановке, где функцией управления является вектор угловой скорости КА. Направление вектора угловой скорости КА при этом определяется начальными и конечными значениями кватерниона ориентации КА. В [11] решение задачи получено посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА эти решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

1. Постановка классической задачи. Угловое движение КА как произвольного твердого тела в связанной с КА системе координат описывается кватернионным кинематическим уравнением и динамическими уравнениями Эйлера [2]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (1.1)$$

$$\dot{\omega} = \Gamma^{-1}M - \Gamma^{-1}[\omega, I\omega], \quad (1.2)$$

где $\Lambda(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ – нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА, $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, $\omega(t) = \omega_1(t)i_1 + \omega_2(t)i_2 + \omega_3(t)i_3$ – вектор его угловой скорости, $M(t) = M_1(t)i_1 + M_2(t)i_2 + M_3(t)i_3$ – вектор внешнего управляющего момента, приложенного к КА, мнимые единицы Гамильтона i_1, i_2, i_3 соответствуют ортам трехмерного векторного пространства i_1, i_2, i_3 , символ “ $\circ$ ” означает умножение кватернионов, “[$\cdot, \cdot$]” – векторное произведение; матрица

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

– тензор инерции, где I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции КА. Соответственно, фазовые координаты Λ, ω положены непрерывными функциями, а управление M – кусочно-непрерывной функцией [12].

Граничные условия по угловому положению и угловой скорости КА произвольны и заданы:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \Lambda(T) = \Lambda_T, \quad (1.3)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(T) = \omega_T. \quad (1.4)$$

Ставится задача найти оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$, доставляющее минимум квадратичному критерию энергозатрат с фиксированным временем T :

$$J = \int_0^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} dt. \quad (1.5)$$

2. Переход к безразмерным переменным. Так как основная переменная задачи кватернион Λ является безразмерной величиной, с использованием формул

$$I^{\text{масш}} = \left((I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) / 3 \right)^{1/2}, \quad I_k^{\text{безраз}} = I_k / I^{\text{масш}}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\omega^{\text{безраз}} = T\omega, \quad t^{\text{безраз}} = T^{-1}t, \quad \mathbf{M}^{\text{безраз}} = T^2 \mathbf{M} / I^{\text{масш}}, \quad J^{\text{безраз}} = T^3 J / I^{\text{масш}^2}$$

переформулируем задачу в безразмерных переменных, при этом все выражения постановки задачи кроме функционала оптимизации

$$J = \int_0^1 \mathbf{M}^T \mathbf{M} dt \quad (2.1)$$

не изменятся. Далее рассмотрим безразмерную постановку задачи (1.1)–(1.4), (2.1) при $T = 1$.

3. Применение принципа максимума. Применяя принцип максимума Понтрягина [2, 12], введем сопряженные переменные $\Psi(t)$ (кватернион), $\phi(t)$ (вектор) к фазовым переменным $\Lambda(t)$, $\omega(t)$ соответственно. Функция Гамильтона–Понтрягина

$$H = -\psi^*(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\phi, \Gamma^{-1} \mathbf{M} - \Gamma^{-1} [\omega, \mathbf{I}\omega]), \quad (3.1)$$

где константа $\psi^* \geq 0$, а “ $(\cdot, \cdot)$ ” – скалярное произведение векторов.

Рассматривая невырожденные решения краевой задачи принципа максимума при условии $\psi^* > 0$ и в силу однородности функции Гамильтона–Понтрягина H [12], в формуле (3.1) положим $\psi^* = 1$.

Уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\phi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2 - [\Gamma^{-1} \phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1} \phi, \omega], \end{cases} \quad (3.2)$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” – векторная часть кватерниона, а символ “ $\sim$ ” означает сопряжение кватерниона.

Кватернионные уравнения для переменных Ψ и Λ совпадают, следовательно, их решения различаются на постоянный кватернион $\mathbf{C}$:

$$\Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda. \quad (3.3)$$

В силу этого и учитывая обозначение [2]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{c}_v$ – векторная часть кватерниона $\mathbf{C}$, выражения (3.2) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\phi} = -\mathbf{p} / 2 - [\Gamma^{-1} \phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1} \phi, \omega]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (1.1), размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [2]. Из условия максимума (3.1) получим непрерывную структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \Gamma^{-1} \phi / 2. \quad (3.6)$$

С учетом переменной $\mathbf{p}$ (3.4) функция Гамильтона–Понтрягина (3.1) запишется так:

$$H = -(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{p}, \omega) / 2 + (\phi, \Gamma^{-1} \mathbf{M} - \Gamma^{-1} [\omega, \mathbf{I}\omega]). \quad (3.7)$$

4. Наводящие соображения. Описываются примеры численного решения задачи оптимального управления угловым движением различных по своей динамической конфигурации КА (твердых тел) и приводятся выводы, следующие из этих примеров.

Рассматривается численное решение краевой задачи, полученной на основании принципа максимума для исходной задачи (1.1)–(1.4), (2.1):

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \Gamma^{-1}M - \Gamma^{-1}[\omega, I\omega], \\ \dot{\Phi} = -p/2 - [\Gamma^{-1}\Phi, I\omega] + I[\Gamma^{-1}\Phi, \omega], \\ p = \tilde{\Lambda} \circ c_v \circ \Lambda, \quad c_v = \text{const}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad (4.2)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T, \quad (4.3)$$

$$M^{\text{опт}} = \Gamma^{-1}\Phi/2, \quad (4.4)$$

откуда необходимо найти $M^{\text{опт}}$, $\Lambda^{\text{опт}}$, $\omega^{\text{опт}}$, c_v .

Условия в конечный момент времени (4.3) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\Lambda \times \omega$:

$$\text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T. \quad (4.5)$$

При решении краевой задачи (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) применялся итерационный численный метод на основе алгоритма Левенберга–Марквардта, являющегося комбинацией методов Рунге–Кутты, Ньютона и градиентного спуска [7]. Следует отметить, что в работе [13] осуществлялась попытка выполнить условие $\Lambda(T) = \Lambda_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве начальных условий по сопряженным переменным Φ , p брались их значения, полученные в точном решении применительно к сферически-симметричному КА в классе плоских эйлеровых поворотов [2].

Для твердых тел (КА) с различным распределением масс сравним кинематические характеристики оптимального движения в задачах оптимального разворота с одними и теми же граничными условиями, например:

$$\Lambda_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \quad \omega_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \quad (4.6)$$

$$\Lambda_T = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \quad \omega_T = (0.0, 0.0, -0.59). \quad (4.7)$$

Т е л о 1. Сферически симметричное твердое тело $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$.

Т е л о 2. Произвольное тело $I_1 = 0.9869$, $I_2 = 1.1843$, $I_3 = 0.7895$.

Т е л о 3. Произвольное тело $I_1 = 0.9506$, $I_2 = 1.3308$, $I_3 = 0.5704$.

Т е л о 4. Международная космическая станция (МКС) (ранняя версия [14]) как произвольное твердое тело $I_1 = 4853000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 23601000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 26278000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные величины).

Т е л о 5. “Спейс Шаттл” (динамические характеристики КА “Спейс Шаттл” такие же, как у почти осесимметричного твердого тела): $I_1 = 3400648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 21041672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$; $I_3 \approx I_2$.

Т е л о 6. Произвольное тело $I_1 = 0.9116$, $I_2 = 1.3674$, $I_3 = 0.5470$.

В табл. 1 представлены кинематические характеристики (компоненты кватерниона положения КА и вектора угловой скорости) для пяти из вышеуказанных тел при $t = 0.5$ (в середине промежутка времени оптимального движения) при решении задачи оптимального управления с граничными условиями (4.6), (4.7) в классической постановке. В последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи оптимального управления, о которой пойдет речь в разд. 6, 7 статьи.

Таблица 1. Величины кватерниона ориентации и вектора угловой скорости

Тело	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.8096	0.3625	-0.3768	0.2668	-0.0502	-0.0114	-0.4937
2	0.8095	0.3628	-0.3766	0.2670	-0.0499	-0.0115	-0.4941
3	0.8093	0.3631	-0.3765	0.2674	-0.0496	-0.0116	-0.4949
4	0.8077	0.3654	-0.3773	0.2678	-0.0506	-0.0159	-0.4949
5	0.8086	0.3634	-0.3780	0.2668	-0.0519	-0.0137	-0.4948
Модифицированная задача	0.8099	0.3627	-0.3756	0.2673	-0.0488	-0.0098	-0.4938

Таблица 2. Величины углового ускорения

Тело	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
1	-0.9854	0.7259	-0.4892	-0.2917	0.2087	-0.2878	0.5077	-0.1272	-0.0985
2	-0.9649	0.7262	-0.4736	-0.3051	0.2053	-0.2902	0.5357	-0.1154	-0.0965
3	-0.9399	0.7235	-0.4449	-0.3207	0.2039	-0.2942	0.5681	-0.1076	-0.0940
4	-0.9262	0.6536	-0.4422	-0.3182	0.2586	-0.2978	0.5591	-0.2446	-0.0886
5	-0.7914	0.6537	-0.4345	-0.3968	0.2549	-0.3002	0.7341	-0.2381	-0.0875
Модифицированная задача	-0.9647	0.7634	-0.4932	-0.3103	0.1687	-0.2847	0.5350	-0.0220	0.1024

Таблица 3. Кватернион ориентации и вектор угловой скорости

Тело	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0.78995	0.41434	-0.35808	0.28583	0.32168	-0.01522	-0.52451
6	0.78999	0.41442	-0.35860	0.27492	0.32414	-0.01453	-0.52402
4	0.79080	0.41371	-0.35618	0.27679	0.31768	-0.01578	-0.52304
5	0.79103	0.41317	-0.35664	0.27635	0.31932	-0.01491	-0.52314

Таблица 4. Угловое ускорение

Тело	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
1	0.26547	0.38677	-1.00250	-0.06733	0.52385	0.10458	-0.43888	0.74958	1.18404
6	0.19271	0.34271	-1.05149	-0.05270	0.54857	0.12304	-0.41047	0.70409	1.16712
4	0.36496	0.53821	-1.00244	-0.07017	0.44837	0.10585	-0.54722	0.88317	1.18497
5	0.28551	0.51819	-1.00680	-0.04259	0.45769	0.10771	-0.55803	0.86381	1.18517

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 2 рассмотрены компоненты векторов углового ускорения $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t)\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2(t)\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3(t)\mathbf{i}_3 = \dot{\omega}(t)$ для начала, середины и конца процесса оптимального управления ($t = 0, t = 0.5, t = T = 1$).

Также опишем кинематические характеристики оптимального движения различных тел для случая, когда начальное состояние тела определяется соотношением (4.6), а конечное состояние соотношением

$$\Lambda_T = (0.79368, 0.49375, -0.26823, 0.23309), \quad \omega_T = (0.2, 0.3, -0.2). \quad (4.8)$$

В табл. 3 для тел 1, 4–6 представлены компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0.5$.

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0, t = 0.5, t = T = 1$.

Аналогичные расчеты проводились и для других начальных и конечных состояний тел. Из табл. 1–4 и других вычислений с граничными условиями видно, что кинематические характеристики оптимального движения тел существенно зависят от начального и конечного состояния тел и слабо зависят от распределения масс в теле. Отсюда следует, что, используя кинематические характеристики тела со сферической симметрией, из динамических уравнений Эйлера с учетом моментов инерции произвольных тел можно вычислить управляющие моменты для движения произвольных тел. Такие моменты можно рассматривать как квазиоптимальные управляющие моменты для перевода твердых тел из начального состояния в конечное состояние. Выражения для кватерниона ориентации и угловой скорости можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимальной переориентации, а управляющий момент определить исходя из решения обратной задачи динамики. Опишем этот подход.

5. Модифицированная задача оптимального управления. Точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости, или иначе задачи Дарбу (1.1), в общем случае не известно. Поэтому рассмотрим решение задачи в классе обобщенных конических движений и принудительно зададим вектор угловой скорости $\omega(t)$ формулой

$$\omega(t) = i_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + i_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + i_3 \dot{g}(t), \quad (5.1)$$

где функции $f(t)$ и $g(t)$ произвольны. В этом случае уравнение (1.1) имеет точное решение [15], удовлетворяющее начальному условию (1.3):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-i_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-i_2 f(0)/2\} \circ \exp\{i_2 f(t)/2\} \circ \exp\{i_3 g(t)/2\}, \quad (5.2)$$

где “ $\exp\{.\}$ ” – кватернионная экспонента [2].

Выражения (5.1), (5.2) соответствуют всем известным точным решениям классической задачи оптимального управления угловым движением сферически-симметричного КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения КА или совершает регулярную прецессию [1–3, 16]. При этом с помощью взаимно-однозначных замен переменных [15] задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (1.1), где угловая скорость примет вид

$$\omega^*(t) = -\omega(t),$$

и будет отличаться от (5.1) только знаком (однако задача Дарбу (1.1) по-прежнему не разрешима). Другими словами, структура вектора угловой скорости (5.1) хорошо соотносится с концепцией Пуансо из теоретической механики, заключающейся в том, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение [17].

Формулы (5.1), (5.2) можно обобщить, введя в них постоянный кватернион K , $\|K\| = 1$:

$$\omega = \tilde{K} \circ (i_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + i_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + i_3 \dot{g}(t)) \circ K, \quad (5.3)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{K} \circ \exp\{-i_3 g(0)/2\} \circ \exp\{i_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{i_3 g(t)/2\} \circ K. \quad (5.4)$$

Положим вторые производные от функций f и g в качестве управлений. С учетом обозначений

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1 \quad (5.5)$$

можно составить управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2, \quad (5.6)$$

где f, f_1, g, g_1 являются фазовыми координатами, u_1, u_2 – управлениями. Кватернион K представим произведением

$$K = K_2 \circ K_1, \quad K_1 = \exp\{i_1 \alpha_1/2\}, \quad K_2 = \exp\{i_2 \alpha_2/2\}, \quad (5.7)$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (5.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1$, Поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже включен в формулу (5.3), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}. \quad (5.8)$$

Удовлетворение краевым условиям (1.3), (1.4), (4.5) функций $\boldsymbol{\omega}$, Λ (5.3), (5.4) с учетом (5.7), (5.8) запишется так:

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0, \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T, \quad (5.10)$$

$$\Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \Lambda_T. \quad (5.11)$$

Для управляемой системы (5.6) поставим следующую задачу оптимизации. Требуется найти оптимальные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, которые переводят управляемую систему (5.6) из положения

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \quad (5.12)$$

в положение

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \quad (5.13)$$

удовлетворяющие соотношениям (5.9)–(5.11), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt. \quad (5.14)$$

Выражения (5.9)–(5.11) перепишем так:

$$\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad (5.16)$$

$$\exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2. \quad (5.17)$$

Такую задачу оптимизации будем называть модифицированной задачей оптимального управления угловым движением КА, точное решение которой допустимо рассматривать как приближенное или квазиоптимальное решение исходной задачи (1.1)–(1.4), (2.1). Из уравнения (1.2) на основе обратной задачи динамики твердого тела определяется управляющий момент КА, соответствующий решению модифицированной задачи:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]. \quad (5.18)$$

6. Точное решение модифицированной задачи. Функция Гамильтона–Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления

$$H = -\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2. \quad (6.1)$$

Здесь $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \quad (6.2)$$

общее решение которой содержит произвольные константы $c_1, \dots, c_4$:

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \quad (6.3)$$

Условие максимума для (6.1) дает оптимальные управления

$$u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (5.6), получаем выражения для фазовых координат, содержащие восемь неопределенных констант $c_1, \dots, c_8$:

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6, & g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & g_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу того, что в выражение для функции f константа c_6 входит аддитивно, из (5.4) видно, что она не оказывает влияния, и поэтому c_6 можно не учитывать. Тогда для поиска девяти неизвестных $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ имеется девять уравнений (5.15)–(5.17) (из-за наличия условия $\|\mathbf{A}\| = 1$ в кватернионном уравнении (5.17) независимыми являются только три скалярных уравнения). Подставляя формулы (6.5) в (5.3), (5.4), получим выражения для вектора угловой скорости и кватерниона ориентации КА. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума функционала (5.14) угловой маневр КА, построенный в классе обобщенных конических движений. Внешний управляющий момент, приложенный к КА, на основе (5.3), (5.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \\ &+ \mathbf{i}_2(u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + \\ &+ [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K}, \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Отметим, что для сферически-симметричного КА скалярный квадрат вектора управляющего момента выражается через переменные модифицированной задачи так:

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + u_2^2 + f_1^2 g_1^2. \quad (6.7)$$

В случае плоского поворота сферически-симметричного КА [2], когда $\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ (1.4) коллинеарны vect($\tilde{\mathbf{A}}_0 \circ \mathbf{A}_T$), решения классической и модифицированной задач тождественно равны. Это справедливо и для случаев решения задач углового движения сферически-симметричного КА в классе регулярных конических движений (регулярной прецессии) [12]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (6.7) обращается в нуль и критерий (5.14) соответствует критерию (1.5) (2.1) классической задачи. В задаче углового движения сферически-симметричного КА при произвольных граничных условиях, полагая, что $\int_0^1 f_1^2 g_1^2 dt$ мало по сравнению с $\int_0^1 \mathbf{M}^2 dt$, в (6.7) можно опустить послед-

нее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных f, g, f_1, g_1, u_1, u_2 с функционалом (5.14) и выражениями (5.3), (5.4), (5.15)–(5.17), (6.5), (6.6) будет соответствовать классической задаче оптимального поворота сферически-симметричного тела в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений разд. 5 статьи, модифицированная задача может рассматриваться в качестве квазиоптимальной задачи управления угловым движением произвольного КА при произвольных краевых условиях.

Квазиоптимальный алгоритм углового движения КА произвольной динамической конфигурации при произвольных краевых условиях имеет следующий вид:

1) по заданным величинам $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_T, \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ (1.3), (1.4) и $T = 1$ из (5.7), (5.8), (5.15)–(5.17) вычисляются девять неопределенных констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ и выражаются функции f, f_1, g, g_1 ;

2) используя (5.7), рассчитываем кватернион $\mathbf{K}$;

3) определяем вектор угловой скорости КА

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K};$$

4) находим кватернион ориентации КА

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K};$$

5) с использованием (6.6) определяем вектор управляющего момента $\mathbf{M}$;

6) из выражений (2.1), (6.6) находится значение безразмерного критерия оптимизации задачи оптимальной переориентации КА.

Таблица 5. Управляющий момент для тела 3

t	$M_1^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	−0.9480	0.9316	−0.2786	−0.9715	0.9847	−0.3062
0.5	−0.3093	0.2807	−0.1676	−0.2987	0.2337	−0.1622
$T = 1$	0.5401	−0.1432	−0.0536	0.5085	−0.0293	−0.0584

Таблица 6. Управляющий момент для тела 4

t	$M_1^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	−0.2091	0.8349	−0.6241	−0.2181	0.9608	−0.6893
0.5	−0.0741	0.2697	−0.3795	−0.0725	0.1683	−0.3630
$T = 1$	0.1318	−0.2804	−0.1131	0.1261	−0.0253	−0.1307

Таблица 7. Управляющий момент для тела 5

t	$M_1^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_2^{\text{классич}}$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	−0.1556	0.8793	−0.5955	−0.1897	1.0127	−0.6669
0.5	−0.0780	0.2846	−0.3644	−0.0610	0.1807	−0.3459
$T = 1$	0.1444	−0.2897	−0.1065	0.1052	−0.2682	−0.1246

Таблица 8. Функционалы классической и модифицированной задач

Класс тела	Тело 1	Тело 2	Тело 3	Тело 4	Тело 5
$J^{\text{классич}}$	0.4782	0.4920	0.4947	0.35522	0.35797
$J^{\text{модиф}}$	0.4797	0.4935	0.4966	0.36404	0.36775

7. Числовые примеры. Рассматриваются сравнительные результаты численных решений классической и модифицированной задач оптимальной переориентации КА (твердого тела). Для модифицированной задачи выполнялись расчеты по аналитическому алгоритму разд. 6 статьи. Значения констант $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, для углового движения с краевыми условиями (4.6), (4.7) таковы:

$$\alpha_1 = -0.0421, \quad \alpha_2 = -0.2226, \quad c_1 = 3.2902, \quad c_2 = -1.4885, \quad c_3 = 2.2113, \\ c_4 = -1.45, \quad c_5 = -0.4156, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -0.2221, \quad c_8 = -0.9216.$$

Результаты решений двух задач оказались близки. В табл. 5–7 приводятся значения вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения в этих решениях для тел типа 3–5.

В табл. 8 рассмотрены значения функционала (2.1) для тел 1–5, полученные в результате решения классической и модифицированной задач с краевыми условиями (4.6), (4.7).

Как видно, по мере возрастания различия между моментами инерции тел I_1, I_2, I_3 возрастает разница между управляющими моментами, полученными при решении двух задач. Также оказывает влияние характер изменения величин I_1, I_2, I_3 между собой. При этом расхождение значений критерия качества (2.1) в классической и модифицированной задачах допустимо. Отметим, что величина критерия качества является важнейшим показателем в задачах оптимизации.

Также проводились численные решения задачи оптимального управления угловым движением для случаев, когда начальное состояние твердого тела (КА) определялось соотношениями (4.6). Конечное положение тела задавалось поворотом тела из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами:

$$(0.04500, -0.07519, -0.99615). \quad (7.1)$$

Таблица 9. Формирование кватернионов конечной ориентации КА

φ	$\lambda_0(T)$	$\lambda_1(T)$	$\lambda_2(T)$	$\lambda_3(T)$
30.0	0.84643	0.40650	-0.31853	0.12982
60.0	0.84013	0.48716	-0.21783	-0.09703
90.0	0.77657	0.53461	-0.10229	-0.31727
120.0	0.66009	0.54564	0.02023	-0.51589
150.0	0.49863	0.51948	0.14136	-0.67935
180.0	0.30318	0.45792	0.25286	-0.79652

Таблица 10. Величины функционалов и их расхождения

Тело	Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 30.0^\circ$	$\varphi = 60.0^\circ$	$\varphi = 90.0^\circ$	$\varphi = 150.0^\circ$	$\varphi = 180.0^\circ$
1	$J_{\text{классич}}$	0.52385	4.63277	15.31437	56.39081	86.78094
	$J_{\text{модиф}}$	0.52510	4.63724	15.32882	56.52086	87.51533
	ΔJ	0.00125	0.00447	0.01445	0.13005	0.73439
	%	0.24	0.10	0.09	0.23	0.85
6	$J_{\text{классич}}$	0.48938	1.68431	4.99284	17.73522	27.05714
	$J_{\text{модиф}}$	0.49142	1.69229	5.08024	18.48275	28.29371
	ΔJ	0.00204	0.00798	0.08740	0.74753	1.23657
	%	0.40	0.48	1.75	4.20	4.56
4	$J_{\text{классич}}$	0.44007	7.25434	24.73075	88.98745	132.97487
	$J_{\text{модиф}}$	0.44918	7.26926	24.80963	92.18788	142.39358
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	3.30042	9.41871
	%	2.07	0.21	0.32	3.71	7.08
5	$J_{\text{классич}}$	0.44007	7.25434	24.73075	83.69665	128.85478
	$J_{\text{модиф}}$	0.44918	7.26926	24.80963	83.93641	129.60500
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	0.23976	0.75022
	%	2.09	0.21	0.32	0.29	0.56

В табл. 9 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлера угла φ в градусах вокруг вектора (7.1).

В табл. 10 представлены значения функционалов классической и модифицированной задач, определяющих качество процесса перевода тел 1, 4–6 из начального состояния (4.6) в конечные состояния Λ_T по табл. 9 и при $\omega_T = (0.0, 0.0, -0.59)$, с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta J = J_{\text{модиф}} - J_{\text{классич}}$ и процентного расхождения $(\Delta J / J_{\text{классич}}) \times 100\%$.

В табл. 11 приводятся подобные показатели, когда конечная угловая скорость твердых тел определяется вектором

$$\omega_T = (0.0, 0.0, 0.0),$$

т.е. в этом случае твердое тело (КА) переводится в состояние покоя.

Из численных экспериментов для различных параметров задачи управления угловым движением КА следует, что кватернион ориентации КА Λ и его угловая скорость ω не существенно зависят от величин I_1, I_2, I_3 и в большей степени зависят от краевых условий, а управляющий

Таблица 11. Величины функционалов и их расхождения

Тело	Функционалы и расхождения их величин	$\varphi = 90.0^\circ$	$\varphi = 120.0^\circ$	$\varphi = 150.0^\circ$	$\varphi = 180.0^\circ$
1	$J_{\text{классич}}$	24.25074	45.17597	72.66431	106.71186
	$J_{\text{модиф}}$	24.28745	45.19513	72.77169	107.40843
	ΔJ	0.03672	0.01916	0.10738	0.69657
	%	0.15	0.04	0.15	0.65
6	$J_{\text{классич}}$	7.67679	14.14398	22.61087	33.03152
	$J_{\text{модиф}}$	7.82727	14.55971	23.46155	34.32325
	ΔJ	0.15048	0.41573	0.85068	1.29173
	%	1.92	2.94	3.76	3.91
4	$J_{\text{классич}}$	39.30956	72.66173	113.88517	162.63861
	$J_{\text{модиф}}$	39.45538	73.72885	118.74480	174.83836
	ΔJ	0.14582	1.06712	4.85963	12.19975
	%	0.37	1.47	4.26	7.53
5	$J_{\text{классич}}$	35.85965	67.01230	83.69665	158.59297
	$J_{\text{модиф}}$	35.91027	67.10659	83.93641	159.06287
	ΔJ	0.06062	0.09429	0.23976	0.46990
	%	0.17	0.14	0.29	0.30

момент определяется величинами I_1, I_2, I_3 и краевыми условиями задачи. Не существенная зависимость кинематических характеристик оптимального управления угловым движением КА от его динамических параметров обеспечивает близость решений классической и модифицированной задач оптимального управления угловым движением динамически произвольного КА, что позволило рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное решение классической задачи оптимальной переориентации КА.

Отметим, что кватернион ориентации КА $\Lambda(t)$ может быть двужначным [2], т.е. Λ и $-\Lambda$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение. Аналитический квазиоптимальный алгоритм управления угловым движением КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации с произвольными краевыми условиями применим в системах управления КА. Предлагаемый алгоритм имеет теоретическое обоснование и с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА. При этом он не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения. Полученные результаты могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи элементов не жесткости конструкции КА и различных возмущений. Результаты также могут быть применены для КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности.

На основе предложенного в статье алгоритма переориентации КА может быть аналитически приближенно решена задача управления оптимального в смысле минимума дуального интегрального квадратичного функционала качества в отношении взаимосвязанного (совместного) управления угловым и поступательным движениями КА или, иначе, задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат маневрирования КА. В этом случае построение квазиоптимальной программной траектории и управления пространственным движением КА в классе дуальных (винтовых) конических движений в бикватернионной постановке осуществляется с использованием концепции решения обратных задач динамики для бикватернионных уравнений движения твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control Dynam. 1994. V. 17. № 2.
2. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
3. *Junkins, J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N.Y.: Elsevier, 1986.
4. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.
5. *Левский М.В.* Ограниченное квадратично оптимальное управление разворотом космического аппарата за фиксированное время // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1.
6. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6.
7. *Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6.
8. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Quasi-Optimal Solution of the Problem of the Time-Optimal Rotation of a Spacecraft // J. Comput. Sci. Int. 2021. V. 60. № 4.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Analytical Solution of the Problem on an Axisymmetric Spacecraft Attitude Maneuver Optimal with Respect to a Combined Functional // Automat. Remote Contr. 2021. V. 82. № 7.
10. *Акуленко Л.Д., Лилов Л.К.* Синтез квазиоптимальной системы переориентации и стабилизации КА // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 2.
11. *Boyarko G.A., Romano M., Yakimenko O.A.* Time-Optimal Reorientation of a Spacecraft Using an Inverse Dynamics Optimization Method // J. Guidance, Control Dynam. 2011. V. 34. № 4.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
13. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Int. J. Contr. 1978. V. 27. № 4.
14. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.
15. *Molodenkov A.V.* On the solution of the Darboux problem //Mechan. Solid. 2007. V. 42. № 2.
16. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion // J. Comput. Sci. Int. 2013. V. 52. № 3.
17. *Molodenkov A.V., Pereleyev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // J. Guidance, Control Dynam. 2021. V. 44. № 6.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ЗАДАННОЕ ВРЕМЯ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО УПРАВЛЯЮЩИХ И ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2023 г. М. В. Левский

*Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –
филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, Королев, Россия*

e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.2021 г.

После доработки 15.12.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Рассмотрена и решена задача динамического оптимального разворота космического аппарата из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение. Время разворота фиксировано. Для оптимизации программы управления вращением используется комбинированный критерий качества, минимизируемый функционал характеризует энергетические затраты и объединяет в заданной пропорции затраты управляющих усилий и интеграл энергии вращения. Аналитическим путем получено решение поставленной задачи. Построение оптимального управления разворотом основано на кватернионных моделях и принципе максимума Л.С. Понтрягина. Условия оптимальности записаны в аналитической форме, и изучены свойства оптимального движения. Приведены формализованные уравнения и расчетные выражения для определения оптимальной программы разворота. Закон управления сформулирован в виде явной зависимости управляющих переменных от фазовых координат. Выписаны аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального движения КА. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления вращением. Также описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота. Для осесимметричного космического аппарата дается полное решение задачи переориентации в замкнутой форме. Приводятся пример и результаты математического моделирования динамики движения космического аппарата при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления пространственной ориентацией космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338823030095, EDN: EUTKAS

Введение. Решается задача перевода космического аппарата (КА) как твердого тела из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главное отличие предложенного решения заключается в использовании нового функционала качества. Способ решения и формализация описания кинематики вращательного движения КА основаны на методе кватернионов [1]. Для построения оптимальной программы разворота применяются кватернионные модели, принцип максимума и универсальные переменные [2].

Исследованию задач управления разворотом твердого тела в различных постановках посвящено множество работ [1–24]. Большинство существующих решений задачи пространственного разворота соответствуют вращению вокруг неподвижной оси [1, 3–9]. И хотя принципы построения алгоритмов управления различны (на базе нечеткой логики [5], концепции обратной задачи динамики [6], с помощью прогнозирующих моделей [7] и пр.), результирующее управление приводит к развороту вокруг оси, неподвижной относительно связанной системы координат. Однако разворот в плоскости наименьшего угла разворота во многих практических случаях не является оптимальным, как бы точно он не исполнялся.

Вопросы разработки эффективных алгоритмов управления ориентацией КА остаются актуальными и сегодня. Особое место занимают задачи оптимального управления КА [1–4, 8–23]. Большой практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота в замкнутой форме, так как они позволяют применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Наиболее по-

дробно задача оптимального управления угловым движением КА решена только для плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции [4] и пространственного вращения сферически-симметричного тела [1, 10]. Некоторые решения известны для осесимметричного КА [11–14]. Для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА аналитическое решение задачи пространственного разворота не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (например, [1, 3]). Поэтому в общем случае приходится рассчитывать только на приближенное численное решение задачи. Интересные результаты приведены в работе [11], где для решения краевой задачи принципа максимума была сделана замена переменных и исходная задача свелась к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела. Хорошо известна задача оптимального по времени разворота [1, 8, 12–18]. Некоторые предыдущие публикации посвящены кинематической задаче разворота [19–22]. В них в отличие от предлагаемого решения для оптимизации использовались функционал “пути” [19], интеграл от кинетической энергии вращения [20], минимизировался модуль кинетического момента на заданном отрезке времени [21] или ограничивались динамические нагрузки, вызванные вращением КА [22].

Ниже исследуется задача управления угловым движением КА, когда силовой момент не ограничен, фазовыми переменными являются кватернион ориентации связанной системы координат относительно инерциального базиса и угловая скорость КА (как твердого тела), а для оптимизации программы управления применяется новый функционал качества, который объединяет в заданной пропорции интеграл от квадратичной свертки по силовым моментам и интеграл от кинетической энергии вращения. Вопросы экономичности управления движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая в статье задача является практически важной. Приведенное ниже решение отличается от всех известных; во время оптимального разворота и управляющие функции, и фазовые переменные — гладкие непрерывные функции времени.

1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления. Динамика углового движения КА как твердого тела описывается уравнениями Эйлера [1, 4]:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \quad J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3, \quad (1.1)$$

где J_i , $i = \overline{1, 3}$, — главные центральные моменты инерции аппарата, M_i — проекции главного момента $\mathbf{M}$ сил на главные центральные оси эллипсоида инерции аппарата, ω_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса, образованного главными центральными осями эллипсоида инерции аппарата. В условиях космического полета особенность управления заключается в малости возмущающих моментов, обусловленных взаимодействием КА с внешними полями и сопротивлением среды. Управление движением КА относительно центра масс производится путем изменения силового момента $\mathbf{M}$. Полагаем, что управление ориентацией КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА.

Для описания пространственного движения КА воспользуемся математическим аппаратом кватернионов (параметров Родрига—Гамильтона). Положение связанного базиса относительно опорного базиса $\mathbf{I}$ будем задавать кватернионом Λ [1]. Для определенности базис $\mathbf{I}$ считается инерциальным. В этом случае справедливо следующее кинематическое уравнение [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

где символ “ $\circ$ ” — знак умножения кватернионов [1, с. 11–20]. Здесь и далее операция кватернионного умножения на вектор понимается как умножение на кватернион с нулевой скалярной частью. В частности, $\Lambda \circ \boldsymbol{\omega} = \Lambda \circ \Omega$, где Ω — кватернион, у которого $\text{scal } \Omega = 0$, $\text{vect } \Omega = \boldsymbol{\omega}$. Для удобства кватернион Λ , определяющий текущую ориентацию КА, принят нормированным [1] ($\|\Lambda\| = 1$).

Практическое значение имеют задачи, в которых в начальный и конечный моменты времени угловые скорости относительно опорного базиса отсутствуют, поэтому начальная и конечная скорости равны нулю: $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (так как опорный базис $\mathbf{I}$ не вращается, он фиксированный); разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя. Для динамической системы (1.1), (1.2) запишем граничные условия задачи оптимального разворота:

$$L(0) = L_n, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$L(T) = L_k, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \quad (1.4)$$

где T — время окончания поворотного маневра. Кватернионы Λ_n и Λ_k , задающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию $\|\Lambda_n\| = \|\Lambda_k\| = 1$ (предполагается, что $\Lambda_k \neq \pm \Lambda_n$).

Эффективность управления будем оценивать интегральной величиной

$$G = \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3)dt + k_0 \int_0^T (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)dt, \quad (1.5)$$

где $k_0 > 0$ — постоянный положительный коэффициент ($k_0 \neq 0$). Задача оптимального управления пространственным разворотом КА формулируется следующим образом: КА необходимо перевести из состояния (1.3) в состояние (1.4) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) с минимальным значением функционала (1.5). Время разворота T фиксировано. Решение $\mathbf{M}(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества позволяет определить режим вращения КА, при котором КА перейдет из исходного своего положения Λ_n в заданное конечное угловое положение Λ_k с минимальными затратами управляющих ресурсов и энергии, и найти соответствующую программу управления. Сформулированная задача управления отличается от рассматриваемых ранее задач видом функционала (1.5), при котором даже в отсутствие ограничений на управление управляющие переменные не могут быть неограниченно большими. И еще одна особенность. Поскольку на управляющий момент $\mathbf{M}$ не наложено ограничений, то требуемый поворотный маневр может быть выполнен при любых условиях разворота Λ_n, Λ_k , любых значениях J_1, J_2, J_3, k_0 и при любом заданном времени T . Так как оптимизация основана на квадратичном критерии качества, то с ростом времени T величина (1.5) уменьшается. От коэффициента k_0 зависит, насколько пологим будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота.

2. Решение задачи оптимального управления разворотом. Рассматриваемая задача оптимального управления (1.1)–(1.5) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [1], в которой управляющими функциями являются моменты $M_i, i = \overline{1, 3}$. Поставленную задачу решаем на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [25]. Введем сопряженные переменные ϕ_i , соответствующие угловым скоростям $\omega_i, i = \overline{1, 3}$. Критерий оптимальности не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации Λ), поэтому используем универсальные переменные $r_i, i = \overline{1, 3}$ [2], заменяющие сопряженные переменные ψ_j , которые соответствуют компонентам λ_j кватерниона $\Lambda, j = \overline{0, 3}$. Ограничение на фазовую переменную Λ (и соответственно на λ_j) несущественно, так как оно выполняется при любых движениях КА вокруг центра масс; $\|\Lambda(t)\| = \text{const}$ в силу уравнения (1.2) [1]. Мы полагаем $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_n\| = 1$, а значит, $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

2.1. Функция Гамильтона и сопряженная система уравнений. Для задачи оптимального управления (1.1)–(1.5) функция Гамильтона имеет вид [2]

$$H = -(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) - k_0(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) + \phi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ + \phi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \phi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1r_1 + \omega_2r_2 + \omega_3r_3,$$

где

$$r_1 = (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, \quad r_2 = (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2, \\ r_3 = (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2.$$

Оптимальные функции r_i , как компоненты вектора $\mathbf{r}$, и вектор $\mathbf{r}$ удовлетворяют уравнениям [2]

$$\dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \\ \dot{r}_1 = \omega_3r_2 - \omega_2r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1r_3 - \omega_3r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2r_1 - \omega_1r_2 \quad (2.1)$$

(символ $\times$ означает векторное произведение векторов). Уравнения для сопряженных функций ϕ_i известны [25]:

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Поэтому сопряженная система уравнений для функций ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 выглядит следующим образом:

$$\dot{\phi}_1 = 2k_0J_1\omega_1 + \omega_3\phi_2(J_1 - J_3)/J_2 + \omega_2\phi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_1, \\ \dot{\phi}_2 = 2k_0J_2\omega_2 + \omega_3\phi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\phi_3(J_2 - J_1)/J_3 - r_2, \\ \dot{\phi}_3 = 2k_0J_3\omega_3 + \omega_2\phi_1(J_3 - J_2)/J_1 + \omega_1\phi_2(J_1 - J_3)/J_2 - r_3. \quad (2.2)$$

Гамильтониан H составлен без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор $\mathbf{r}$ является постоянным относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (постоянство модуля $|\mathbf{r}|$ следует из свойств уравнений (2.1)). Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (2.1) определяется начальным Λ_n и конечным Λ_k положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_n \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n$$

(составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси инерциального базиса $\mathbf{I}$); $\tilde{\Lambda}$ — кватернион, сопряженный кватерниону Λ [1, с. 11–20]. Считается, что $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (в противном случае $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора $\mathbf{c}_E$ зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце $\Lambda(T) = \Lambda_k$, необходимо определить вектор $\mathbf{c}_E$ (или значение вектора $\mathbf{r}$ в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2).

2.2. Условия максимума гамильтониана и структура оптимального управления. Для определения условий максимума функции H в явном виде представим гамильтониан:

$$H = -\left(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3\right) + M_1\varphi_1/J_1 + M_2\varphi_2/J_2 + M_3\varphi_3/J_3 + H_{\text{inv}},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i . Гамильтониан H — квадратичная функция моментов M_i , и ее максимум определяется необходимыми условиями экстремума $\partial H/\partial M_i = 0$, которым удовлетворяют значения:

$$M_i = \varphi_i/2, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.3)$$

Оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3). Система уравнений (2.1)–(2.3) формализует необходимые условия оптимальности для исходной задачи оптимального управления (1.1)–(1.5). Задача построения оптимальной программы управления свелась к решению системы уравнений углового движения КА (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.1) при условии, что управляющие функции M_i вычисляются в соответствии с (2.3). Сформулированная задача оптимального управления (1.1)–(1.5) решается до формализованной системы уравнений, определяющих оптимальное движение; эта система позволяет обнаружить закономерности оптимального движения в явном виде.

Решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) существует и оно единственное (при условии $\omega(0) = \omega(T) = 0$). Значение $\mathbf{r}(0)$ таково, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с начальными условиями (1.3) для траектории движения $\Lambda(t)$ выполнялись равенства (1.4). В силу свойства $|\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$, для удобства дальнейших рассуждений перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и дальше будем использовать его. Обозначим $r_0 = |\mathbf{r}(t)|$, при этом $r_i = r_0 p_i$. Учитывая соотношения (2.1) и то, что $r_0 = \text{const} \neq 0$, для вектора $\mathbf{p}(t)$ справедливо уравнение $\dot{\mathbf{p}} = -\omega \times \mathbf{p}$ или

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2, \quad (2.4)$$

где p_i — компоненты вектора $\mathbf{p}$. Уравнения (1.1), (2.2), (2.4) совместно с равенствами (2.3) и $r_i = r_0 p_i$ образуют замкнутую систему уравнений.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения вектора $\mathbf{p}(0)$ и положительной величины r_0 , при которых решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.4) с одновременным выполнением (2.3) удовлетворяло условиям разворота (1.3), (1.4). С учетом условий разворота $\omega(0) = \omega(T) = 0$ система уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) имеет единственное решение, в котором функции p_i , φ_i , ω_i связаны следующими равенствами:

$$\varphi_i = a(t)p_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.5)$$

$$\omega_i = b(t)p_i/J_i, \quad (2.6)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции времени, а $p_i = r_i/r_0$. Соответственно $M_i = a(t)p_i/2$.

Истинность решений (2.5), (2.6) для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) подтверждается последовательной подстановкой соотношений (2.5) в уравнение (2.2) с учетом зависимостей $r_i = r_0 p_i$ и связей (2.6) для всех $i = 1, 2, 3$ (равенства (2.6) — прямое следствие системы (1.1), (2.3)–(2.5)). Если обозначить $J_{\text{КА}} = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ — тензор инерции КА, Φ — вектор, компонентами которого являются φ_i , то система (2.2) принимает вид

$$\dot{\Phi} = 2k_0(J_{\text{КА}}\omega) + (J_{\text{КА}}\omega) \times (J_{\text{КА}}^{-1}\Phi) - J_{\text{КА}}(\omega \times (J_{\text{КА}}^{-1}\Phi)) - \mathbf{r}. \quad (2.7)$$

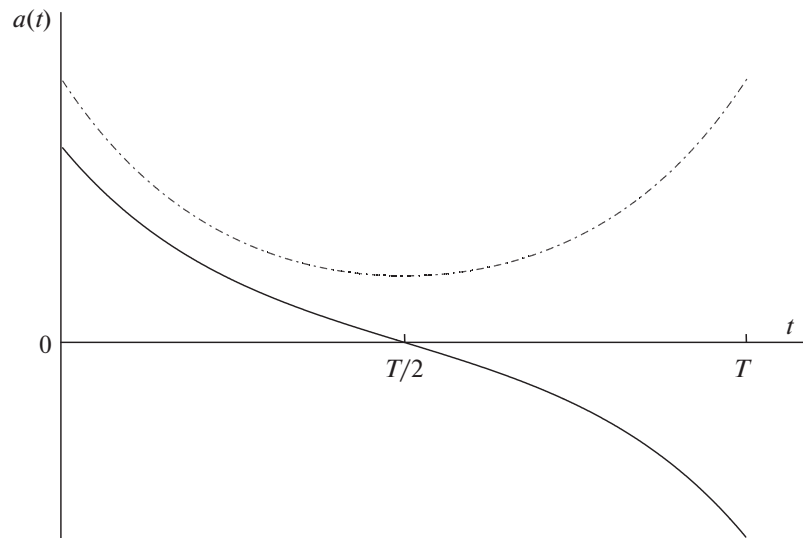


Рис. 1

Правая часть уравнения (2.7) с учетом (2.5), (2.6) будет равна

$$2k_0 b \mathbf{p} + b \mathbf{p} \times (J_{\text{КА}}^{-1} a \mathbf{p}) - J_{\text{КА}}((J_{\text{КА}}^{-1} b \mathbf{p}) \times (J_{\text{КА}}^{-1} a \mathbf{p})) - \mathbf{r} = 2k_0 b \mathbf{p} + a \mathbf{p} \times (J_{\text{КА}}^{-1} b \mathbf{p}) - \mathbf{r} = \\ = 2k_0 b \mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi} - r_0 \mathbf{p} = 2k_0 b \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} - r_0 \mathbf{p}.$$

Левая часть уравнения (2.7) с учетом (2.4), (2.5) такова: $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} + a(t) \dot{\mathbf{p}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ и она тождественно равна правой части, если в зависимостях (2.5) скалярная функция $a(t)$ удовлетворяет условию $\dot{a}(t) = 2k_0 b - r_0$.

Характер изменения функции $a(t)$ при оптимальном управлении демонстрирует рис. 1, на котором сплошная линия соответствует оптимальной функции $a(t)$; пунктирная линия обозначает гипотетическое поведение функции $a(t)$, которое однозначно не может быть оптимальным, так как оно не удовлетворяет краевому условию $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ и равенству $\dot{a}(T) = -r_0$.

2.3. Свойства оптимального движения. Найдем связь между $a(t)$ и $b(t)$. Из уравнений (1.1), (2.3)–(2.6) для оптимальной функции $b(t)$ следует зависимость $\dot{b} = a/2$ или

$$b(t) = \frac{1}{2} \int_0^t a(t) dt. \quad (2.8)$$

Из (2.2), (2.4), (2.5) видно, что оптимальные функции $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\dot{a}(t) = 2k_0 b - r_0.$$

Учитывая последнее равенство и свойство (2.8), для $a(t)$ запишем уравнение $\ddot{a} = k_0 a$, решением которого является функция

$$a(t) = C_1 \exp(-t\sqrt{k_0}) + C_2 \exp(t\sqrt{k_0}).$$

Анализ структуры функции $a(t)$ показывает, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ производная $\dot{a} < 0$, причем на левом и на правом концах траектории она минимальна: $\dot{a}(0) = \dot{a}(T) = -r_0$. Так как граничные угловые скорости равны нулю $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$, то $b(0) = b(T) = 0$, откуда $r_0 = \sqrt{k_0}(C_1 - C_2)$. Соответственно оптимальная функция $b(t)$ имеет вид

$$b(t) = [C_2 \exp(t\sqrt{k_0}) - C_1 \exp(-t\sqrt{k_0}) + C_1 - C_2] / (2\sqrt{k_0}).$$

Из (2.3)–(2.5) отчетливо видно, что при оптимальном управлении силовой момент $\mathbf{M}$ действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевых граничных угловых скоростях $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ решение системы (1.1), (2.2)–(2.4) описывает движение, при котором кинетический момент КА $\mathbf{L}$ имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное. Для движения $\boldsymbol{\omega}(t)$ как решения системы

(1.1), (2.2)–(2.4) (с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) выполняются соотношения (2.6) (то, что равенства (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.4), легко проверить, подставив (2.6) в уравнения движения (1.1) с учетом равенств (2.3), (2.5)).

Легко показать, что для оптимального движения, соответствующего уравнениям (2.4), (2.6), выполняется условие $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$. Для этого достаточно продифференцировать по времени левую часть указанного равенства с учетом (2.4), (2.6) и убедиться, что полученная производная равна нулю после подстановки $\dot{p}_i$ по формулам (2.4) и затем ω_i по выражениям (2.6). Отсюда следует одно из основных свойств оптимального разворота КА: отношение кинетической энергии вращения E к квадрату модуля кинетического момента КА остается постоянным во все время движения (на всем отрезке времени $[0, T]$). Действительно

$$E = b^2(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2, \quad \text{и} \quad E/|\mathbf{L}|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2 = \text{const}$$

(зависимость $b^2 = |\mathbf{L}|^2$ следует непосредственно из формул (2.6)).

Задача построения оптимального управления $\mathbf{M}(t)$ состоит главным образом в нахождении такого вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ и значений констант C_1 и C_2 , чтобы в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1.2), (2.4), (2.6) выполнялись равенства $\Lambda(T) = \Lambda_k$ и $\omega(T) = 0$. Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо решить уравнения (2.4), которые для закона (2.6) примут следующий вид:

$$\dot{p}_1 = |\mathbf{L}| \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = |\mathbf{L}| \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = |\mathbf{L}| \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} p_1 p_2. \quad (2.9)$$

Общее решение приведенной системы уравнений определить практически невозможно. Трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны между собой выражением

$$\Lambda_k \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_k = L_n \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n$$

или $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_p \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_p$, где $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_k$ – кватернион разворота.

2.4. Определение основных констант оптимального управления. Поскольку $b(T) = 0$, то постоянные C_1 и C_2 связаны соотношением $C_1 = -C_2 \exp(T\sqrt{k_0})$. Нетрудно видеть, что $a(T/2) = 0$ и $\dot{a}(T/2) < 0$, а также $a(T) = -a(0)$. Конкретные значения констант C_1 и C_2 вычисляем, используя интеграл

$$Q = \int_0^T b(t) dt, \quad (2.10)$$

значение которого для движений в соответствии с уравнениями (2.4), (2.6) не зависит от характера изменения функции $b(t)$ и определяется исключительно кватернионами Λ_n , Λ_k и моментами инерции КА J_1, J_2, J_3 [19] (величина Q рассчитывается одновременно с вектором $\mathbf{p}_0$). В оптимальном решении постоянные C_1 и C_2 таковы:

$$C_1 = Q / [(\exp(-T\sqrt{k_0}) - 1)/k_0 + T(\exp(-T\sqrt{k_0}) + 1)/(2\sqrt{k_0})], \quad (2.11)$$

$$C_2 = Q / [(\exp(T\sqrt{k_0}) - 1)/k_0 - T(\exp(T\sqrt{k_0}) + 1)/(2\sqrt{k_0})].$$

При любых значениях Q , k_0 и T выполняются условия $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ и тем самым обеспечивается $r_0 > 0$ и $a(0) > 0$, $a(T) < 0$, а $b(t) \geq 0$ на всем отрезке времени $t \in [0, T]$. Чем ближе коэффициент k_0 к нулю, тем ближе $b(t)$ к квадратичной функции времени (при $k_0 \rightarrow 0$ функция $b(t)$ изменяется по параболическому закону, $a(t)$ – линейная функция времени). Чем больше значение k_0 , тем дальше функция $b(t)$ отдалится от параболического изменения. При неограниченном увеличении k_0 функция $b(t)$ приближается по форме к прямоугольному импульсу высотой Q/T (значение Q не зависит от коэффициента k_0 и определяется исключительно граничными значениями Λ_n , Λ_k и моментами инерции КА J_1, J_2, J_3). Рисунки 2, 3 наглядно показывают характер поведения оптимальных функций $b(t)$ и $a(t)$ в зависимости от значения коэффициента k_0 минимизируемого функционала (1.5) (здесь $k_0^{(1)} > 0$, $k_0^{(2)} \gg k_0^{(1)}$); пунктирная линия на обоих рисунках соответствует случаю $k_0 \rightarrow 0$.

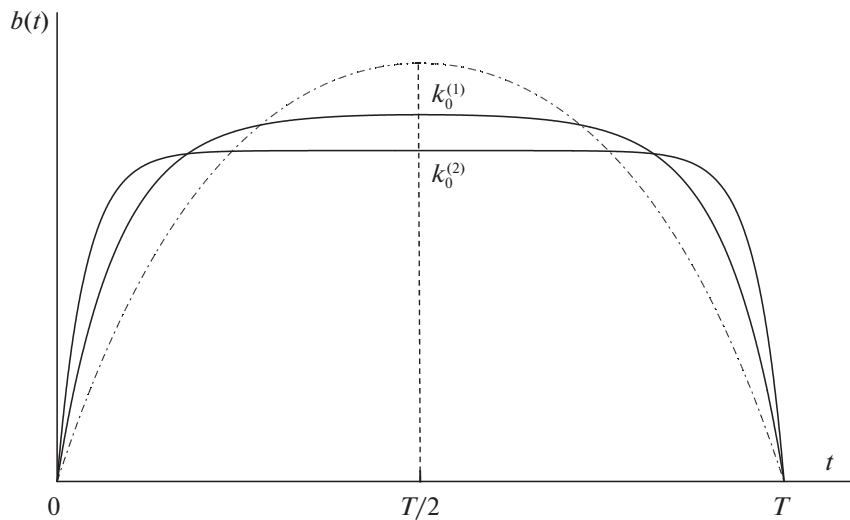


Рис. 2

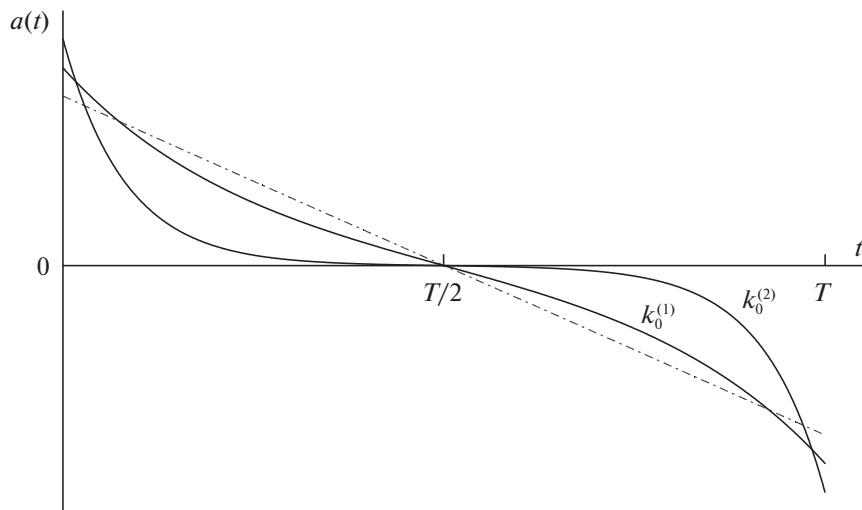


Рис. 3

Уравнения (2.6) отчетливо показывают, что в геометрическом представлении вектор $\mathbf{p}$ есть ни что иное, как орт оптимального кинетического момента КА $\mathbf{L}$ в связанной с КА системе координат. Оптимальные функции $\omega_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ удовлетворяют равенствам (2.5), (2.6), в которых переменные $p_i(t)$ являются решением уравнений (2.4). Оптимальные управления вычисляются по формулам (2.3) с учетом (2.5). Оптимальным (в смысле минимума показателя (1.5)) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ параллельны).

Для оптимальной программы управления $\mathbf{M}(t)$ движение КА относительно центра масс обладает следующими оригинальными свойствами и соотношениями:

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}; \quad \max_{t < T} |\mathbf{M}(t)| = |\mathbf{M}(0)| = |\mathbf{M}(T)|;$$

$$\int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)| dt = \int_{T/2}^T |\mathbf{L}(t)| dt, \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|.$$

В момент времени $t = T/2$ (посередине разворота) момент сил $\mathbf{M}$ равен нулю $\mathbf{M}(T/2) = 0$, а кинетический момент КА достигает максимального значения $|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\max}$.

3. Обоснование единственности оптимального решения. Покажем, что найденное решение (2.5), (2.6) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4). Пусть $\mathbf{q}$ – орт, параллельный моменту $\mathbf{M}$, причем в начальный момент времени $t = 0$ направления векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{q}$ совпадают, т.е. $\mathbf{q}(0)\boldsymbol{\varphi}(0) > 0$ (знак умножения “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение векторов). Тогда $\boldsymbol{\varphi} = \chi \mathbf{q}$, где χ – скалярная функция с начальным значением $\chi(0) > 0$ ($|\mathbf{q}| = 1$). В окрестности точки $t = 0$ имеем $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = K\mathbf{q}$, где $\mathbf{L} = J_{\text{КА}}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент КА; K – скалярная величина. Подставим формулы (2.3) с учетом зависимости $\boldsymbol{\varphi} = \chi(t)\mathbf{q}$ в уравнения (1.1) при наличии равенств $J_i\omega_i = Kq_i$. Получим соотношение

$$\dot{K}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K = \chi(t)\mathbf{q}/2. \quad (3.1)$$

Сумма $\dot{\mathbf{q}}K + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}K$ ортогональна орту $\mathbf{q}$ или равна нулю (всегда $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$, так как $|\mathbf{q}| = 1$). Уравнение (3.1) будет выполнено в единственном случае, если $\dot{K} = \chi(t)/2$ и $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$. Теперь подставим равенства $\boldsymbol{\varphi} = \chi(t)\mathbf{q}$ и $\mathbf{L} = K\mathbf{q}$ в (2.7). Левая часть уравнения (2.7) равна

$$\dot{\chi}\mathbf{q} + \chi\dot{\mathbf{q}} = \dot{\chi}\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}.$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ взято из (3.1)). Правая часть уравнения (2.7) будет такой:

$$\begin{aligned} 2k_0K\mathbf{q} + K\mathbf{q} \times (J_{\text{КА}}^{-1}\chi\mathbf{q}) - \chi J_{\text{КА}}((J_{\text{КА}}^{-1}K\mathbf{q}) \times (J_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} &= 2k_0K\mathbf{q} - \chi(KJ_{\text{КА}}^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \mathbf{r} = \\ &= 2k_0K\mathbf{q} - \chi\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Приравняв левую и правую части уравнения (2.7), получаем уравнение для вектора $\mathbf{q}$:

$$\dot{\chi}\mathbf{q} = 2k_0K\mathbf{q} - r_0\mathbf{p},$$

из чего следуют равенства $r_0 = 2k_0K - \dot{\chi} = -\text{const}$ и $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ (так как $\chi(0) > 0$ и $\chi(T) < 0$, а потому $\dot{\chi} < 0$). В итоге пришли к выводу: если в какой-либо момент времени t кинетический момент $\mathbf{L}$ и вектор $\boldsymbol{\varphi}$ параллельны, то они параллельны на всем интервале управления $0 < t < T$. В самом начале разворота ($\mathbf{L} = h\mathbf{p}$ при $t \rightarrow 0$) и в самом конце маневра ($\mathbf{L} = -h(T-t)\mathbf{p}$ при $t \rightarrow T$) векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{L}$ параллельны (в силу наличия граничных условий $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$), где h – скалярная величина. Поэтому заключаем, что при оптимальном движении на всем отрезке времени $t \in [0, T]$ имеет место свойство $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$. Отсюда становятся очевидны соотношения (2.5), (2.6), определяющие оптимальное управление.

Доказано, что зависимости (2.5), (2.6) есть единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) с граничными условиями $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (с учетом равенств $r_i = r_0p_i$). Имея ввиду выражения (2.3), (2.5), (2.6) и оптимальные значения C_1 и C_2 для функций $a(t)$, $b(t)$, оптимальное управление и оптимальное движение определяют следующие зависимости:

$$M_i = C_1[\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0})]p_i/2, \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.2)$$

$$J_i\omega_i = C_1[1 + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0})]p_i/(2\sqrt{k_0}), \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.3)$$

где p_i – компоненты вектора $\mathbf{p}$, удовлетворяющего уравнениям (2.4) или $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{Н}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{Н}} \circ \Lambda$, $C_1 = Q/[(\exp(-T\sqrt{k_0}) - 1)/k_0 + T(\exp(-T\sqrt{k_0}) + 1)/(2\sqrt{k_0})]$.

Таким образом, решение (3.2), (3.3) системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4) – единственное.

4. Построение типовой программы оптимального разворота КА. Функции $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$, $\omega_i(t)$ будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.4), (2.5), (3.3). Ключевой проблемой в решении задачи оптимального разворота (при построении оптимального программного движения $\boldsymbol{\omega}(t)$) является нахождение начальных условий $\mathbf{p}(0)$. Максимальный управляющий момент $|\mathbf{M}(0)|$ оптимального закона управления определяется значением коэффициента k_0 минимизируемого функционала качества и временем разворота T (вектор $\mathbf{p}(0)$ зависит исключительно от кватерниона разворота $\Lambda_{\text{р}}$ и моментов инерции КА J_1, J_2, J_3 и не зависит от k_0 и T); $|\mathbf{M}(0)| = (C_1 + C_2)/2$. Если $\mathbf{p}(0)$ известно, то $\boldsymbol{\varphi}(0) = (C_1 + C_2)\mathbf{p}(0)$.

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (3.2), для реализации которого необходимо в каждый текущий момент времени t знать все три переменные p_1, p_2, p_3 . Система (1.2), (2.4), (2.6) имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически-симметричного твердого тела ($J_1 = J_2 = J_3$) решение следующее:

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}; \quad M_i(t) = C_1[\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0})]p_{i0}/2; \\ \omega_i(t) &= C_1[1 + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0})]p_{i0}/(2J_i\sqrt{k_0}), \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты векторной части кватерниона разворота Λ_p . Во время оптимального разворота КА вращается вокруг оси Эйлера, поэтому траектория оптимального движения $\Lambda(t)$ имеет аналитический вид

$$\Lambda(t) = \Lambda_H \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/(2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt,$$

где e — кватернионная экспонента [1]; вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью. Приведенное решение существенно отличается от известных случаев [1, 10].

Для динамически симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца (не умаляя общности рассуждений, за ось симметрии принята ось OX КА). Оптимальное движение в этом частном, но достаточно распространенном случае представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг некоторого направления $\boldsymbol{\eta}$, неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол ϑ . Угловые скорости относительно осей OX и $\boldsymbol{\eta}$ изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому справедливо соотношение

$$\Lambda_K = \Lambda_H \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha/2},$$

где векторы в показателе степени кватернионной экспоненты понимаются как кватернионы с нулевой скалярной частью; $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$; $\mathbf{e}_1$ — орт продольной оси КА; α, β — углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора $\mathbf{p}$ соответственно (считается $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$). Решение $\mathbf{p}(t)$ системы (1.2), (2.4), (2.6) представим в следующей форме:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa,$$

$$\text{а} \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt, \quad (4.1)$$

где $p_{i0} = p_i(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная угловая скорость $\omega_1(t)$ определяется из соотношений (3.3) с учетом $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Зависимость параметров p_{i0}, α, β от значений кватернионов Λ_H и Λ_K определяется системой уравнений:

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta; \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0; \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1, \quad (4.2)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2; \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3,$$

где v_0, v_1, v_2, v_3 — компоненты кватерниона разворота $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$; $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$.

Существование решения системы (4.2) для любых значений кватерниона Λ_p доказано в [12]. Программные значения функций ω_i (проекции требуемого вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ на связанные оси) вычисляются по формулам (4.1) и (3.3), где коэффициент C_1 находится из (2.11). В явном виде оптимальное решение $M_i(t), \omega_i(t), i = 1, 3$, запишем следующим образом:

$$M_1 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] p_{10}/2,$$

$$M_2 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)/2,$$

$$M_3 = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)/2,$$

$$\omega_1 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] p_{10}/(2J_1\sqrt{k_0}),$$

$$\omega_2 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)/(2J\sqrt{k_0}),$$

$$\omega_3 = C_1 [1 + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t - T)\sqrt{k_0})] \sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)/(2J\sqrt{k_0}),$$

где $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} < 0$ ($|p_{10}| \neq 1$). Случай $|p_{10}| = 1$ не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению КА вокруг про-

дольной оси OX . Оптимальный угол $\vartheta = \arccos p_{10}$ (значение p_{10} находится из системы (4.2)). Оптимальная траектория движения $\Lambda(t)$ может быть представлена в аналитическом виде

$$\Lambda(t) = \Lambda_n \circ e^{\mathbf{p}_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu \mathbf{e}_1 / 2},$$

где $\sigma = C_1 \left[(\exp(-T\sqrt{k_0}) + 1)t / (2\sqrt{k_0}) + (\exp(-t\sqrt{k_0}) + \exp(-T\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0}) - 1) / (2k_0) \right] / J$; $\mu = \sigma p_{10}(J - J_1) / J_1$ (значения T и k_0 заданы, а коэффициент C_1 определяется формулой (2.11)).

Для несимметричного КА ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (1.2), (2.4), (2.6) находится только численными методами (например, методом последовательных приближений или [26]). Определение вектора $\mathbf{p}_0$ производится путем решения краевой задачи $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_p \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_p$ с учетом накладываемых на движение связей (2.9). В способе [27] и системе [28] такая задача решена для КА с произвольными моментами инерции (методом итераций). Заметим, что решение $\mathbf{p}_0$ не зависит от характера изменения модуля кинетического момента, входящего в уравнения (2.9). Поэтому для нахождения оптимального значения $\mathbf{p}_0$ правомерно принять $|\mathbf{L}| = \text{const} \neq 0$. Случай решения $\mathbf{p}(t)$ системы (2.9) с $|\mathbf{L}| = \text{const}$ соответствует вращению твердого тела с $\mathbf{M} = 0$ (поскольку уравнения (1.1), (2.4) и (2.6) выполняются одновременно).

Для вращения твердого тела с постоянным направлением кинетического момента относительно инерциальной системы координат (независимо от изменения модуля $|\mathbf{L}|$) имеет место равенство

$$\int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = K_c t_{\text{пр}},$$

где K_c — произвольная средняя величина кинетического момента ($K_c > 0$); $t_{\text{пр}}$ — прогнозируемое время разворота из положения Λ_n в положение Λ_k , т.е. время, когда выполнится равенство $\Lambda = \Lambda_k$ для решения $\Lambda(t)$ системы уравнений (1.2), (2.4), (2.6), в которых $b = K_c$, а $\Lambda(0) = \Lambda_n$. Если $b(t) = \text{const} = K_c$, то $Q = K_c t_{\text{пр}}$. Каждой конкретной величине K_c соответствует свое значение $t_{\text{пр}}$ (значения $t_{\text{пр}}$ и K_c связаны обратно пропорциональной зависимостью). Взяв $K_c \neq 0$ и моделируя неуправляемое вращение КА (когда $\mathbf{M} = 0$) для соответствующих начальных условий $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\omega_{i0} = K_c p_{i0} / J_i$, получим прогнозируемое время $t_{\text{пр}}$.

Для построения оптимального управления при развороте КА необходимо знать не только программу изменения координат $p_i(t)$, но и значения постоянных параметров C_1 и C_2 , определяющих темп приближения к требуемому конечному состоянию $\Lambda(T) = \Lambda_k$, $\omega(T) = 0$ (коэффициент k_0 и время разворота T заданы). Конкретное значение $r_0 = |\mathbf{r}|$ и параметры C_1 и C_2 зависят от длительности разворота T , коэффициента k_0 функционала качества и от интеграла Q .

Решение задачи оптимального разворота (в смысле минимума (1.5)) подчиняется уравнениям (2.4)–(2.6), а управляющие переменные M_i и угловые скорости ω_i изменяются в соответствии с законами (3.2), (3.3). Решение (3.2), (3.3) оптимально, потому что оно единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Любое отличное от (3.2), (3.3) движение будет заведомо хуже (в смысле минимума интеграла (1.5)), поскольку не является решением системы (2.2)–(2.4), а значит, не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (согласно принципу максимума). Значение C_1 в законах движения (3.2), (3.3) определяет максимальную величину управляющего момента $|\mathbf{M}(0)|$ и максимальное значение кинетического момента $L_{\text{max}} = |\mathbf{L}(T/2)|$. Значение вектора $\mathbf{p}_0$ рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы r_0 , C_1 полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА. Программное изменение момента сил $\mathbf{M}$ описывается зависимостью

$$\mathbf{M} = C_1 [\exp(-t\sqrt{k_0}) - \exp((t-T)\sqrt{k_0})] \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_n \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda / 2. \quad (4.3)$$

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент k_0 , тем больше максимальный управляющий момент $|\mathbf{M}(0)|$ и тем меньше максимальная энергия вращения $E_{\text{max}} = E(T/2)$ и максимальный кинетический момент $L_{\text{max}} = |\mathbf{L}(T/2)|$. Чем меньше коэффициент k_0 , тем меньше максимальный управляющий момент $|\mathbf{M}(0)|$, но тем больше максимальная энергия вращения $E_{\text{max}} = E(T/2)$ и максимальный кинетический момент $L_{\text{max}} = |\mathbf{L}(T/2)|$. Если $k_0 \rightarrow 0$, то $a(t)$ — линейная функция времени ($\dot{a}(t) \approx \text{const} = -r_0$), а $b(t)$ — квадратичная функция времени (этому случаю соответствуют пунктирная линия на рис. 2). Если $k_0 \rightarrow \infty$, то в середине разворота $\dot{a}(t)$ близка нулю ($\dot{a}(t) \approx 0$, хотя $\dot{a}(t) < 0$) и $b(t) \approx \text{const}$ (см. рис. 2).

Для динамически симметричного КА значения Q , C_1 , C_2 и r_0 вычисляются значительно проще (расчет величин $|\mathbf{M}(0)|$ и $L_{\max}$ также упрощается). В этом частном случае $|\mathbf{L}| = J_2\dot{\beta}$ и $Q = J_2\beta$, где J_2 – момент инерции относительно поперечной оси ($J_2 = J_3$); $\dot{\beta}$ – скорость вращения вокруг кинетического момента $\mathbf{L}$; β – угол поворота КА вокруг вектора $\mathbf{L}$ (из физического смысла $\beta \geq 0$). Чтобы значение оптимизируемого функционала (1.5) было минимальным, необходимо выполнить условие $\beta \leq \pi$ (именно поэтому система (4.2) включает неравенство $0 \leq \beta \leq \pi$). Значения C_1 , C_2 и r_0 зависят только от угла поворота КА вокруг кинетического момента $\mathbf{L}$ и численно равны:

$$C_1 = J_2\beta / \left[(\exp(-T\sqrt{k_0}) - 1) / k_0 + T (\exp(-T\sqrt{k_0}) + 1) / (2\sqrt{k_0}) \right],$$

$$C_2 = J_2\beta / \left[(\exp(T\sqrt{k_0}) - 1) / k_0 - T (\exp(T\sqrt{k_0}) + 1) / (2\sqrt{k_0}) \right], \quad r_0 = \sqrt{k_0}(C_1 - C_2).$$

В случае осевой симметрии КА полученное решение принципиально отличается от известного [12], так как оно не имеет интервалов времени, на которых модуль управляющего момента постоянный; второе отличие – все управляющие функции $M_i(t)$ и все фазовые переменные Λ , ω_i есть непрерывные (даже гладкие) функции времени.

5. Результаты математического моделирования. Для примера рассмотрим разворот некоторого КА на 180° из положения, при котором связанные оси совпадают по направлению с одноименными осями инерциального базиса $\mathbf{I}$, в положение, соответствующее кватерниону Λ_k с элементами $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 k_0 = 0.707$; $\lambda_2 = 0.39$; $\lambda_3 = 0.59$. Приведем численное решение задачи оптимального управления программным разворотом КА с минимальным значением показателя (1.5). При этом считалось, что начальные и конечные угловые скорости нулевые: $\omega(0) = \omega(T) = 0$. Определим оптимальную программу управления скоростью вращения КА $\omega(t)$ для перевода КА из состояния (1.3) в состояние (1.4) за время $T = 300$ с. Инерционные характеристики КА полагаем равными: $J_1 = 25603 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_2 = 91495 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_3 = 80662 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Считаем, что коэффициент $k_0 = 0.01 \text{ с}^{-2}$.

При решении краевой задачи принципа максимума в уравнениях (2.6) полагаем $b = \text{const}$ (и соответственно $|\mathbf{L}| = \text{const}$), так как искомое значение $\mathbf{p}_0$ не зависит от характера изменения функции $b(t)$ [19]. Нахождение расчетного значения вектора $\mathbf{p}_0$ начинаем с решения той же краевой задачи для динамически симметричного КА с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, принимаемый равным

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} \left(\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1 \right).$$

В предположении динамической симметричности КА решение $\mathbf{p}_0$ определяется системой (4.2), в которой элементы кватерниона разворота таковы: $v_0 = 0$; $v_1 = 0.707$; $v_2 = 0.39$; $v_3 = 0.59$. Для симметричного твердого тела искомый вектор $\mathbf{p}_0$ такой: $\mathbf{p}_0^{(0)} = \{0.465250; -0.371480; 0.803458\}$. Полученные из уравнений (4.2) значения $\mathbf{p}_0$ и β являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе уравнений (1.2), (1.1), в которых момент сил отсутствует ($\mathbf{M} = 0$), с учетом накладываемых на движение КА ограничений $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_k$, а начальные угловые скорости $\omega_{\text{ин}}$ определяются вектором $\mathbf{p}_0$ и углом β по следующим выражениям:

$$\omega_{1\text{н}} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \omega_{2\text{н}} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \omega_{3\text{н}} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30}. \quad (5.1)$$

Прогнозирование “свободного” движения осуществляется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающих вращение КА, при начальных условиях $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\omega(0) = \omega_n$ и с учетом того, что $\mathbf{M} = 0$. Степень приближения найденных $\mathbf{p}_0$ и β к искомому решению характеризуется мерой $\varepsilon = \text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{\text{пр}} \circ \Lambda_k)$, где $\Lambda_{\text{пр}}$ – наиболее близкое к Λ_k положение, полученное в ходе моделирования движения КА около центра масс (согласно уравнений (1.2), (1.1), в которых $M_i = 0$). Вектор $\mathbf{p}_0$ уточняется до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{\text{пор}}$ ($\varepsilon_{\text{пор}}$ – некоторое близкое к единице пороговое значение, отражающее точность найденного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{пор}}$ достигнуто (прогнозируемая ошибка соответствует требуемой точности), истинные значения $\mathbf{p}_0$ и β , удовлетворяющие граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\Lambda(t_{\text{пр}}) = \Lambda_k$, будут найдены и краевая задача решена. Вектор $\mathbf{p}_0$ уточняется, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$\Lambda_p^{(k+1)} = \Lambda_p^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{\text{пр}},$$

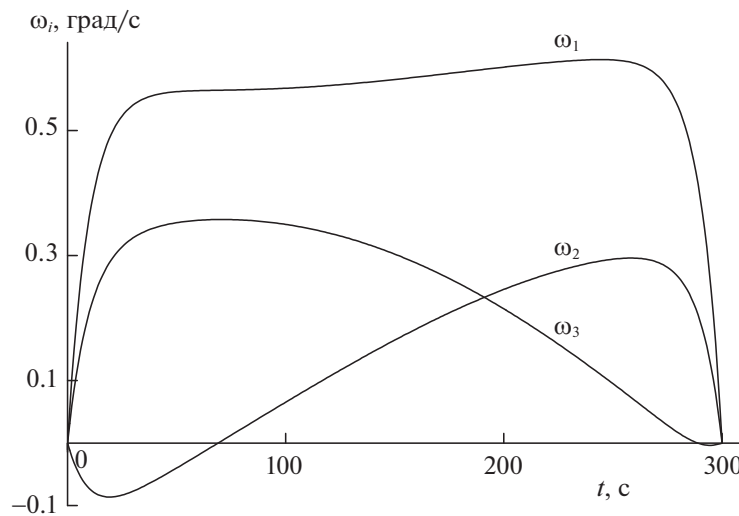


Рис. 4

где $\Lambda_p^{(k)}$ — значение кватерниона разворота на k -й итерации, используемое в системе (4.2). “Свободное” движение прогнозируется интегрированием системы уравнений (1.1), (1.2), описывающей вращение КА с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_n$, $\omega(0) = \omega_n$ и с учетом того, что $M = 0$. На каждом k -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота $\Lambda_p^{(k)}$ (правые части системы (4.2)), и из уравнений (4.2) мы получаем p_0 и β , а также соответствующую начальную угловую скорость ω_n (согласно (5.1)) и прогноз $\Lambda_{пр}$. Если $\epsilon < \epsilon_{пор}$, то вычисляется кватернион разворота $\Lambda_p^{(k+1)}$ для следующего $(k+1)$ -го шага итераций и процесс уточнения вектора p_0 повторяется. За начальное приближение в правых частях системы (4.2) берутся элементы кватерниона $\Lambda_p^{(0)} = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_k$. Итерационный процесс прекращается, когда $\epsilon \geq \epsilon_{пор}$.

Принятая схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида $x = g(x)$ для скалярной функции $g(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x . В нашем случае аргумент — гиперкомплексное число (кватернион) Λ_p . Функцией является кватернионная величина $\Lambda_p \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{пр}$, где Λ_k — постоянный (не зависящий от аргумента Λ_p) кватернион; $\Lambda_{пр}$ зависит от аргумента Λ_p через систему уравнений (4.2), (5.1) посредством модели движения (1.1), (1.2) (в уравнениях (1.1) принимается $M_i = 0$). Изменяя Λ_p , изменяются вектор p_0 (в соответствии с (4.2)) и угловые скорости ω_n , а значит, изменится и значение $\Lambda_{пр}$, что вызовет изменение функции $\Lambda_p \circ \tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{пр}$. Как только $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{пр} \circ \Lambda_k) \geq \epsilon_{пор}$, итерационный процесс прекращается, а решение p_0 считается найденным. Так как $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_k \circ \Lambda_{пр}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_p^{(k)}|$ для всех k , то итерационный процесс приближения p_0 к искомому решению сходится. Аналогичный метод определения значения p_0 в решении краевой задачи принципа максимума использовался в задаче оптимального по быстродействию управления [16]. Заметим, что это лишь один из возможных (но далеко не единственный) итерационных алгоритмов поиска оптимального вектора p_0 .

В результате решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_n$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_k$ получили расчетное значение вектора $p_0 = \{0.455215; -0.347544; 0.819751\}$ и значение интеграла (2.10) $Q = 15837 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Максимальная величина управляющего момента равна $|M(0)| = 56 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Максимальный модуль кинетического момента составил $L_{\max} = 563.7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, а максимальная энергия вращения за время разворота оказалась равной $E_{\max} = 2.82 \text{ Дж}$. Значение функции $a(t)$ в начальный момент времени следующее: $a(0) = 112 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Оптимальный вектор $\phi(0) = \{51.0; -38.9; 91.8\}$. Значение константы $r_0 = 11.274 \text{ Вт}$.

Данные математического моделирования динамики оптимального разворота представлены рис. 4–7. На рис. 4 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени. Отмечаем, что угловая скорость ω_1 , соответствующая оси Ox КА, — знакопостоянна, а характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического

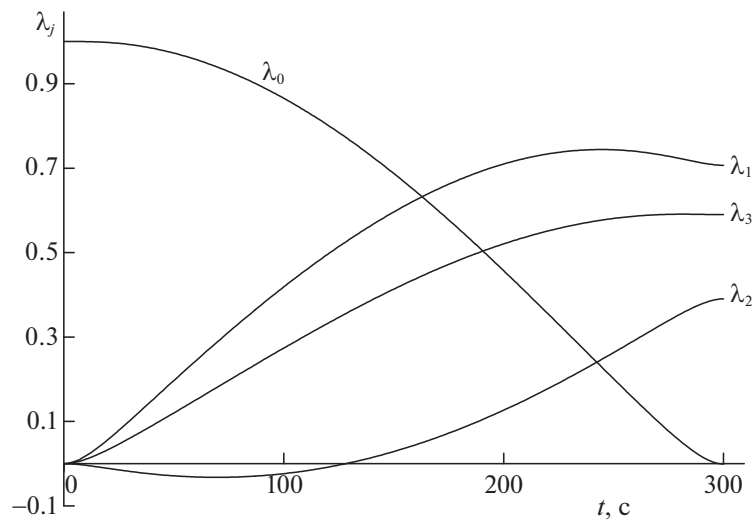


Рис. 5

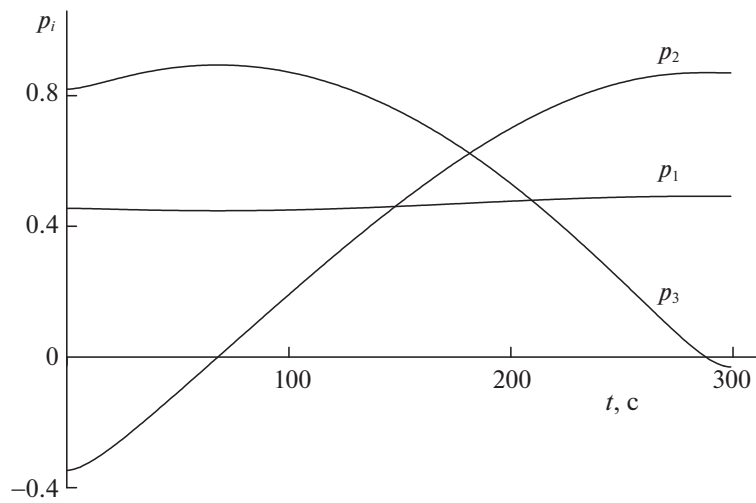


Рис. 6

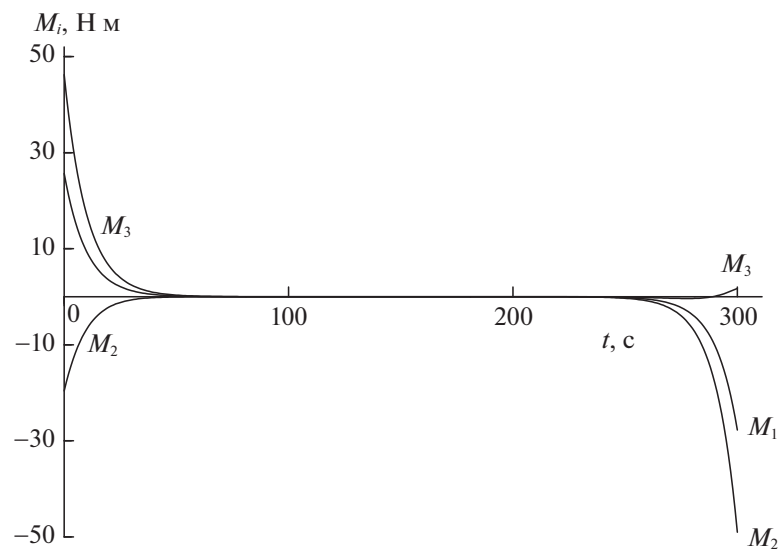


Рис. 7

момента (в отличие от составляющих угловой скорости ω_2 и ω_3). Это свидетельствует о том, что ось OX — продольная ось КА. На рис. 5 отображены графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$, определяющего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого поворотного маневра: $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. На рис. 6 приведена динамика изменения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ орта $\mathbf{p}$ во времени. Характерным является незначительное изменение проекции p_1 . На рис. 7 изображены графики изменения управляющих функций $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$. Значение показателя (1.5), отражающего экономичность программы $\mathbf{M}(t)$ управления разворотом, составило $G = 19.2$ Дж/с. При оптимальном управлении переменные p_i и λ_j являются гладкими функциями времени; угловые скорости ω_i — гладкие функции времени (за исключением моментов времени $t = 0$ и $t = T$).

Заключение. Рассмотрена и решена задача оптимального управления пространственным разворотом КА из исходного углового положения в заданное конечное угловое положение. Принятый нами показатель оптимальности включает как управляющие функции, так и фазовые переменные и характеризует энергетические затраты, расходуемые на переориентацию КА. Вопросы экономичности управления движением КА актуальны и сегодня, поэтому решаемая в статье задача разворота является практически важной.

На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина и кватернионных моделей и методов исследования управляемого движением твердого тела (КА), а также используя универсальные переменные r_i [2], получено решение поставленной задачи. Выписаны выражения для оптимального управления, функции Гамильтона и сопряженной системы уравнений для исходной задачи. Определены ключевые свойства оптимального движения и тип траектории, оптимальной по выбранному критерию. Так в процессе всего разворота отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Найдены необходимые условия оптимальности и раскрыта структура оптимального управления; приведены формализованные соотношения для определения программного движения КА. Показано, что на всем интервале переориентации момент сил действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальном пространстве, и направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат. Управление (4.3) оптимально, потому что оно является единственным решением системы уравнений (1.1), (2.2)–(2.4), которые формализуют необходимые условия оптимальности.

В статье описывается процедура реализации оптимального режима управления. Задача оптимального управления разворотом решается до конца; даны выражения для расчета ключевых характеристик маневра переориентации. Так как на управляющий момент не наложено никаких ограничений, требуемый поворотный маневр осуществим для любого заданного времени T . Для динамически симметричного КА представлено законченное решение задачи пространственного разворота: во-первых, получены зависимости как явные функции времени для оптимального закона движения и соотношения для расчета ключевых параметров алгоритма управления поворотным маневром; во-вторых, записана система уравнений (в аналитическом виде), из которой непосредственно находится решение краевой задачи принципа максимума и вычисляются необходимые константы закона управления (оптимальные значения указанных параметров могут быть определены устройством [29]). Приводятся данные математического моделирования, иллюстрирующие динамику движения КА во время оптимального разворота.

Главное отличие предлагаемого решения состоит в использовании нового функционала качества, который объединяет в заданной пропорции вклад управляющих сил (по энергетическим затратам) в движение КА за время разворота и интеграл от кинетической энергии вращения. Наличие интеграла от квадратичной свертки по силовым моментам в функционале качества делает управление, во-первых, ограниченным, а, во-вторых, управляющие функции гладкими (угловые скорости — также гладкие функции времени). Введение интеграла от кинетической энергии вращения в минимизируемый функционал уменьшает (насколько это возможно при заданном времени T) кинетическую энергию вращения во время разворота. Коэффициент k_0 , устанавливающий пропорцию между затратами управляющих усилий и интегралом энергии вращения, определяет, насколько пологим будет изменение модуля кинетического момента во время оптимального разворота. Если $k_0 \rightarrow 0$, то модуль кинетического момента изменяется по параболическому закону и достигает максимального значения в момент $t = T/2$. При неограниченном увеличении k_0 оптимальный процесс приближается к импульсному управлению, при котором участки разгона и торможения, когда управляющий момент неограниченно большой, бесконеч-

но малы, и почти на всем интервале разворота КА вращается практически по инерции (между импульсными разгоном и торможением управляющий момент пренебрежимо мал $M \approx 0$).

Полученное решение отличается и от известной работы [12], где оптимально релейное управление с двумя точками переключения (для задачи разворота за фиксированное время), а в нашей задаче оптимальным является непрерывное управление. В оптимальном по критерию (1.5) решении отсутствуют участки с постоянным модулем управляющего момента. Кроме того, возможность разворота по способу [12] зависит от длительности маневра. Перечисленные выше отличия вызваны различием в форме минимизируемого функционала и отсутствием ограничений на управляющие переменные. Наконец, результаты [12] применимы исключительно к динамически симметричному твердому телу. Для решения [12] управление разворотом происходит с постоянным углом между кинетическим моментом и продольной осью КА.

Необходимо отметить, что метод разворота с минимальными затратами (1.5) может оказаться полезным для КА с системой ориентации на базе электрореактивных двигателей (ЭРД), поскольку при управлении с помощью ЭРД (и, в частности, ионными двигателями) первый интеграл в показателе (1.5) пропорционален потребляемой электроэнергии (тяга ЭРД прямо пропорциональна потребляемому электрическому току [30], с высокой степенью достоверности, а вращающий момент пропорционален плечу установки управляющего ЭРД). Учитывая необходимость всемерного снижения электропотребления ЭРД для управления КА, становится понятным выбор функционала; второе слагаемое в (1.5) ограничивает кинетическую энергию вращения, делая ее минимально возможной при заданном времени разворота, что также крайне желательно (в практике космических полетов). Заметим, что в настоящее время на многих зарубежных КА в качестве двигателей ориентации применяются ионные двигатели (в космической программе США для решения задач ориентации КА использовались ионные двигатели XIPS-25 разработки Boeing Space Systems). В последние годы в связи с ростом сроков активного существования КА (более 10 лет), а также применением высокоточных систем ориентации интерес к ЭРД значительно возрос [31] (неоспоримыми преимуществами ЭРД является возможность малой величины единичного импульса тяги, высокая точность дозирования импульсов, практическое отсутствие импульса последствия, что обеспечивает выполнение особо точной ориентации). Благодаря невообразимо высоким значениям удельного импульса (до 6000 с) массовое применение ЭРД на КА (в том числе для ориентации КА) — одна из ведущих и закономерных тенденций космической деятельности в мире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Левский М.В. Об одном методе решения задач оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2015. Т. 21. № 2 (44). С. 45–60.
3. Levskii M.V. About Method for Solving the Optimal Control Problems of Spacecraft Spatial Orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
4. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с. 320 с.
5. Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В. Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
6. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
7. Ваньков А.И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 4–5. С. 13–21.
8. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
9. Junkins J.L., Turner J.D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.
10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16–27.
11. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.
12. Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.

13. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics*. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
14. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2018. № 2. С. 131–147.
15. *Zhou H., Wang D., Wu B., Poh E.K.* Time-optimal Reorientation for Rigid Satellite with Reaction Wheels // *International Journal of Control*. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
16. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2008. № 6. С. 144–157.
17. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2018. № 5. С. 30–41.
18. *Левский М.В.* О повышении маневренности космического аппарата, управляемого инерционными исполнительными органами // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 5. С. 115–130.
19. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. № 2. С. 7–24.
20. *Левский М.В.* Использование интеграла энергии в оптимальном управлении пространственной ориентацией космического аппарата // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. № 4. С. 10–23.
21. *Левский М.В.* Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2012. № 4. С. 115–130.
22. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2015. № 1. С. 119–136.
23. *Levskii M.V.* Special Aspects in Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators // *Journal of Computer Science Applications and Information Technology*. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
24. *Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2017. № 4. С. 154–173.
25. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
26. *Sanjeev Kumar, Vinay Kanwar, Sukhjit Singh.* Modified Efficient Families of Two and Three-step Predictor-corrector Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations // *Journal of Applied Mathematics*. 2010. V. 1. № 3. P. 153–158.
27. *Левский М.В.* Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998, № 19. Опубликовано 10.07.1998. С. 234–236.
28. *Левский М.В.* Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994, № 2. Опубликовано 20.01.1994. С. 49–50.
29. *Левский М.В.* Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. Опубликовано 20.03.2000. С. 148.
30. *Горшков О.А., Муравьев В.А., Шагайда А.А.* Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.
31. *Кульков В.М., Обухов В.А., Егоров Ю.Г., Белик А.А., Крайнов А.М.* Сравнительная оценка эффективности применения перспективных типов электроракетных двигателей в составе малых космических аппаратов // *Вестн. Самарск. гос. аэрокосмического ун-та*. 2012. № 3 (34). С. 187–195.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 519.71

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ¹

© 2023 г. А. Е. Голубев

ИПМех РАН, Москва, Россия

e-mail: v-algolu@hotmail.com

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача стабилизации программных траекторий механических систем с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Управление строится при помощи метода бэкстеппинга в сочетании с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния системы к граничным значениям. В качестве примера рассмотрена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338823040054, EDN: OCLSAO

Введение. Разработка методов решения задач построения и стабилизации траекторий движения динамических систем с учетом различных ограничений является одной из популярных и важных тем исследований последних десятилетий. Актуальность исследований обусловлена требованиями безопасности к переходным процессам при управлении техническими системами, подразумевающими, что при отслеживании программной траектории движения объекта управления переменные состояния системы должны находиться в рамках допустимых значений. Отметим также, что в последнее время все большую популярность среди исследователей приобретают задачи группового управления (см., например, [1]), в процессе решения которых от отдельных объектов управления в группе требуется нахождение в отдельной области пространства, непересекающейся с зонами движения других объектов [2].

Конструктивные аналитические методы синтеза нелинейных законов управления на основе использования нелинейных моделей движения объектов управления были предложены и активно исследовались на рубеже 1990-х и 2000-х годов. Наиболее популярными подходами к синтезу нелинейных обратных связей являются метод обратных задач динамики [3], в общем случае базирующийся на применении дифференциально-геометрического аппарата [4, 5], а также метод бэкстеппинга [6] и методы, использующие свойства пассивности механических систем [7].

Результаты, связанные с возможностью учета различного рода ограничений при синтезе нелинейных законов управления с помощью указанных методов, появились позднее [8, 9]. Наиболее эффективным с точки зрения возможностей учета ограничений на состояние системы является метод бэкстеппинга [6]. В сочетании с использованием барьерных функций [10] метод бэкстеппинга позволяет строить стабилизирующие обратные связи, гарантирующие выполнение ограничений на состояние системы [8, 9, 11–16]. Отметим, что предлагаемые в большинстве работ обратные связи, полученные на основе применения барьерных функций Ляпунова в методе бэкстеппинга, приводят к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающих при приближении переменных состояния к граничным значениям [8, 9, 11, 12]. Однако неогра-

¹ Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

ниченный рост значений переменных управления будет нежелательным, так как может приводить к насыщению управляющих воздействий и излишнему расходу ресурса управления. Одним из способов решения указанной проблемы является, например, расширение динамики системы за счет использования производных управляющих переменных, предложенное в [14].

В работе решается задача синтеза обратных связей по состоянию, стабилизирующих программные траектории движения механических систем, которые описываются уравнениями Эйлера–Лагранжа, с учетом ограничений на абсолютные величины обобщенных координат, скоростей и ускорений. Управление строится на основе метода бэкстеппинга с помощью логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера рассмотрена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача стабилизации программных движений динамических систем, имеющих структуру уравнений Эйлера–Лагранжа и записанных следующим образом:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1.1)$$

Здесь $q = (q_1, \dots, q_m)^T \in \mathbb{R}^m$ – вектор обобщенных координат; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)^T \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих сил и моментов; $M(q)$ – матрица кинетической энергии, $M(q) = M^T(q) > 0$ при всех $q \in \mathbb{R}^m$; $C(q, \dot{q})\dot{q}$ – центробежные и кориолисовы силы; $D\dot{q}$ – демпфирование; $G(q) = [\partial \Pi(q)/\partial q]^T$, где $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы.

Будем полагать, что для системы (1.1), например с использованием результатов работы [17], построено программное движение $q = P(t)$, $\tau = \tau_p(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее фиксированным начальным и конечным условиям на переменные состояния $q, \dot{q}$ системы:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad q(T) = q_*, \quad \dot{q}(T) = \dot{q}_*, \quad (1.2)$$

а также ограничениям

$$|q_i(t)| \leq B_i, \quad |\dot{q}_i(t)| \leq N_i, \quad |\ddot{q}_i(t)| \leq Q_i \quad \text{при всех } t \in [0, T], \quad (1.3)$$

где B_i, N_i и Q_i , $i = \overline{1, m}$ – некоторые заданные положительные числа.

Обозначим i -ю компоненту вектор-функции $P(t)$ через $p_i(t)$ и определим соответствующие ошибки отслеживания $\xi_{li} = q_i - p_i(t)$, $i \in \overline{1, m}$, программной траектории $q = P(t)$. Отметим, что при стабилизации программной траектории $q = P(t)$, $t \in [0, T]$, можно при необходимости рассмотреть значения $p_i(t)$ при $t \geq T$, доопределив соответствующие функции, например, значениями $p_i(t) = p_i(T)$ при $t \geq T$. Далее, без ограничения общности будем полагать, что функции $p_i(t)$ определены при всех $t \geq 0$, а также являются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Задача. Требуется выбрать компоненты вектора управляющих воздействий τ в системе (1.1) в виде обратных связей по состоянию системы таким образом, чтобы при всех $i \in \overline{1, m}$ для произвольных значений $\xi_{li}(0)$ и $\dot{\xi}_{li}(0)$ было гарантировано выполнение условий $|\xi_{li}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ с учетом ограничений:

$$|\xi_{li}(t)| \leq \varepsilon_{li}, \quad |\dot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{2i}, \quad |\ddot{\xi}_{li}(t)| \leq \varepsilon_{3i}, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\varepsilon_{li}, \varepsilon_{2i}$ и ε_{3i} – некоторые заданные положительные константы, удовлетворяющие соответственно условиям $\varepsilon_{li} \geq |\xi_{li}(0)|$, $\varepsilon_{2i} \geq |\dot{\xi}_{li}(0)|$ и $\varepsilon_{3i} \geq |\ddot{\xi}_{li}(0)|$.

2. Стабилизация программных траекторий с учетом ограничений. Заметим, что одним из хорошо известных и широко используемых методов синтеза нелинейных стабилизирующих законов управления является метод линеаризации обратной связью (см., например, [5]). В результате

применения метода линеаризации обратной связью для решения задачи стабилизации программной траектории $q = P(t)$ системы (1.1) получим следующее управление:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - \tilde{K}_1\dot{\xi}_1 - \tilde{K}_2\xi_1), \quad (2.1)$$

где $\xi_1 = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1m})^T$, $\tilde{K}_1 = \text{diag}(\tilde{\kappa}_{11}, \dots, \tilde{\kappa}_{1m})$ и $\tilde{K}_2 = \text{diag}(\tilde{\kappa}_{21}, \dots, \tilde{\kappa}_{2m})$ – диагональные матрицы размера $m \times m$ с соответствующими коэффициентами усиления $\tilde{\kappa}_{1i} > 0$ и $\tilde{\kappa}_{2i} > 0$, $i \in \overline{1, m}$, на главной диагонали.

Замкнутую обратную связью (2.1) систему (1.1) можно записать в виде

$$\dot{\xi}_1 = -\tilde{K}_1\xi_1 - \tilde{K}_2\xi_1. \quad (2.2)$$

Положение равновесия $\xi_1 = 0$, $\dot{\xi}_1 = 0$ линейной системы (2.2) асимптотически устойчиво в целом. Однако известно [18], что за счет выбора элементов матриц $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ явным образом обеспечить выполнение для решений системы (2.2) ограничений (1.4) затруднительно. Поэтому закон управления (2.1) далее в работе будет модифицирован.

Для синтеза управления, стабилизирующего программную траекторию $q = P(t)$ системы (1.1) с учетом ограничений (1.4), воспользуемся идеями метода бэкстеппинга [6] в сочетании с логарифмическими барьерными функциями Ляпунова [8].

При построении управления рассмотрим сначала функцию

$$V_1(\xi_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_{1i} \ln \left(\frac{\epsilon_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} \right),$$

где положительные постоянные k_{1i} определяются далее. Производная по времени функции $V_1(\xi_1)$ в силу системы (1.1) имеет вид

$$\dot{V}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \dot{\xi}_{1i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} (\dot{q}_i - \dot{p}_i(t))}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

Для удобства используем переменные $\xi_{2i} = \dot{q}_i - \alpha_{1i}(\xi_1)$, где $\alpha_{1i}(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемые функции, определяемые далее. Тогда выражение для $\dot{V}_1(\xi_1)$ можно представить следующим образом:

$$\dot{V}_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} (\alpha_{1i}(\xi_1) - \dot{p}_i(t))}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \xi_{2i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

Выбрав $\alpha_{1i}(\xi_1) = -\kappa_{1i} \xi_{1i} + \dot{p}_i(t)$, где $\kappa_{1i} > 0$ – положительные коэффициенты усиления, получим

$$\dot{V}_1(\xi_1) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \kappa_{1i} \xi_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{1i} \xi_{1i} \xi_{2i}}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2}.$$

В качестве функции Ляпунова замкнутой управлением системы используем функцию

$$V_2(\xi_1, \xi_2) = V_1(\xi_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_{2i} \ln \left(\frac{\epsilon_i^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} \right),$$

где $\xi_2 = (\xi_{21}, \dots, \xi_{2m})^T$, $k_{2i} > 0$ – положительные коэффициенты, определяемые далее, $\epsilon_i = \epsilon_{2i} - \kappa_{1i} \epsilon_{1i}$. Будем полагать, что значения $\kappa_{1i} > 0$ и $\epsilon_{1i} > 0$, $\epsilon_{2i} > 0$, такие, что выполняются условия $\epsilon_i > 0$. Заметим, что функция $V_2(\xi_1, \xi_2)$ является положительно определенной в области $\{(\xi_1^T, \xi_2^T) \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{1i}| < \epsilon_{1i}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}$ и неограниченно возрастает $V_2(\xi_1, \xi_2) \rightarrow +\infty$ при стрем-

лении $|\xi_{li}| \rightarrow \epsilon_{li} - 0$ или $|\xi_{2j}| \rightarrow \epsilon_j - 0$ хотя бы для одного значения $i, 1 \leq i \leq m$, или соответственно значения $j, 1 \leq j \leq m$.

Производная по времени функции $V_2(\xi_1, \xi_2)$ в силу системы (1.1) запишется следующим образом:

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\xi_{li}\xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}\xi_{2i}\xi_{2i}}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2}.$$

Для удобства дальнейших рассуждений представим последнее слагаемое в выражении для $\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2)$ в виде скалярного произведения векторов:

$$a = \left(\frac{k_{21}\xi_{21}}{\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2}, \dots, \frac{k_{2m}\xi_{2m}}{\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2} \right)$$

и $\dot{\xi}_2$. Тогда с учетом равенства $\dot{\xi}_2 = \ddot{\xi}_1 + K_1\dot{\xi}_1 = \ddot{q} - \ddot{P}(t) + K_1\dot{\xi}_1$, где $K_1 = \text{diag}(\kappa_{11}, \dots, \kappa_{1m})$, производная по времени функции $V_2(\xi_1, \xi_2)$ в силу системы (1.1) примет вид

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\xi_{li}\xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + a(\ddot{q} - \ddot{P}(t) + K_1\dot{\xi}_1).$$

Далее, принимая во внимание соотношение (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = & -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\xi_{li}\xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \\ & + a(M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - D\dot{q} - G(q) + \tau) - \ddot{P}(t) + K_1\dot{\xi}_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Стабилизирующее программную траекторию $q = P(t)$ системы (1.1) управление выберем следующим образом:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - K_1\dot{\xi}_1 - K_2\xi_2 - b), \quad (2.4)$$

где $K_2 = \text{diag}(\kappa_{21}, \dots, \kappa_{2m})$, $\kappa_{2i} > 0$ – положительные коэффициенты усиления,

$$b = (\xi_{21}(\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2), \dots, \xi_{2m}(\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2))^T.$$

Подставив управление (2.4) в выражение (2.3), получим

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\xi_{li}\xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}\kappa_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m k_{2i}\xi_{2i}^2.$$

В результате выделения полных квадратов по соответствующим переменным справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = & -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \left(\frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \frac{k_{li}\xi_{li}\xi_{2i}}{\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2} + \frac{k_{li}\xi_{2i}^2}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}\kappa_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left(k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}\kappa_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \\ & - \sum_{i=1}^m \left(\xi_{li} \sqrt{\frac{k_{li}\kappa_{li}}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)}} - \xi_{2i} \sqrt{\frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)}} \right)^2 - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left(k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right) \leq \\ & \leq -\sum_{i=1}^m \frac{k_{li}\kappa_{li}\xi_{li}^2}{2(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}\kappa_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2} - \sum_{i=1}^m \xi_{2i}^2 \left(k_{2i} - \frac{k_{li}}{2\kappa_{li}(\epsilon_{li}^2 - \xi_{li}^2)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, производная по времени функции $V_2(\xi_1, \xi_2)$ в силу системы (1.1) с управлением (2.4) отрицательно определена в области

$$\{(\xi_1^T, \xi_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{li}| < \sqrt{\epsilon_{li}^2 - k_{li}/(2k_{2i}\kappa_{li})}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}.$$

Заметим, что для любых положительных коэффициентов усиления κ_{li} , κ_{2i} в управлении (2.4) за счет выбора положительных постоянных k_{li} , k_{2i} в функции Ляпунова $V_2(\xi_1, \xi_2)$ значения величин $\sqrt{\epsilon_{li}^2 - k_{li}/(2\kappa_{2i}\kappa_{li})}$ можно сделать сколь угодно близкими к соответствующим значениям констант ϵ_{li} .

Система (1.1), замкнутая управлением (2.4), с учетом соотношения $\xi_2 = \dot{\xi}_1 + K_1\xi_1$ может быть представлена в виде

$$\dot{\xi}_1 = -K_2K_1\xi_1 - (K_1 + K_2)\dot{\xi}_1 - b. \quad (2.5)$$

Тогда в силу справедливости при всех $t \geq 0$ неравенств

$$|\dot{\xi}_{li}(t)| = |\xi_{2i}(t) - \kappa_{li}\xi_{li}(t)| \leq |\xi_{2i}(t)| + \kappa_{li}|\xi_{li}(t)|$$

с учетом соотношений $\epsilon_i = \epsilon_{2i} - \kappa_{li}\epsilon_{li}$ положение равновесия $\xi_1 = 0$, $\dot{\xi}_1 = 0$ системы (2.5), согласно монографии [19], асимптотически устойчиво с областью притяжения

$$\{(\xi_1^T, \dot{\xi}_1^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{li}| < \epsilon_{li}, |\dot{\xi}_{li}| < \epsilon_{2i}, i \in \overline{1, m}\}, \quad (2.6)$$

являющейся положительно инвариантным множеством.

Далее, в силу равенства $q = \xi_1 + P(t)$ для компонент $q_i(t)$ любого решения $q = q(t)$ системы (1.1), замкнутой управлением (2.4), с начальной точкой в множестве (2.6) при всех $t \geq 0$ и $i \in \overline{1, m}$ верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} |q_i(t)| &= |q_i(t) - p_i(t) + p_i(t)| \leq |q_i(t) - p_i(t)| + |p_i(t)| = |\xi_{li}(t)| + |p_i(t)| \leq \epsilon_{li} + B_i, \\ |\dot{q}_i(t)| &= |\dot{q}_i(t) - \dot{p}_i(t) + \dot{p}_i(t)| \leq |\dot{q}_i(t) - \dot{p}_i(t)| + |\dot{p}_i(t)| = |\dot{\xi}_{li}(t)| + |\dot{p}_i(t)| \leq \epsilon_{2i} + N_i. \end{aligned}$$

Дополнительно, с учетом уравнения (2.5) для любого $t \geq 0$ и $i \in \overline{1, m}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |\ddot{q}_i(t)| &= |\ddot{p}_i(t) - \kappa_{li}\kappa_{2i}\xi_{li}(t) - (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\dot{\xi}_{li}(t) - \xi_{2i}(t)(\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2(t))| \leq \\ &\leq |\ddot{p}_i(t)| + \kappa_{li}\kappa_{2i}|\xi_{li}(t)| + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})|\dot{\xi}_{li}(t)| + |\xi_{2i}(t)(\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2(t))| \leq \\ &\leq Q_i + \kappa_{li}\kappa_{2i}\epsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\epsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\epsilon_i^3 = \\ &= Q_i + \kappa_{li}\kappa_{2i}\epsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\epsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\epsilon_{2i} - \kappa_{li}\epsilon_{li})^3 \leq Q_i + \epsilon_{3i} \end{aligned}$$

при любых значениях констант ϵ_{li} , ϵ_{2i} , ϵ_{3i} , κ_{li} и κ_{2i} , удовлетворяющих условиям:

$$\epsilon_{3i} \geq \kappa_{li}\kappa_{2i}\epsilon_{li} + (\kappa_{li} + \kappa_{2i})\epsilon_{2i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\epsilon_{2i} - \kappa_{li}\epsilon_{li})^3.$$

Здесь постоянные B_i , N_i и Q_i взяты из ограничений (1.3), выполняющихся для программной траектории $q = P(t)$.

Заметим, что правые части систем (2.2) и (2.5) при соотношениях коэффициентов усиления $\tilde{\kappa}_{li} = \kappa_{li}\kappa_{2i}$ и $\tilde{\kappa}_{2i} = \kappa_{li} + \kappa_{2i}$ различаются за счет присутствия в правой части системы (2.5) слагаемого b , i -я компонента b_i которого в переменных ξ_{li} , $\dot{\xi}_{li}$ имеет вид

$$\begin{aligned} b_i &= \xi_{2i}(\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2) = \\ &= (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})(\epsilon_{2i} - \kappa_{li}\epsilon_{li})^2 - (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, наличие дополнительного слагаемого b в обратной связи (2.4) по сравнению с законом управления (2.1), найденным при помощи метода линеаризации обратной связи, обеспечивает выполнение ограничений (1.4). Отметим, что при стремлении $|\xi_{li}| \rightarrow \epsilon_{li} - 0$ и/или $|\dot{\xi}_{li}| \rightarrow \epsilon_{2i} - 0$ для любого i соответствующая функция (2.7) не является неограниченно возрастающей и имеет конечный предел. В этом свойстве дополнительной стабилизирующей компоненты b в обратной связи (2.4) заключается существенное отличие предлагаемого в работе способа

применения метода бэкстеппинга от других работ, например [9, 11, 12]. Полученные в [9, 11, 12] обратные связи на основе метода бэкстеппинга приводят к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающих при приближении переменных состояния к граничным значениям.

Так, по аналогии с результатами работ [9, 12] можно предложить следующую стабилизирующую обратную связь:

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + M(q)(\ddot{P}(t) - K_1\dot{\xi}_1 - K_2\dot{\xi}_2 - \bar{b}), \quad (2.8)$$

где

$$\bar{b} = \left(\frac{k_{11}\xi_{11}(\epsilon_1^2 - \xi_{21}^2)}{k_{21}(\epsilon_{11}^2 - \xi_{11}^2)}, \dots, \frac{k_{1m}\xi_{1m}(\epsilon_m^2 - \xi_{2m}^2)}{k_{2m}(\epsilon_{1m}^2 - \xi_{1m}^2)} \right)^T.$$

Производная по времени функции $V_2(\xi_1, \xi_2)$ в силу системы (1.1) с управлением (2.8) примет вид

$$\dot{V}_2(\xi_1, \xi_2) = -\sum_{i=1}^m \frac{k_{1i}k_{1i}\xi_{1i}^2}{\epsilon_{1i}^2 - \xi_{1i}^2} - \sum_{i=1}^m \frac{k_{2i}k_{2i}\xi_{2i}^2}{\epsilon_i^2 - \xi_{2i}^2}$$

и является отрицательно определенной в области $\{(\xi_1^T, \xi_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2m} : |\xi_{1i}| < \epsilon_{1i}, |\xi_{2i}| < \epsilon_i, i \in \overline{1, m}\}$.

Однако, несмотря на то, что управление (2.8) также будет решением задачи стабилизации программной траектории $q = P(t)$ системы (1.1) с учетом ограничений (1.4), при стремлении $|\xi_{1i}| \rightarrow \epsilon_{1i} - 0$ для любого i соответствующая i -я компонента вектор-функции $\bar{b}$ может неограниченно возрастать. Следовательно, полученная в настоящей работе стабилизирующая обратная связь (2.4) предпочтительнее управления (2.8).

3. Решение задачи управления пространственным движением подводного аппарата. Для описания движения аппарата используются две системы координат: инерциальная земная система координат $Oxyz$ и неинерциальная система координат $O_b x_b y_b z_b$, жестко связанная с корпусом подводного аппарата. Начало O_b неинерциальной системы координат обычно выбирается совпадающим с центром тяжести или центром плавучести корпуса аппарата, а направления осей $O_b x_b$, $O_b y_b$ и $O_b z_b$ фиксируются вдоль главных осей инерции корпуса. Продольная ось $O_b x_b$ направлена вдоль корпуса от хвостовой части к передней, поперечная ось $O_b y_b$ выбирается ортогонально правому борту корпуса аппарата в горизонтальной плоскости, а нормальная ось $O_b z_b$ ориентирована сверху вниз [20].

Поступательное движение аппарата описывается координатами $\eta_1 = (x, y, z)^T$ точки O_b в инерциальной системе координат $Oxyz$ и координатами $v_1 = (u, v, w)^T$ вектора скорости точки O_b в неинерциальной системе координат $O_b x_b y_b z_b$. Вращательное движение корпуса аппарата задается при помощи угловых координат $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ поворота неинерциальной системы координат $O_b x_b y_b z_b$ относительно инерциальной системы координат $Oxyz$, где φ — угол крена, θ — угол тангажа, ψ — угол рысканья, а также вектора $v_2 = (p, q, r)^T$ угловых скоростей вращения корпуса аппарата относительно соответствующих осей $O_b x_b$, $O_b y_b$ и $O_b z_b$ неинерциальной системы координат $O_b x_b y_b z_b$ [20].

Координаты вектора скорости точки O_b в инерциальной и неинерциальной системах координат, согласно монографии [20], связаны соответственно соотношениями

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2)v_1, \quad v_1 = J_1^{-1}(\eta_2)\dot{\eta}_1, \quad (3.1)$$

где

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Далее, угловые скорости вращения корпуса аппарата вокруг осей неинерциальной системы координат $O_b x_b y_b z_b$ пересчитываются в производные по времени угловых координат η_2 следующим образом [20]:

$$\dot{\eta}_2 = J_2(\eta_2) v_2,$$

где

$$J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 \sin \varphi \tan \theta \cos \varphi \tan \theta \\ 0 \cos \varphi -\sin \varphi \\ 0 \sin \varphi / \cos \theta \cos \varphi / \cos \theta \end{pmatrix}.$$

В итоге, кинематика движения подводного аппарата может быть записана в виде

$$\dot{\eta} = J(\eta) v, \quad (3.2)$$

где $\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T)^T$, $v = (v_1^T, v_2^T)^T$,

$$J(\eta) = \begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь $O_{3 \times 3}$ — нулевая матрица размера 3×3 .

Динамические уравнения поступательного и вращательного движения корпуса подводного аппарата в векторных обозначениях представлены ниже [20]:

$$M_{RB} \dot{v} + C_{RB}(v) v = \tau_{RB}, \quad (3.3)$$

где $\tau_{RB} = (F_{x_b}, F_{y_b}, F_{z_b}, \tau_{x_b}, \tau_{y_b}, \tau_{z_b})^T$,

$$M_{RB} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & m z_G & -m y_G \\ 0 & m & 0 & -m z_G & 0 & m x_G \\ 0 & 0 & m & m y_G & -m x_G & 0 \\ 0 & -m z_G & m y_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ m z_G & 0 & -m x_G & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -m y_G & m x_G & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix},$$

$$C_{RB}(v) = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & -\bar{C}_{RB}^T(v) \\ \bar{C}_{RB}(v) & J_{RB}(v) \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{RB}(v) = \begin{pmatrix} -m(y_G q + z_G r) & m(y_G p + w) & m(z_G p - v) \\ m(x_G q - w) & -m(z_G r + x_G p) & m(z_G q + u) \\ m(x_G r + v) & m(y_G r - u) & -m(x_G p + y_G q) \end{pmatrix},$$

$$J_{RB}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -I_{yz} q - I_{xz} p + I_z r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_y q \\ I_{yz} q + I_{xz} p - I_z r & 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_x p \\ -I_{yz} r - I_{xy} p + I_y q & I_{xz} r + I_{xy} q - I_x p & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь M_{RB} — матрица инерции твердого тела, $C_{RB}(v)$ — матрица кориолисовых и центробежных сил, m — масса аппарата, $r_G = (x_G, y_G, z_G)^T$ — координаты центра масс корпуса аппарата в подвижной системе координат $O_b x_b y_b z_b$; I_x, I_y, I_z — моменты инерции корпуса относительно осей $O_b x_b, O_b y_b$ и $O_b z_b$ соответственно; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} — центробежные моменты инерции; $F_{x_b}, F_{y_b}, F_{z_b}$ — проекции равнодействующей всех приложенных к корпусу аппарата сил на оси $O_b x_b, O_b y_b$ и $O_b z_b$;

$\tau_{x_b}, \tau_{y_b}, \tau_{z_b}$ — суммарные моменты сил, действующих на корпус, вокруг осей $O_b x_b, O_b y_b$ и $O_b z_b$. В частности, если оси $O_b x_b, O_b y_b$ и $O_b z_b$ направлены вдоль главных осей инерции корпуса аппарата, то имеют место равенства $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Внешние силы и моменты, действующие на корпус подводного аппарата, характеризуются компонентами вектора τ_{RB} в правой части динамической системы (3.3), который имеет следующую структуру:

$$\tau_{RB} = \tau_H + \tau, \quad (3.4)$$

где τ_H включает влияние присоединенной массы воды, гидродинамического демпфирования, гравитации и выталкивающей силы; τ представляет собой силы и моменты, создаваемые управляющими органами аппарата.

Компонета τ_H в соотношении (3.4), согласно [20], имеет вид

$$\tau_H = -M_A \dot{v} - C_A(v)v - D(v)v - g(\eta), \quad (3.5)$$

где

$$M_A = - \begin{pmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{pmatrix} > 0,$$

$$C_A(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r,$$

$$a_2 = X_{\dot{v}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r,$$

$$a_3 = X_{\dot{w}}u + Y_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r,$$

$$b_1 = X_{\dot{p}}u + Y_{\dot{p}}v + Z_{\dot{p}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r,$$

$$b_2 = X_{\dot{q}}u + Y_{\dot{q}}v + Z_{\dot{q}}w + K_{\dot{q}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r,$$

$$b_3 = X_{\dot{r}}u + Y_{\dot{r}}v + Z_{\dot{r}}w + K_{\dot{r}}p + M_{\dot{r}}q + N_{\dot{r}}r.$$

Матрица $C_A(v)$ гидродинамических кориолисовых и центробежных сил является кососимметрической при всех $v \in \mathbb{R}^6$, матрица $D(v)$ гидродинамического демпфирования — положительно определенной при всех $v \in \mathbb{R}^6$, слагаемое $g(\eta)$ характеризует действие силы тяжести и выталкивающей силы на корпус аппарата и определяется далее. Элементы матрицы M_A добавочной инерции представляют собой коэффициенты линеаризации соответствующих компонент сил и моментов, связанных с влиянием присоединенной массы воды, в окрестности нулевых значений скоростей. В частности, в случае малых скоростей движения подводного аппарата, согласно [20], имеют место равенства: $X_{\dot{v}} = 0, X_{\dot{w}} = 0, X_{\dot{p}} = 0, X_{\dot{q}} = 0, X_{\dot{r}} = 0, Y_{\dot{u}} = 0, Y_{\dot{w}} = 0, Y_{\dot{p}} = 0, Y_{\dot{q}} = 0, Y_{\dot{r}} = 0, Z_{\dot{u}} = 0, Z_{\dot{v}} = 0, Z_{\dot{p}} = 0, Z_{\dot{q}} = 0, Z_{\dot{r}} = 0, K_{\dot{u}} = 0, K_{\dot{v}} = 0, K_{\dot{w}} = 0, K_{\dot{p}} = 0, K_{\dot{q}} = 0, K_{\dot{r}} = 0, M_{\dot{u}} = 0,$

$M_{\dot{v}} = 0$, $M_{\dot{w}} = 0$, $M_{\dot{p}} = 0$, $M_{\dot{r}} = 0$, $N_{\dot{u}} = 0$, $N_{\dot{v}} = 0$, $N_{\dot{w}} = 0$, $N_{\dot{p}} = 0$, $N_{\dot{q}} = 0$ и $D(v) = -\text{diag}(X_u + X_{u|u}|u|, Y_v + Y_{v|v}|v|, Z_w + Z_{w|w}|w|, K_p + K_{p|p}|p|, M_q + M_{q|q}|q|, N_r + N_{r|r}|r|)$, где $X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r$ и $X_{u|u}, Y_{v|v}, Z_{w|w}, K_{p|p}, M_{q|q}, N_{r|r}$ — некоторые отрицательные коэффициенты.

Вектор-функция $g(\eta)$ в выражении (3.5), описывающая влияние величины силы тяжести $W = mg$ и величины выталкивающей силы $B = \rho g V$ на динамику корпуса аппарата, записывается следующим образом [20]:

$$g(\eta) = - \begin{pmatrix} f_G(\eta_2) + f_B(\eta_2) \\ r_G \times f_G(\eta_2) + r_B \times f_B(\eta_2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$f_G(\eta_2) = J_1^{-1}(\eta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{pmatrix}, \quad f_B(\eta_2) = -J_1^{-1}(\eta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix},$$

где $r_B = (x_B, y_B, z_B)^T$ — координаты центра плавучести корпуса аппарата в подвижной системе координат $O_b x_b y_b z_b$, ρ — плотность воды, V — объем вытесненной корпусом аппарата жидкости, знак умножения $\times$ использован для обозначения векторного произведения соответствующих векторов. Покомпонентно выражение (3.6) примет вид

$$g(\eta) = \begin{pmatrix} (W - B) \sin \theta \\ -(W - B) \cos \theta \sin \varphi \\ -(W - B) \cos \theta \cos \varphi \\ -(y_G W - y_B B) \cos \theta \cos \varphi + (z_G W - z_B B) \cos \theta \sin \varphi \\ (z_G W - z_B B) \sin \theta + (x_G W - x_B B) \cos \theta \cos \varphi \\ -(x_G W - x_B B) \cos \theta \sin \varphi - (y_G W - y_B B) \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

В итоге, принимая во внимание соотношения (3.2) — (3.7), получим следующую математическую модель движения подводного аппарата, записанную относительно неинерциальной системы координат $O_b x_b y_b z_b$:

$$M \dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau, \quad \dot{\eta} = J(\eta)v, \quad (3.8)$$

где $M = M_{RB} + M_A$, $C(v) = C_{RB}(v) + C_A(v)$.

Тогда с учетом равенства (3.2) уравнения движения корпуса аппарата в векторном виде относительно инерциальной земной системы координат $Oxyz$ примут вид

$$M_\eta(\eta) \ddot{\eta} + C_\eta(\eta, v) \dot{\eta} + D_\eta(\eta, v) \dot{\eta} + g(\eta) = \tau, \quad v = J^{-1}(\eta) \dot{\eta}, \quad (3.9)$$

где $M_\eta(\eta) = MJ^{-1}(\eta)$, $C_\eta(\eta, v) = [C(v) - MJ^{-1}(\eta) \dot{J}(\eta)] J^{-1}(\eta)$, $D_\eta(\eta, v) = D(v) J^{-1}(\eta)$.

Для построения программной траектории $\eta = P(t)$, $t \in [0, T]$, движения корпуса подводного аппарата воспользуемся результатами, полученными в работе [17]. Используем далее обозначения $x_{11} = x$, $x_{12} = y$, $x_{13} = z$, $x_{14} = \varphi$, $x_{15} = \theta$, $x_{16} = \psi$ и перепишем условия (1.2):

$$x_{1i}(0) = x_{0i}, \quad \dot{x}_{1i}(0) = \dot{x}_{0i}, \quad x_{1i}(T) = x_{*i}, \quad \dot{x}_{1i}(T) = \dot{x}_{*i}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

В частности, рассмотрим, например, значения $\dot{x}_{0i} = \dot{x}_{*i} = 0$, $i = \overline{1, 6}$, и дополнительно потребуем, чтобы искомая программная траектория удовлетворяла условиям $\ddot{x}_{1i}(0) = 0$ и $\ddot{x}_{1i}(T) = 0$, $i = \overline{1, 6}$. Будем также полагать, что время движения T не задано в постановке задачи.

Фиксируем произвольные положительные значения T_1, T_3, T_5 и $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$. Для синтеза программной траектории из начальной точки $(x_{01}, 0, \dots, x_{06}, 0)^T$ в конечную точку $(x_{*1}, 0, \dots, x_{*6}, 0)^T$ в фазовом пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})^T$ системы (3.9) используем дополнительные

промежуточные точки с координатами $(x_{j1}, \dot{x}_{j1}, \dots, x_{j6}, \dot{x}_{j6})^T$, $j = \overline{1, 4}$, где значения x_{ji} , $\dot{x}_{ji}$, $j = \overline{1, 4}$, $i = \overline{1, 6}$, удовлетворяют условиям $\dot{x}_{2i} = \dot{x}_{3i}$ и соответствующим соотношениям [17]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1i} &= \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_1}, & x_{1i} &= \frac{x_{2i} + (\varepsilon_1 - 1)(1 + 2\varepsilon_1)x_{0i}}{\varepsilon_1(2\varepsilon_1 - 1)}, \\ \dot{x}_{4i} &= \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_2}, & x_{4i} &= \frac{x_{3i} + (\varepsilon_2 - 1)(1 + 2\varepsilon_2)x_{*i}}{\varepsilon_2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ x_{2i} &= \frac{T_1(2\varepsilon_1 - 1)x_{*i} + (3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ x_{3i} &= \frac{(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3)x_{*i} + T_5(2\varepsilon_2 - 1)x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \dot{x}_{2i} &= \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}.\end{aligned}$$

Программная траектория $\eta = P(t)$, $t \in [0, T]$, запишется покомпонентно следующим образом:

$$x_{li} = p_i(t) = \left\{ p_{ji}(t), t \in \left[\sum_{k=0}^{j-1} T_k, \sum_{k=0}^j T_k \right], j = \overline{1, 5} \right\}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (3.10)$$

где $T = \varepsilon_1 T_1 + T_3 + \varepsilon_2 T_5$, $T_2 = (\varepsilon_1 - 1)T_1$, $T_4 = (\varepsilon_2 - 1)T_5$, многочлены $p_{ji}(t)$ имеют соответствующий вид

$$p_{ji}(t) = x_{j-1,i} + \dot{x}_{j-1,i} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right) + c_{1ij} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^2 + c_{2ij} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^3, \quad j = \overline{1, 5}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Здесь коэффициенты c_{1ij} , c_{2ij} следующие [17]:

$$c_{1ij} = -((2\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 3(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^2, \quad c_{2ij} = ((\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 2(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^3.$$

Далее, согласно работе [17], для выполнения ограничений $|\dot{x}_{li}(t)| \leq N_i$ и $|\ddot{x}_{li}(t)| \leq Q_i$ при всех $t \in [0, T]$, $i = \overline{1, 6}$, на значения первых и вторых производных по времени соответствующих функций (3.10) необходимо и достаточно, чтобы выбранные значения T_1 , T_3 , T_5 и $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ удовлетворяли следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}\frac{3|x_{*i} - x_{0i}|}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)} &\leq N_i, \\ \frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_1 T_1(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} &\leq Q_i, \\ \frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_2 T_5(T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))} &\leq Q_i.\end{aligned}$$

Дополнительно, если для любого $i = \overline{1, 6}$ выполнены условия

$$\max \{|x_{0i}|, |x_{*i}|\} \leq B_i,$$

то при всех $t \in [0, T]$ справедливы оценки $|x_{li}(t)| \leq B_i$, $i = \overline{1, 6}$.

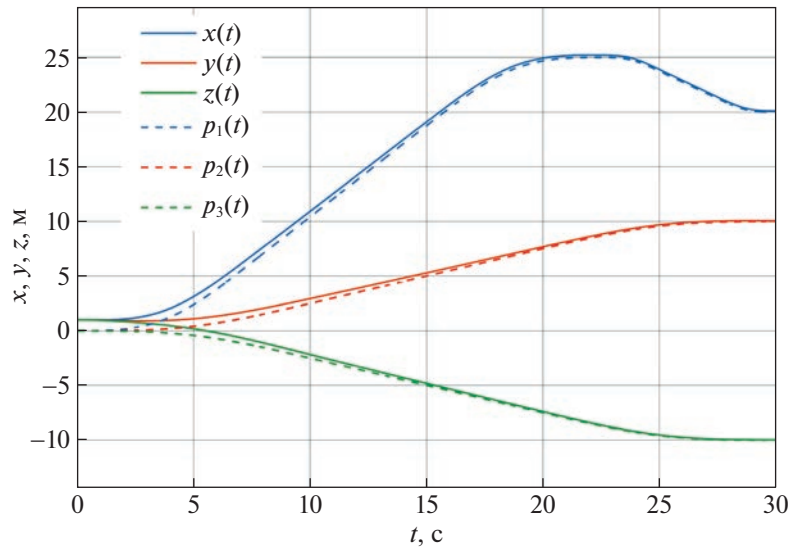


Рис. 1. Координаты $\eta_l = (x, y, z)^T$ центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения $x = p_1(t)$, $y = p_2(t)$, $z = p_3(t)$

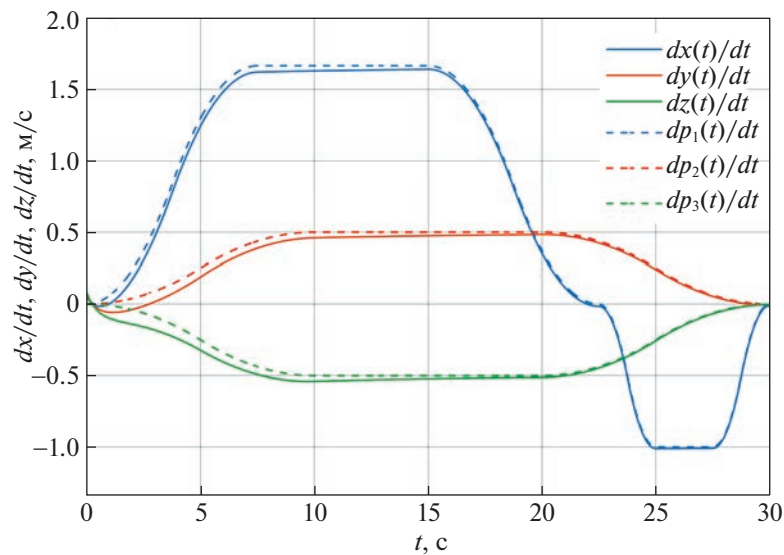


Рис. 2. Координаты вектора скорости $\dot{\eta}_l = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ поступательного движения центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения $\dot{x} = \dot{p}_1(t)$, $\dot{y} = \dot{p}_2(t)$, $\dot{z} = \dot{p}_3(t)$

Наконец, управление, стабилизирующее программную траекторию $\eta = P(t)$, $t \in [0, T]$, системы (3.9), покомпонентно заданную соотношениями (3.10), с учетом соответствующих ограничений (1.4), согласно формуле (2.4), запишется следующим образом:

$$\tau = C_\eta(\eta, v)\dot{\eta} + D_\eta(\eta, v)\ddot{\eta} + g(\eta) + M_\eta(\eta)(\ddot{P}(t) - K_2 K_1 \xi_l - (K_1 + K_2)\dot{\xi}_l - b), \quad (3.11)$$

где $K_1 = \text{diag}(\kappa_{11}, \dots, \kappa_{16}) > 0$, $K_2 = \text{diag}(\kappa_{21}, \dots, \kappa_{26}) > 0$, $\xi_l = \eta - P(t)$,

$$b = (b_1, \dots, b_6)^T, \quad b_i = (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})((\varepsilon_{2i} - \kappa_{li}\varepsilon_{li})^2 - (\dot{\xi}_{li} + \kappa_{li}\xi_{li})^2), \quad i \in \overline{1, 6}.$$

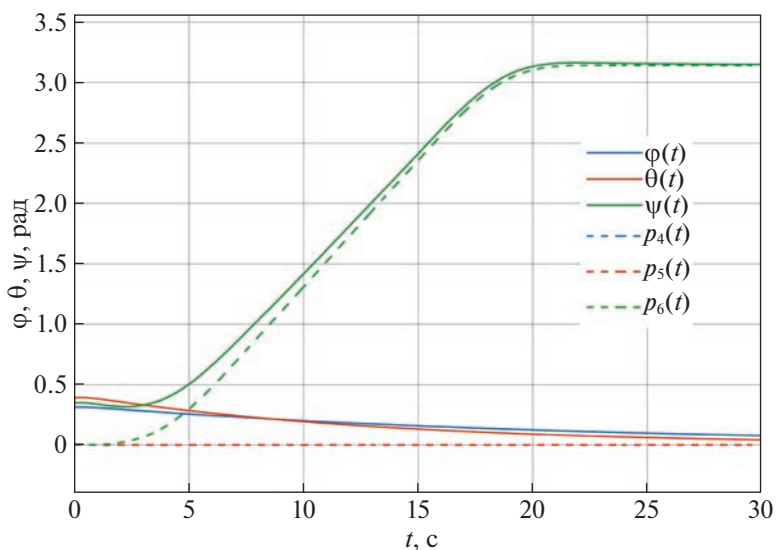


Рис. 3. Угловые координаты $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения $\varphi = p_4(t)$, $\theta = p_5(t)$, $\psi = p_6(t)$

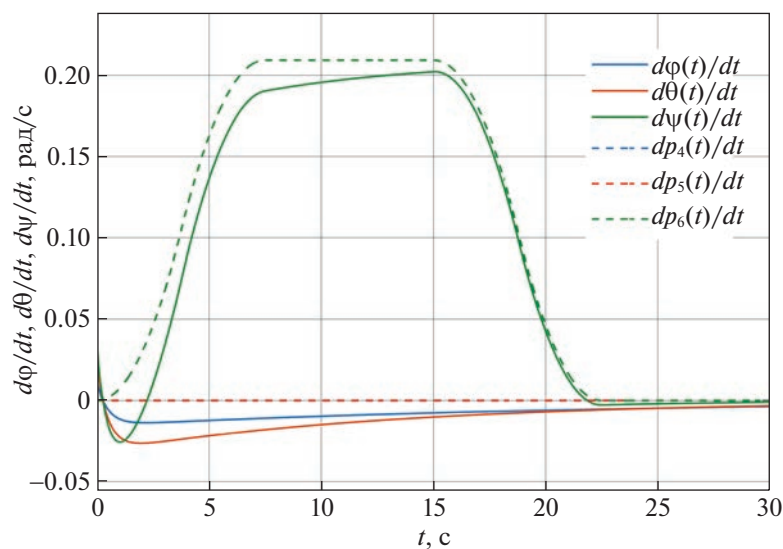


Рис. 4. Угловые скорости $\dot{\eta}_2 = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения $\dot{\varphi} = \dot{p}_4(t)$, $\dot{\theta} = \dot{p}_5(t)$, $\dot{\psi} = \dot{p}_6(t)$

Результаты численного моделирования системы (3.9) с управлением (3.11) представлены на рис. 1–8 для следующих значений физических и геометрических параметров модели, соответствующих подводному аппарату Kambara [21, 22]: $m = 117$ кг, $g = 9.81$ м · с⁻², $B = 1108$ Н, $I_x = 10.7$ кг · м², $I_y = 11.8$ кг · м², $I_z = 13.4$ кг · м², $x_G = 0$ м, $y_G = 0$ м, $z_G = 0$ м, $x_B = -0.017$ м, $y_B = 0$ м, $z_B = -0.115$ м, $X_u = -58.4$ кг, $Y_v = -23.8$ кг, $Z_w = -23.8$ кг, $K_p = -3.38$ кг · м²/рад, $M_{\dot{q}} = -1.18$ кг · м²/рад, $N_{\dot{r}} = -2.67$ кг · м²/рад, $X_u = -120$ кг/с, $Y_v = -90$ кг/с, $Z_w = -150$ кг/с, $K_p = -15$ Н · м · с/рад, $M_q = -15$ Н · м · с/рад, $N_r = -18$ Н · м · с/рад, $X_{u|u|} = -90$ кг/м, $Y_{v|v|} = -90$ кг/м, $Z_{w|w|} = -120$ кг/м, $K_{p|p|} = -10$ кг · м²/рад², $M_{q|q|} = -12$ кг · м²/рад², $N_{r|r|} = -15$ кг · м²/рад².

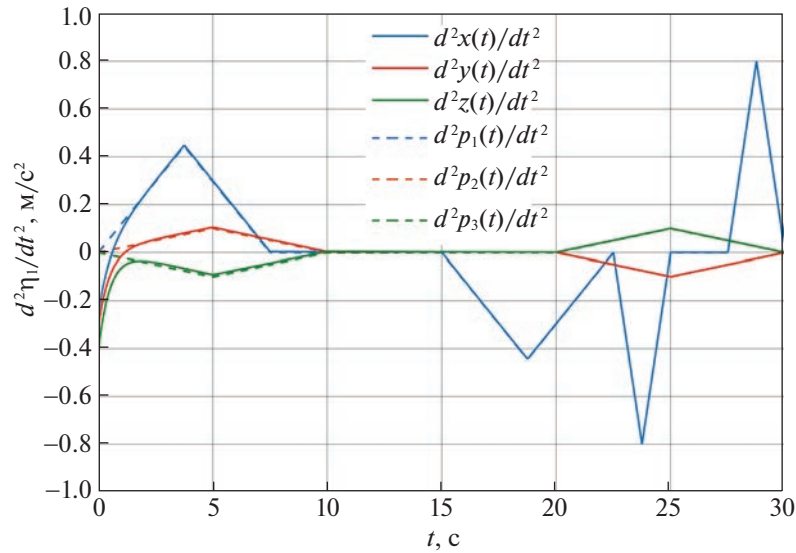


Рис. 5. Координаты вектора ускорения $\ddot{\eta}_1 = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$ поступательного движения центра масс корпуса аппарата как функции времени и их программные значения $\ddot{x} = \ddot{p}_1(t)$, $\ddot{y} = \ddot{p}_2(t)$, $\ddot{z} = \ddot{p}_3(t)$

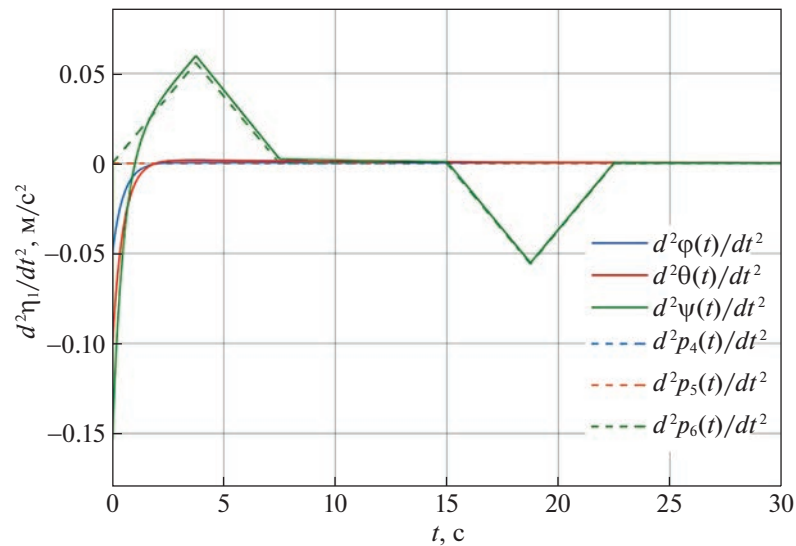


Рис. 6. Угловые ускорения $\ddot{\eta}_2 = (\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс как функции времени и их программные значения $\ddot{\phi} = \ddot{p}_4(t)$, $\ddot{\theta} = \ddot{p}_5(t)$, $\ddot{\psi} = \ddot{p}_6(t)$

Построена программная траектория смещения центра масс корпуса аппарата из начала координат $\eta_1 = (0, 0, 0)^T$ в точку с координатами $\eta_1 = (20, 10, -10)^T$ и пространственного разворота корпуса на 180° по углу рысканья ψ . В качестве начальных и конечных значений переменных состояния системы (3.9) для программной траектории рассматривались соответственно $\eta(0) = \eta_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ и $\eta(T) = \eta_* = (20, 10, -10, 0, 0, \pi)^T$, $\dot{\eta}(T) = \dot{\eta}_* = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. При планировании программной траектории были выбраны значения $T = 30$ с, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$, $T_1 = T/(3\varepsilon_1)$, $T_5 = T/(3\varepsilon_2)$.

Для численного моделирования процесса стабилизации построенной программной траектории были использованы следующие начальные значения: $\xi_1(0) = (1, 1, 1, \pi/10, \pi/8, \pi/9)^T$

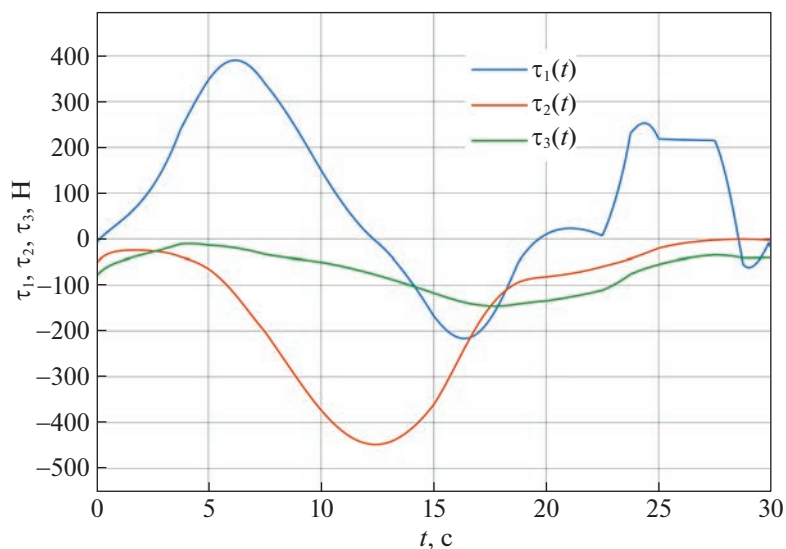


Рис. 7. Управляющие силы τ_1 , τ_2 , τ_3 как функции времени

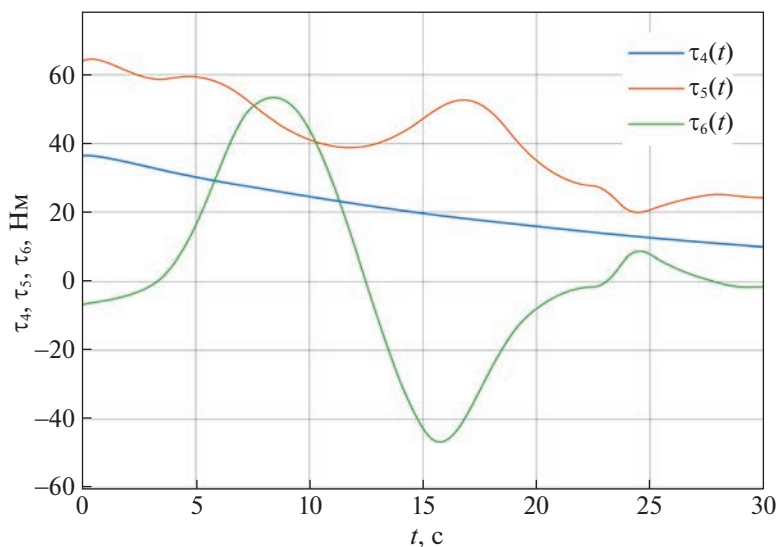


Рис. 8. Управляющие моменты τ_4 , τ_5 , τ_6 как функции времени

и $\dot{\xi}_i(0) = (0.05, 0.06, 0.08, 0.01, 0.02, 0.03)^T$ соответствующих переменных отклонения и их производных, в также значения параметров управления (3.11): $\epsilon_{li} = 1.001|\xi_{li}(0)|$, $\epsilon_{2i} = 1.5|\xi_{li}(0)|$, $\kappa_{li} = 0.999\epsilon_{2i}/\epsilon_{li}$, $\kappa_{2i} = 2$, $i = \overline{1, 6}$.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации программных траекторий движения механических систем с учетом ограничений на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Для построения стабилизирующих законов управления применен метод бэкстеппинга, использующий логарифмические барьерные функции Ляпунова. Полученные в работе стабилизирующие обратные связи в отличие от аналогичных известных результатов не приводят к неограниченному росту значений переменных управления при приближении переменных состояния системы к граничным значениям. В качестве примера решена задача построения и стабилизации траектории пространственного движения подводного аппарата. Отметим, что возможность учета ограничений на значения обобщенных координат при построении и стабилизации

ции траекторий движения механических систем важна, например, при решении задач группового управления, когда от отдельных объектов управления в группе может требоваться нахождение в отдельной области пространства, непересекающейся с зонами движения других объектов. Выполнение ограничений на значения обобщенных скоростей позволяют, например, учитывать требования малости соответствующих скоростей движения при использовании в математических моделях линеаризованных выражений для сил и моментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olfati-Saber R.* Flocking for Multi-agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2006. V. 51 (3). P. 401–420.
2. *Liu H., Chen G., Tian X.* Cooperative Formation Control for Multiple Surface Vessels Based on Barrier Lyapunov Function and Self-structuring Neural Networks // *Ocean Engineering.* 2020. V. 216. 108163.
3. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 326 с.
4. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995. 549 p.
5. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
6. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
7. *Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H.* Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications. London: Springer-Verlag, 1998. 543 p.
8. *Ngo K.B., Mahony R., Jiang Z.P.* Integrator Backstepping Using Barrier Functions for Systems with Multiple State Constraints // *Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain, 2005.* P. 8306–8312.
9. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-constrained Nonlinear Systems // *Automatica.* 2009. V. 45 (4). P. 918–927.
10. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2009. 716 p.
11. *Niu B., Zhao J.* Barrier Lyapunov Functions for the Output Tracking Control of Constrained Nonlinear Switched Systems // *Systems and Control Letters.* 2013. V. 62 (10). P. 963–971.
12. *Sachan K., Padhi R.* Barrier Lyapunov Function Based Output-constrained Control of Nonlinear Euler-Lagrange Systems // *Proc. 15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV).* Singapore, 2018. P. 686–691.
13. *Golubev A.E., Botkin N.D., Krishchenko A.P.* Backstepping Control of Aircraft Take-off in Windshear // *IFAC-PapersOnLine.* 2019. V. 52 (16). P. 712–717.
14. *Garg T., Roy S.B.* Barrier Lyapunov Function Based Controller Design for Euler-Lagrange Systems with Reduced Control Effort // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53 (1). P. 459–464.
15. *Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z.* Barrier Lyapunov Function-based Fixed-time FTC for High-order Nonlinear Systems with Predefined Tracking Accuracy // *Nonlinear Dynamics.* 2022. V. 110. P. 381–394.
16. *Golubev A., Kovtanyuk A., Lampe R.* Modeling of Cerebral Blood Flow Autoregulation Using Mathematical Control Theory // *Mathematics.* 2022. V. 10 (12). 2060.
17. *Голубев А.Е.* Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 2. С. 126–137.
18. *Sussmann H.J., Kokotovic P.V.* The Peaking Phenomenon and the Global Stabilization of Nonlinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1991. V. 36 (4). P. 424–440.
19. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
20. *Fossen T.I.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester: John Wiley and Sons, 1994.
21. *Silpa-Anan C., Zelinsky A.* Kambara: Past, Present, and Future // *Proc. 2001 Australian Conf. on Robotics and Automation.* Sydney, 2001. P. 61–66.
22. *Silpa-Anan C.* Autonomous Underwater Robot: Vision and Control. Master thesis. Canberra: Australian National University, 2001. <https://doi.org/10.25911/5d626dd9b96ec>.

О ДВИЖЕНИИ НА КОНЬКАХ РОБОТА, УПРАВЛЯЕМОГО ВНУТРЕННИМ МАХОВИКОМ¹

© 2023 г. Л. А. Климина^а, Е. С. Шалимова^{а,*}

^аНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 17.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Рассматривается движение по шероховатой плоскости осесимметричного робота, управляемого при помощи установленного на нем маховика. Предполагается, что корпус робота контактирует с плоскостью в трех точках, при этом в двух точках действует сила сухого анизотропного трения, а в третьей трение изотропно. Строится управление внутренним маховиком, которое обеспечивает движение объекта в заданном направлении. Изучается зависимость средней скорости центра масс робота от параметров системы.

DOI: 10.31857/S0002338823030071, EDN: EUMHEG

Введение. Изучение и создание новых типов устройств, которые приводятся в движение за счет перемещения внутренних масс, представляет собой актуальную задачу. Подвижные элементы таких устройств не контактируют с внешней средой, что позволяет использовать эти аппараты в агрессивных условиях.

Основы теории перемещения объектов с подвижными внутренними массами в различных средах заложены в таких работах, как [1–3], при этом данные аппараты могут иметь как неизменную, так и переменную геометрию. Управление движением может производиться разными способами. Например, в работах [4–6] оно осуществляется с помощью ротора и материальной точки, движущейся по прямой, а также в [5–7] рассматривается управление телом при помощи материальной точки, перемещающейся в плоскости. Для аппаратов с подвижными внутренними массами могут ставиться различные задачи управления, такие, как перемещение из заданного исходного положения в заданное конечное положение [6, 7] или движение вдоль заданного направления [8–10].

При перемещении роботов подобного типа по поверхности весьма существенное значение представляют тип и количество опор, характер трения между опорами и поверхностью. В частности, опоры с анизотропным трением могут способствовать формированию такого поля сил, которое поддерживает направленное продвижение аппарата. В качестве примера, наглядно демонстрирующего данный эффект, можно привести задачу о движении саней Чаплыгина с подвижным внутренним маховиком. В данном случае имеет место “предельная” степень анизотропии трения в опоре, полностью исключающая наличие скорости опорной точки по одному из направлений, связанных с корпусом объекта. Управление санями Чаплыгина при помощи внутреннего маховика рассмотрено в [11, 12]. Показано существование периодического режима продвижения аппарата, безреверсного по отношению к целевому направлению, проведена аналогия с перемещением похожего робота в жидкости, собран и протестирован макет. Качественные динамические эффекты, возникающие в подобных неголономных системах (в частности, для саней Чаплыгина с подвижными внутренними массами), описаны в [13, 14], при этом учитываются сила и момент вязкого трения, приложенные в опорной точке.

При решении практических задач динамики робота, использующего анизотропию трения для перемещения по поверхности, наиболее реалистичной представляется такая модель контакта, которая допускает скольжение опор в произвольном направлении, но учитывает зависимость

¹ Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

сухого трения в точке контакта от ориентации вектора скорости этой точки относительно системы координат, связанной с корпусом. Отметим, что анизотропия трения может быть связана со структурой (геометрией) опоры (конек Чаплыгина моделирует предельный случай такой анизотропии), а также может быть сформирована за счет целенаправленного изменения величины нормальной реакции. Во втором случае управление нормальной реакцией может осуществляться за счет перемещения внутренних масс, как, например, в публикациях [15, 16].

Остановимся подробнее на случае анизотропии сухого трения, связанной с геометрией опор. Робот с анизотропным сухим трением в одной опоре, управляемый внутренним маховиком, рассмотрен в [17]. При этом использована модель трения, предложенная в [18]. Описано влияние смещения центра масс и частоты вынуждающего воздействия (управляющего момента, приложенного к маховику) на среднюю скорость движения. Отдельно обсуждается предельный переход к случаю робота с коньком Чаплыгина.

В работе представлен робот с твердотельным корпусом на трех опорах, в двух из которых действует анизотропное сухое трение, описываемое моделью из [18]. Подобно статьям [11, 12, 17] управление аппаратом осуществляется посредством внутреннего маховика. Новизна рассматриваемой задачи обеспечивается наличием двух (а не одной) анизотропных опор, а также отличием модели трения от большинства известных исследований аппаратов с неизменяемой внешней геометрией, управляемых подвижными внутренними массами (аналогичное трение применено в модели подобного робота только в [17]). Показывается возможность безреверсного по отношению к целевому направлению продвижения аппарата, исследуется зависимость средней скорости от параметров конструкции и закона управления. В частности, демонстрируется возможность увеличения средней скорости продвижения аппарата по сравнению со случаем одной анизотропной опоры.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение робота в горизонтальной плоскости. Корпус робота имеет массу m_1 , центральный момент инерции J_1 и симметричен относительно вертикальной плоскости, проходящей через прямую $S\eta$, где S — центр масс. Корпус робота опирается на неподвижную шероховатую плоскость тремя точками A , B и C . В системе отсчета $S\xi\eta$, связанной с корпусом, точки A , B и C имеют координаты $(b, -a)$, $(-b, -a)$, $(0, c)$ соответственно (рис. 1).

Внутри корпуса установлен сбалансированный маховик с центром масс в точке S и проходящей через него вертикальной осью собственного вращения; m_2 — масса маховика, J_2 — центральный момент инерции. Маховик приводится в движение мотором, статор которого будем считать частью корпуса робота.

Опишем движение рассматриваемого аппарата в неподвижных горизонтальных осях Ox . Положение робота в них задается координатами (X, Y) центра масс S , а также углом φ поворота корпуса, который отсчитывается от положительного направления Ox до $S\xi$, и углом θ поворота маховика относительно корпуса робота.

В опорах A , B и C действуют силы сухого трения $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$, а также силы нормальной реакции $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_C$. Какие-либо другие внешние воздействия на робот отсутствуют. Трение в опорах

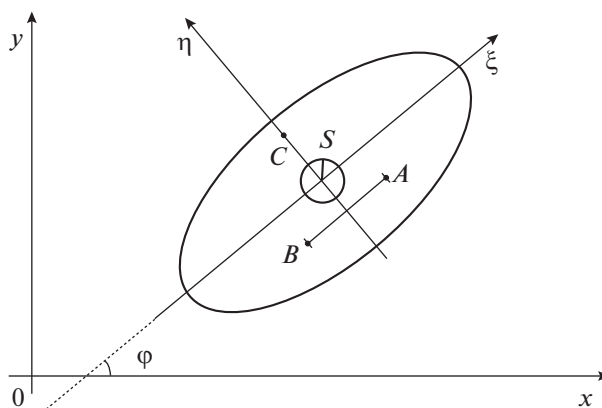


Рис. 1. Робот на горизонтальной плоскости

предполагается в общем случае анизотропным, соответствующая модель приведена в следующем разделе статьи.

Запишем для системы твердых тел, состоящей из корпуса и маховика, второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox , помимо этого и для корпуса, и для маховика используем закон изменения кинетического момента относительно центра масс S :

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{X} &= F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx}, \\(m_1 + m_2)\ddot{Y} &= F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy}, \\(m_1 + m_2)g &= N_A + N_B + N_C, \\J_1\dot{\omega}_1 &= -U + [\mathbf{SA}, \mathbf{F}_A]_z + [\mathbf{SB}, \mathbf{F}_B]_z + [\mathbf{SC}, \mathbf{F}_C]_z, \\J_2(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) &= U.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь $\omega_1 = \dot{\phi}$ — угловая скорость корпуса робота, ω_2 — угловая скорость маховика относительно корпуса, $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Cx}, F_{Cy}$ — компоненты сил трения $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$ соответственно, N_A, N_B, N_C — величины реакции опоры в точках A, B и C , g — величина ускорения свободного падения, U — управляющий момент, приложенный к маховику, индекс z при векторном произведении обозначает проекцию на вертикальную ось Oz , дополняющую оси Ox и Oy до правой ортогональной системы координат.

Управляющий момент U требуется выбрать таким образом, чтобы организовать определенное движение робота. В качестве основной задачи управления будем рассматривать продвижение робота в положительном направлении оси Oy , т. е. обеспечение установившегося движения робота, при котором средняя (по времени на большом промежутке времени) скорость центра масс (а следовательно, и любой другой точки) имеет положительную проекцию на ось Oy , среднее отклонение центра масс от оси Oy является нулевым и скорости точек A, B и C не обращаются в ноль.

По аналогии с другими робототехническими системами, управляемыми внутренним маховиком, будем строить момент U следующим образом [17, 19]:

$$\begin{aligned}U &= \begin{cases} U_{\max}, & \tilde{U} \geq U_{\max}, \\ \tilde{U}(t), & U_{\max} \geq \tilde{U} \geq U_{\min}, \\ U_{\min}, & \tilde{U} \leq U_{\min}, \end{cases} \\ \tilde{U} &= k_1 \text{sign}(\sin(2\pi\kappa t)) + k_2\phi + k_3X.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь κ — частота вынуждающего воздействия, k_1 — его амплитуда, k_2 и k_3 — коэффициенты обратной связи, введенные для того, чтобы обеспечить нулевое значение среднего отклонения курса от заданного направления, $U_{\max}$ и $U_{\min}$ — ограничения на управляющий момент.

2. Модель сил трения в опорах. Основное внимание в статье будет уделено случаю, когда трение в “передней” опоре C изотропно (шаровая опора), а трение в “задних” опорах A и B анизотропно. Условно будем называть каждую опору с анизотропным сухим трением “коньком”. Для объяснения такого выбора далее будет проведено сравнение указанного случая с вариантами, когда все три опоры шаровые и когда все три — коньки.

Итак, пусть в шаровой опоре C действует сухое изотропное кулоновское трение с коэффициентом трения ε :

$$\mathbf{F}_C = -\varepsilon \frac{\mathbf{v}_C}{v_C} N_C, \quad N_C = \frac{(m_1 + m_2)ga}{(a + c)}.\tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}_C$ — вектор скорости точки C , v_C — абсолютная величина скорости точки C . Значение нормальной реакции в опоре вычисляется с учетом расположения трех опорных точек относительно центра масс.

В точках A и B действует анизотропное сухое трение, при этом анизотропия связана со свойствами опор, а не поверхности, по которой движется робот. Используем модель анизотропии трения, предложенную в [18]. Аналогичная модель рассматривалась, например, в работах [20, 21]. Необходимо отметить, что широко распространены и различные иные модели анизотропного трения, например [22, 23].

Изложим применяемую далее модель. Для описания анизотропии в [18] введено понятие тензора трения. В нашем случае считаем, что оси тензора трения для любого из коньков параллельны осям $S\xi\eta$. Тогда при движении конька вдоль направления $S\xi$ или $S\eta$ сила трения описывается классическим выражением для сухого кулоновского трения с коэффициентом трения μ или ε соответственно. При движении в произвольном направлении проекции силы трения F_i , $i = \{A, B\}$, на главные оси тензора трения $S\xi$, $S\eta$ определяются выражением

$$\begin{pmatrix} F_{i\xi} \\ F_{i\eta} \end{pmatrix} = -\frac{N_i}{v_i} \Theta \begin{pmatrix} v_{i\xi} \\ v_{i\eta} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad N_i = \frac{(m_1 + m_2)gc}{2(a + c)}, \quad i = \{A, B\}, \quad (2.2)$$

где $v_{i\xi}$, $v_{i\eta}$ — компоненты скорости v_i соответствующей точки в системе координат $S\xi\eta$, N_i — величина нормальной реакции в данной точке. Далее предполагаем, что $\mu > \varepsilon$. Условно будем считать, что в каждой из точек A и B находится конек, лезвие которого параллельно оси $S\eta$. Он может представлять собой, например, полукруг, опирающийся на плоскость в одной точке.

Отметим, что коэффициент трения в шаровой опоре C равен меньшему из коэффициентов трения, характеризующих конек. Иными словами, допускаем, что технические возможности позволяют при создании робота реализовать в опоре относительно небольшой коэффициент трения величины ε , однако в двух опорах коэффициент трения, отвечающий направлению $S\xi$, намеренно увеличен (значительно) и составляет $\mu > \varepsilon$.

Преобразуем теперь систему уравнений (1.1), описывающую движение корпуса. Она примет вид:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{X} &= F_{A\xi} \cos \varphi - F_{A\eta} \sin \varphi + F_{B\xi} \cos \varphi - F_{B\eta} \sin \varphi + F_{C\xi} \cos \varphi - F_{C\eta} \sin \varphi, \\ (m_1 + m_2) \ddot{Y} &= F_{A\xi} \sin \varphi + F_{A\eta} \cos \varphi + F_{B\xi} \sin \varphi + F_{B\eta} \cos \varphi + F_{C\xi} \sin \varphi + F_{C\eta} \cos \varphi, \\ J_1 \ddot{\omega}_1 &= -U + (bF_{A\eta} + aF_{A\xi} - bF_{B\eta} + aF_{B\xi} - cF_{C\xi}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) совместно с соотношениями (2.1) и (2.2) составит предмет дальнейших исследований.

3. Пример режима направленного продвижения. Рассмотрим модель со следующими значениями геометрических и инерционных параметров: полная масса робота $m_1 + m_2 = 0.5$ кг, момент инерции корпуса робота $J_1 = 0.002$ кг · м², геометрические параметры $a = 0.1$ м, $b = 0.1$ м, $c = 0.1$ м. Ускорение свободного падения полагаем равным $g = 9.81$ м/с², коэффициенты трения $\varepsilon = 0.1$ (в опоре C и вдоль каждого из коньков) и $\mu = 0.7$ (поперек каждого из коньков).

Пусть коэффициенты в законе управления (1.2) принимают следующие значения:

$$k_1 = 0.1 \text{ Нм}, \quad k_2 = 0.01 \text{ Нм}, \quad k_3 = -0.1 \text{ Н}, \quad \kappa = 0.6 \text{ с}^{-1},$$

при этом считаем, что величина управляющего момента ограничена значениями $U_{\min} = -0.1$ Нм, $U_{\max} = 0.1$ Нм.

Такое управление обеспечивает движение робота вдоль направления Oy . На рис. 2 изображена траектория движения центра масс робота на плоскости (X, Y) за время $t = 60$ с. В начальный момент времени робот находится в начале координат, при этом он ориентирован в сторону положительного направления оси Oy ($\varphi = 0$). Компоненты скорости в начальный момент времени $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0.01$ м/с, угловая скорость $\omega(0) = 0$. Однако даже если изначально развернуть робота в сторону отрицательного направления оси Oy ($\varphi = \pi$) и задать ненулевую начальную скорость в этом направлении, то управление при данных параметрах выведет его на движение в сторону положительного направления Oy . Можно убедиться, что в описываемом случае средние затраты мощности на поддержание установившегося движения составляют примерно 0.14 Вт. На рис. 3 показано изменение компонент скорости робота за время $t = 60$ с. Среднее значение компоненты $\dot{X}(t)$ на установившемся режиме движения равно нулю (рис. 3, а). Среднее значение компоненты $\dot{Y}(t)$ на установившемся режиме движения составляет примерно 0.08 м/с, и при этом она не меняет знак, т.е. такое движение безреверсное (рис. 3, б).

Приведенный пример демонстрирует, что выбранное управление при некотором наборе значений параметров системы (он может быть обеспечен на практике) действительно переводит систему в режим движения, задача реализации которого была поставлена.

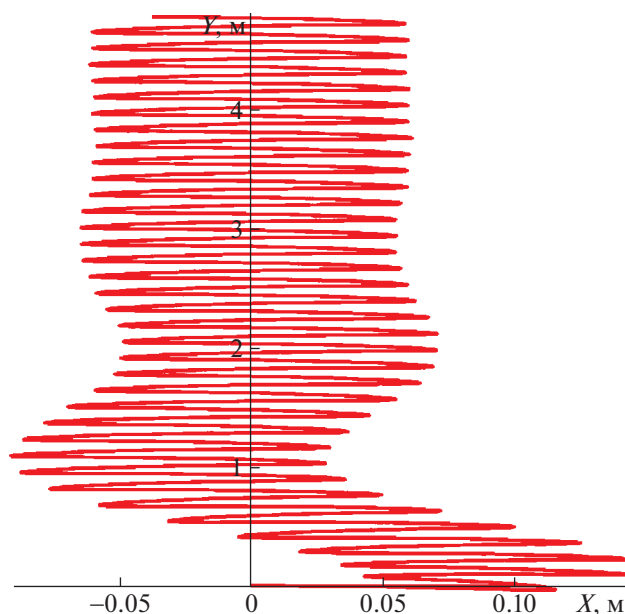


Рис. 2. Пример траектории центра масс робота на двух коньках и шаровой опоре

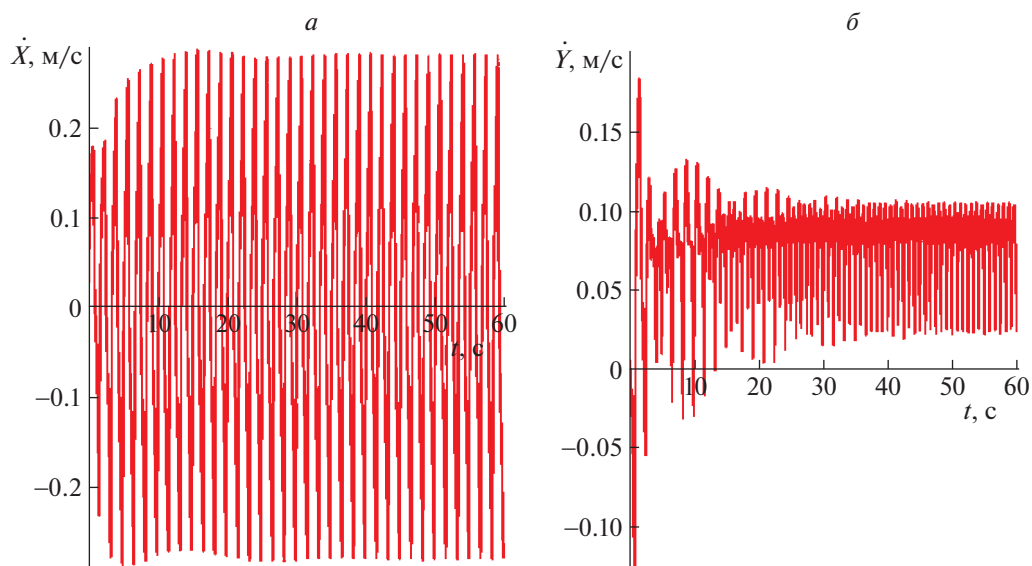


Рис. 3. Пример зависимости компоненты скорости от времени: *a* — по оси *OX*, *б* — по оси *OY*

4. Параметрическое исследование установившихся режимов. На примере робота с геометрическими и инерционными параметрами и управлением, рассмотренными в разд. 3, изучим влияние различных параметров системы на среднюю скорость движения робота вдоль заданного направления.

Сначала убедимся, что для увеличения скорости продвижения робота на установившемся режиме действительно целесообразно использовать комбинацию двух типов опор: шаровая передняя опора и два конька. Предположим, что в отличие от основного изучаемого случая в точке *C* трение анизотропно, т.е. в ней тоже находится конек. В этом случае управление, выбранное в разд. 3, не будет обеспечивать желаемого движения.

Теперь предположим, что все три опоры изотропны. В этом случае при выбранных ранее параметрах и управлении робот будет совершать движение в направлении прямой, параллельной

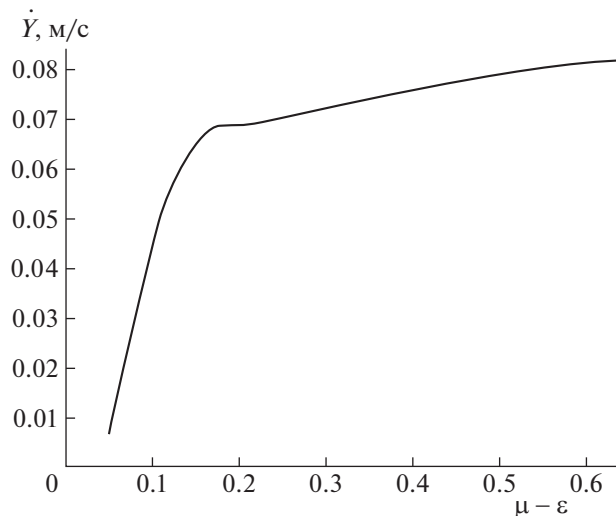


Рис. 4. Примеры зависимости средней скорости установившегося движения от разности коэффициентов трения поперек и вдоль конька

оси Oy . Корректировка коэффициентов в законе управления выведет робот на желаемый установившийся режим, при этом значение средней скорости центра масс на установившемся движении будет в несколько раз меньше, чем в случае, когда две задние опоры анизотропны.

Рассмотрим теперь влияние разности коэффициентов трения поперек и вдоль коньков задних опор на среднюю скорость продвижения робота. Такая зависимость представлена на рис. 4. Передняя опора при этом предполагается шаровой, коэффициент трения в ней равен коэффициенту трения вдоль конька $\epsilon = 0.1$. Управляющий момент выбран таким же, как в разд. 3. Варьируется коэффициент трения μ поперек конька. При разности $\mu - \epsilon$ меньше 0.05 такое управление не позволит реализовать желаемый установившийся режим (движение будет происходить вдоль прямой, параллельной оси Oy), поэтому такие значения разности не рассматривались. Из рисунка можно видеть, что средняя скорость возрастает с увеличением разницы между коэффициентами трения. Иными словами, при фиксированном значении ϵ увеличение коэффициента трения μ поперек конька приводит к увеличению средней скорости центра масс на установившемся режиме движения.

Посмотрим теперь, как будет меняться средняя скорость движения в зависимости от геометрических параметров робота. Будем изменять расстояние a между центром масс S и отрезком AB , соединяющим точки, в которых находятся коньки, при этом зафиксируем расстояние $2b = 0.2$ м между точками A и B и расстояние $c = 0.1$ м от центра масс S до точки C . Соответствующая зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния a изображена на рис. 5, а. При $a = 0$ (в случае, когда центр масс лежит на отрезке AB) и значениях a , близких к нулю, выбранное управление не позволяет реализовать желаемый установившийся режим, поэтому эти случаи выброшены из рассмотрения. Из рисунка можно видеть, что при заданных параметрах максимум средней скорости достигается при $a^* \approx 0.06$ м, и он примерно равен 0.195 м/с.

Далее будем изменять расстояние b от точек A и B до оси симметрии корпуса робота, при этом предположим, что расстояния $a = 0.1$ м и $c = 0.1$ м фиксированы. Зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния b показана на рис. 5, б. При заданных параметрах максимум средней скорости, равный приблизительно 0.09 м/с, достигается при $b^* \approx 0.08$ м.

Теперь проварируем расстояние c между опорой C и центром масс S . Расстояния $a = 0.1$ м и $b = 0.1$ м при этом фиксированы. На рис. 5, в показана зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния c . При $c = 0$ (точка C совпадает с центром масс S) и значениях c , близких к нулю, выбранное управление не позволяет реализовать желаемый установившийся режим, поэтому такие значения c не рассматривались. Максимум средней скорости при заданных параметрах достигается при $c^* \approx 0.06$ м и равен примерно 0.09 м/с.

Можно видеть, что, хотя ни один из геометрических параметров, приведенных в первоначальном примере, не является оптимальным при фиксированных двух других, выбранные

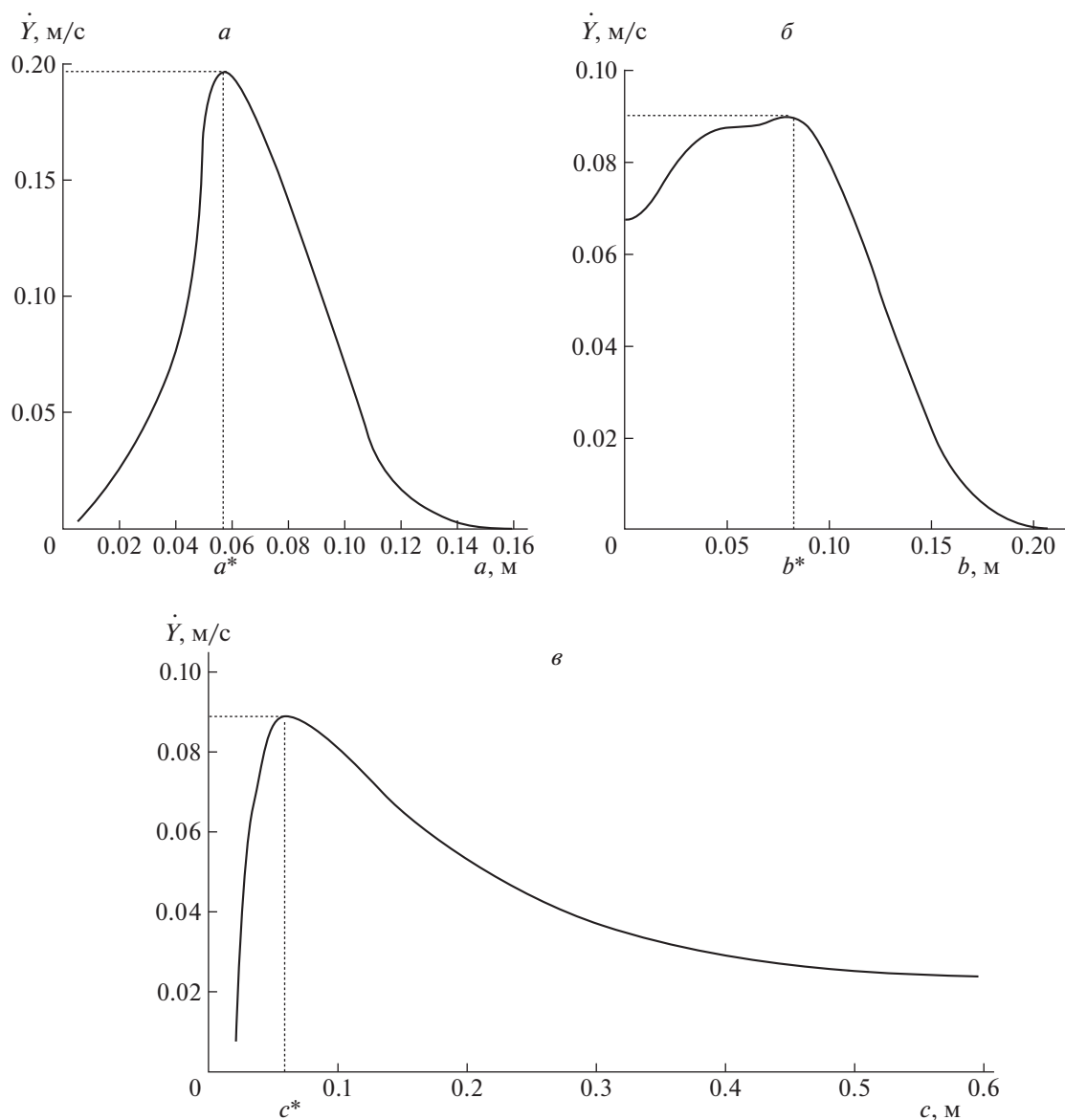


Рис. 5. Примеры зависимости средней скорости установившегося движения от геометрических параметров системы

значения обеспечивают безреверсное установившееся движение с достаточно хорошей величиной средней скорости на нем.

Рассмотрим также влияние на среднюю скорость частоты вынуждающего воздействия. Зафиксируем геометрические параметры $a = 0.1$ м, $c = 0.1$ м, коэффициенты управления $k_1 = 0.1$ Нм, $k_2 = 0.01$ Нм, $k_3 = -0.1$ Н и будем варьировать величину b и частоту вынуждающего воздействия κ . На рис. 6 изображены кривые зависимости средней скорости установившегося движения от расстояния b от каждого из коньков *A* и *B* до оси симметрии корпуса робота при частотах $\kappa = 0.3$ с⁻¹ (штриховая линия), $\kappa = 0.45$ с⁻¹ (пунктирная линия), $\kappa = 0.6$ с⁻¹ (сплошная линия) и $\kappa = 0.7$ с⁻¹ (штрихпунктирная линия). Можно видеть, что при всех этих значениях максимум по величине средней скорости достигается при ненулевом значении расстояния b , что указывает на целесообразность использования двух задних коньков, а не одного, как в случае аппаратов, представленных в [11, 12].

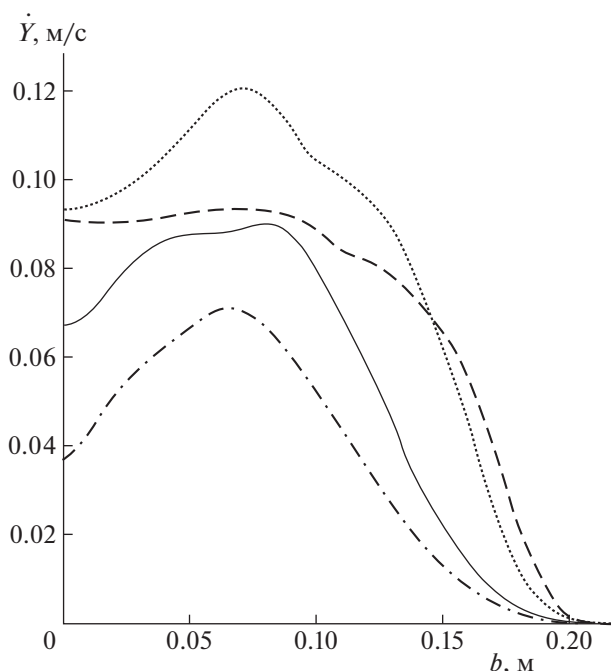


Рис. 6. Зависимости средней скорости установившегося движения от расстояния b при различных частотах вынуждающего воздействия.

Также из рис. 6 видно, что при $\kappa = 0.3 \text{ с}^{-1}$ и $\kappa = 0.45 \text{ с}^{-1}$ для всех значений расстояния между коньками средняя скорость направленного движения выше, чем при $\kappa = 0.6 \text{ с}^{-1}$. Однако при заданных геометрических параметрах режимы, соответствующие управлению с такими вынуждающими частотами, не будут безреверсными. Увеличение же частоты до $\kappa = 0.7 \text{ с}^{-1}$ приведет к снижению средней скорости направленного движения при всех значениях расстояния b .

Заключение. Рассмотрен осесимметричный робот, управляемый с помощью сбалансированного внутреннего маховика и контактирующий с опорной плоскостью в трех точках. В двух опорах сухое трение анизотропно, в третьей — изотропно. Построена математическая модель такой системы и продемонстрировано существование управления, обеспечивающего безреверсное движение описанной системы в заданном направлении. Исследовано влияние анизотропии трения, геометрических параметров конструкции и частоты вынуждающего воздействия на движение робота.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 33–44.
2. Козлов В.В., Рамоданов С.М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // ДАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 478–481.
3. Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T. A Bug on a Raft: Recoil Locomotion in a Viscous Fluid // J. Fluid Mechanics. 2011. V. 669. P. 527–556.
4. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
5. Черноусько Ф.Л. Плоское движение тела под влиянием подвижных внутренних масс // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. XI Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 354–361.
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
7. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады Академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. С. 69–74.

8. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
9. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. № 1. С. 3–22.
10. *Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю.* О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
11. *Kelly S.D., Fairchild M.J., Hassing P.M., Tallapragada P.* Proportional Heading Control for Planar Navigation: The Chaplygin Beanie and Fishlike Robotic Swimming // American Control Conference (ACC). Montreal, 2012. P. 4885–4890.
12. *Kelly S., Abajian-Guerrero R., Grover J., Travers M., Choset H.* Planar Motion Control, Coordination and Dynamic Entrainment in Chaplygin Beanies // Proc. ASME Dynamic Systems and Control Conference. Atlanta, 2018.
13. *Borisov A.V., Kuznetsov S.P.* Regular and Chaotic Motions of a Chaplygin Sleigh Under Periodic Pulsed Torque Impacts // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. P. 792–803.
14. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S.* Fermi-like Acceleration and Power-law Energy Growth in Nonholonomic Systems // Nonlinearity. 2019. V. 32. № 9. P. 3209.
15. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.S.* Construction of Control Algorithm in the Problem of the Planar Motion of a Friction-powered Robot with a Flywheel and an Eccentric Weight // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 89. P. 1517–1527.
16. *Dosaev M.* Algorithm for Controlling an Inertioid Robot with a Flywheel and an Unbalance in Conditions of Restrictions on the Angular Acceleration of the Unbalance // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 109. P. 797–807.
17. *Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 152–161.
18. *Zmitrowicz A.* Mathematical Descriptions of Anisotropic Friction // Intern. J. Solids and Structures. 1989. V. 25. № 8. P. 837–862.
19. *Golovanov S., Klimina L., Dosaev M., Selyutskiy Y., Holub A.* A Trimaran Controlled by an Internal Flywheel // 16th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. Moscow, 2022. P. 1–2.
20. *Вильке В.Г.* Об анизотропном сухом трении и неудерживающих неголономных связях // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 3–12.
21. *Козлов В.В.* Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 855–868.
22. *Карапетян А.В., Шишков А.А.* Динамика конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим анизотропным трением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 2. С. 61–63.
23. *Steindl A., Edelmann J., Plöchl M.* Limit Cycles at Oversteer Vehicle // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 99. № 1. P. 313–321.