

ISSN 0002-3388

Номер 2

Март - Апрель 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2023

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Необходимые и достаточные условия экстремума в сложных задачах оптимизации систем, описываемых полиномиальными и аналитическими функциями

В. Н. Нефедов

3

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Приведение модального управления по выходу для стационарных систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами к управлению по состоянию системой с одним входом

Н. Е. Зубов, А. В. Лапин

26

Метод формирования тросовой группировки микроспутников в виде правильного треугольника с учетом их движения относительно центров масс

Ю. М. Заболотнов, Ш. Чэнь

44

Об устойчивом решении задачи компенсации негладких аддитивных возмущений с помощью законов обратной связи

В. И. Максимов

60

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Послеполетное восстановление вращательного движения малого космического аппарата по информации солнечного датчика

И. В. Белоконов, И. А. Ломака

73

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Игровое взаимосвязанное управление группой беспилотных летательных аппаратов в условиях информационного противодействия

В. А. Болдинов, В. А. Бухалёв, А. А. Скрынников

85

Оперативное абсолютно оптимальное динамическое управление состоянием стохастического дифференциального объекта по его выходу

Е. А. Руденко

93

Сравнение параллельных реализаций метода ветвей и границ для систем с общей памятью

А. Ю. Горчаков, М. А. Посыпкин

108

Задача управления парогенератором в условиях неопределенности при ограничениях на фазовые переменные и управления

С. И. Гулюкина, В. А. Уткин

123

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Об автоколебаниях многозвенного аэродинамического маятника

А. П. Голуб, Л. А. Климина, Б. Я. Локишин, Ю. Д. Селюцкий

140

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Формирование облика АСУ технологическим процессом нанесения гальванических покрытий на основе решения задачи оптимизации <i>А. А. Банников, Ю. В. Литовка, В. А. Нестеров, К. И. Сыпало</i>	151
Оптимальное управление начальным условием в задаче газлифтинга <i>Ф. А. Алиев, И. А. Магerrамов, М. М. Муталлимов, В. И. Цурков</i>	156
Сравнительный анализ стратегий управления потоками в многопользовательской телекоммуникационной сети <i>Ю. Е. Малащенко, И. А. Назарова</i>	164

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 519.6

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В СЛОЖНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ И АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2023 г. В. Н. Нефедов

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.04.2022 г.

После доработки 16.06.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

При исследовании сложных задач оптимизации и управления системами, описываемыми полиномиальными и аналитическими функциями, нередко возникает потребность в использовании необходимых и достаточных условий оптимальности. При этом если известные условия оказываются неприменимыми, требуется разработка как можно более тонких условий. Именно этой проблеме и посвящена настоящая статья. Формулируются необходимые и достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов. При небольшом количестве переменных эти условия могут быть проверены с помощью практически реализуемых алгоритмов. Основными идеями предлагаемых методов являются использование многогранника Ньютона для полинома (степенного ряда), а также разложение полинома (степенного ряда) на сумму квазиоднородных полиномиальных форм. Полученные результаты дают практически применимые методы и алгоритмы, необходимые для решения сложных задач оптимизации и управления системами, которые описываются полиномиальными и аналитическими функциями. Приведены конкретные примеры задач, в которых может быть использована предложенная методика.

DOI: 10.31857/S0002338823020154, EDN: JCHPKN

Введение. Кратко напомним основные этапы исследования на экстремум [1] полинома $p(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для определенности — на минимум (аналогичные рассуждения могут быть перенесены и на степенные ряды, а тем самым — на аналитические функции). Пусть уже найдена некоторая стационарная точка $x^{(0)}$, для которой $p'(x^{(0)}) = 0_{(n)} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, где $p'(x^{(0)})$ — вектор производных. Следующим этапом является проверка достаточного условия минимума. Для этого исследуется квадратичная форма $\varphi(h) = \langle p''(x^{(0)})h, h \rangle$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $p''(x^{(0)})$ — квадратная матрица вторых производных порядка n , $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда если эта форма положительно определена, т.е. $\varphi(h) > 0$ для всех $h \neq 0_{(n)}$ (фактически означает, что полином $p(x)$ будет сильно выпуклым в окрестности $x^{(0)}$), то $x^{(0)}$ — точка локального минимума полинома $p(x)$. Если $\exists h^{(0)} \in \mathbb{R}^n: \varphi(h^{(0)}) < 0$, то $x^{(0)}$ не является точкой локального минимума. А если $\varphi(h) \geq 0$ для всех $h \neq 0_{(n)}$ и одновременно $\exists h^{(0)} \in \mathbb{R}^n: h^{(0)} \neq 0_{(n)}, \varphi(h^{(0)}) = 0$, то “требуются более тонкие методы исследования”, которые, как правило, не приводятся. Таким образом, уже в случае несильной выпуклости $p(x)$ в окрестности $x^{(0)}$ предлагаемые схемы “не работают”. Между тем возможны случаи с $\varphi(h) \equiv 0$, когда $p''(x^{(0)})$ — нулевая матрица, и для этих случаев также описаны как необходимые, так и достаточные условия минимума [2–4]. Если $\varphi(h) \equiv 0$, можно лишь утверждать об отсутствии у полинома квадратичной формы (т.е. однородной формы степени 2), но при этом могут существовать какие-то другие пригодные для исследований формы, т.е. требуется обобщение понятия главной формы полинома. Для этого рассмотрим “многогранник Ньютона” [5] полинома $p(x)$. Под обобщением понятия главной формы по-

линома будем понимать сумму членов полинома, соответствующих какой-нибудь грани этого многогранника. Следует отметить, что многогранники Ньютона являются инструментом для исследования широкого класса задач, например [5–8]. В частности, теория многогранников Ньютона связывает геометрию многогранников с алгебраической геометрией [8]. В разд. 5 приведены конкретные примеры задач, в которых может быть применена предложенная методика: нахождение равновесных состояний сложной системы частиц (например, молекул), использование метода наименьших квадратов для определения неизвестных параметров по набору значений параметрической функции, идентификация параметров динамических систем.

1. Носитель полинома. Многогранник Ньютона. Для дальнейшего потребуются некоторые обозначения для вектора $k \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$, где $\mathbb{Z}_{\geq} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, полинома $p(x)$ и множества $N \subseteq \mathbb{Z}_{\geq}^n$: $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$; $\text{coef}(p, k) = a$ — коэффициент при члене (мономе) ax^k полинома $p(x)$; $N_p = \{k \in \mathbb{Z}_{\geq}^n | \text{coef}(p, k) \neq 0\}$ — носитель полинома $p(x)$,

$$p_N(x) = \sum_{k \in N} \text{coef}(p, k) x^k$$

— N -укорочение полинома $p(x)$.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $k = (4, 5) \in \mathbb{Z}_{\geq}^2$,

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 + x_2^{10} - 10x_1 x_2^9 - 0.1x_1^8 x_2^4, \\ N = \{(0, 0), (1, 1), (4, 5), (0, 10), (8, 4)\}.$$

Тогда

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} = x_1^4 x_2^5, \quad \text{coef}(p, k) = \text{coef}(p, (4, 5)) = -2, \\ \text{coef}(p, (0, 0)) = 0, \quad \text{coef}(p, (1, 1)) = 0,$$

$$N_p = \{k \in \mathbb{Z}_{\geq}^2 | \text{coef}(p, k) \neq 0\} = \{(2, 6), (4, 5), (6, 4), (0, 10), (1, 9), (8, 4)\},$$

$$p_N(x) = \sum_{k \in N} \text{coef}(p, k) x^k = -2x_1^4 x_2^5 + x_2^{10} - 0.1x_1^8 x_2^4.$$

Под *выпуклой комбинацией* точек $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ понимаем сумму вида $\lambda_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_m x^{(m)}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, и для любого множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ под его *выпуклой оболочкой* $\text{Co } Y$ — множество всех выпуклых комбинаций его точек. Под *выпуклым многогранником* (или, для краткости, просто *многогранником*) имеем в виду выпуклую оболочку непустого конечного множества точек $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, под *многогранником Ньютона* полинома $p(x) \not\equiv 0$ — $\text{Co } N_p$.

Пример 2. Многогранником Ньютона для полинома $p(x)$ из примера 1 является множество

$$\text{Co } N_p = \text{Co}\{(2, 6), (4, 5), (6, 4), (0, 10), (1, 9), (8, 4)\}$$

(см. заштрихованную область на рисунке).

Нам понадобятся следующие обозначения для произвольного множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ [1]: $\text{aff } Y$ — *аффинная оболочка множества* Y , $\text{Lin } Y$ — *несущее подпространство* Y ($\text{Lin } Y = \text{aff } Y - y$, где y — произвольная точка из Y), $\dim Y = \dim \text{aff } Y = \dim \text{Lin } Y$ — *размерность* Y , $\text{int } Y$ — совокупность всех внутренних точек множества Y , $\text{ri } Y$ — совокупность всех относительно внутренних точек множества Y .

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое конечное множество, $Y = \text{Co } X$ — выпуклый многогранник. Его выпуклое подмножество $C \subseteq Y$ называется *гранью* Y , если $\forall y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, в случае $\alpha y^{(1)} + (1 - \alpha) y^{(2)} \in C$ выполняется $y^{(1)}, y^{(2)} \in C$. Подмножества $\emptyset$ и Y являются гранями Y . Они называются *несобственными* гранями, а все остальные — *собственными*. Точка $y \in Y$ — *угловая (крайняя)* точка многогранника Y , если $\{y\}$ — грань. Множество угловых точек многогранника Y обозначим через $\text{ext } Y$. Нетрудно видеть, что $\text{ext } Y \subseteq X$. Любая непустая грань $C \subseteq Y$ многогранника $Y = \text{Co } X$ в свою очередь является многогранником, и при этом $C = \text{Co}(X \cap C)$. В дальнейшем нас будут интересовать так называемые *главные квазиоднородные формы* полинома $p(x)$, являющиеся суммами его членов, которые соответствуют какой-нибудь собственной грани

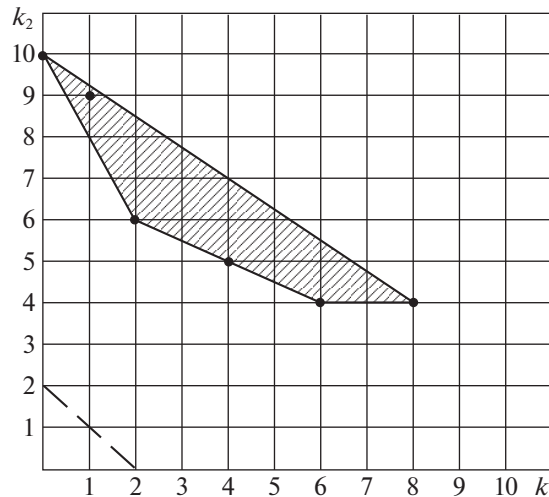


Рис. 1

многогранника Ньютона $\text{Co}N_p$. Таким образом, каждой собственной грани C многогранника $\text{Co}N_p$ отвечает главная квазиоднородная форма $p_{C \cap N_p}(x)$. Кроме того, если размерность $\text{Co}N_p$ меньше n (т.е. при $\text{int Co } N_p = \emptyset$), то считаем полином $p(x)$ одной из своих главных квазиоднородных форм. В этом случае также выполняется равенство $p(x) = p_{C \cap N_p}(x)$, но уже для несобственной грани $C = \text{Co}N_p$.

Пример 3. У многогранника $\text{Co}N_p$ из примера 2 (рисунок 1) восемь собственных граней: четыре угловых точки: $(2, 6)$, $(6, 4)$, $(0, 10)$, $(8, 4)$ и четыре ребра — прямолинейные отрезки, соединяющие пары угловых точек:

$$[(0, 10), (2, 6)], [(2, 6), (6, 4)], [(6, 4), (8, 4)], [(8, 4), (0, 10)].$$

Следовательно, у полинома $p(x)$ из примера 1 имеется восемь квазиоднородных форм:

$$x_1^2 x_2^6, x_1^6 x_2^4, x_2^{10}, -0.1x_1^8 x_2^4, x_1^2 x_2^6 + x_2^{10}, x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4, x_1^6 x_2^4 - 0.1x_1^8 x_2^4, x_2^{10} - 0.1x_1^8 x_2^4.$$

Заметим, что приведенное определение квазиоднородной формы дает возможность в простейших случаях (при $n = 2$ и иногда при $n = 3$) визуально выделять все квазиоднородные формы полинома. Следующее утверждение позволяет определять их аналитически.

Утверждение 1. Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник. Тогда для любой его собственной грани C найдется вектор $A \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, такой, что $C = \text{Arg min}_{x \in Y} \langle A, x \rangle$. Обратно: для любого вектора $A \in \mathbb{R}^n$ множество $\text{Arg min}_{x \in Y} \langle A, x \rangle$ является гранью Y , а в случае $Y \neq \text{Arg min}_{x \in Y} \langle A, x \rangle$ (если $\exists x^* \in Y: \langle A, x^* \rangle > \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle$) — собственной гранью.

Замечание 1. Пусть мы находимся в условиях утверждения 1 и дополнительно выполняется $\text{ext } Y \subset \mathbb{Q}^n$ ($\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел). Тогда в утверждении 1 условие $A \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ можно заменить на $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$. При этом для любого полинома $p(x) \neq 0$ верно $\text{ext Co } N_p \subseteq N_p \subseteq \mathbb{Z}_{\geq}^n$.

Доказательство утверждения 1 и замечания 1 приведено в разд. 4 (см. утверждения 17, 18, 20).

В соответствии с утверждением 1 дадим иное (но эквивалентное предыдущему) определение главной квазиоднородной формы полинома.

Назовем полином $\varphi(x)$ A -квазиоднородной формой, где $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, если $\varphi(x) \neq 0$, и $\exists B \in \mathbb{Z}$: $\forall k \in N_{\varphi} \langle A, k \rangle = B$; считаем $\varphi(x)$ квазиоднородной формой, если $\exists A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, что $\varphi(x)$ является A -квазиоднородной формой. Для полиномов $p(x)$, $q(x)$ пишем, что $q \preceq p$, если а) $N_q \subseteq N_p$,

б) $\forall k \in N_q \text{ coef}(q, k) = \text{coef}(p, k)$. Для полиномов $p(x)$, $q(x)$ и вектора $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ говорим, что $\varphi(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$, если 1) $\varphi \preccurlyeq p$; 2) $N_\varphi = \text{Arg} \min_{k \in N_p} \langle A, k \rangle$. Полином $\varphi(x)$ назовем главной квазиоднородной формой полинома $p(x)$, если он является главной A -квазиоднородной формой этого полинома для некоторого $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$.

Утверждение 2. Пусть X — непустое конечное множество из $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$, $X_A = \text{Arg} \min_{x \in X} \langle A, x \rangle$, а $C_A = \text{Arg} \min_{x \in \text{Co } X} \langle A, x \rangle$. Тогда $X_A = X \cap C_A$.

Доказательство. Заметим, что значение линейной функции на выпуклой комбинации конечного числа точек не превосходит минимального значения этой функции на множестве этих точек, откуда

$$\min_{x \in X} \langle A, x \rangle = \min_{x \in \text{Co } X} \langle A, x \rangle. \quad (1.1)$$

Но тогда, очевидно, выполняется включение $X_A \supseteq X \cap C_A$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in X_A$. Тогда $x \in X$, и в силу (1.1) $x \in C_A$, откуда $x \in X \cap C_A$. Утверждение 2 доказано.

Используя утверждения 1, 2, покажем эквивалентность двух определений. Пусть $\varphi(x)$ — главная квазиоднородная форма полинома $p(x)$ в соответствии со вторым определением. Тогда существует $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, для которого $\varphi(x)$ является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$, и при этом $\varphi = p_{N_\varphi}$, где $N_\varphi = \text{Arg} \min_{k \in N_p} \langle A, k \rangle$. Пусть $C_A = \text{Arg} \min_{k \in \text{Co } N_p} \langle A, k \rangle$. Тогда, в силу утверждения 2, $N_\varphi = C_A \cap N_p$, откуда $\varphi = p_{N_\varphi} = p_{C_A \cap N_p}$, где, в силу утверждения 1, C_A — грань $\text{Co } N_p$. Очевидно, что C_A может совпадать с $\text{Co } N_p$, т.е. являться несобственной гранью, только в случае $\text{int } \text{Co } N_p = \emptyset$.

Допустим, что $\varphi(x)$ — главная квазиоднородная форма полинома $p(x)$ в соответствии с первым определением. Тогда $\varphi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ для некоторой грани C многогранника $\text{Co } N_p$. Возможны варианты: а) C — собственная грань многогранника $\text{Co } N_p$; б) $\text{int } \text{Co } N_p = \emptyset$, $C = \text{Co } N_p$ (тогда C — несобственная грань $\text{Co } N_p$), $\varphi(x) = p_{C \cap N_p}(x) = p(x)$. В случае а), в силу утверждения 1, а также замечания 1, существует $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, при котором $C = \text{Arg} \min_{k \in \text{Co } N_p} \langle A, k \rangle$. Тогда, в силу утверждения 2, $\text{Arg} \min_{k \in N_p} \langle A, k \rangle = C \cap N_p$. Таким образом, $\varphi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$. В случае б) размерность подпространства $L = H - k^{(0)}$, где $H = \text{aff } \text{Co } N_p$, $k^{(0)}$ — произвольный элемент из N_p , меньше n , а следовательно, найдется вектор $e \in \mathbb{R}^n$, отличный от нулевого и ортогональный к L . Таким образом, $\langle e, k \rangle = 0$, $\forall k \in L$, откуда $\langle e, k - k^{(0)} \rangle = 0$, $\forall k \in H \supseteq \text{Co } N_p \supseteq N_p$, т.е.

$$\langle e, k \rangle = \langle e, k^{(0)} \rangle, \quad \forall k \in N_p, \quad (1.2)$$

а следовательно, $N_p = \text{Arg} \min_{k \in N_p} \langle e, k \rangle$. Заметим, что системе (1.2) соответствует система линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами. Тогда ее решение можно искать в поле рациональных чисел, т.е. считать, что координаты вектора $e \neq 0_{(n)}$, удовлетворяющего (1.2), будут рациональными числами. Но домножив e на подходящее натуральное число $\lambda > 0$, получим, что $A = \lambda e \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$. При этом $N_p = \text{Arg} \min_{k \in N_p} \langle e, k \rangle$, т.е. $p(x)$ является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Как будет показано в разд. 3, второе определение квазиоднородных форм позволяет строить алгоритмы их конструктивного выделения для полиномов с произвольным количеством переменных n .

П р и м е р 4. У полинома $p(x)$ из примера 1 выражение $x_1^2 x_2^6$ — главная (1, 1)-квазиоднородная форма; $x_1^6 x_2^4$ — главная (1, 3)-квазиоднородная форма; x_2^{10} — главная (3, 1)-квазиоднородная форма; $-0.1 x_1^8 x_2^4$ — главная (−1, 1)-квазиоднородная форма; $x_1^2 x_2^6 + x_2^{10}$ — главная (2, 1)-квазиоднород-

ная форма; $x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$ — главная $(1, 2)$ -квазиоднородная форма; $x_1^6 x_2^4 - 0.1x_1^8 x_2^4$ — главная $(0, 1)$ -квазиоднородная форма; $x_2^{10} - 0.1x_1^8 x_2^4$ — главная $(-3, -4)$ -квазиоднородная форма.

З а м е ч а н и е 3. Одна и та же квазиоднородная форма может быть главной A -квазиоднородной формой полинома при различных $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$. Например, x_2^{10} является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$ из примера 1 при $A = (3, 1)$, а также при $A \in \{(4, 1), (0, -1), (-1, -3), (1, 0)\}$.

Покажем теперь, каким образом квазиоднородные формы можно использовать для рассмотренной ранее задачи исследования полинома на наличие экстремума. Нам понадобятся дополнительные определения. Пусть функция $f(x)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Скажем, что $f(x)$ существенно зависит от переменной x_i , если существуют две точки из $\mathbb{R}^n$, отличающиеся только по i -й координате, с различными значениями функции $f(x)$ в этих точках. Функция $f(x)$ — не отрицательная, если $\forall x \in \mathbb{R}^n \ f(x) \geq 0$, функция $f(x)$ — невырожденная в слабом (сильном) смысле, если $x_{i_1} \neq 0, \dots, x_{i_r} \neq 0 \ (x_{i_1}^2 + \dots + x_{i_r}^2 \neq 0) \Rightarrow f(x) \neq 0$, где $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ — набор переменных, от которых существенно зависит $f(x)$. Очевидно, что из невырожденности в сильном смысле следует невырожденность в слабом смысле.

П р и м е р 5. Функции (полиномы) $x_1, x_1^2, x_1 x_2^3, x_1 x_2 x_3, g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - x_1)^2, g_2(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^2(x_2 - x_1)^2, g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2^3 - x_1^2)^2 + (x_3^3 - x_1^3 - x_2^5)^2$ являются невырожденными в слабом смысле. Функции $x_1^2, g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), g_3(x_1, x_2, x_3)$ — неотрицательные. Функция x_1^2 существенно зависит только от переменной x_1 , а функция $g_3(x_1, x_2, x_3)$ — от переменных x_1, x_2, x_3 . Кроме того, функции $x_1^2, g_1(x_1, x_2), g_3(x_1, x_2, x_3)$ являются невырожденными в сильном смысле (очевидно, что $g_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, g_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$).

Поскольку в дальнейшем исследование неотрицательности и невырожденности будет проводиться только для полиномов, используем следующие простые утверждения.

У т в е р ж д е н и е 3. Пусть $p(x)$ — полином. Тогда для того, чтобы он существенно зависел от переменной x_i , где $i = \overline{1, n}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists k \in N_p: k_i > 0$.

У т в е р ж д е н и е 4. Пусть $p(x)$ — полином, существенно зависящий от переменной x_i , где $i = \overline{1, n}$. Тогда для любого полинома $q(x) \neq 0$ полином $q(x)p(x)$ также существенно зависит от x_i .

У т в е р ж д е н и е 5. Пусть $p(x), q(x)$ — неотрицательные полиномы, невырожденные в слабом смысле. Тогда полиномы $p(x) + q(x), p(x)q(x)$ также являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле.

Т е о р е м а [3, с. 209]. Пусть $p(x)$ — полином, $p(0_{(n)}) = 0, p'(0_{(n)}) = 0_{(n)}$, и $\forall A \in \mathbb{N}^n$ ($\mathbb{N}$ — натуральный ряд) все главные A -квазиоднородные формы полинома $p(x)$ являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле. Тогда $0_{(n)}$ — точка локального минимума $p(x)$.

Л е м м а 1 [3, с. 210]. Пусть $0_{(n)}$ — точка локального минимума полинома $p(x), p(0_{(n)}) = 0, p'(0_{(n)}) = 0_{(n)}$. Тогда $\forall A \in \mathbb{N}^n$ все главные A -квазиоднородные формы $p(x)$ неотрицательны.

З а м е ч а н и е 4. Следует отметить, что в утверждениях теоремы и леммы 1 рассматриваются A -квазиоднородные формы полинома $p(x)$ не для любого вектора $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, а лишь для $A \in \mathbb{N}^n$ (в двухмерном случае это соответствует множеству граней “юго-западной” части многогранника Ньютона). Между тем во многих других задачах могут понадобиться A -квазиоднородные формы полинома $p(x)$ для всех векторов $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, например, при исследовании полинома на знакоопределенность в положительном органте (см. [9], а также приведенные там ссылки на предыдущие работы автора).

З а м е ч а н и е 5. В [2] описаны практически реализуемые алгоритмы выделения всех форм полинома $p(x)$, являющихся его главными A -квазиоднородными формами хотя бы при одном $A \in \mathbb{N}^n$, что облегчает возможность применения теоремы и леммы 1. Краткое описание этих алгоритмов приведено в разд. 3, а также некоторые модификации этих алгоритмов для случая, ко-

гда ищутся все формы полинома $p(x)$, представляющие собой его главные A -квазиоднородные формы при всех возможных $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$.

З а м е ч а н и е 6. В случае $A \in \mathbb{N}^n$ можно ставить задачу о нахождении совокупности главных A -квазиоднородных форм не только для полинома, но и для степенного ряда, который будет результатом разложения аналитической функции по степеням переменных в окрестности стационарной точки, поскольку в этом случае их число конечно и потребуется конечное число “первых” членов из этого разложения. При этом теорема и лемма 1 остаются в силе и для степенного ряда $p(x)$ [4].

З а м е ч а н и е 7. Пусть выполняются условия теоремы, и при этом $\text{int Co } N_p = \emptyset$. Тогда возможен случай, когда для некоторого $A \in \mathbb{N}^n$ главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$ является сам этот полином. Тогда неотрицательность $p(x)$ (как одной из главных квазиоднородных форм) уже означает, что $0_{(n)}$ — точка локального (и даже глобального) минимума этого полинома (т.е. утверждение теоремы становится тривиальным). Между тем даже в случае $\text{int Co } N_p = \emptyset$ далеко не всегда существует вектор $A \in \mathbb{N}^n$, такой, что величина $\langle A, k \rangle$ будет постоянной при всех $k \in N_p$.

Проиллюстрируем, как работают приведенные утверждения для полиномов с тем же носителем, что и для полинома $p(x_1, x_2)$ из примера 1.

П р и м е р 6. Пусть $p_1(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 1.98 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 + x_2^{10} - 10 x_1 x_2^9 - 0.1 x_1^8 x_2^4$. Тогда (см. пример 4) главными A -квазиоднородными формами этого полинома при некоторых $A \in \mathbb{N}^2$ являются: а) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 1.98 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 = x_1^2 x_2^4 [0.99(x_2 - x_1^2)^2 + 0.01(x_2^2 + x_1^4)]$ — главная $(1, 2)$ -квазиоднородная форма, неотрицательная и невырожденная в слабом смысле (если $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то $\varphi(x_1, x_2) > 0$); б) x_2^{10} ($A = (3, 1)$), $x_1^2 x_2^6 + x_2^{10}$ ($A = (2, 1)$), $x_1^2 x_2^6$ ($A = (1, 1)$), $x_1^6 x_2^4$ ($A = (1, 3)$) — неотрицательные невырожденные в слабом смысле главные A -квазиоднородные формы (при указанных $A \in \mathbb{N}^2$). Пользуясь методами из разд. 3 (см. замечание 5), нетрудно показать, что оставшиеся две главные квазиоднородные формы $x_1^6 x_2^4 - 0.1 x_1^8 x_2^4, x_2^{10} - 0.1 x_1^8 x_2^4$ (см. пример 4) не являются главными A -квазиоднородными формами полинома $p_1(x_1, x_2)$ ни при каких $A \in \mathbb{N}^2$. В силу теоремы, $0_{(2)}$ — точка локального минимума полинома $p_1(x_1, x_2)$.

Пусть $p_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2.01 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 + x_2^{10} - 10 x_1 x_2^9 - 0.1 x_1^8 x_2^4$. Тогда главная квазиоднородная форма $\eta(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2.01 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$ полинома $p_2(x_1, x_2)$ не является неотрицательной ($\eta(1, 1) = -0.01$), а следовательно, согласно леммы 1, $0_{(2)}$ не будет точкой локального минимума.

Пусть $p(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 + x_2^{10} - 10 x_1 x_2^9 - 0.1 x_1^8 x_2^4$ — полином из примера 1. Тогда $\forall A \in \mathbb{N}^2$ все главные A -квазиоднородные формы этого полинома неотрицательны, т.е. условия леммы 1 выполняются. Однако главная $(1, 2)$ — квазиоднородная форма $x_1^2 x_2^6 - 2 x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 = x_1^2 x_2^4 (x_2 - x_1^2)^2$ не является невырожденной в слабом смысле, поскольку принимает значение 0, например, при $x_1 = 1, x_2 = 1$. Поэтому теорема в этом случае “не работает”, т.е. требуются более “тонкие” исследования, которые будут приведены далее (см. разд. 2).

Из формулировок теоремы и леммы 1 следует, что для выяснения, будет ли некоторая стационарная точка $0_{(n)}$ полинома (или степенного ряда; см. замечание 6) $p(x)$ точкой локального минимума, возникает необходимость исследования полиномов, представляющих собой главные квазиоднородные формы этого полинома при всех возможных $A \in \mathbb{N}^n$, во-первых, на неотрицательность, а во-вторых, на невырожденность в слабом смысле. В связи с этим желательно иметь возможность такого исследования для как можно большего числа случаев.

Самым простым и весьма многочисленным будет случай, когда главные квазиоднородные формы полинома являются мономами, соответствующими угловым точкам многогранника Ньютона $\text{Co } N_p$. Чтобы исследовать этот простейший случай, потребуются некоторые определения и обозначения. Запишем для любого конечного множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ через $\Psi(Y)$ множество угловых точек многогранника $\text{Co } Y$, т.е. $\Psi(Y) = \text{ext Co } Y$. Тогда $\Psi(N_p)$ — множество угловых точек

многогранника Ньютона $\text{Co}N_p$. Кроме того, понадобится дополнительное утверждение, позволяющее сузить множество исследуемых точек из $\Psi(N_p)$. Введем сначала некоторые обозначения. Пусть $\leq$ – отношение Парето на $\mathbb{R}^n$: $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \quad a \leq b \Leftrightarrow [a_i \leq b_i, i = \overline{1, n}]$.

Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$; $P(Y) = \{y^* \in Y \mid \forall y \in Y [y \leq y^* \Rightarrow y = y^*]\}$ – множество парето-оптимальных точек из Y . Обозначим $\Omega(N_p) = \Psi(N_p) \cap P(N_p)$. Справедливо следующее простое утверждение.

Утверждение 6. Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$, $A_i > 0, i = \overline{1, n}$. Тогда $\text{Arg} \min_{y \in Y} \langle A, y \rangle \subseteq P(Y)$.

Используя утверждение 6, а также то, что минимум линейной функции на многограннике достигается в его угловых точках [11], получаем, что справедливо утверждение.

Утверждение 7. Пусть $p(x)$ – полином, $N_p \neq \emptyset$. Тогда $\forall A \in \mathbb{N}^n$, для любой главной A -квазиоднородной формы $\varphi(x)$ полинома $p(x)$ вида $N_\varphi = \{k\}$ верно $k \in \Omega(N_p)$.

Кроме того, можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8. Пусть $p(x)$ – полином, $N_p \neq \emptyset$. Тогда $\forall k \in \Omega(N_p)$ найдется вектор $A \in \mathbb{N}^n$, такой, что для главной A -квазиоднородной формы $\varphi(x)$ полинома $p(x)$ выполняется $N_\varphi = \{k\}$.

З а м е ч а н и е 8. Для доказательства утверждения 8 можно воспользоваться утверждением о строгом разделении (за исключением общей точки) двух выпуклых замкнутых многогранных конусов, имеющих единственную общую точку $0_{(n)}$, которая является также единственной угловой точкой для каждого из них.

Таким образом, на первом этапе проверки выполнения условий теоремы или леммы 1 проверяем неотрицательность каждого монома ax^k (его невырожденность в слабом смысле очевидным образом выполняется) полинома $p(x)$, где $k \in \Omega(N_p)$, $a = \text{coef}(p, k)$, которая в этом случае осуществляется тривиальным образом. Действительно, для неотрицательности ax^k , где $a \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: 1) $a > 0$, 2) каждая компонента вектора k является четной (в том числе равной нулю).

Таким образом, можно дополнить лемму 1.

Л е м м а 2. Пусть $0_{(n)}$ – точка локального минимума полинома $p(x)$, $p(0_{(n)}) = 0$, $p'(0_{(n)}) = 0_{(n)}$. Тогда $\forall k \in \Omega(N_p) \quad \text{coef}(p, k) > 0$, и каждая компонента вектора k будет четной (в том числе равной нулю).

Понятно, что уже простое применение леммы 2 может выявить многие случаи, когда исследуемая стационарная точка не является точкой локального минимума полинома. Следующим по сложности будет случай, когда главная квазиоднородная форма соответствует грани многогранника Ньютона размерности 1 (т.е. является отрезком прямой). Нам понадобится следующее простое утверждение.

Утверждение 9. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, C – его грань. Тогда множество угловых точек C – совокупность угловых точек многогранника Y , принадлежащих C , т.е. $\text{ext } C = C \cap \text{ext } Y$.

Доказательство. Включение $C \cap \text{ext } Y \subseteq \text{ext } C$ очевидно (см. определение угловой точки многогранника). Докажем обратное включение. Пусть $y \in \text{ext } C$, тогда $y \in C$. Покажем, что $y \in \text{ext } Y$. Пусть $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, $a \in (0, 1)$, $ay^{(1)} + (1-a)y^{(2)} = y$. Докажем, что $y^{(1)} = y^{(2)} = y$. Используя то, что C – грань Y , получаем $y^{(1)}, y^{(2)} \in C$, откуда и следует доказываемое равенство, поскольку $y \in \text{ext } C$. Утверждение 9 доказано.

С л е д с т в и е 1. Пусть X – конечное множество из $\mathbb{R}^n$, C – грань многогранника $\text{Co}X$. Тогда $\text{ext } C \subseteq C \cap X$. Действительно, используя то, что $\text{ext } \text{Co } X \subseteq X$, из утверждения 9 имеем: $\text{ext } C = C \cap \text{ext } \text{Co } X \subseteq C \cap X$. В частности, если $p(x) \not\equiv 0$ – полином, C – грань многогранника $\text{Co}N_p$, то $\text{ext } C \subseteq C \cap N_p$. При этом для главной квазиоднородной формы $\varphi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ полинома $p(x)$ выполняется $C = \text{Co}(C \cap N_p) = \text{Co } N_\varphi$.

Весьма распространенным будет также случай, когда главная квазиоднородная форма полинома $p(x)$, являющаяся главной A -квазиоднородной формой этого полинома при некотором

$A \in \mathbb{N}^n$, соответствует грани размерности 1 (т.е. отрезку прямой, соединяющей две угловые точки этой грани) и при этом ее носитель состоит из двух точек. Тогда, в силу следствия 1, они обязательно будут угловыми точками этой грани, а в силу утверждения 9 — угловыми точками многогранника Ньютона $\text{Co}N_p$, и при этом, в силу утверждения 6, принадлежат $P(N_p)$, а тем самым принадлежат $\Omega(N_p)$. Если необходимые условия из леммы 2 выполняются, то главные квазиоднородные формы для этого случая будут невырожденными в слабом смысле и неотрицательными, поэтому удовлетворяют условиям и теоремы, и леммы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда грань размерности 1 состоит из более чем двух точек. Нам понадобятся некоторые обозначения и утверждения. Пусть X — множество из $\mathbb{R}^n$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, — функции, определенные на X . Введем множества

$$X_0 = X, \quad X_i = \{x \in X \mid g_i(x) = \inf_{y \in X_{i-1}} g_i(y)\}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Обозначим $\text{lex Arg}[X, g_1, \dots, g_k] = X_k$ (возможно, что $X_k = \emptyset$, если в рассматриваемой последовательности равенств хотя бы один $\inf$ не достигается).

Утверждение 10. Пусть X — конечное непустое множество из $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$, $X_A = \text{lex Arg}[X, \langle A, x \rangle, x_1, \dots, x_n]$. Тогда X_A состоит из единственной точки $x^A \in \Psi(X) = \text{ext Co } X$.

Доказательство. Единственность очевидна. Покажем, что $x^A \in \Psi(X)$. Обозначим $B_A = \langle A, x^A \rangle$. Проведем для простоты доказательство для $n = 2$ (обобщение на общий случай очевидно). Пусть $x^A \in X_A$, $\alpha \in (0, 1)$, $u, v \in \text{Co } X$, $x^A = \alpha u + (1 - \alpha)v$. Покажем, что $u = v = x^A$. В силу (1.1) имеем $B_A \leq \langle A, u \rangle$, $B_A \leq \langle A, v \rangle$, откуда при $B_A = \langle A, x^A \rangle = \alpha \langle A, u \rangle + (1 - \alpha) \langle A, v \rangle$, $\alpha \in (0, 1)$ получаем $\langle A, u \rangle = B_A$, $\langle A, v \rangle = B_A$. Далее, используя то, что значение линейной функции (в частности, функции $\langle A, x \rangle$ или x_1) на выпуклой комбинации конечного числа точек не может быть меньше минимального значения этой функции на множестве этих точек, находим равенство $\min\{x_1 \mid x \in X, \langle A, x \rangle = B_A\} = \min\{x_1 \mid x \in \text{Co } X, \langle A, x \rangle = B_A\}$ (легко доказывается от противного). Следовательно, $x_1^A \leq u_1$, $x_1^A \leq v_1$, откуда при $x_1^A = au_1 + (1 - a)v_1$, $a \in (0, 1)$ получаем $x_1^A = u_1$, $x_1^A = v_1$. Совершенно аналогично находим, что $x_2^A = u_2$, $x_2^A = v_2$. Утверждение 10 доказано.

З а м е ч а н и е 9. Утверждение 10 остается в силе и при $X_A = \text{lex Arg}[X, \langle A, x \rangle, (-1)^{i_1} x_1, \dots, (-1)^{i_n} x_n]$, где $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. В случае $A = 0_{(n)}$ имеем $\text{lex Arg}[X, \langle A, x \rangle, (-1)^{i_1} x_1, \dots, (-1)^{i_n} x_n] = \text{lex Arg}[X, (-1)^{i_1} x_1, \dots, (-1)^{i_n} x_n]$.

Пусть C — грань $\text{Co}N_p$ размерности 1 (отрезок прямой), $N_p \cap C = \{k^{(1)}, \dots, k^{(r)}\}$, где $r \geq 3$. Приведем рассуждения об исследовании на неотрицательность и невырожденность в слабом смысле для полинома $p_{N_p \cap C}(x)$ в этом случае (предполагая, что необходимые условия из леммы 2 выполняются). Пусть для простоты обозначений $\{k^{(1)}\} = \text{lex Arg}[N_p \cap C, x_1, \dots, x_n]$, $\{k^{(r)}\} = \text{lex Arg}[N_p \cap C, -x_1, \dots, -x_n]$. Тогда, в силу утверждения 10, а также замечания 9, $k^{(1)}, k^{(r)}$ — угловые точки многогранника $\text{Co}N_p$. Обозначим

$$e = (k^{(r)} - k^{(1)}) / \text{НОД}(|k_1^{(r)} - k_1^{(1)}|, \dots, |k_n^{(r)} - k_n^{(1)}|) \in \mathbb{Z}^n \setminus 0_{(n)} \quad (1.3)$$

(НОД — наибольший общий делитель целых чисел; нулевые компоненты при вычислении НОД не учитываем, например $\text{НОД}(4, 0, 6, 0, 0) = \text{НОД}(4, 6) = 2$). Пусть α_i — числа, такие, что $k^{(i)} = k^{(1)} + \alpha_i e$, $i = \overline{1, r}$. Такие числа найдутся, поскольку точки $k^{(1)}, \dots, k^{(r)}$ лежат на одной прямой.

В силу выбора $k^{(1)}, k^{(r)}$ эти числа неотрицательны ($\alpha_1 = 0$, а остальные положительные). Кроме того, используя (1.3), нетрудно показать, что эти числа целые, т.е. $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, r}$. Но тогда

$$\begin{aligned} p_{N_p \cap C}(x) &= \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{k^{(i)}} = \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{k^{(1)} + \alpha_i e} = \\ &= x^{k^{(1)}} \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{\alpha_i e} = x^{k^{(1)}} \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) u^{\alpha_i} = x^{k^{(1)}} g(u), \end{aligned}$$

где

$$u = x^e, \quad g(u) = \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) u^{\alpha_i}. \quad (1.4)$$

Согласно сделанному предположению о выполнении условий леммы 2, верно $\text{coef}(p, k^{(1)}) > 0$, $k^{(1)} \in (2\mathbb{Z}_{\geq})^n \setminus \{0_{(n)}\}$, откуда, $\forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \quad x^{k^{(1)}} > 0$. Заметим далее, что (поскольку $\text{НОД}(|e_1|, \dots, |e_n|) = 1$) найдется номер $i = \overline{1, n}$, такой, что e_i — нечетно. Следовательно, при $x \in \mathbb{R}^n$ переменная $u = x^e$ может принимать любые действительные значения. Но тогда для рассматриваемого случая выполняются следующие простые условия:

1) полином $p_{N_p \cap C}(x)$ является неотрицательным тогда и только тогда, когда многочлен $g(u)$ неотрицателен;

2) полином $p_{N_p \cap C}(x)$ является неотрицательным и невырожденным в слабом смысле тогда и только тогда, когда у многочлена $g(u)$ отсутствуют действительные корни.

Докажем второе условие. Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что $g(0) = \text{coef}(p, k^{(1)}) > 0$. В случае отсутствия действительных корней у $g(u)$ выполняется $\forall u \in \mathbb{R} \quad g(u) > 0$, откуда с учетом того, что $\forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \quad x^{k^{(1)}} > 0$, получаем неотрицательность и невырожденность в слабом смысле полинома $p_{N_p \cap C}(x) = x^{k^{(1)}} g(x^e)$.

Заметим, что существуют online программы нахождения действительных корней многочлена от одной переменной.

Допустим, что C — грань $\text{Co}N_p$ размерности 2 (многогранник на плоскости), $N_p \cap C = \{k^{(1)}, \dots, k^{(r)}\}$, где $r \geq 3$. Приведем рассуждения об исследовании на неотрицательность и невырожденность в слабом смысле для полинома $p_{N_p \cap C}(x)$ в этом случае. Пусть для простоты обозначений $\{k^{(1)}\} = \text{lex Arg}[N_p \cap C, x_1, \dots, x_n]$. Тогда, в силу утверждения 10, а также замечания 9, $k^{(1)}$ — угловая точка многогранника $\text{Co}N_p$. Далее для простоты обозначений $k^{(2)}, k^{(3)}$ — смежные с $k^{(1)}$ угловые точки (т.е. $[k^{(1)}, k^{(2)}]$, $[k^{(1)}, k^{(3)}]$ — грани размерности 1 многогранника $\text{Co}N_p$), так что грань C является подмножеством множества

$$k^{(1)} + \{\lambda_1(k^{(2)} - k^{(1)}) + \lambda_2(k^{(3)} - k^{(1)}) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\},$$

т.е. выпуклого конуса, сдвинутого на вектор $k^{(1)}$. Тогда, действуя в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получаем, что найдутся рациональные неотрицательные числа α_i, β_i , такие, что

$$k^{(i)} = k^{(1)} + \alpha_i(k^{(2)} - k^{(1)}) + \beta_i(k^{(3)} - k^{(1)}), \quad i = \overline{1, r}.$$

Рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} p_{N_p \cap C}(x) &= \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{k^{(i)}} = \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{k^{(1)} + \alpha_i(k^{(2)} - k^{(1)}) + \beta_i(k^{(3)} - k^{(1)})} = \\ &= x^{k^{(1)}} \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) x^{\alpha_i(k^{(2)} - k^{(1)})} x^{\beta_i(k^{(3)} - k^{(1)})} = x^{k^{(1)}} \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) u^{\alpha_i} v^{\beta_i} = x^{k^{(1)}} h(u, v), \end{aligned}$$

где

$$u = x^{k^{(2)}-k^{(1)}}, \quad v = x^{k^{(3)}-k^{(1)}}, \quad h(u, v) = \sum_{i=1}^r \text{coef}(p, k^{(i)}) u^{\alpha_i} v^{\beta_i}.$$

Многочлен $h(u, v)$ зависит от двух переменных и имеет рациональные неотрицательные показатели степени. В связи с этим его в общем случае можно рассматривать только при неотрицательных u, v . Тем самым был сделан неэквивалентный переход с возможной потерей решений. Чтобы сделать переход эквивалентным, следует рассматривать 2^n полиномов вида $p_{N_p \cap C}((-1)^{i_1} x_1, \dots, (-1)^{i_n} x_n)$, где $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ (некоторые из этих полиномов могут совпадать) при неотрицательных значениях переменных $x_1, \dots, x_n$. Но тогда и соответствующие им полиномы вида $h(u, v)$ будут рассматриваться при неотрицательных u, v . В работе [9] предлагаются некоторые алгоритмы исследования многочленов вида $h(u, v)$ на неотрицательность и строгую положительность в положительном ортанте, т.е. при положительных u, v . Если все полученные таким образом многочлены вида $h(u, v)$ строго положительны в положительном ортанте, то полином $p_{N_p \cap C}(x)$ является неотрицательным и невырожденным в слабом смысле и наоборот.

З а м е ч а н и е 10. В случае, когда C — грань $\text{Co}N_p$ размерности 2, в качестве точки $k^{(1)}$ можно взять любую точку из $\text{ext } C = C \cap \Omega(N_p)$, а в качестве $k^{(2)}, k^{(3)}$ — две возможные (из геометрических соображений понятно, что других в этом случае не будет) точки $k \in \text{ext } C$, удовлетворяющие условию $0.5(k + k^{(1)}) \notin \text{ri } C$. Это условие легко проверяется решением соответствующей задачи линейного программирования (ЗЛП) (см. утверждение 3.8 [2]). Выделение всех элементов множества $\Omega(N_p)$ — достаточно простая вычислительная задача, сводящаяся к решению конечного числа ЗЛП [2].

Аналогично рассматриваются грани C многогранника $\text{Co}N_p$ размерности 3, 4 и т.д. Соответственно грань размерности 3 приводит к необходимости исследования на неотрицательность и строгую положительность в положительном ортанте 2^n многочленов с рациональными показателями степени, зависящих от трех переменных и т.д. Отметим, что в случае размерности 3 среди показателей степеней в многочленах могут оказаться и отрицательные числа, но это не имеет значения для методов из [9].

П р и м е р 7. Ранее в предыдущих примерах рассматривались главные (1, 2)-квазиоднородные формы полиномов вида: $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 1.98x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$, $\eta(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2.01x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$, которые соответствуют граням размерности 1, состоящим из более чем двух членов. Тогда для каждой из этих форм $\phi \in \{\psi, \varphi, \eta\}$ (они отличаются только коэффициентами при своих членах) имеем: $N_\phi = \{k^{(1)} = (2, 6), k^{(2)} = (4, 5), k^{(3)} = (6, 4)\}$,

$$e = \frac{1}{\text{НОД}(|k_1^{(3)} - k_1^{(1)}|, |k_2^{(3)} - k_2^{(1)}|)} (k^{(3)} - k^{(1)}) = (2, -1) \in \mathbb{Z}^n,$$

$k^{(1)} = k^{(1)} + 0 \cdot e = (2, 6)$, $k^{(2)} = k^{(1)} + 1 \cdot e = (4, 5)$, $k^{(3)} = k^{(1)} + 2 \cdot e = (6, 4)$. Поставим теперь в соответствие каждой форме ϕ свою функцию вида $g_\phi(u)$ (согласно (1.4)):

$$g_\psi(u) = 1 - 2u + u^2, \quad g_\varphi(u) = 1 - 1.98u + u^2, \quad g_\eta(u) = 1 - 2.01u + u^2.$$

Очевидно, что $g_\psi(u)$ — неотрицательный многочлен, но у него имеется действительный корень, равный 1. Следовательно, форма $\psi(x_1, x_2)$ не является невырожденной в слабом смысле. Поэтому для полинома $p(x_1, x_2)$ из примера 1, для которого $\psi(x_1, x_2)$ — главная (1, 2)-квазиоднородная форма, теорема “не работает”, т.е. требуются более тонкие исследования, которые и будут приведены далее (см. пример 9). Соответственно $g_\varphi(u)$ не имеет действительных корней, следовательно, форма $\varphi(x_1, x_2)$ является неотрицательной и невырожденной в слабом смысле. У многочлена $g_\eta(u)$ имеются отрицательные значения, например $g_\eta(-1) = -0.01$, следовательно, форма $\eta(x_1, x_2)$ не будет неотрицательной.

2. Разложение полинома на сумму A -квазиоднородных форм. Приложение к необходимым и достаточным условиям минимума полинома и степенного ряда. Для любого полинома $p(x) \neq 0$, для любого $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ можно разложить этот полином на сумму A -квазиоднородных форм вида

$$p(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_r(x), \quad (2.1)$$

где $\varphi_i(x) \neq 0$; $\forall k \in N_{\varphi_i} \langle A, k \rangle = B_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, r}$, $r \in \mathbb{N}$, и при этом $B_1 < B_2 < \dots < B_r$. Если, кроме того, $A \in \mathbb{N}^n$, $p(0_{(n)}) = 0$, то $B_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, r}$. Обозначим для любого полинома $p(x)$ $H_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0\}$.

Для многочлена $q(t) = b_1 t^{k_1} + b_2 t^{k_2} + \dots + b_l t^{k_l}$, где $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_1 < \dots < k_l$, зависящего от переменной $t \in \mathbb{R}$, кратко запишем (выделяя главный член в этом многочлене) $q(t) = b_l t^{k_l} + o(t^{k_l})$. Аналогичную запись можно использовать и в случае $l = 1$, а также, если требуется выделить в $q(t)$ первые несколько главных членов. Используем следующие простые факты относительно многочленов.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_{\geq}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, $p(x) = x^k$ — моном, $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{N}^n$, $\langle A, k \rangle = B \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$, $q_i(t) = a_i t^{A_i} + o(t^{A_i})$ — многочлены от переменной $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = a^k t^B + o(t^B)$.

Пусть $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{N}^n$, $\varphi(x) \neq 0$ — полином, являющийся A -квазиоднородной полиномиальной формой, $\forall k \in N_{\varphi} \langle A, k \rangle = B \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $\varphi(a_1 t^{A_1}, \dots, a_n t^{A_n}) = \varphi(a) t^B$. Если $q_i(t) = a_i t^{A_i} + o(t^{A_i})$ — многочлены от переменной $t \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $\varphi(a) \neq 0$, то $\varphi(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \varphi(a) t^B + o(t^B)$.

Лемму 1 можно усилить.

Л е м м а 3. Пусть $0_{(n)}$ — точка локального минимума полинома $p(x)$, $p(0_{(n)}) = 0$, $p'(0_{(n)}) = 0_{(n)}$. Тогда $\forall A \in \mathbb{N}^n$, для разложения (2.1) выполняется $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $\forall x \in H_{\varphi_1} \cap \dots \cap H_{\varphi_{i-1}}$ $\varphi_i(x) \geq 0$ (в частности, при $i = 1$ имеем $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_1(x) \geq 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для разложения (2.1) при некотором $A \in \mathbb{N}^n$ для некоторых $i \in \{1, \dots, r\}$, $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in H_{\varphi_1} \cap \dots \cap H_{\varphi_{i-1}}$ верно $\varphi_i(x^*) < 0$. Обозначим $x^*(t) = (x_1^* t^{A_1}, \dots, x_n^* t^{A_n})$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall t > 0 \quad p(x^*(t)) = \varphi_1(x^*) t^{B_1} + \dots + \varphi_r(x^*) t^{B_r} = \varphi_i(x^*) t^{B_i} + \dots + \varphi_r(x^*) t^{B_r} = \varphi_i(x^*) t^{B_i} + o(t^{B_i}),$$

где $\varphi_i(x^*) < 0$, а это противоречит тому, что $0_{(n)}$ — точка локального минимума полинома $p(x)$. Лемма 3 доказана.

Для дальнейшего понадобятся некоторые простые утверждения.

У т в е р ж д е н и е 11. Пусть $q_1(t)$, $q_2(t)$ — два многочлена от переменной $t \in \mathbb{R}$ и выполняется $q_i(t) = a_i t^{\alpha_i} + o(t^{\alpha_i})$, где $a_i > 0$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тогда найдутся $a_0 > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$, такие, что $q_1(t) + q_2(t) = a_0 t^{\alpha_0} + o(t^{\alpha_0})$.

З а м е ч а н и е 11. Утверждение 11 остается справедливым для произвольного количества многочленов, а также в случае, если некоторые из них (но не все) тождественно нулевые.

У т в е р ж д е н и е 12. Пусть $p(x)$ — неотрицательный полином, $p(0_{(n)}) = 0$, $0_{(n)}$ — точка локального минимума $p(x)$, $q_i(t)$ — многочлены от переменной $t \in \mathbb{R}$ и верно $q_i(t) = a_i t^{\alpha_i} + o(t^{\alpha_i})$, где $a_i \neq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда либо $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) \equiv 0$, либо найдутся $a_0 > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$, такие, что $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = a_0 t^{\alpha_0} + o(t^{\alpha_0})$.

У т в е р ж д е н и е 13 (первое усиление теоремы 1). Пусть $p(x)$ — полином, $p(0_{(n)}) = 0$, $p'(0_{(n)}) = 0_{(n)}$, $\forall A \in \mathbb{N}^n$ все главные A -квазиоднородные формы $p(x)$ неотрицательны (т.е. выполняются необходимые условия минимума из леммы 1). Пусть, кроме того, для любого $A \in \mathbb{N}^n$ для разложения (2.1) справедливо, что главная A -квазиоднородная форма $\varphi_1(x)$ полинома $p(x)$ либо

является невырожденной в слабом смысле (т.е. $H_{\varphi_1} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n = \emptyset$), либо $\forall x \in H_{\varphi_1} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n$ $\varphi_2(x) > 0$. Тогда $0_{(n)}$ — точка локального минимума $p(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда в силу леммы 7 из [3, с. 208] найдутся многочлены $q_i(t)$ от переменной $t \in \mathbb{R}$, такие, что $q_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$,

$$p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = a_0 t^{\alpha_0} + o(t^{\alpha_0}), \quad (2.2)$$

где $a_0 < 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $q_i(t) \not\equiv 0$, $i = \overline{1, n}$ (так как в случае, если для некоторого $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ справедливо $q_{i_0}(t) \equiv 0$, положив $q_{i_0}(t) = t^{\alpha_0+1}$, снова получаем (2.2)). Пусть

$$q_i(t) = a_i t^{A_i} + o(t^{A_i}), \quad a_i \neq 0, \quad A_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, n}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n. \quad (2.3)$$

Рассмотрим разложение (2.1) относительно $A = (A_1, \dots, A_n)$. Возможны случаи:

а) $\varphi_1(a) > 0$, и тогда $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \varphi_1(a) t^{B_1} + o(t^{B_1})$, что в силу $a_0 < 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ противоречит (2.2);

б) $\varphi_1(a) = 0$, и тогда $a \in H_{\varphi_1} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n$, а следовательно, по условиям доказываемого утверждения $\varphi_2(a) > 0$ и $\varphi_1(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. При этом $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \varphi_1(q_1(t), \dots, q_n(t)) + \varphi_2(a) t^{B_2} + o(t^{B_2})$, что в силу утверждений 11, 12, а также замечания 11 противоречит (2.2), поскольку $a_0 < 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$. Утверждение 13 доказано.

Возможно также дальнейшее уточнение достаточного условия минимума.

У т в е р ж д е н и е 14 (второе усиление теоремы 1). Пусть выполняются условия утверждения 13, и для любого $A \in \mathbb{N}^n$ для разложения (2.1) справедливо, что для некоторого $j \in \{2, \dots, r\}$ A -квазиоднородные формы $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{j-1}(x)$ являются неотрицательными. При этом либо $H_{\varphi_1} \cap \dots \cap H_{\varphi_{j-1}} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n = \emptyset$, либо $\forall x \in H_{\varphi_1} \cap \dots \cap H_{\varphi_{j-1}} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^n$ $\varphi_j(x) > 0$. Тогда $0_{(n)}$ — точка локального минимума $p(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда, в силу леммы 7 из [3, с. 208], найдутся многочлены $q_i(t)$ от переменной $t \in \mathbb{R}$, такие, что $q_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, и выполняется (2.2), где $a_0 < 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве утверждения 13, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $q_i(t) \not\equiv 0$, $i = \overline{1, n}$, и верно (2.3). Рассмотрим разложение (2.1) относительно $A = (A_1, \dots, A_n)$. Из условий доказываемого утверждения получаем, что $\varphi_1(a) \geq 0, \dots, \varphi_{j-1}(a) \geq 0$ и в случае $\varphi_1(a) = 0, \dots, \varphi_{j-1}(a) = 0$ обязательно выполняется $\varphi_j(a) > 0$. Таким образом, возможны случаи:

а) $\varphi_1(a) > 0$, и тогда $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \varphi_1(a) t^{B_1} + o(t^{B_1})$, что противоречит (2.2);

б) для некоторого $j_1 \in \{2, \dots, j\}$ справедливо, что $\varphi_1(a) = 0, \dots, \varphi_{j_1-1}(a) = 0$, $\varphi_{j_1}(a) > 0$, и при этом $p(q_1(t), \dots, q_n(t)) = \varphi_1(q_1(t), \dots, q_n(t)) + \dots + \varphi_{j_1-1}(q_1(t), \dots, q_n(t)) + \varphi_{j_1}(a) t^{B_{j_1}} + o(t^{B_{j_1}})$ что, согласно утверждений 11, 12, а также замечания 11, противоречит (2.2). Утверждение 14 доказано.

У т в е р ж д е н и е 15 (третье усиление теоремы 1). Условие неотрицательности $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{j-1}(x)$ в утверждении 14 можно заменить на условие: $0_{(n)}$ — точка локального минимума полиномов $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, ..., $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_{j-1}(x)$.

Действительно, если для некоторого $j_1 \in \{2, \dots, j-1\}$ выполняется $\varphi_1(a) = 0, \dots, \varphi_{j_1-1}(a) = 0$ (где a удовлетворяет (2.3)), то $\varphi_{j_1}(a) \geq 0$, а при $\varphi_1(a) = 0, \dots, \varphi_{j_1-1}(a) = 0$ справедливо $\varphi_{j_1}(a) > 0$, (поскольку для $a(t) = (a_1 t^{A_1}, \dots, a_n t^{A_n})$, где $t \in \mathbb{R}$, имеем $\varphi_1(a(t)) + \dots + \varphi_{j_1-1}(a(t)) = t^{B_{j_1}} \varphi_1 + \dots + t^{B_{j_1}} \varphi_{j_1-1}(a)$). Таким образом, рассмотрение случаев а), б) при доказательстве этого утверждения является аналогичным, как и при доказательстве утверждения 14.

З а м е ч а н и е 12. Лемму 3, а также утверждения 13–15 можно перенести и на степенные ряды. Тогда разложение (2.1) становится бесконечным и условие $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ в лемме 3 следует за-

менить на $\forall i \in \mathbb{N}$. Утверждение 13 переносится без изменений, а утверждения 14, 15 — с заменой $j \in \{2, \dots, r\}$ на $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.

3. Некоторые практически реализуемые процедуры, используемые для проверки выполнения необходимых и достаточных условий минимума. Для практического применения полученных результатов понадобится также решение следующих задач.

1. Необходим практически реализуемый алгоритм выделения всех главных A -квазиоднородных форм полинома, где $A \in \mathbb{N}^n$ (а при решении некоторых других задач [9] — для $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$).

2. В случае использования разложения вида (2.1) следует также иметь практически реализуемый алгоритм нахождения всех возможных разложений при $A \in \mathbb{N}^n$.

Ранее уже говорилось, что при $n = 2$ все главные квазиоднородные формы полинома $p(x)$ можно выделять визуально (основываясь на первом определении квазиоднородных форм полинома), пользуясь изображением $\text{Co}N_p$. Но уже при $n = 3$ такое выделение становится проблематичным и поэтому требуются аналитические методы, базирующиеся на втором определении главных квазиоднородных форм полинома. В [2] было предложено несколько практически реализуемых алгоритмов, основанных на многократном решении соответствующих ЗЛП. Приведем простейший (базовый) метод. Для любого непустого множества U кратко обозначим, что $2^U = \{V \mid V \subseteq U\}$ — совокупность всех подмножеств U . В указанном методе перебираем все непустые подмножества $N \subset N_p$ (т.е. $N \in 2^{N_p} \setminus \{\emptyset, N_p\}$) и рассматриваем нетривиальный случай, когда $N \neq N_p$. Тогда для проверки, является ли $p_N(x)$ главной квазиоднородной формой полинома $p(x)$, достаточно убедиться, существует ли целочисленное решение системы равенств и неравенств (относительно неизвестного вектора $e \in \mathbb{Z}^n$):

$$\langle e, k \rangle = \langle e, k^{(0)} \rangle, \quad k \in N \setminus \{k^{(0)}\}; \quad \langle e, k' \rangle \geq \langle e, k^{(0)} \rangle + 1, \quad k' \in N_p \setminus N \quad (3.1)$$

(если $|N| = 1$, то равенства в (3.1) отсутствуют), где $k^{(0)}$ — произвольный элемент из множества N .

Если имеется целочисленное решение $e = A$ системы (3.1), то $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ (при $e = 0_{(n)}$ не выполняются неравенства в (3.1)) и $p_N(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$. В противном случае $p_N(x)$ не является главной квазиоднородной формой полинома $p(x)$. Это непосредственно следует из определения главной квазиоднородной формы полинома. Для нахождения целочисленного решения системы (3.1) можно рассмотреть задачу $\max_{i=1, n} |e_i| \rightarrow \min$ с ограничениями (3.1) или эквивалентную ей ЗЛП (добавляем новую переменную u):

$$u \rightarrow \min; \quad e_1 \leq u, -e_1 \leq u, \dots, e_n \leq u, -e_n \leq u \quad (\text{т.е. } \max_{i=1, n} |e_i| \leq u), \quad (3.2)$$

$$\langle e, k \rangle = \langle e, k^{(0)} \rangle, \quad k \in N \setminus \{k^{(0)}\}; \quad \langle e, k' \rangle \geq \langle e, k^{(0)} \rangle + 1, \quad k' \in N_p \setminus N.$$

Нетрудно видеть, что ЗЛП (3.2) разрешима тогда и только тогда, когда система (3.1) имеет хотя бы одно решение. Для решения ЗЛП (3.2) полезно воспользоваться симплекс-методом, поскольку любое решение, полученное этим методом, будет угловой точкой выпуклого полиэдрального множества, заданного системой линейных равенств и неравенств с целыми коэффициентами. Следовательно, компоненты этого решения — рациональные числа. Заметим далее, что если e — решение системы (3.1), то $\forall \lambda \geq 1$ λe также является решением этой системы. Но тогда, взяв любое рациональное решение e системы (3.1), полученное, например, решением ЗЛП (3.2), и умножив его на наименьшее общее кратное знаменателей ненулевых компонент этого решения, получаем целочисленное решение системы (3.1). Нетрудно видеть [10, с. 35], что если ЗЛП (3.2) имеет решение, то в его допустимом множестве обязательно найдется угловая точка, являющаяся одним из решений этой ЗЛП (поскольку ранг системы неравенств [10, с. 7] в (3.2) равен числу переменных, т.е. $n + 1$), из которой легко получить целочисленное решение системы (3.1). Таким образом, система (3.1) совместна тогда и только тогда, когда она имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Поскольку для исследования полиномов и степенных рядов на локальный минимум требуются A -квазиоднородные формы не для всех $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, а лишь для $A \in \mathbb{N}^n$, то в этом случае требуется уточнение метода. Тогда следует добавить к системе (3.1) неравенства

$$e_i \geq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

и для нахождения целочисленного решения системы (3.1), (3.3) рассматривать ЗЛП

$$e_1 \rightarrow \min \quad (3.4)$$

при условиях (3.1), (3.3). При этом объединенная система (3.1), (3.3) совместна тогда и только тогда, когда она имеет какое-нибудь целочисленное решение (рассуждение такое же, как и в случае системы (3.1)).

Следует, однако, отметить, что в случае, когда величина $|N_p|$ достаточно большая, количество элементов в 2^{N_p} является крайне большим, что делает невозможным применение метода. В связи с этим в [2] приводятся различные способы сокращения необходимого количества ЗЛП (а также количества ограничений в них), решение которых дает решение поставленной задачи выделения всех главных A -квазиоднородных форм полинома для $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ или для $A \in \mathbb{N}^n$. Показано, что вместо $N \in 2^{N_p} \setminus \{\emptyset\}$ достаточно ограничиться рассмотрением $N \in 2^{\Psi(N_p)} \setminus \{\emptyset\}$, где $\Psi(N_p) = \text{extCo}N_p$ — в случае $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$, а при $A \in \mathbb{N}^n$ — рассмотрением $N \in 2^{\Omega(N_p)} \setminus \{\emptyset\}$, где $\Omega(N_p) = \Psi(N_p) \cap P(N_p)$. В [2] предложены также и другие методы сокращения.

Аналогичный подход может использоваться и для последовательного нахождения полиномов $\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ в разложении (2.1) для заданного полинома $p(x)$ после нахождения полинома $\varphi_1(x)$, являющегося главной A -квазиоднородной формой $p(x)$ для некоторого $A \in \mathbb{N}^n$. При этом следует учитывать возможную неоднозначность выбора $A \in \mathbb{N}^n$ для одной и той же главной квазиоднородной формы $\varphi_1(x)$ полинома $p(x)$ (см. пример в замечании 3). В некоторых случаях, описанных в разд. 4, такая неоднозначность не влияет на однозначность разложения (2.1) при любом выборе $A \in \mathbb{N}^n$, при котором $\varphi_1(x)$ будет главной A -квазиоднородной формой $p(x)$. Если же такой однозначности нет, можно и в этом случае применить прием из [2]. Снова опишем простейший метод, который можно затем аналогичным образом модифицировать (в целях сокращения числа решаемых ЗЛП).

В простейшем варианте метода для нахождения $\varphi_2(x)$ в разложении (2.1) (после того, как был получен полином $\varphi_1(x)$, являющийся главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$ для некоторого $A \in \mathbb{N}^n$) рассматриваем для всех $N \in 2^{N_p \setminus N_{\varphi_1}} \setminus \{\emptyset\}$ систему линейных равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \langle e, k \rangle &= \langle e, k^{(0)} \rangle, \quad k \in N_{\varphi_1} \setminus \{k^{(0)}\}, \\ \langle e, k' \rangle &= \langle e, k^{(1)} \rangle, \quad k' \in N \setminus \{k^{(1)}\}; \quad \langle e, k'' \rangle \geq \langle e, k^{(0)} \rangle + 1, \quad k'' \in N, \\ \langle e, \tilde{k} \rangle &\geq \langle e, k^{(1)} \rangle + 1, \quad \tilde{k} \in N_p \setminus (N \cup N_{\varphi_1}); \quad e_i \geq 1, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $k^{(0)}, k^{(1)}$ — произвольные элементы из множеств N_{φ_1}, N соответственно (при $|N_{\varphi_1}| = 1$ равенства $\langle e, k \rangle = \langle e, k^{(0)} \rangle, k \in N_{\varphi_1} \setminus \{k^{(0)}\}$, отсутствуют и при $|N| = 1$ равенства $\langle e, k' \rangle = \langle e, k^{(1)} \rangle, k' \in N \setminus \{k^{(1)}\}$, отсутствуют). Тогда если имеется целочисленное решение $e = A$ системы (3.5), то $A \in \mathbb{N}^n$ и $\varphi_2(x) = p_N(x)$ — следующая после $\varphi_1(x)$ A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$ в разложении (2.1). В противном случае $p_N(x)$ не может ни при каком $A \in \mathbb{N}^n$ (при котором $\varphi_1(x)$ является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$) быть следующей после $\varphi_1(x)$ A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$ в разложении (2.1). Для нахождения какого-нибудь решения системы (3.5) рассматриваем ЗЛП (3.4), (3.5). При этом как и в случае системы (3.1) система (3.5) совместна тогда и только тогда, когда она имеет какое-нибудь целочисленное решение (рассуждения аналогичны). Кроме того, для уменьшения числа вариантов и здесь можно применить сходные приемы, используемые в [2] для выделения всех главных квазиоднородных форм полинома. После нахождения второго члена в разложении (2.1) аналогичным образом можем подбирать все возможные полиномы, которые при некоторых $A \in \mathbb{N}^n$ являются третьими членами в разложении (2.1) и т.д.

З а м е ч а н и е 13. Приведенные рассуждения можно перенести и на степенные ряды. При этом следует воспользоваться тем, что если для некоторого $A \in \mathbb{N}^n$ полином $\varphi_A(x)$ будет главной

A -квазиоднородной формой степенного ряда $p(x)$, то $N_{\varphi_A} \subseteq P(N_p)$, а, следовательно, во всех приведенных рассуждениях можно заменить N_p на множество $P(N_p)$, которое для степенных рядов конечно (см. утверждение 2 из [4]). Используя эти же соображения, получаем, что в системе (3.5) условие $\tilde{k} \in N_p \setminus (N \cup N_{\varphi_1})$ можно заменить на $\tilde{k} \in P(N_p \setminus (N \cup N_{\varphi_1}))$.

4. Некоторые случаи, когда разложение полинома на сумму A -квазиоднородных форм (2.1) оказывается единственным при выбранной главной форме $\varphi_1(x)$. В предыдущем разделе был описан некоторый универсальный подход для получения разложения вида (2.1) для произвольного полинома $p(x)$. Этот подход является весьма громоздким и требующим решения большого количества ЗЛП вида (3.5). Между тем возможны случаи, когда разложение (2.1) будет единственным при выбранной главной форме $\varphi_1(x)$, т.е. не зависящим от выбора $A \in \mathbb{N}^n$, такого, что $\varphi_1(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$. Тогда проверка выполнения условий леммы 3 и утверждений 13–15 значительно упрощается. В настоящем разделе показывается, что такая единственность имеет место, когда $\text{Co}N_{\varphi_1}$ — грань многогранника $\text{Co}N_p$, размерность которой ровно на 1 меньше размерности $\text{Co}N_p$.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения о выпуклых многогранниках. Ранее было введено определение выпуклого многогранника как выпуклой оболочки некоторого конечного множества точек из $\mathbb{R}^n$. Существует эквивалентное определение выпуклого многогранника, как ограниченного множества, являющегося пересечением конечного числа замкнутых полупространств [11]. Таким образом, выпуклый многогранник $Y \subset \mathbb{R}^n$, определенный ранее как выпуклая оболочка конечного множества точек из $\mathbb{R}^n$, всегда может быть представлен в виде

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, r}\}, \quad (4.1)$$

где $a^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $a^{(i)} \neq 0_{(n)}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, r}$. С другой стороны, любое непустое множество $Y \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде (4.1), будет выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда множество Y является ограниченным. При этом если Y — ограниченное непустое множество, представимое в виде (4.1), то $\text{ext } Y \neq \emptyset$, множество $\text{ext } Y$ конечно и $Y = \text{Co ext } Y$ [11]. Обозначим $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $B^\delta(u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - u\| \leq \delta\}$, где $\delta > 0$, $x, u \in \mathbb{R}^n$.

Нам понадобятся некоторые утверждения.

Утверждение 16. Пусть $Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, r}\} \neq \emptyset$ — выпуклый многогранник, C — его собственная грань, $H = \text{aff } C$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad I(x) = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i\}$, $I(C) = \bigcap_{x \in C} I(x)$. Тогда: а) $I(C) \neq \emptyset$; б) $C = \{x \in Y \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)\}$; в) $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)\}$; г) $C = Y \cap H = Y \cap \text{aff } C$.

Доказательство а). Предположим, что $I(C) = \emptyset$. Тогда $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists x(i) \in C: \langle a^{(i)}, x(i) \rangle < b_i$. Следовательно, для

$$x^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x(i) \in C$$

выполняется $\langle a^{(i)}, x^* \rangle < b_i$, $i = \overline{1, r}$, откуда $x^* \in C \cap \text{int } Y$. Из этого условия, используя то, что C — грань Y , нетрудно показать, что $C = Y$ (действительно, в этом случае любая точка $y \in Y$ будет одной из угловых точек отрезка, содержащегося в Y , внутренней точкой которого является $x^* \in C$ и по определению грани будет принадлежать C), а это противоречит исходным условиям.

Доказательство б). Обозначим $C' = \{x \in Y \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)\}$, $H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)\}$. Заметим, что $\exists v(C) \in C: I(v(C)) = I(C)$, $\langle a^{(i)}, v(C) \rangle < b_i$, $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I(C)$ ($v(C)$ получается по аналогии с x^*), следовательно, найдется число $\delta > 0$, такое, что $\forall x \in B^\delta(v(C)) \quad I(x) \subseteq I(v(C)) = I(C)$, откуда $C' \cap B^\delta(v(C)) = H' \cap B^\delta(v(C))$. Но тогда $\text{aff } C' = H'$, $v(C) \in \text{ri } C'$.

Пусть $\text{ext } C' = \{v(1), \dots, v(k_1)\}$. Поскольку $v(C) \in \text{ri } C'$, в силу утверждения 3.3 из [2], найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1} \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{k_1} > 0$,

$$\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i v(i) = v(C) \in C,$$

откуда, используя то, что C — грань, получаем $\text{ext } C' \subseteq C$. Но тогда ввиду того, что $\text{Co ext } C' = C'$ [11], используя выпуклость C , получаем $C' \subseteq C$. Обратное включение очевидно (см. определение $I(C)$).

Доказательство в). Следует из б) и равенства $\text{aff } C' = H'$.

Доказательство г). Следует из б), в). Утверждение 16 доказано.

Утверждение 17. Пусть $Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, r}\} \neq \emptyset$ — выпуклый многогранник, C — его собственная грань, $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad I(x) = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \langle a^{(i)}, x \rangle = b_i\}$,

$$I(C) = \bigcap_{x \in C} I(x), \quad A = \sum_{i \in I(C)} a^{(i)}, \quad b = \sum_{i \in I(C)} b_i.$$

Тогда $I(C) \neq \emptyset$, $A \neq 0_{(n)}$, $\text{Arg } \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle = C$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall x \in C \quad \langle A, x \rangle = b$; $\forall x \in Y \quad [\langle A, x \rangle = b \Rightarrow x \in C]$.

Пусть $x \in C$. Тогда $\langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)$, следовательно, $\langle A, x \rangle = b$. Пусть $x \in Y$, $\langle A, x \rangle = b$. Покажем, что $x \in C$. Из того, что

$$\langle A, x \rangle = \left\langle \sum_{i \in I(C)} a^{(i)}, x \right\rangle = \sum_{i \in I(C)} \langle a^{(i)}, x \rangle = b = \sum_{i \in I(C)} b_i,$$

используя неравенства $\langle a^{(i)}, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, r}$, имеем $\langle a^{(i)}, x \rangle = b_i, i \in I(C)$. Следовательно, $x \in \{x' \in Y \mid \langle a^{(i)}, x' \rangle = b_i, i \in I(C)\} = C$ (см. утверждение 16б)). Утверждение 17 доказано.

Замечание 14. Очевидно, что если $a^{(i)} \in \mathbb{Q}^n, i = \overline{1, r}$, то

$$A = \sum_{i \in I(C)} a^{(i)} \in \mathbb{Q}^n.$$

Утверждение 18. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, $A \in \mathbb{R}^n, C = \text{Arg } \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle$. Тогда C — грань Y .

Доказательство. Выпуклость C очевидна. Предположим, что $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y, \alpha \in (0, 1), \alpha y^{(1)} + (1 - \alpha)y^{(2)} \in C$. Покажем, что $y^{(1)}, y^{(2)} \in C$. Пусть $B = \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle$. Из $\alpha y^{(1)} + (1 - \alpha)y^{(2)} \in C$ следует, что $\langle A, \alpha y^{(1)} + (1 - \alpha)y^{(2)} \rangle = B$, откуда $\alpha \langle A, y^{(1)} \rangle + (1 - \alpha) \langle A, y^{(2)} \rangle = B$. Из последнего равенства с учетом того, что $\langle A, y^{(1)} \rangle \geq B, \langle A, y^{(2)} \rangle \geq B, \alpha \in (0, 1)$, получаем $\langle A, y^{(1)} \rangle = B, \langle A, y^{(2)} \rangle = B$, т.е. $y^{(1)}, y^{(2)} \in C$. Утверждение 18 доказано.

Утверждение 19. Пусть $X \subset \mathbb{Z}^n$ — непустое конечное множество. Тогда $\text{Co } X$ можно представить в виде $\text{Co } X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^{(i)}, x \rangle \leq b_i, i = \overline{1, r}\}$, где $a^{(i)} \in \mathbb{Q}^n, b_i \in \mathbb{Q}, i = \overline{1, r}$.

Для доказательства утверждения 19 достаточно воспользоваться теоремой 46 из [12], доказательство которой содержит в себе алгоритм для представления многогранных множеств в виде пересечения конечного числа замкнутых подпространств, а также замечанием 2 из [12, с. 69]. Утверждение 19 является также следствием того, что $a^{(i)}, b_i, i = \overline{1, r}$, — решения соответствующих систем линейных уравнений с коэффициентами из поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а поэтому их компоненты тоже могут быть найдены в поле $\mathbb{Q}$.

Следствием утверждений 17, 19, и замечания 14 будет следующее утверждение.

Утверждение 20. Пусть $X \subset \mathbb{Z}^n$ — непустое конечное множество. Тогда для любой собственной грани C многогранника $\text{Co}X$ найдется вектор $A \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ (а следовательно, и $A \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$), такой, что $C = \text{Arg} \min_{x \in \text{Co} X} \langle A, x \rangle$.

Множество K называется *выпуклым конусом*, если оно выпукло и вместе с каждой точкой $x \in K$ содержит все точки λx при $\lambda > 0$. Нетрудно видеть, что если $x, y \in K$, то $x + y \in K$. Действительно, поскольку K — выпуклое множество, то $0.5x + 0.5y \in K$, откуда $x + y = 2(0.5x + 0.5y) \in K$.

Существует эквивалентное определение: K называется выпуклым конусом, если для любых $x, y \in K, \lambda > 0$ выполняется $\lambda x \in K, x + y \in K$. Достаточно показать, что из второго определения следует выпуклость K . Действительно, $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in (0, 1)$ справедливо $\lambda x \in K, (1 - \lambda)y \in K \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Утверждение 21. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, C — его собственная грань. Тогда $K(C) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid C = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle\}$ — непустой выпуклый конус, при этом $0_{(n)} \notin K(C)$.

Доказательство. В силу утверждения 17, $K(C) \neq \emptyset$. Очевидно, что $0_{(n)} \notin K(C)$, поскольку $C \neq Y$. Пусть $A, \tilde{A} \in K(C)$, т.е.

$$C = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle \tilde{A}, x \rangle. \quad (4.2)$$

Тогда $\forall \lambda > 0 \quad C = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle \lambda A, x \rangle$, т.е. $\lambda A \in K(C)$. Покажем, что $C = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A + \tilde{A}, x \rangle$, т.е. $A + \tilde{A} \in K(C)$. Заметим, что в силу (4.2) выполняется

$$\forall x \in C, \quad \forall y \in Y \quad \langle A, x \rangle = b_A = \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle \leq \langle A, y \rangle, \quad \langle \tilde{A}, x \rangle = b_{\tilde{A}} = \min_{x \in Y} \langle \tilde{A}, x \rangle \leq \langle \tilde{A}, y \rangle,$$

откуда $\forall x \in C, \forall y \in Y \quad \langle A + \tilde{A}, x \rangle = b_A + b_{\tilde{A}} \leq \langle A + \tilde{A}, y \rangle$. Следовательно,

$$C \subseteq \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A + \tilde{A}, x \rangle, \quad \min_{x \in Y} \langle A + \tilde{A}, x \rangle = b_A + b_{\tilde{A}}. \quad (4.3)$$

Предположим, что $\text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A + \tilde{A}, x \rangle \setminus C \neq \emptyset$. Тогда, в силу (4.3), $\exists y \in Y: \langle A + \tilde{A}, y \rangle = \min_{x \in Y} \langle A + \tilde{A}, x \rangle = b_A + b_{\tilde{A}}, y \notin C$. Из условий $y \in Y, y \notin C$, в силу (4.2), получаем $\langle A, y \rangle > b_A, \langle \tilde{A}, y \rangle > b_{\tilde{A}}$. Но $b_A + b_{\tilde{A}} = \langle A + \tilde{A}, y \rangle = \langle A, y \rangle + \langle \tilde{A}, y \rangle > b_A + b_{\tilde{A}}$, т.е. пришли к противоречию. Утверждение 21 доказано.

Введенный в утверждении 21 конус $K(C)$ будем использовать и для любого полинома $p(x) \neq 0$, предполагая, что выпуклым многогранником Y в определении $K(C)$ является $\text{Co}N_p$.

Назовем вектор $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ *нормированным*, если $\text{НОД}(|A_1|, \dots, |A_n|) = 1$ (как и ранее, нулевые компоненты при вычислении НОД не учитываем, например, $\text{НОД}(4, 0, 6, 0, 0) = \text{НОД}(4, 6) = 2$). Любой вектор $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ тривиальным образом приводится к нормированному (делением на натуральное число, равное $\text{НОД}(|A_1|, \dots, |A_n|)$). Множество всех нормированных векторов из $\mathbb{Z}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ обозначим через $\mathbb{Z}_0^n$. Соответственно $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}^n \cap \mathbb{Z}_0^n$.

Следствие 2. Из утверждения 21 следует, что для полинома $p(x) \neq 0$, для любой собственной грани C многогранника $\text{Co}N_p$ квазиоднородная форма $\phi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ является главной A -квазиоднородной формой полинома $p(x)$ для любого вектора $A \in K(C) \cap \mathbb{Z}^n$, где $K(C) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid C = \text{Arg} \min_{x \in \text{Co} N_p} \langle A, x \rangle\}$. При этом, в силу утверждений 20, 21, $K(C) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset, 0_{(n)} \notin K(C) \cap \mathbb{Z}^n$. Очевидно, что если $\phi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$ для некоторого вектора $A \in K(C) \cap \mathbb{Z}^n$, то $\phi(x)$ — также главная λA -квазиоднородная форма полинома $p(x)$ для любого $\lambda > 0$, такого, что $\lambda A \in \mathbb{Z}^n$. Поэтому при выборе для некоторой квазиоднородной формы $\phi(x) = p_{C \cap N_p}(x)$ соответствующего ей вектора $A \in K(C) \cap \mathbb{Z}^n$ достаточ-

но ограничиться рассмотрением нормированных векторов. Однако простые примеры (см. пример 8) показывают, что множество $K(C) \cap \mathbb{Z}_0^n$ может оказаться бесконечным. Поэтому нахождение всех главных квазиоднородных форм путем перебора и выбора подходящих векторов $A \in K(C) \cap \mathbb{Z}_0^n$ является в общем случае невыполнимой задачей. В связи с этим в разд. 3 использовался другой подход, основанный на переборе подходящих подмножеств множества N_p , а множество таких подмножеств, очевидно конечно.

С л е д с т в и е 3. С учетом следствия 2 в условиях теоремы, а также утверждений 13–15 можно условие $\forall A \in \mathbb{N}^n$ заменить на $\forall A \in \mathbb{N}_0^n$.

П р и м е р 8. В примере 1 моном x_2^{10} — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x_1, x_2)$ для всех векторов (очевидно, нормированных) $A = (n, -1)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда разложение (2.1) является единственным для любого $A \in \mathbb{N}^n$ такого, что $\phi_1(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$. При этом получение разложения (2.1) (необходимого для проверки условий леммы 3 и утверждений 13–15) для заданной главной квазиоднородной формы $\phi_1(x)$ будет очень простой задачей, поскольку легко находится по любому подходящему $A \in \mathbb{N}^n$. Предварительно докажем некоторые утверждения.

У т в е р ж д е н и е 22. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, C — его собственная грань, $\text{int } Y \neq \emptyset$, $H = \text{aff } C$, $\dim H = n - 1$. Тогда найдется вектор $e \in \mathbb{R}^n$, такой, что $e \neq 0_{(n)}$, $K(C) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid C = \text{Arg } \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle\} = \{\lambda e \mid \lambda > 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L = H - x^0 = \text{Lin } C$ — линейное подпространство, где x^0 — произвольная точка из C . Покажем, что найдется ненулевой вектор $e \in \mathbb{R}^n$, такой, что

$$e \perp L, \quad \forall x \in C \quad \langle e, x \rangle = \langle e, x^0 \rangle, \quad \forall x \in \text{int } Y \quad \langle e, x^0 \rangle < \langle e, x \rangle. \quad (4.4)$$

Заметим, что $\dim L = \dim H = n - 1 \Rightarrow \exists e \in \mathbb{R}^n$: $e \neq 0_{(n)}$, $e \perp L \Rightarrow \forall x \in L \quad \langle e, x \rangle = 0$. Но тогда $\forall x \in C \subseteq H = L + x^0 \quad x - x^0 \in L \Rightarrow \langle e, x - x^0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle e, x \rangle = \langle e, x^0 \rangle$.

Покажем также, что

$$[x \in Y, \langle e, x \rangle = \langle e, x^0 \rangle] \Rightarrow x \in C. \quad (4.5)$$

Используя утверждение 16 г), а также то, что $e \perp L$, $\dim L = n - 1$, имеем

$$[x \in Y, \langle e, x \rangle = \langle e, x^0 \rangle] \Rightarrow x - x^0 \in L \Rightarrow x \in L + x^0 = H \Rightarrow x \in Y \cap H = C.$$

Пусть теперь $x^* \in \text{int } Y$. Тогда $\exists \delta > 0$: $B(x^*, \delta) \subseteq Y$. Докажем, что $\langle e, x^* \rangle \neq \langle e, x^0 \rangle$. Заметим, что $x^* \notin C$. Если предположить противное, то в силу того, что C — грань и $x^* \in C$, получим $B(x^*, \delta) \subseteq C$, откуда $\dim H = n$, что противоречит условиям. Таким образом, $x^* \notin C$, следовательно, в силу (4.5) $\langle e, x^* \rangle \neq \langle e, x^0 \rangle$ и для определенности $\langle e, x^0 \rangle < \langle e, x^* \rangle$ (иначе вместо e будем рассматривать $-e$). Если предположить, что для некоторого другого $\tilde{x} \in \text{int } Y$ не выполняется $\langle e, x^0 \rangle < \langle e, \tilde{x} \rangle$, то либо $\langle e, x^0 \rangle = \langle e, \tilde{x} \rangle$ (что в силу (4.5) противоречит утверждению $\tilde{x} \in \text{int } Y \Rightarrow \tilde{x} \notin C$), либо $\langle e, x^0 \rangle > \langle e, \tilde{x} \rangle$. Тогда в силу очевидной выпуклости $\text{int } Y$ получим, что для некоторых $\alpha \in (0, 1)$, $x^\alpha = \alpha \tilde{x} + (1 - \alpha)x^* \in \text{int } Y$ верно $\langle e, x^0 \rangle = \langle e, x^\alpha \rangle$, что, согласно (4.5), противоречит утверждению $x^\alpha \in \text{int } Y \Rightarrow x^\alpha \notin C$. Таким образом, (4.4) выполняется.

Из (4.4), (4.5) следует, что $C = \text{Arg } \min_{x \in Y} \langle e, x \rangle$, откуда $e \in K(C)$. Осталось показать, что если $e^* \in K(C)$, то для некоторого $\lambda > 0$ $e^* = \lambda e$. Из условия $e^* \in K(C)$ получаем (см. утверждение 21), что

$$e^* \neq 0_{(n)}, \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in Y \quad \langle e^*, x \rangle = \min_{x' \in Y} \langle e^*, x' \rangle \leq \langle e^*, y \rangle, \quad (4.6)$$

откуда $\forall x \in C \quad \langle e^*, x - x^0 \rangle = 0$, где $x^0 \in C$. Но тогда и для любой аффинной комбинации [11] x точек из C снова выполняется это равенство. Тем самым $\forall x \in H \quad \langle e^*, x - x^0 \rangle = 0$, откуда $\forall x \in L \quad \langle e^*, x \rangle = 0$. Следовательно, $e^* \perp L$ и, согласно $e \perp L$, $\dim L = \dim H = n - 1$, найдется число $\lambda \neq 0$: $e^* = \lambda e$. При этом из (4.4), (4.6) следует, что $\lambda > 0$. Утверждение 22 доказано.

Применяя утверждения 20, 22, находим, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 23. Пусть $X \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное непустое множество, C — собственная грань многогранника $Y = \text{Co}X$, $\text{int} Y \neq \emptyset$, $H = \text{aff} C$, $\dim H = n - 1$. Тогда $\exists e \in \mathbb{Z}_0^n$: $K(C) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid C = \text{Arg} \min_{x \in Y} \langle A, x \rangle\} = \{\lambda e \mid \lambda > 0\}$.

Следствие 4. Таким образом, если выполняются условия $\text{int} \text{Co} N_p \neq \emptyset$, $\dim H = n - 1$, где $H = \text{aff} \text{Co} N_{\varphi_1}$, то, в силу утверждения 23, разложение (2.1) является единственным для любого $A \in \mathbb{N}^n$, такого, что $\varphi_1(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$ (т.е. при $N_{\varphi_1} = \text{Arg} \min_{x \in N_p} \langle A, x \rangle$) и получение этого разложения (необходимого для проверки условий леммы 3 и утверждений 13–15) является тривиальной задачей. Оно легко находится по указанному вектору $A \in \mathbb{N}^n$. Действительно, в силу утверждения 2 $N_{\varphi_1} = \text{Arg} \min_{x \in N_p} \langle A, x \rangle = C_1 \cap N_p$, где $C_1 = \text{Arg} \min_{x \in \text{Co} N_p} \langle A, x \rangle$ — грань многогранника $\text{Co} N_p$ (см. утверждение 1) и при этом $\text{Co} N_{\varphi_1} = \text{Co}(C_1 \cap N_p) = C_1$, а следовательно, $A \in K(C_1)$, где в силу утверждения 23 $K(C_1) = \{A \in \mathbb{R}^n \mid C_1 = \text{Arg} \min_{x \in \text{Co} N_p} \langle A, x \rangle\}$ — одномерный конус, т.е. $K(C_1) = \{\lambda A \mid \lambda > 0\}$. Понятно, что при выборе вместо A любого другого вектора из $K(C_1) \cap \mathbb{N}^n$ разложение вида (2.1) не меняется.

Рассмотрим также случай, когда для некоторого $A \in \mathbb{N}^n$ для соответствующего этому A разложению (2.1) выполняется $N_{\varphi_1} = N_p \cap C_1$, где C_1 — грань многогранника $\text{Co} N_p$, размерность которой ровно на 1 меньше размерности $\text{Co} N_p$, и при этом $\text{int} \text{Co} N_p = \emptyset$, $C_1 = \text{Co} N_{\varphi_1}$ (см. следствие 1). Если $\text{int} \text{Co} N_p = \emptyset$, то $\dim \text{Co} N_p = n - k$, где $k \geq 1$. Тогда найдется совокупность линейно независимых векторов $e^{(1)}, \dots, e^{(k)} \in \mathbb{Q}^n$ (учитываем, что эти векторы являются решениями системы линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами, а следовательно, решения этой системы можно искать в поле $\mathbb{Q}$), ортогональных линейному подпространству $L = \text{aff} \text{Co} N_p - y^{(1)}$, где $y^{(1)}$ — произвольная точка из N_p . Пусть $N_p = \{y^{(1)}, \dots, y^{(l)}\}$ и для простоты обозначений $N_{\varphi_1} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(l_1)}\}$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений (относительно вектора $e \in \mathbb{R}^n$):

$$\langle e, y^{(2)} - y^{(1)} \rangle = 0, \dots, \langle e, y^{(l_1)} - y^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle e, e^{(1)} \rangle = 0, \dots, \langle e, e^{(k)} \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Множество решений этой системы соответствует множеству векторов, лежащих в L и ортогональных линейному подпространству $L_1 = H_1 - y^{(1)} \subset L$, где $H_1 = \text{aff} C_1$, размерности $n - k - 1$ (любой ненулевой вектор e , удовлетворяющий (4.7), ортогонален L_1 и дополняет базис в L_1 до базиса в L), т.е. является линейным подпространством размерности 1, а следовательно, имеет вид $\{\lambda e^{(0)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $e^{(0)} \in \mathbb{Z}_0^n$ (снова учитываем, что коэффициенты системы (4.6) являются целыми или рациональными числами). Пусть для $e^{(0)}$, кроме того, выполняется $N_{\varphi_1} = \text{Arg} \min_{x \in N_p} \langle e^{(0)}, x \rangle$.

Если это не так, то меняем $e^{(0)}$ на $-e^{(0)}$ (см. замечание 15). Тогда любой вектор $A \in \mathbb{N}^n$, для которого $\varphi_1(x)$ — главная A -квазиоднородная форма полинома $p(x)$, удовлетворяет равенству

$$A = \lambda_0 e^{(0)} + \lambda_1 e^{(1)} + \dots + \lambda_k e^{(k)}, \quad (4.8)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. При любом выборе $A \in \mathbb{N}^n$ по формуле (4.8) разложение (2.1) остается неизменным. Таким образом, и в этом случае получение разложения (2.1) является тривиальной задачей.

З а м е ч а н и е 15. Приведем обоснование того, что либо для $e = e^{(0)}$, либо для $e = -e^{(0)}$ выполняется

$$N_{\varphi_1} = \text{Arg} \min_{x \in N_p} \langle e, x \rangle. \quad (4.9)$$

Поскольку e в любом из этих случаев – решение системы (4.7), то $\forall y \in N_{\varphi_1} \langle e, y \rangle = \langle e, y^{(1)} \rangle$, откуда

$$\forall y \in C_1 = \text{Co } N_{\varphi_1} \quad \langle e, y \rangle = \langle e, y^{(1)} \rangle. \quad (4.10)$$

Заметим, что

$$\left[y \in \text{Co } N_p, \langle e, y \rangle = \langle e, y^{(1)} \rangle \right] \Rightarrow y \in C_1. \quad (4.11)$$

Действительно, используя то, что $H_1 \cap \text{Co } N_p = C_1$ (см. утверждение 16г)), из левой части (4.11) получаем

$$\begin{aligned} y - y^{(1)} &\in \text{aff } \text{Co } N_p - y^{(1)} = L, \\ y - y^{(1)} \perp e &\Rightarrow y - y^{(1)} \in L_1 \Rightarrow y \in L_1 + y^{(1)} = H_1 \Rightarrow y \in H_1 \cap \text{Co } N_p = C_1 = \text{Co } N_{\varphi_1}. \end{aligned}$$

Согласно (4.11), имеем

$$y \in N_p, \quad \langle e, y \rangle = \langle e, y^{(1)} \rangle \Rightarrow y \in N_p \cap C_1 = N_{\varphi_1}. \quad (4.12)$$

Теперь для доказательства (4.9) в силу (4.10), (4.12) осталось показать, что $\forall y \in N_p \setminus N_{\varphi_1}$. Выражение $\langle e, y - y^{(1)} \rangle$ отлично от нуля (следует из (4.12)) и имеет один знак. Действительно, предположив, что нашлись $y, \tilde{y} \in N_p \setminus N_{\varphi_1}$, для которых $\langle e, y - y^{(1)} \rangle, \langle e, \tilde{y} - y^{(1)} \rangle$ имеют разные знаки, получаем, что для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ для $y^\alpha = \alpha y + (1 - \alpha)\tilde{y}$ выполняется $y^\alpha \in \text{Co } N_p$, $\langle e, y^\alpha - y^{(1)} \rangle = \alpha \langle e, y - y^{(1)} \rangle + (1 - \alpha) \langle e, \tilde{y} - y^{(1)} \rangle = 0$, откуда в силу (4.11) $y^\alpha \in C_1 = \text{Co } N_{\varphi_1}$. Но тогда, используя то, что C_1 – грань, получаем $y, \tilde{y} \in C_1$, а это противоречит (4.10).

Пример 9. Ранее в примере 1 рассматривался полином $p(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 + x_2^{10} - 10x_1 x_2^9 - 0.1x_1^8 x_2^4$ с

$$N_p = \{k \in \mathbb{Z}_+^2 \mid \text{coef}(p, k) \neq 0\} = \{(2, 6), (4, 5), (6, 4), (0, 10), (1, 9), (8, 4)\},$$

у которого (см. рисунок) $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$ – главная (1, 2)-квазиоднородная полиномиальной форма. Поскольку полином $\psi(x_1, x_2)$ не является невырожденным в слабом смысле (см. пример 7), то в этом случае теорема и лемма 1 “не работают”, т.е. требуются более тонкие исследования. Рассмотрим разложение вида (2.1) для полинома $p(x_1, x_2)$ на сумму (1, 2)-квазиоднородных форм вида

$$p(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) + \dots + \varphi_r(x_1, x_2),$$

где $A = (1, 2)$, $\varphi_i(x) \neq 0$, $\forall k \in N_{\varphi_i} \langle A, k \rangle = B_i$, $i = \overline{1, r}$, при этом $B_1 < B_2 < \dots < B_r$. В нашем случае $r = 4$, $\varphi_1(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$, $B_1 = 14$, $\varphi_2(x_1, x_2) = -0.1x_1^8 x_2^4$, $B_2 = 16$, $\varphi_3(x_1, x_2) = -10x_1 x_2^9$, $B_3 = 19$, $\varphi_4(x_1, x_2) = x_2^{10}$, $B_4 = 20$. Заметим, что

$$H_{\varphi_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4 = x_1^2 x_2^4 (x_2 - x_1^2)^2 = 0\}.$$

Например, при $(1, 1) \in H_{\varphi_1}$ верно $\varphi_2(1, 1) = -0.1 < 0$. Следовательно, условия леммы 3 не выполняются при $i = 2$, т.е. $(0, 0)$ не является точкой локального минимума полинома $p(x_1, x_2)$. Рассмотрим теперь полином $p_3(x_1, x_2)$, отличающийся от $p(x_1, x_2)$ только одним членом: вместо монома $-0.1x_1^8 x_2^4$ у $p_3(x_1, x_2)$ присутствует моном $0.1x_1^8 x_2^4$, т.е. в разложении вида (2.1) в случае $A = (1, 2)$ для полинома $p_3(x_1, x_2)$ справедливо $\varphi_2(x_1, x_2) = 0.1x_1^8 x_2^4$. Как уже отмечалось в примере 6, пользуясь методами из разд. 3, нетрудно показать, что у полинома $p_3(x_1, x_2)$ (так же, как у полинома $p(x_1, x_2)$)

из примеров 1, 6) всего имеются пять квазиоднородных форм, которые при некоторых $A \in \mathbb{N}^2$ являются главными A -квазиоднородными формами этого полинома: $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^5 + x_1^6 x_2^4$ ($A = (1, 2)$), x_2^{10} ($A = (3, 1)$), $x_1^2 x_2^6 + x_2^{10}$ ($A = (2, 1)$), $x_1^2 x_2^6$ ($A = (1, 1)$), $x_1^6 x_2^4$ ($A = (1, 3)$). При этом последние четыре формы будут неотрицательными и невырожденными в слабом смысле. Заметим, что в этом примере $\text{int Co } N_p \neq \emptyset$, что дает возможность использовать следствие 4 (см. также следствие 3). Таким образом, осталось рассмотреть случай разложения (2.1) для $A = (1, 2)$. Тогда

$$H_{\varphi_1} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \neq \emptyset,$$

и

$$\forall (x_1, x_2) \in H_{\varphi_1} \cap [\mathbb{R} \setminus \{0\}]^2 \quad \varphi_2(x_1, x_2) = 0.1x_1^8 x_2^4 = 0.1x_1^{16} > 0.$$

Следовательно, в силу утверждения 13 точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума полинома $p_3(x_1, x_2)$.

5. Примеры задач, в которых возможно использование предложенных методов. Пример 10 (нахождение равновесных состояний сложной системы). Рассмотрим систему из n молекул (частиц, тел и т.д.). Между каждыми двумя молекулами действует сила отталкивания и сила притяжения. Требуется определить равновесные (т.е. устойчивые) состояния для этой системы. Известно, что потенциал (Леннарда-Джонса) взаимодействия двух молекул i, j определяется формулой

$$V_{LJ}(r_{ij}) = \frac{C_{ij}^{(12)}}{r_{ij}^{12}} - \frac{C_{ij}^{(6)}}{r_{ij}^6},$$

где r_{ij} — расстояние между ними, $C_{ij}^{(6)}$, $C_{ij}^{(12)}$ — постоянные величины, первый член в правой части соответствует силе отталкивания, а второй — силе притяжения. Будем для простоты считать, что общий потенциал взаимодействия n молекул выражается формулой (простой учет всех попарных взаимодействий)

$$\Phi(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{LJ}(r_{ij}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{C_{ij}^{(12)}}{r_{ij}^{12}} - \frac{C_{ij}^{(6)}}{r_{ij}^6} \right),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}) \in \mathbb{R}^{3n}$, $(x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i})$ — координаты i -й молекулы, $r_{ij} = \sqrt{(x_{3i-2} - x_{3j-2})^2 + (x_{3i-1} - x_{3j-1})^2 + (x_{3i} - x_{3j})^2}$ (рассмотрение общего потенциала конфигурации молекул при более общих предположениях несколько усложнит вид функции $\Phi(x)$, но не требует новых идей). Тогда устойчивым состояниям рассматриваемой системы соответствуют точки локального минимума функции $\Phi(x)$. При этом функция $\Phi(x)$ является аналитической, т.е. раскладывается в степенной ряд в окрестности любой точки с $r_{ij} \neq 0$ при всех $i < j$ (это условие естественным образом выполняется). Поскольку функция $\Phi(x)$ будет бесконечно гладкой, то для нахождения точек локального минимума можно применить любой градиентный метод, например метод сопряженных градиентов. Стартуя из некоторой выбранной точки, сходимся к одной из стационарных точек, т.е. с градиентом функции $\Phi(x)$, равным нулю. Применяя предложенную в настоящей работе методику, определяем, является ли найденная точка точкой локального минимума или нет. Помещая первую молекулу в начало координат, количество переменных можно сократить на три. В случае трех молекул можно расположить их на координатной плоскости, первую — в начале координат, а вторую — на одной из осей. Таким образом, в случае трех молекул понадобятся только три переменные. Соответственно, в случае четырех молекул понадобятся шесть переменных, в случае пяти — 10 переменных и т.д.

Пример 11 (использование метода наименьших квадратов для определения неизвестных параметров по набору значений параметрической функции). Пусть $\varphi(c_1, \dots, c_l, t)$ — некоторая заданная полиномиальная или аналитическая функция переменной $t \in \mathbb{R}$, зависящая от параметров $c_1, \dots, c_l \in \mathbb{R}$, например,

$$\varphi(c_1, c_2, c_3, t) = c_1 e^{\frac{(t-c_2)^2}{c_3^2}}.$$

Пусть, далее, каким-то образом определены значения функции

$$\Phi(c, t) = \sum_{i=1}^r \varphi(c_{li-l+1}, \dots, c_{li}, t),$$

где $c = (c_1, \dots, c_{lr}) \in \mathbb{R}^{lr}$, на некоторой конечной сетке значений: $t \in T = \{t_1, \dots, t_q\}$, т.е. заданы числа $F_i = \Phi(c, t_i)$, $i = 1, \dots, q$. Требуется найти неизвестные значения $c = (c_1, \dots, c_{lr})$. Такая задача часто возникает при обработке и анализе результатов физических экспериментов. Для решения указанной задачи можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Составляется функция

$$\Gamma(c) = \sum_{i=1}^q [\Phi(c, t_i) - F_i]^2$$

и ищется ее минимум по $c = (c_1, \dots, c_{lr})$. Поскольку нахождение глобального минимума — крайне сложная задача (особенно для большого числа переменных), то применяем какой-нибудь градиентный метод минимизации (с учетом того, что целевая функция является сколь угодно гладкой), например методом сопряженных градиентов. Стартуем из какой-нибудь начальной точки, обычно выбираемой исходя из содержательной части задачи. В результате спускаемся к некоторой стационарной точке $\bar{c}$, для которой $\Gamma'(\bar{c}) = 0_{(lr)}$. Далее, применяя предложенную в настоящей работе методику, определяем, является ли $\bar{c}$ точкой локального минимума или нет. Если $\bar{c}$ — точка локального минимума и значение $\Gamma(\bar{c})$ близко к 0, то считаем, что $\bar{c}$ — приемлемое решение задачи. В противном случае стартуем из некоторой другой начальной точки и т.д.

Пример 12 (идентификация параметров динамических систем). В работе [13] рассматривается один из возможных способов решения задачи оценки неизвестных параметров динамических моделей, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Их значения находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. Таким образом, в [13] рассматривается целевая функция

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j))^2 \rightarrow \min_{\theta \in \Theta},$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \theta), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$$\theta \in \Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid a_i \leq \theta_i \leq b_i, i = 1, \dots, p\},$$

где $f(t, x, \theta)$ — известная непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, $t \in [t_0, t_e]$ — время функционирования системы, $\theta \in \Theta$ — вектор неизвестных параметров системы, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ — множество возможных значений параметров, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ — вектор начального состояния. На промежутке времени $[t_0, t_e]$ известны наблюдения $\hat{x}(t)$ за вектором состояния системы в моменты времени $t = t_j \in [t_0, t_e]$, $j = 1, \dots, T$. При фиксированном векторе параметров θ можно найти решение $x(\theta, t)$ системы дифференциальных уравнений. Требуется определить оценку вектора неизвестных параметров θ , при которой $x(\theta, t)$ наилучшим образом согласуется с наблюдениями, т.е. обеспечивается минимальное значение целевой функции $E(\theta)$. Для решения задачи оптимизации предлагается использовать градиентные методы оптимизации, применяемые в процедурах машинного обучения: метод стохастического градиентного спуска, классический метод моментов, ускоренный градиентный метод Нестерова, метод адаптивного градиента, метод скользящего среднего, метод адаптивной оценки моментов, модификация метода адаптивной оценки, ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки. В результате применения этих методов спускаемся к некоторой стационарной точке $\bar{\theta}$, для которой $E'(\bar{\theta}) = 0_{(p)}$. Часто оказывается, что решение системы дифференциальных уравнений $x(\theta, t)$ является при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_e]$ либо полиномиальной, либо аналитической функцией.

ей по параметрам θ (достаточно, чтобы это выполнялось в окрестности точки $\bar{\theta}$). В этом случае, применяя предложенную в работе методику, определяем, будет ли $\bar{\theta}$ точкой локального минимума или нет. Например, работе [14] рассматривается математическая модель, описывающая необратимую реакцию первого порядка, в которой измеряются концентрации x_1, x_2 компонент веществ, а θ_1, θ_2 — коэффициенты скоростей реакций соответственно:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1(t), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = \theta_1 x_1(t) - \theta_2 x_2(t), & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

В этом примере целевая функция имеет вид

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{10} \left[(\hat{x}_1(t_j) - e^{-\theta_1 t_j})^2 + \left(\hat{x}_2(t_j) + \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j}) \right)^2 \right],$$

т.е. является аналитической в окрестности любой точки $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, в которой $\theta_1 \neq \theta_2$. В найденном в [14] решении это условие выполняется.

Заключение. Предложены необходимые и достаточные условия локального экстремума для полиномов и степенных рядов, основанные на использовании многогранника Ньютона, а также разложения полинома (степенного ряда) на сумму квазиоднородных полиномиальных форм. При небольшом количестве переменных эти условия могут быть проверены с помощью практически реализуемых алгоритмов, главные идеи которых также приведены в работе. Применение предложенной методики иллюстрируется на примерах в следующих задачах: нахождения равновесных состояний сложной системы частиц (молекул), определения неизвестных параметров по набору значений параметрической функции методом наименьших квадратов, идентификации параметров динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
2. Нефедов В.Н. Необходимые и достаточные условия локального минимума в полиномиальных задачах минимизации. М.: МАИ. 1989. 64 с. — Деп. в ВИНТИ 02.11.89, № 6830—В89.
3. Нефедов В.Н. Об оценивании погрешности в выпуклых полиномиальных задачах оптимизации // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30. № 2. С. 200—216.
4. Нефедов В.Н. Необходимые и достаточные условия экстремума в аналитических задачах оптимизации // Тр. МАИ. Математика. 2009. № 33. 32 с.
5. Гиндикин С.Г. Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона // Тр. Москов. матем. об-ва. 1974. Т. 31. С. 189—236.
6. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука. Физматлит, 1998.
7. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во Эдиториал УРСС, 2002. 312 с.
8. Хованский А.Г. Многогранники и алгебра // Тр. ИСА РАН. 2008. Т. 38.
9. Нефедов В.Н. Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте // Тр. МАИ. Математика. 2006. № 22. 43 с.
10. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
11. Брѣнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988. 240 с.
12. Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М.: Изд-во МГУ, 1977. 196 с.
13. Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A. Handbook of test problems in local and global optimization // Springer US. 1999. V. 67. 442 p. <https://titan.princeton.edu/TestProblems/>
14. Tjoa I.-B., Biegler L.T. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential-algebraic equation systems // Industrial & Engineering Chemistry Research. 1991. V. 30. № 2. P. 376—385. <https://doi.org/10.1021/ie00050a015>

**УПРАВЛЕНИЕ
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

УДК 517.938

**ПРИВЕДЕНИЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ
ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА
С ДВУМЯ ВХОДАМИ И ДВУМЯ ВЫХОДАМИ К УПРАВЛЕНИЮ
ПО СОСТОЯНИЮ СИСТЕМОЙ С ОДНИМ ВХОДОМ**

© 2023 г. Н. Е. Зубов^{a,b,*}, А. В. Лапин^{a,c}

^aМГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^bПАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, Королёв, Россия

^cФАН “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

Поступила в редакцию 18.06.2022 г.

После доработки 22.07.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Представлена задача модального управления по выходу динамическими системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами. Для определенного класса таких систем предложен способ приведения рассматриваемой задачи к задаче управления (прямой вариант) или наблюдения (дуальный вариант) для системы с одним входом. Подход основывается на двух последовательных преобразованиях подобия замкнутой системы “объект–регулятор по выходу”, дающих возможность обнулить одну из строк матрицы регулятора по состоянию или один из столбцов матрицы наблюдателя. Исследован класс систем, для которых условие такого обнуления одновременно является условием существования регулятора по выходу. Доказаны теоремы о неравенстве индексов управляемости и наблюдаемости в системе при выполнении представленных условий. Предложен вариант использования известных формул Басса–Гура и Аккермана, существенно упрощающий символьные выражения для регулятора (наблюдателя) в преобразованной системе. Рассмотрены примеры применения предлагаемого подхода, как в прямом, так и в дуальном варианте. Символьные вычисления в MATLAB подтверждают достоверность результатов.

DOI: 10.31857/S0002338823010122, EDN: JCCFZI

Введение. Объекты управления, описываемые системами четвертого порядка с двумя управляющими входами, достаточно распространены как в авиации [1], когда продольное [2] и боковое [3] движения летательного аппарата рассматриваются отдельно, так и при орбитальном движении космического аппарата во взаимосвязанных каналах крен–рысканье [4]. Возможные отказы измерительной аппаратуры могут приводить к ситуации, когда число измеряемых выходов равно двум. Для таких объектов решение задачи стабилизации (с заданным размещением полюсов замкнутой системы управления) путем построения наблюдателя состояния [5] из-за ошибок оценивания может приводить к недостаточной точности стабилизации, а также к повышению длительности переходных процессов и расхода топлива. Поэтому исследования, направленные на решение задачи управления по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, являются актуальными.

Ввиду математической сложности задачи модального управления по выходу в настоящее время ее универсального аналитического решения не существует. Известные методы решения ограничены в применимости соотношением между количеством состояний, входов и выходов или конкретным видом матриц состояния, управления и наблюдения. Так, метод решения данной задачи, основанный на подходах Ван дер Вуда [6], предполагает, что суммарная размерность векторов управления и наблюдения больше размерности вектора состояния [7]. Параметрический метод [8], базирующийся на выделении регулятора по выходу из общего параметризованного множества регуляторов (наблюдателей) по состоянию [9], напрямую применим лишь в частных случаях, когда параметры расположены так, что обнуление нужных столбцов (строк) в регуляторе (наблюдателе) по состоянию очевидно. В общем же случае для определения парамет-

ров, при которых реализуется регулятор по выходу, возникает необходимость решать нелинейные системы уравнений, что аналитически сделать затруднительно или невозможно. Также имеется зависимость от порядка следования желаемых полюсов.

В настоящей работе для определенного класса систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами задача управления по выходу сводится к задаче управления (наблюдения) по состоянию для системы с одним входом, решение которой единственно и хорошо известно [10].

1. Постановка задачи. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая система [11]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор состояния с числом компонент $n = 4$, $\mathbf{u}$ — вектор управления с двумя входами $r = 2$, $\mathbf{y}$ — вектор выхода размерности $m = 2$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ — матрица состояния, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ — матрица управления (входов), $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ — матрица наблюдения (выходов), $\mathbb{R}$ — множество вещественных матриц.

Требуется определить матрицу регулятора по выходу $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, обеспечивающую матрицу замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}$ заданный характеристический полином [12]:

$$\varphi^*(\lambda) = \text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}) = \lambda^4 + p_3^*\lambda^3 + p_2^*\lambda^2 + p_1^*\lambda^1 + p_0^*\lambda^0. \quad (1.2)$$

2. Приведение к задаче управления с одним входом (прямой подход). Предположим, что индекс наблюдаемости [13] заданной системы (1.1) равен двум, т.е.

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{N}}} \neq 0. \quad (2.1)$$

Введем обозначение для матрицы наблюдателя по состоянию

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}\mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Над матрицей замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ выполним преобразование подобия [14]

$$\mathbf{A}_C^* = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}^*\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{C0} & -\mathbf{P}_{C1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_C = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{N}}^{-1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{L} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}}^{-1}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{L} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{C0} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L} & -\mathbf{P}_{C1} \end{bmatrix},$$

где блоки $\mathbf{P}_{C0}$, $\mathbf{P}_{C1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ таковы, что

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{C0} & \mathbf{P}_{C1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_C = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{C1,1} & r_{C1,2} & r_{C1,3} & r_{C1,4} \\ r_{C2,1} & r_{C2,2} & r_{C2,3} & r_{C2,4} \end{bmatrix},$$

а преобразованная матрица состояния разомкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{A}_C = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{C1,1} & r_{C1,2} & r_{C1,3} & r_{C1,4} \\ r_{C2,1} & r_{C2,2} & r_{C2,3} & r_{C2,4} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь и далее $\mathbf{0}_{n \times m}$ — нулевая матрица, имеющая размерность $n \times m$, $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица, имеющая порядок n .

Далее, выполнив еще одно преобразование подобия [14] через матрицу

$$\mathbf{T}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{C}\mathbf{L} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

получим матрицу, которая должна иметь желаемый полином $\varphi^*(\lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_C^* = \mathbf{T}_C^{-1}\mathbf{A}_C^*\mathbf{T}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{P}_{C0} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C}\mathbf{L} & -\mathbf{P}_{C1} - \mathbf{C}\mathbf{L} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_C - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \left[(\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{C}\mathbf{L} \right]}_{\mathbf{K}_C}.$$

Обеспечение желаемого полинома матрице $\tilde{\mathbf{A}}_C^*$ путем выбора матрицы $\mathbf{K}_C$ представляет собой задачу модального управления по состоянию с двумя входами (MIMO — multi input multi output

система). Для приведения к задаче с одним входом (к SIMO – single input multi output системе) обнулим одну из строк матрицы $\mathbf{K}_C$.

Пусть $\mathbf{c}_1^T$ и $\mathbf{c}_2^T$ – соответственно первая и вторая строки матрицы наблюдения $\mathbf{C}$. Условия обнуления первой (а) или второй (б) строки матрицы $\mathbf{K}_C$

$$(a) \quad [1 \mid 0][(\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{C}\mathbf{L}] = \left[\mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{L} - \underbrace{[1 \mid 0] \mathbf{R}_C}_{-\mathbf{P}_{C1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{L} \mid \mathbf{c}_1^T \mathbf{L} \right] = \mathbf{0}_{1 \times 4},$$

$$(б) \quad [0 \mid 1][(\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{C}\mathbf{L}] = \left[\mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{L} - \underbrace{[0 \mid 1] \mathbf{R}_C}_{-\mathbf{P}_{C1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{L} \mid \mathbf{c}_2^T \mathbf{L} \right] = \mathbf{0}_{1 \times 4}$$

принимают соответственно вид

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} - r_{C1,4} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{L} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad (б) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} - r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{L} = \mathbf{0}_{2 \times 2}. \quad (2.4)$$

При этом ненулевая строка матрицы $\mathbf{K}_C$ становится соответственно равна

$$(a) \quad [0 \mid 1][(\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{C}\mathbf{L}] = \left[\mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{L} - \underbrace{[0 \mid 1] \mathbf{R}_C}_{-\mathbf{P}_{C1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{L} \mid \mathbf{c}_2^T \mathbf{L} \right],$$

$$(б) \quad [1 \mid 0][(\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{C1}\mathbf{C})\mathbf{L} \mid \mathbf{C}\mathbf{L}] = \left[\mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{L} - \underbrace{[1 \mid 0] \mathbf{R}_C}_{-\mathbf{P}_{C1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{L} \mid \mathbf{c}_1^T \mathbf{L} \right].$$

При выполнении одного из условий (2.4) приходим к SIMO-системе

$$\tilde{\mathbf{A}}_C^* = \mathbf{A}_C - \mathbf{b}_C \mathbf{k}_C^T \quad (2.5)$$

с матрицей состояния (2.3) и соответственно матрицей управления (вектор-столбец)

$$(a) \quad \mathbf{b}_C = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^T, \quad (б) \quad \mathbf{b}_C = [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0]^T \quad (2.6)$$

и матрицей регулятора (вектор-строка) $\mathbf{k}_C^T = [\mathbf{k}_{C1}^T \mid \mathbf{k}_{C2}^T]$, где $\mathbf{k}_{C1}^T, \mathbf{k}_{C2}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$,

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} - r_{C2,4} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{L}, \quad (б) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} - r_{C1,3} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{L}. \quad (2.7)$$

SIMO-система (2.5) полностью управляема при условии

$$\det \underbrace{[\mathbf{b}_C \mid \mathbf{A}_C \mathbf{b}_C \mid \mathbf{A}_C^2 \mathbf{b}_C \mid \mathbf{A}_C^3 \mathbf{b}_C]}_{\mathbf{U}_C} \neq 0. \quad (2.8)$$

Задача модального управления при желаемом характеристическом полиноме $\varphi^*(\lambda)$ в SIMO-системе (2.5) решается с помощью формулы Аккермана [10]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \mid \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] \mathbf{U}_C^{-1} \varphi^*(\mathbf{A}_C) = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] \tilde{\mathbf{U}}_C^{-1} \varphi^*(\mathbf{A}) \tilde{\mathbf{N}}^{-1}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{A}_C^i = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{N}}^{-1}$ ($i = \overline{0, \dots, 4}$), $\tilde{\mathbf{U}}_C = [\tilde{\mathbf{b}}_C \mid \mathbf{A} \tilde{\mathbf{b}}_C \mid \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{b}}_C \mid \mathbf{A}^3 \tilde{\mathbf{b}}_C]$, $\tilde{\mathbf{b}}_C = \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{b}_C$.

Матрицу наблюдателя $\mathbf{L}$ (2.2) определим из соотношения

$$\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{L} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{L} \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{L} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{L} \end{bmatrix}.$$

С учетом значений (2.4) и (2.7) соответственно получим

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{k}_{C2}^T \\ r_{Cl,4}\mathbf{k}_{C2}^T \\ \mathbf{k}_{Cl}^T + r_{C2,4}\mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{k}_{Cl}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{CA}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \\ \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{k}_{C2}^T, \\
 (б) \quad \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C2}^T \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{k}_{Cl}^T + r_{Cl,3}\mathbf{k}_{C2}^T \\ r_{C2,3}\mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{k}_{Cl}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{CA}\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \\ \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{k}_{C2}^T.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в силу значений (2.6), в обоих случаях (а) и (б) матрица наблюдателя по состоянию равна

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{N}}^{-1} [\mathbf{b}_C | \mathbf{A}_C \mathbf{b}_C] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{Cl}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{b}}_C | \mathbf{A} \tilde{\mathbf{b}}_C] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{Cl}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Условие обнуления (2.4) будет одновременно условием разрешимости уравнения (2.2) относительно матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$ [6], если первый множитель в левой части равенства (2.4) является левым аннулятором матрицы $\mathbf{B}$, т.е. соответственно если

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} - r_{Cl,4} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad (б) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} - r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{2 \times 2}. \quad (2.11)$$

Пусть $\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$ — псевдообратная матрица [6] к матрице управления $\mathbf{B}$. Тогда решение уравнения (2.2) и задачи (1.2) в целом при выполнении условий (2.1), (2.8), (2.11) с учетом значения матрицы $\mathbf{L}$ (2.10) принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^+ \mathbf{L} = \mathbf{B}^+ [\tilde{\mathbf{b}}_C | \mathbf{A} \tilde{\mathbf{b}}_C] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{Cl}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Отметим, что условие (2.11) приводимости к задаче управления с одним входом может быть верно, только если индекс управляемости рассматриваемой системы (1.1) больше индекса ее наблюдаемости [13]. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая тройка матриц состояния, управления и наблюдения (1.1). Пусть индекс их наблюдаемости равен 2, т.е. выполняется условие (2.1), и справедливо одно из равенств (2.11), где соответственно $\mathbf{c}_1^T$ и $\mathbf{c}_2^T$ — строки матрицы наблюдения, а $r_{Cl,4}$ и $r_{C2,3}$ — элементы матрицы (2.3). Тогда индекс управляемости матриц (1.1) равен 3 (больше индекса наблюдаемости).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимо и достаточно показать, что вырождается матрица

$$\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{B} | \mathbf{A} \mathbf{B}].$$

В силу условия (2.1) вырождение матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$ эквивалентно вырождению матрицы $\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}$, которая имеет ненулевой аннулятор [6]:

$$(a) \quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{1 \times 2} & r_{Cl,4} \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} & \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B} \\ r_{Cl,4} \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} & \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{array} \right], \quad (\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}})^L = \begin{cases} [1|0|0|0], & r_{Cl,4} = 0, \\ [r_{Cl,3} + r_{Cl,2}/r_{Cl,4} | r_{Cl,4} | -1|0], & r_{Cl,4} \neq 0, \end{cases}$$

$$(6) \quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} & \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \\ r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} & \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{array} \right], \quad (\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}})^L = \begin{cases} [0|1|0|0], & r_{C2,3} = 0, \\ [r_{C2,3}|r_{C2,4} + r_{C2,1}/r_{C2,3}|0|-1], & r_{C2,3} \neq 0. \end{cases}$$

Тогда справедливы равенства

$$(a) \quad r_{C1,4} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{N}} - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix} \right) \mathbf{B} = \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} \\ r_{C1,4} \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} [0|1|r_{C1,4}|0]^T \mathbf{c}_2^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - (r_{C1,2} + r_{C1,3} r_{C1,4}) \mathbf{c}_2^T \mathbf{B},$$

$$(6) \quad r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{N}} - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \right) \mathbf{B} = \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ r_{C2,3} \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} [1|0|0|r_{C2,3}]^T \mathbf{c}_1^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} - (r_{C2,1} + r_{C2,3} r_{C2,4}) \mathbf{c}_1^T \mathbf{B}.$$

Теорема доказана.

Наибольшую вычислительную сложность в предлагаемом алгоритме представляет формула Аккермана (2.9). Это обусловлено необходимостью возводить матрицу четвертого порядка в третью и четвертую степени, а также обращать матрицу, содержащую указанные степени. Между тем результат содержит большое количество подобных слагаемых, отследить которые в общем случае затруднительно как вручную, так и с применением команды “simplify” в MATLAB. Далее в виде теоремы предложен метод расчета модального регулятора для SIMO-системы (2.5), не требующий возведения матриц в высокие степени и существенно упрощающий окончательное символическое выражение для регулятора.

Т е о р е м а 2. Решение задачи модального управления для SIMO-системы (2.5) с обеспечением характеристического полинома $\Phi^*(\lambda) = \lambda^4 + p_3^* \lambda^3 + p_2^* \lambda^2 + p_1^* \lambda + p_0^*$ записывается в виде

$$(a) \quad \mathbf{k}_C^T = \begin{bmatrix} r_{C2,1} + k_{C1,1} & r_{C2,2} + q_{C2} - r_{C1,4} k_{C1,3} & r_{C2,3} + k_{C1,3} & r_{C2,4} + \Delta p_{C3}^* \end{bmatrix},$$

$$(6) \quad \mathbf{k}_C^T = \begin{bmatrix} r_{C1,1} + q_{C2} - r_{C2,3} k_{C1,4} & r_{C1,2} + k_{C1,2} & r_{C1,3} + \Delta p_{C3}^* & r_{C1,4} + k_{C1,4} \end{bmatrix},$$
(2.13)

где

$$(a) \quad \begin{cases} \tilde{r}_{C1,2} = r_{C1,2} + r_{C1,3} r_{C1,4}, \\ d_C = r_{C1,1} r_{C1,4} - r_{C1,2} r_{C1,3}, \\ t_C = r_{C1,4} d_C - r_{C1,2}^2, \\ \Delta p_{C2}^* = p_2^* + r_{C1,1}, \\ \Delta p_{C3}^* = p_3^* + r_{C1,3}, \\ q_{C1} = p_1^* + r_{C1,1} \Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C1,3} \Delta p_{C3}^*, \\ k_{C1,1} = (r_{C1,1}(r_{C1,4} q_{C1} - r_{C1,2} q_{C2}) - \tilde{r}_{C1,2} p_0^*)/t_C, \\ k_{C1,3} = (r_{C1,4} p_0^* - r_{C1,2} q_{C1} + d_C q_{C2})/t_C, \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} \tilde{r}_{C2,1} = r_{C2,1} + r_{C2,3} r_{C2,4}, \\ d_C = r_{C2,2} r_{C2,3} - r_{C2,1} r_{C2,4}, \\ t_C = r_{C2,3} d_C - r_{C2,1}^2, \\ \Delta p_{C2}^* = p_2^* + r_{C2,2}, \\ \Delta p_{C3}^* = p_3^* + r_{C2,4}, \\ q_{C1} = p_1^* + r_{C2,2} \Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C2,4} \Delta p_{C3}^*, \\ k_{C1,2} = (r_{C2,2}(r_{C2,3} q_{C1} - r_{C2,1} q_{C2}) - \tilde{r}_{C2,1} p_0^*)/t_C, \\ k_{C1,4} = (r_{C2,3} p_0^* - r_{C2,1} q_{C1} + d_C q_{C2})/t_C. \end{cases}$$

Доказательство. Задача модального управления для SIMO-системы (2.5) эквивалентна задаче с обеспечением того же полинома $\varphi^*(\lambda)$, но для более простой системы:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{c1,1} & r_{c1,2} & r_{c1,3} & r_{c1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{k}_c^T, \\ \bar{k}_c^T = [r_{c2,1} \mid r_{c2,2} \mid r_{c2,3} \mid r_{c2,4}] + \bar{k}_c^T, \end{array} \right. \quad (6) \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{c2,1} & r_{c2,2} & r_{c2,3} & r_{c2,4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{k}_c^T, \\ \bar{k}_c^T = [r_{c1,1} \mid r_{c1,2} \mid r_{c1,3} \mid r_{c1,4}] + \bar{k}_c^T. \end{array} \right.$$

Решение этой задачи компактно записывается с помощью алгоритма Басса–Гура [9]:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_c^T = [p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{c2}^* \mid \Delta p_{c3}^*] \bar{T}_c^{-1}, \\ \bar{T}_c = \begin{bmatrix} r_{c1,2} & r_{c1,4} & 0 & 0 \\ -r_{c1,1} & -r_{c1,3} & 1 & 0 \\ 0 & r_{c1,2} & r_{c1,4} & 0 \\ 0 & -r_{c1,1} & -r_{c1,3} & 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{T}_c^{-1} = \frac{1}{t_c} \begin{bmatrix} -\tilde{r}_{c1,2} & -r_{c1,4}^2 & r_{c1,4} & 0 \\ r_{c1,1} r_{c1,4} & r_{c1,2} r_{c1,4} & -r_{c1,2} & 0 \\ -r_{c1,1} r_{c1,2} & -r_{c1,2}^2 & d_c & 0 \\ r_{c1,1} d_c & r_{c1,2} d_c & \tilde{d}_c & t_c \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (6) \left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_c^T = [p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{c2}^* \mid \Delta p_{c3}^*] \bar{T}_c^{-1}, \\ \bar{T}_c = \begin{bmatrix} -r_{c2,2} & -r_{c2,4} & 1 & 0 \\ r_{c2,1} & r_{c2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{c2,2} & -r_{c2,4} & 1 \\ 0 & r_{c2,1} & r_{c2,3} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{T}_c^{-1} = \frac{1}{t_c} \begin{bmatrix} -r_{c2,3}^2 & -\tilde{r}_{c2,1} & 0 & r_{c2,3} \\ r_{c2,1} r_{c2,3} & r_{c2,2} r_{c2,3} & 0 & -r_{c2,1} \\ -r_{c2,1}^2 & -r_{c2,1} r_{c2,2} & 0 & d_c \\ r_{c2,1} d_c & r_{c2,2} d_c & t_c & \tilde{d}_c \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

где

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{c1,2} = r_{c1,2} + r_{c1,3} r_{c1,4}, \\ d_c = r_{c1,1} r_{c1,4} - r_{c1,2} r_{c1,3}, \\ t_c = r_{c1,4} d_c - r_{c1,2}^2, \\ \tilde{d}_c = d_c r_{c1,3} - r_{c1,1} r_{c1,2}, \\ \Delta p_{c2}^* = p_2^* + r_{c1,1}, \\ \Delta p_{c3}^* = p_3^* + r_{c1,3}, \end{array} \right. \quad (6) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{c2,1} = r_{c2,1} + r_{c2,3} r_{c2,4}, \\ d_c = r_{c2,2} r_{c2,3} - r_{c2,1} r_{c2,4}, \\ t_c = r_{c2,3} d_c - r_{c2,1}^2, \\ \tilde{d}_c = d_c r_{c2,4} - r_{c2,1} r_{c2,2}, \\ \Delta p_{c2}^* = p_2^* + r_{c2,2}, \\ \Delta p_{c3}^* = p_3^* + r_{c2,4}. \end{array} \right.$$

При этом условие полной управляемости (2.8) принимает вид $t_c \neq 0$, т.е.

$$(a) \quad r_{c1,2}^2 \neq r_{c1,4} d_c, \quad (6) \quad r_{c2,1}^2 \neq r_{c2,3} d_c. \quad (2.14)$$

Далее, выполнив перемножение в формуле Басса–Гура, запишем выражения для коэффициентов регулятора $\bar{k}_c^T = [k_{c1,1} \mid k_{c1,2} \mid k_{c1,3} \mid k_{c1,4}]$:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} k_{c1,1} t_c = r_{c1,1} \left([p_1^* \mid \Delta p_{c2}^*] + \Delta p_{c3}^* [r_{c1,1} \mid r_{c1,3}] \right) \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} - \tilde{r}_{c1,2} p_0^* = r_{c1,1} [q_{c1} \mid q_{c2}] \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} - \tilde{r}_{c1,2} p_0^*, \\ k_{c1,2} t_c = r_{c1,2} \left([p_1^* \mid \Delta p_{c2}^*] + \Delta p_{c3}^* [r_{c1,1} \mid r_{c1,3}] \right) \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} - r_{c1,4}^2 p_0^* = r_{c1,2} [q_{c1} \mid q_{c2}] \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} - r_{c1,4}^2 p_0^* = \\ = (r_{c1,2} [q_{c1} \mid q_{c2}] - r_{c1,4} [p_0^* \mid 0] - q_{c1} [r_{c1,2} \mid r_{c1,4}]) \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} = -r_{c1,4} [p_0^* \mid q_{c1}] \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \end{bmatrix} - r_{c1,2}^2 q_{c2}, \\ k_{c1,3} t_c = \left([p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{c2}^*] + \Delta p_{c3}^* [0 \mid r_{c1,1} \mid r_{c1,3}] \right) \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \\ d_c \end{bmatrix} = [p_0^* \mid q_{c1} \mid q_{c2}] \begin{bmatrix} r_{c1,4} \\ -r_{c1,2} \\ d_c \end{bmatrix}, \\ k_{c1,4} = \Delta p_{c3}^*, \end{array} \right.$$

$$(б) \begin{cases} k_{Cl,1}t_C = r_{C2,1} \left(\left[p_1^* \mid \Delta p_{C2}^* \right] + \Delta p_{C3}^* [r_{C2,2} \mid r_{C2,4}] \right) \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} - r_{C2,3}^2 p_0^* = r_{C2,1} [q_{Cl} \mid q_{C2}] \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} - r_{C2,3}^2 p_0^* = \\ = \left(r_{C2,1} [q_{Cl} \mid q_{C2}] - r_{C2,3} \left[p_0^* \mid 0 \right] - q_{Cl} [r_{C2,1} \mid r_{C2,3}] \right) \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} = -r_{C2,3} \left[p_0^* \mid q_{Cl} \right] \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} - r_{C2,1}^2 q_{C2}, \\ k_{Cl,2}t_C = r_{C2,2} \left(\left[p_1^* \mid \Delta p_{C2}^* \right] + \Delta p_{C3}^* [r_{C2,2} \mid r_{C2,4}] \right) \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} - \tilde{r}_{C2,1} p_0^* = r_{C2,2} [q_{Cl} \mid q_{C2}] \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \end{bmatrix} - \tilde{r}_{C2,1} p_0^*, \\ k_{Cl,3} = \Delta p_{C3}^*, \\ k_{Cl,4}t_C = \left(\left[p_0^* \mid p_1^* \mid \Delta p_{C2}^* \right] + \Delta p_{C3}^* [0 \mid r_{C2,2} \mid r_{C2,4}] \right) \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \\ d_C \end{bmatrix} = \left[p_0^* \mid q_{Cl} \mid q_{C2} \right] \begin{bmatrix} r_{C2,3} \\ -r_{C2,1} \\ d_C \end{bmatrix}, \end{cases}$$

где

$$(а) \begin{cases} q_{Cl} = p_1^* + r_{Cl,1} \Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{Cl,3} \Delta p_{C3}^*, \end{cases} \quad (б) \begin{cases} q_{Cl} = p_1^* + r_{C2,2} \Delta p_{C3}^*, \\ q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C2,4} \Delta p_{C3}^*. \end{cases}$$

После обратного перехода от вектора $\bar{\mathbf{k}}_C^T$ к вектору $\mathbf{k}_C^T$ получается результат (2.13).

Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий (2.1), (2.11) и (2.14) регулятор по выходу (матрица $\mathbf{F}$) рассчитывается по формуле (2.12) с подстановкой значений (2.13).

Пример 1 (а). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем первые две блочные строки матрицы наблюдаемости:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{\mathbf{N}} = a_{3,1} a_{4,2}.$$

Если $a_{3,1} a_{4,2} \neq 0$, то индекс наблюдаемости равен 2, т.е. верно условие (2.1).

Для проверки (2.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{CA}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{Cl,1} & r_{C2,1} \\ r_{Cl,2} & r_{C2,2} \\ r_{Cl,3} & r_{C2,3} \\ r_{Cl,4} & r_{C2,4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,3} a_{3,1} - a_{1,1} a_{3,3} & a_{1,3} a_{4,1} + a_{2,3} a_{4,2} - a_{2,2} a_{4,3} - a_{3,3} \tilde{a}_{4,1} \\ a_{1,4} a_{3,1} - a_{1,1} a_{3,4} & a_{1,4} a_{4,1} + a_{2,4} a_{4,2} - a_{2,2} a_{4,4} - a_{3,4} \tilde{a}_{4,1} \\ a_{1,1} + a_{3,3} & a_{4,3} + \tilde{a}_{4,1} \\ a_{3,4} & a_{4,4} + a_{2,2} \end{bmatrix}^T,$$

где $\tilde{a}_{4,1} = (a_{4,1}(a_{1,1} - a_{2,2}) + a_{2,1} a_{4,2}) / a_{3,1}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального управления с одним входом, так как выполнен вариант (а) условия (2.11):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A} - r_{Cl,4} \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{2,1} & 0 & b_{4,1} \\ 0 & b_{2,2} & 0 & b_{4,2} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 2:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{Cl,2} &= r_{Cl,2} + r_{Cl,3} r_{Cl,4} = a_{1,4} a_{3,1} + a_{3,3} a_{3,4}, \\ d_C &= r_{Cl,1} r_{Cl,4} - r_{Cl,2} r_{Cl,3} = a_{3,1} \tilde{r}_{Cl,1} - a_{1,1} r_{Cl,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_C &= r_{C1,4}d_C - r_{C1,2}^2 = a_{3,1}(a_{3,4}\tilde{r}_{C1,1} - a_{1,4}r_{C1,2}), \\
 \Delta p_{C2}^* &= p_2^* + r_{C1,1} = p_2^* + a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3}, \\
 \Delta p_{C3}^* &= p_3^* + r_{C1,3} = p_3^* + a_{1,1} + a_{3,3}, \\
 q_{C1} &= p_1^* + r_{C1,1}\Delta p_{C3}^* = p_1^* + (a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3})(p_3^* + a_{1,1} + a_{3,3}), \\
 q_{C2} &= \Delta p_{C2}^* + r_{C1,3}\Delta p_{C3}^* = p_2^* + (a_{1,1} + a_{3,3})p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,1}, \\
 k_{C1,1} &= (r_{C1,1}(r_{C1,4}q_{C1} - r_{C1,2}q_{C2}) - \tilde{r}_{C1,2}p_0^*)/t_C = (r_{C1,1}(a_{3,4}\tilde{q}_{C1} - a_{1,4}a_{3,1}q_{C2}) - \tilde{r}_{C1,2}p_0^*)/t_C, \\
 k_{C1,3} &= (r_{C1,4}p_0^* - r_{C1,2}q_{C1} + d_Cq_{C2})/t_C = (a_{3,1}\tilde{r}_{C1,1}q_{C2} - r_{C1,2}\tilde{q}_{C1} + a_{3,4}p_0^*)/t_C,
 \end{aligned}$$

где $\tilde{r}_{C1,1} = a_{1,3}a_{3,4} - a_{1,4}a_{3,3}$, $\tilde{q}_{C1} = q_{C1} + a_{1,1}q_{C2}$. С учетом неравенства $a_{3,1}a_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (2.14) полной управляемости SIMO-системы справедливо, если

$$a_{1,3}a_{3,4}^2 - a_{1,4}^2a_{3,1} \neq a_{1,4}a_{3,4}(a_{3,3} - a_{1,1}).$$

Согласно выражению (2.13) из теоремы 2 рассчитаем регулятор $\mathbf{k}_C^T = [\mathbf{k}_{C1}^T | \mathbf{k}_{C2}^T]$:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{C2,1} + k_{C1,1} & r_{C2,2} + q_{C2} - r_{C1,4}k_{C1,3} \\ r_{C2,3} + k_{C1,3} & r_{C2,4} + \Delta p_3^* \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,3}a_{4,1} + a_{2,3}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,3} - a_{3,3}\tilde{a}_{4,1} + k_{C1,1} & a_{1,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4} + q_{C2} - a_{3,4}\tilde{k}_{C1,3} \\ a_{4,3} + \tilde{k}_{C1,3} & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

где $\tilde{k}_{C1,3} = k_{C1,3} + \tilde{a}_{4,1}$.

По формуле (2.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^+} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/a_{4,2} & a_{2,2}/a_{4,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\tilde{\mathbf{b}}_C | \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_C]} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_{C1}^T + a_{2,2}\mathbf{k}_{C2}^T)/a_{4,2} \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix}.$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$\begin{aligned}
 r_{C1,1} &= a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,3}, & r_{C1,2} &= a_{1,4}a_{3,1} - a_{1,1}a_{3,4}, \\
 \tilde{r}_{C1,1} &= a_{1,3}a_{3,4} - a_{1,4}a_{3,3}, & \tilde{r}_{C1,2} &= a_{1,4}a_{3,1} + a_{3,3}a_{3,4}, \\
 \tilde{q}_{C1} &= a_{1,1}^3 + p_3^*a_{1,1}^2 + p_2^*a_{1,1} + p_1^* + a_{1,3}a_{3,1}(p_3^* + 2a_{1,1} + a_{3,3}), \\
 q_{C2} &= p_2^* + (a_{1,1} + a_{3,3})p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,1}, \\
 \tilde{a}_{4,1} &= (a_{4,1}(a_{1,1} - a_{2,2}) + a_{2,1}a_{4,2})/a_{3,1}, & t_C &= a_{3,1}(a_{3,4}\tilde{r}_{C1,1} - a_{1,4}r_{C1,2}), \\
 a &= a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1} + (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})p_3^* + p_2^*, \\
 k_{C1,1} &= (r_{C1,1}(a_{3,4}\tilde{q}_{C1} - a_{1,4}a_{3,1}q_{C2}) - \tilde{r}_{C1,2}p_0^*)/t_C, & \tilde{k}_{C1,3} &= (a_{3,1}\tilde{r}_{C1,1}q_{C2} - r_{C1,2}\tilde{q}_{C1} + a_{3,4}p_0^*)/t_C + \tilde{a}_{4,1}, \\
 \mathbf{F} &= \frac{\begin{bmatrix} b_{4,2} & -b_{2,2} \\ -b_{4,1} & b_{2,1} \end{bmatrix}}{b_{2,1}b_{4,2} - b_{2,2}b_{4,1}} \begin{bmatrix} a_{2,3} + \frac{a_{1,3}a_{4,1} - a_{3,3}\tilde{a}_{4,1} + k_{C1,1} + a_{2,2}\tilde{k}_{C1,3}}{a_{4,2}} & a_{2,4} + \frac{a_{1,4}a_{4,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a - a_{3,4}\tilde{k}_{C1,3}}{a_{4,2}} \\ a_{4,3} + \tilde{k}_{C1,3} & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

Пример 1 (б). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем первые две блочные строки матрицы наблюдаемости:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{\mathbf{N}} = a_{1,3}a_{2,4}.$$

Если $a_{1,3}a_{2,4} \neq 0$, то индекс наблюдаемости равен 2, т.е. верно условие (2.1).

Для проверки (2.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{CA}^2\tilde{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{C1,1} & r_{C2,1} \\ r_{C1,2} & r_{C2,2} \\ r_{C1,3} & r_{C2,3} \\ r_{C1,4} & r_{C2,4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,3}a_{3,1} + a_{1,4}a_{4,1} - a_{1,1}a_{3,3} - a_{2,1}\tilde{a}_{1,4} & a_{2,4}a_{4,1} - a_{2,1}a_{4,4} \\ a_{1,3}a_{3,2} + a_{1,4}a_{4,2} - a_{1,2}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} & a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4} \\ a_{1,1} + a_{3,3} & a_{2,1} \\ a_{1,2} + \tilde{a}_{1,4} & a_{2,2} + a_{4,4} \end{bmatrix}^T,$$

где $\tilde{a}_{1,4} = (a_{1,4}(a_{4,4} - a_{3,3}) + a_{1,3}a_{3,4})/a_{2,4}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального управления с одним входом, так как выполнен вариант (б) условия (2.11):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^T \mathbf{A} - r_{C2,3}\mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & b_{3,1} & 0 \\ b_{1,2} & 0 & b_{3,2} & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 2:

$$\tilde{r}_{C2,1} = r_{C2,1} + r_{C2,3}r_{C2,4} = a_{2,4}a_{4,1} + a_{2,1}a_{2,2},$$

$$d_C = r_{C2,2}r_{C2,3} - r_{C2,1}r_{C2,4} = a_{2,4}\tilde{r}_{C2,2} - a_{4,4}r_{C2,1},$$

$$t_C = r_{C2,3}d_C - r_{C2,1}^2 = a_{2,4}(a_{2,1}\tilde{r}_{C2,2} - a_{4,1}r_{C2,1}),$$

$$\Delta p_{C2}^* = p_2^* + r_{C2,2} = p_2^* + a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4},$$

$$\Delta p_{C3}^* = p_3^* + r_{C2,4} = p_3^* + a_{2,2} + a_{4,4},$$

$$q_{C1} = p_1^* + r_{C2,2}\Delta p_{C3}^* = p_1^* + (a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4})(p_3^* + a_{2,2} + a_{4,4}),$$

$$q_{C2} = \Delta p_{C2}^* + r_{C2,4}\Delta p_{C3}^* = p_2^* + (a_{2,2} + a_{4,4})p_3^* + a_{2,2}^2 + a_{4,4}^2 + a_{2,2}a_{4,4} + a_{2,4}a_{4,2},$$

$$k_{C1,2} = (r_{C2,2}(r_{C2,3}q_{C1} - r_{C2,1}q_{C2}) - \tilde{r}_{C2,1}p_0^*)/t_C = (r_{C2,2}(a_{2,1}\tilde{q}_{C1} - a_{2,4}a_{4,1}q_{C2}) - \tilde{r}_{C2,1}p_0^*)/t_C,$$

$$k_{C1,4} = (r_{C2,3}p_0^* - r_{C2,1}q_{C1} + d_Cq_{C2})/t_C = (a_{2,4}\tilde{r}_{C2,2}q_{C2} - r_{C2,1}\tilde{q}_{C1} + a_{2,1}p_0^*)/t_C,$$

где $\tilde{r}_{C2,2} = a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}$, $\tilde{q}_{C1} = q_{C1} + a_{4,4}q_{C2}$. С учетом неравенства $a_{1,3}a_{2,4} \neq 0$ можно утверждать, что условие (2.14) полной управляемости SIMO-системы верно, если

$$a_{2,1}^2a_{4,2} - a_{2,4}a_{4,1}^2 \neq a_{2,1}a_{4,1}(a_{2,2} - a_{4,4}).$$

Согласно выражению (2.13), из теоремы 2 рассчитаем регулятор $\mathbf{k}_C^T = [\mathbf{k}_{C1}^T | \mathbf{k}_{C2}^T]$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{C1,1} + q_{C2} - r_{C2,3}k_{C1,4} & r_{C1,2} + k_{C1,2} \\ r_{C1,3} + \Delta p_3^* & r_{C1,4} + k_{C1,4} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,3}a_{3,1} + a_{1,4}a_{4,1} - a_{1,1}a_{3,3} + q_{C2} - a_{2,1}\tilde{k}_{C1,4} & a_{1,3}a_{3,2} + a_{1,4}a_{4,2} - a_{1,2}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + k_{C1,2} \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* & a_{1,2} + \tilde{k}_{C1,4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{k}_{C1,4} = k_{C1,4} + \tilde{a}_{1,4}$.

По формуле (2.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^+} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1/a_{1,3} & a_{3,3}/a_{1,3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\tilde{\mathbf{b}}_C | \mathbf{A}\tilde{\mathbf{b}}_C]} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C1}^T \\ \mathbf{k}_{C2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{C2}^T \\ (\mathbf{k}_{C1}^T + a_{3,3}\mathbf{k}_{C2}^T)/a_{1,3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$\begin{aligned} r_{C2,1} &= a_{2,4}a_{4,1} - a_{2,1}a_{4,4}, & r_{C2,2} &= a_{2,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,4}, \\ \tilde{r}_{C2,1} &= a_{2,4}a_{4,1} + a_{2,1}a_{2,2}, & \tilde{r}_{C2,2} &= a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}, \\ \tilde{q}_{C1} &= a_{4,4}^3 + a_{4,4}^2p_3^* + a_{4,4}p_2^* + p_1^* + a_{2,4}a_{4,2}(p_3^* + a_{2,2} + 2a_{4,4}), \\ q_{C2} &= p_2^* + (a_{2,2} + a_{4,4})p_3^* + a_{2,2}^2 + a_{4,4}^2 + a_{2,2}a_{4,4} + a_{2,4}a_{4,2}, \\ \tilde{a}_{1,4} &= (a_{1,4}(a_{4,4} - a_{3,3}) + a_{1,3}a_{3,4})/a_{2,4}, & t_C &= a_{2,4}(a_{2,1}\tilde{r}_{C2,2} - a_{4,1}r_{C2,1}), \\ a &= a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{4,4}^2 + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{4,4} + a_{4,4}a_{2,2} + (a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4})p_3^* + p_2^*, \\ k_{C1,2} &= (r_{C2,2}(a_{2,1}\tilde{q}_{C1} - a_{2,4}a_{4,1}q_{C2}) - \tilde{r}_{C2,1}p_0^*)/t_C, & \tilde{k}_{C1,4} &= (a_{2,4}\tilde{r}_{C2,2}q_{C2} - r_{C2,1}\tilde{q}_{C1} + a_{2,1}p_0^*)/t_C + \tilde{a}_{1,4}, \\ \mathbf{F} &= \frac{\begin{bmatrix} b_{3,2} & -b_{1,2} \\ -b_{3,1} & b_{1,1} \end{bmatrix}}{b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}} \begin{bmatrix} a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + p_3^* & a_{1,2} + \tilde{k}_{C1,4} \\ a_{3,1} + \frac{a_{1,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{4,2} + a - a_{2,1}\tilde{k}_{C1,4}}{a_{1,3}} & a_{3,2} + \frac{a_{1,4}a_{4,2} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + k_{C1,2} + a_{3,3}\tilde{k}_{C1,4}}{a_{1,3}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

3. Приведение к задаче наблюдения с одним входом (дуальный подход). Предположим, что индекс управляемости [13] заданной системы (1.1) равен 2, т.е.

$$\det \underbrace{[\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B}]}_{\tilde{\mathbf{U}}} \neq 0. \quad (3.1)$$

Введем обозначение для матрицы регулятора по состоянию

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}\mathbf{C}. \quad (3.2)$$

Для матрицы замкнутой системы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ выполним преобразование подобия [14]

$$\mathbf{A}_B^* = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^* \tilde{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{P}_{B0} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{B1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{B} & \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}\mathbf{B} & -\mathbf{P}_{B0} - \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{B1} \end{bmatrix},$$

где блоки $\mathbf{P}_{B0}, \mathbf{P}_{B1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ таковы, что

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B0} \\ \mathbf{P}_{B1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_B = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_{B1,1} & r_{B1,2} \\ r_{B2,1} & r_{B2,2} \\ r_{B3,1} & r_{B3,2} \\ r_{B4,1} & r_{B4,2} \end{bmatrix},$$

а преобразованная матрица состояния разомкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{A}_B = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{B1,1} & r_{B1,2} \\ 0 & 0 & r_{B2,1} & r_{B2,2} \\ 1 & 0 & r_{B3,1} & r_{B3,2} \\ 0 & 1 & r_{B4,1} & r_{B4,2} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Далее, выполнив еще одно преобразование подобия [14] через матрицу

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{K}\mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

получим матрицу, которая должна иметь желаемый полином $\varphi^*(\lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_B^* = \mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{A}_B^* \mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{P}_{B0} - \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{P}_{B1} \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_{B1} - \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_B - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{B1}) \\ \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_B} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Обеспечение желаемого полинома матрице $\tilde{\mathbf{A}}_B^*$ путем выбора матрицы $\mathbf{L}_B$ представляет собой задачу модального наблюдения по состоянию с двумя входами (MIMO-система). Для приведения к задаче с одним входом (к SIMO-системе) обнулим один из столбцов матрицы $\mathbf{L}_B$.

Пусть $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — соответственно первый и второй столбцы матрицы управления $\mathbf{B}$. Условия обнуления первого (а) или второго (б) столбца матрицы $\mathbf{L}_B$

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{B1}) \\ \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{b}_2 [0 \ 1]}_{\mathbf{K}\mathbf{B}} \underbrace{[0_{2 \times 2} \ \mathbf{I}_2] \mathbf{R}_B}_{-\mathbf{P}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}\mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4 \times 1}, \\ \text{(б)} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{B1}) \\ \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{b}_1 [1 \ 0]}_{\mathbf{K}\mathbf{B}} \underbrace{[0_{2 \times 2} \ \mathbf{I}_2] \mathbf{R}_B}_{-\mathbf{P}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{aligned}$$

принимают соответственно вид

$$\text{(а)} \quad \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{B4,1}\mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_1] = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad \text{(б)} \quad \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{B3,2}\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2] = \mathbf{0}_{2 \times 2}. \quad (3.4)$$

При этом ненулевой столбец матрицы $\mathbf{L}_B$ становится соответственно равен

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{B1}) \\ \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{b}_2 [0 \ 1]}_{\mathbf{K}\mathbf{B}} \underbrace{[0_{2 \times 2} \ \mathbf{I}_2] \mathbf{R}_B}_{-\mathbf{P}_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \\ \text{(б)} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{B1}) \\ \mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{b}_1 [1 \ 0]}_{\mathbf{K}\mathbf{B}} \underbrace{[0_{2 \times 2} \ \mathbf{I}_2] \mathbf{R}_B}_{-\mathbf{P}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}\mathbf{b}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При выполнении одного из условий (3.4) приходим к SIMO-системе

$$\tilde{\mathbf{A}}_B^* = \mathbf{A}_B - \mathbf{L}_B \mathbf{c}_B^T \quad (3.5)$$

с матрицей состояния (3.3) и соответственно матрицей наблюдения (вектор-строка)

$$(a) \quad \mathbf{c}_B^T = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1], \quad (б) \quad \mathbf{c}_B^T = [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0] \quad (3.6)$$

и матрицей наблюдателя (вектор-столбец) $\mathbf{l}_B = [\mathbf{l}_{B1}^T \mid \mathbf{l}_{B2}^T]^T$, где $\mathbf{l}_{B1}, \mathbf{l}_{B2} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$,

$$(a) \quad [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] = \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{B4,2}\mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_2], \quad (б) \quad [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] = \mathbf{K}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{B3,1}\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_1]. \quad (3.7)$$

SIMO-система (3.5) полностью наблюдаема при условии

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^2 \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^3 \end{bmatrix}}_{N_B} \neq 0. \quad (3.8)$$

Задача модального наблюдения при желаемом характеристическом полиноме $\varphi^*(\lambda)$ в SIMO-системе (3.5) решается с помощью дуальной формулы Аккермана [10]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{B1} \\ \mathbf{l}_{B2} \end{bmatrix} = \varphi^*(\mathbf{A}_B) \mathbf{N}_B^{-1} [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^T = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \varphi^*(\mathbf{A}) \tilde{\mathbf{N}}_B^{-1} [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^T, \quad (3.9)$$

где

$$\mathbf{A}_B^i = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{U}} \quad (i = \overline{0, \dots, 4}), \quad \tilde{\mathbf{N}}_B = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_B^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A}^2 \\ \tilde{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A}^3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}}_B^T = \mathbf{c}_B^T \tilde{\mathbf{U}}^{-1}.$$

Матрицу регулятора $\mathbf{K}$ (3.2) определим из соотношения

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{K}\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{K}\mathbf{b}_2 \mid \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{b}_2].$$

С учетом значений (3.4) и (3.7) соответственно получим

$$(a) \quad \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{l}_{B2} \mid r_{B4,1} \mathbf{l}_{B2} \mid \mathbf{l}_{B1} + r_{B4,2} \mathbf{l}_{B2}] = \mathbf{l}_{B1} [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] + \mathbf{l}_{B2} [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] [\tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b}_1 \mid \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2],$$

$$(б) \quad \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{l}_{B2} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{l}_{B1} + r_{B3,1} \mathbf{l}_{B2} \mid r_{B3,2} \mathbf{l}_{B2}] = \mathbf{l}_{B1} [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0] + \mathbf{l}_{B2} [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0] [\tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b}_1 \mid \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2].$$

Таким образом, в силу значений (3.6), в обоих случаях (а) и (б) матрица регулятора по состоянию равна

$$\mathbf{K} = [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{-1} = [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_B^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Условие обнуления (3.4) будет одновременно условием разрешимости уравнения (3.2) относительно матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$ [6], если второй множитель в левой части равенства (3.4) является правым аннулятором матрицы $\mathbf{C}$, т.е. соответственно если

$$(a) \quad \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{B4,1}\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_1] = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad (б) \quad \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{B3,2}\mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_2] = \mathbf{0}_{2 \times 2}. \quad (3.11)$$

Пусть $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}$ — псевдообратная матрица [6] к матрице наблюдения $\mathbf{C}$. Тогда решение уравнения (3.2) и задачи (1.2) в целом при выполнении условий (3.1), (3.8), (3.11) с учетом значения матрицы $\mathbf{K}$ (3.10) принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{C}^+ = [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_B^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{C}^+. \quad (3.12)$$

Отметим, что условие (3.11) приводимости к задаче наблюдения с одним входом может быть верно, только если индекс наблюдаемости рассматриваемой системы (1.1) больше индекса ее управляемости [13]. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Т е о р е м а 3. Задана полностью управляемая и полностью наблюдаемая тройка матриц состояния, управления и наблюдения (1.1). Пусть индекс их управляемости равен 2, т.е. выполняется условие (3.1), и справедливо одно из равенств (3.11), где соответственно $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — столбцы матрицы управления, а $r_{B3,2}$ и $r_{B4,1}$ — элементы матрицы (3.3).

Тогда индекс наблюдаемости матриц (1.1) равен 3 (больше индекса управляемости).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимо и достаточно показать, что вырождается матрица

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}.$$

В силу условия (3.1) вырождение матрицы $\tilde{\mathbf{N}}$ эквивалентно вырождению матрицы $\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}}$, которая имеет ненулевой аннулятор [6]:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{Cb}_2 & \mathbf{Cb}_2 r_{B4,1} & \mathbf{CAb}_2 \\ \mathbf{Cb}_2 r_{B4,1} & \mathbf{CAb}_2 & \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}})^R = \begin{cases} [1 \mid 0 \mid 0 \mid 0]^T, & r_{C4,1} = 0, \\ \left[r_{C3,1} + \frac{r_{C2,1}}{r_{C4,1}} \mid r_{C4,1} \mid -1 \mid 0 \right]^T, & r_{C4,1} \neq 0, \end{cases} \\ \text{(б)} \quad \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Cb}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{CAb}_1 & \mathbf{Cb}_1 r_{B3,2} \\ \mathbf{CAb}_1 & \mathbf{Cb}_1 r_{B3,2} & \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{U}})^L = \begin{cases} [0 \mid 1 \mid 0 \mid 0], & r_{C3,2} = 0, \\ \left[r_{C3,2} \mid r_{C4,2} + \frac{r_{C1,2}}{r_{C3,2}} \mid 0 \mid -1 \right], & r_{C3,2} \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{CAb}_2 r_{B4,1} &= \mathbf{CAb}_2 [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{C} (\tilde{\mathbf{U}} - [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{Ab}_1 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}]) \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 = \\ &= \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_1 - [\mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{Cb}_2 \mid \mathbf{Cb}_2 r_{B4,1} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 = \\ &= \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{Cb}_2 [0 \mid 1 \mid r_{B4,1} \mid 0] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{Cb}_2 (r_{C2,1} + r_{C3,1} r_{C4,1}), \\ \text{(б)} \quad \mathbf{CAb}_1 r_{B3,2} &= \mathbf{CAb}_1 [0 \mid 0 \mid 1 \mid 0] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{C} (\tilde{\mathbf{U}} - [\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{Ab}_2]) \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2 = \\ &= \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_2 - [\mathbf{Cb}_1 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{Cb}_1 r_{B3,2}] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2 = \\ &= \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_2 - \mathbf{Cb}_1 [1 \mid 0 \mid 0 \mid r_{B3,2}] \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{CA}^2 \mathbf{b}_2 - \mathbf{Cb}_1 (r_{C1,2} + r_{C3,2} r_{C4,2}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

По аналогии с рассуждениями о формуле (2.9) в данном случае наибольшую вычислительную сложность представляет дуальная формула Аккермана (3.9). Далее в виде теоремы предложен метод расчета модального наблюдателя для SIMO-системы (3.5), существенно упрощающий его окончательное символьное выражение.

Т е о р е м а 4. Решение задачи модального наблюдения для SIMO-системы (3.5) с обеспечением характеристического полинома $\varphi^*(\lambda) = \lambda^4 + p_3^* \lambda^3 + p_2^* \lambda^2 + p_1^* \lambda + p_0^*$ записывается как

$$\text{(a)} \quad \mathbf{l}_B = \begin{bmatrix} r_{B1,2} + l_{B1,1} \\ r_{B2,2} + q_{B2} - r_{B4,1} l_{B3,1} \\ r_{B3,2} + l_{B3,1} \\ r_{B4,2} + \Delta p_{B3}^* \end{bmatrix}, \quad \text{(б)} \quad \mathbf{l}_B = \begin{bmatrix} r_{B1,1} + q_{B2} - r_{B3,2} l_{B4,1} \\ r_{B2,1} + l_{B2,1} \\ r_{B3,1} + \Delta p_{B3}^* \\ r_{B4,1} + l_{B4,1} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

где

$$(a) \begin{cases} \tilde{r}_{B2,1} = r_{B2,1} + r_{B3,1}r_{B4,1}, \\ d_B = r_{B1,1}r_{B4,1} - r_{B2,1}r_{B3,1}, \\ t_B = r_{B4,1}d_B - r_{B2,1}^2, \\ \Delta p_{B2}^* = p_2^* + r_{B1,1}, \\ \Delta p_{B3}^* = p_3^* + r_{B3,1}, \\ q_{B1} = p_1^* + r_{B1,1}\Delta p_{B3}^*, \\ q_{B2} = \Delta p_{B2}^* + r_{B3,1}\Delta p_{B3}^*, \\ l_{B1,1} = (r_{B1,1}(r_{B4,1}q_{B1} - r_{B2,1}q_{B2}) - \tilde{r}_{B2,1}p_0^*)/t_B, \\ l_{B3,1} = (r_{B4,1}p_0^* - r_{B2,1}q_{B1} + d_Bq_{B2})/t_B, \end{cases} \quad (б) \begin{cases} \tilde{r}_{B1,2} = r_{B1,2} + r_{B3,2}r_{B4,2}, \\ d_B = r_{B2,2}r_{B3,2} - r_{B1,2}r_{B4,2}, \\ t_B = r_{B3,2}d_B - r_{B1,2}^2, \\ \Delta p_{B2}^* = p_2^* + r_{B2,2}, \\ \Delta p_{B3}^* = p_3^* + r_{B4,2}, \\ q_{B1} = p_1^* + r_{B2,2}\Delta p_{B3}^*, \\ q_{B2} = \Delta p_{B2}^* + r_{B4,2}\Delta p_{B3}^*, \\ l_{B2,1} = (r_{B2,2}(r_{B3,2}q_{B1} - r_{B1,2}q_{B2}) - \tilde{r}_{B1,2}p_0^*)/t_B, \\ l_{B4,1} = (r_{B3,2}p_0^* - r_{B1,2}q_{B1} + d_Bq_{B2})/t_B. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользуемся результатом теоремы 2. Из соображений дуальности [16] положим $A_C = A_B^T$. Тогда, поскольку $b_C = c_B$, матрица наблюдателя (вектор-столбец) I_B будет равна транспонированной матрице регулятора k_C (2.13) из теоремы 2.

При этом условие полной наблюдаемости (3.8) принимает вид $t_B \neq 0$, т.е.

$$(a) \quad r_{B2,1}^2 \neq r_{B4,1}d_B, \quad (б) \quad r_{B1,2}^2 \neq r_{B3,2}d_B. \quad (3.14)$$

Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий (3.1), (3.11) и (3.14) регулятор по выходу (матрица F) рассчитывается по формуле (3.12) с подстановкой значений (3.13).

Пример 2 (а). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{4,2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем первые два блочных столбца матрицы управляемости:

$$\tilde{U} = [B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,4}b_{4,2} \\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,4}b_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4}b_{4,2} \\ 0 & b_{4,2} & a_{4,2}b_{2,1} & a_{4,4}b_{4,2} \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{U} = -a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}^2b_{4,2}^2.$$

Если $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$, то индекс управляемости равен 2, т.е. верно условие (3.1).

Для проверки условия (3.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$R_B = \tilde{U}^{-1}A^2B = \begin{bmatrix} r_{B1,1} & r_{B1,2} \\ r_{B2,1} & r_{B2,2} \\ r_{B3,1} & r_{B3,2} \\ r_{B4,1} & r_{B4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2} & \frac{b_{4,2}}{b_{2,1}}(a_{1,4}a_{2,1} + a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4}) \\ \frac{b_{2,1}}{b_{4,2}}\underbrace{(a_{1,2}a_{4,1} - a_{1,1}a_{4,2})}_{r_{B2,1}} & a_{1,4}a_{4,1} + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} - a_{4,2}\tilde{a}_{1,4} \\ a_{1,1} + a_{2,2} & (b_{4,2}/b_{2,1})(a_{2,4} + \tilde{a}_{1,4}) \\ (b_{2,1}/b_{4,2})a_{4,2} & a_{3,3} + a_{4,4} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{a}_{1,4} = (a_{1,4}(a_{1,1} - a_{3,3}) + a_{1,3}a_{3,4})/a_{1,2}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального наблюдения с одним входом, так как выполнен вариант (а) условия (3.11):

$$\mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 - r_{\mathbf{B}4,1}\mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 4:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1} &= r_{\mathbf{B}2,1} + r_{\mathbf{B}3,1}r_{\mathbf{B}4,1} = (b_{2,1}/b_{4,2}) \underbrace{(a_{1,2}a_{4,1} + a_{2,2}a_{4,2})}_{\tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}}, \\ d_{\mathbf{B}} &= r_{\mathbf{B}1,1}r_{\mathbf{B}4,1} - r_{\mathbf{B}2,1}r_{\mathbf{B}3,1} = (b_{2,1}/b_{4,2})(a_{1,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} - a_{1,1}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}), \\ t_{\mathbf{B}} &= r_{\mathbf{B}4,1}d_{\mathbf{B}} - r_{\mathbf{B}2,1}^2 = (b_{2,1}/b_{4,2})^2 \underbrace{a_{1,2}(a_{4,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} - a_{4,1}\tilde{r}_{\mathbf{B}2,1})}_{\tilde{t}_{\mathbf{B}}}, \\ \Delta p_{\mathbf{B}2}^* &= p_2^* + r_{\mathbf{B}1,1} = p_2^* + a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}, \\ \Delta p_{\mathbf{B}3}^* &= p_3^* + r_{\mathbf{B}3,1} = p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2}, \\ q_{\mathbf{B}1} &= p_1^* + r_{\mathbf{B}1,1}\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_1^* + (a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2})(p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2}), \\ q_{\mathbf{B}2} &= \Delta p_{\mathbf{B}2}^* + r_{\mathbf{B}3,1}\Delta p_{\mathbf{B}3}^* = p_2^* + (a_{1,1} + a_{2,2})p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1}, \\ l_{\mathbf{B}1,1} &= (r_{\mathbf{B}1,1}(r_{\mathbf{B}4,1}q_{\mathbf{B}1} - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}2}) - \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}p_0^*)/t_{\mathbf{B}} = (b_{4,2}/b_{2,1}) \underbrace{(r_{\mathbf{B}1,1}(a_{4,2}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} - a_{1,2}a_{4,1}q_{\mathbf{B}2}) - \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}p_0^*)}_{\tilde{l}_{\mathbf{B}1,1}}/\tilde{t}_{\mathbf{B}}, \\ l_{\mathbf{B}3,1} &= (r_{\mathbf{B}4,1}p_0^* - r_{\mathbf{B}2,1}q_{\mathbf{B}1} + d_{\mathbf{B}}q_{\mathbf{B}2})/t_{\mathbf{B}} = (b_{4,2}/b_{2,1}) \underbrace{(a_{1,2}\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1}q_{\mathbf{B}2} - \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1}\tilde{q}_{\mathbf{B}1} + a_{4,2}p_0^*)}_{\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1}}/\tilde{t}_{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

где $\tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} = a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}$, $\tilde{q}_{\mathbf{B}1} = q_{\mathbf{B}1} + a_{1,1}q_{\mathbf{B}2}$. С учетом неравенства $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (3.14) полной наблюдаемости SIMO-системы выполняется, если

$$a_{2,1}a_{4,2}^2 - a_{1,2}a_{4,1}^2 \neq a_{4,1}a_{4,2}(a_{2,2} - a_{1,1}).$$

Согласно выражению (3.13) из теоремы 4 рассчитаем наблюдатель $\mathbf{l}_{\mathbf{B}} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1}^T \mid \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}^T]^T$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \mid \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] &= \begin{bmatrix} r_{\mathbf{B}1,2} + l_{\mathbf{B}1,1} & r_{\mathbf{B}3,2} + l_{\mathbf{B}3,1} \\ r_{\mathbf{B}2,2} + q_{\mathbf{B}2} - r_{\mathbf{B}4,1}l_{\mathbf{B}3,1} & r_{\mathbf{B}4,2} + \Delta p_{\mathbf{B}3}^* \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (b_{4,2}/b_{2,1})(a_{1,4}a_{2,1} + a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + \tilde{l}_{\mathbf{B}1,1}) & (b_{4,2}/b_{2,1})(a_{2,4} + \tilde{l}_{\mathbf{B}3,1}) \\ a_{1,4}a_{4,1} + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} + q_{\mathbf{B}2} - a_{4,2}\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} = \tilde{l}_{\mathbf{B}3,1} + \tilde{a}_{1,4}$.

По формуле (3.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} \mid \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}] \underbrace{\frac{1}{b_{4,2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3}/a_{3,4} & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}A}^T \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^*} = \frac{1}{b_{4,2}} [(\mathbf{l}_{\mathbf{B}1} + a_{3,3}\mathbf{l}_{\mathbf{B}2})/a_{3,4} \mid \mathbf{l}_{\mathbf{B}2}].$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{B}1,1} &= a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}, & \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1} &= a_{1,2}a_{4,1} - a_{1,1}a_{4,2}, \\ \tilde{r}_{\mathbf{B}1,1} &= a_{2,1}a_{4,2} - a_{2,2}a_{4,1}, & \tilde{r}_{\mathbf{B}2,1} &= a_{1,2}a_{4,1} + a_{2,2}a_{4,2}, \\ \tilde{q}_{\mathbf{B}1} &= a_{1,1}^3 + p_3^*a_{1,1}^2 + p_2^*a_{1,1} + p_1^* + a_{1,2}a_{2,1}(p_3^* + 2a_{1,1} + a_{2,2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{B2} &= p_2^* + (a_{1,1} + a_{2,2}) p_3^* + a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1}, \\
 \tilde{a}_{1,4} &= (a_{1,4}(a_{1,1} - a_{3,3}) + a_{1,3}a_{3,4})/a_{1,2}, \quad \bar{t}_B = a_{1,2}(a_{4,2}\tilde{r}_{B1,1} - a_{4,1}\bar{r}_{B2,1}), \\
 a &= a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1} + p_3^*(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + p_2^*, \\
 \bar{t}_{B1,1} &= (r_{B1,1}(a_{4,2}\tilde{q}_{B1} - a_{1,2}a_{4,1}q_{B2}) - \bar{r}_{B2,1}p_0^*)/\bar{t}_B, \quad \tilde{t}_{B3,1} = (a_{1,2}\tilde{r}_{B1,1}q_{B2} - \bar{r}_{B2,1}\tilde{q}_{B1} + a_{4,2}p_0^*)/\bar{t}_B + \tilde{a}_{1,4}, \\
 \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 1/b_{2,1} & 0 \\ 0 & 1/b_{4,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,3} + (a_{1,4}a_{2,1} - a_{2,2}\tilde{a}_{1,4} + \bar{t}_{B1,1} + a_{3,3}\tilde{t}_{B3,1})/a_{3,4} & a_{2,4} + \tilde{t}_{B3,1} \\ a_{4,3} + (a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,4}a_{4,1} + a - a_{4,2}\tilde{t}_{B3,1})/a_{3,4} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Пример 2 (б). Требуется решить задачу (1.2) для матриц состояния, управления и наблюдения (1.1):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{4,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем первые два блочных столбца матрицы управляемости:

$$\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{B} | \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,2}b_{2,1} & 0 \\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,4}b_{4,2} \\ 0 & 0 & a_{3,2}b_{2,1} & a_{3,4}b_{4,2} \\ 0 & b_{4,2} & a_{4,2}b_{2,1} & a_{4,4}b_{4,2} \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{\mathbf{U}} = -a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}^2b_{4,2}^2.$$

Если $a_{1,2}a_{3,4}b_{2,1}b_{4,2} \neq 0$, то индекс управляемости равен 2, т.е. верно условие (3.1).

Для проверки условия (3.11) рассчитаем следующую матрицу:

$$\mathbf{R}_B = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_{B1,1} & r_{B1,2} \\ r_{B2,1} & r_{B2,2} \\ r_{B3,1} & r_{B3,2} \\ r_{B4,1} & r_{B4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,4}\tilde{a}_{3,2} & \frac{b_{4,2}}{b_{2,1}} \underbrace{(a_{2,3}a_{3,4} - a_{2,4}a_{3,3})}_{\bar{r}_{B1,2}} \\ \frac{b_{2,1}}{b_{4,2}}(a_{1,2}a_{4,1} + a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{4,2} - a_{4,4}\tilde{a}_{3,2}) & a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4} \\ a_{1,1} + a_{2,2} & (b_{4,2}/b_{2,1})a_{2,4} \\ (b_{2,1}/b_{4,2})(a_{4,2} + \tilde{a}_{3,2}) & a_{3,3} + a_{4,4} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{a}_{3,2} = (a_{3,2}(a_{3,3} - a_{1,1}) + a_{1,2}a_{3,1})/a_{3,4}$. Рассматриваемая задача приводится к задаче модального наблюдения с одним входом, так как выполнен вариант (б) условия (3.11):

$$\mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{b}_2 - r_{B3,2}\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{3,4}b_{4,2} & a_{4,4}b_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,2} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$

Проведем промежуточные расчеты из теоремы 4:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{B1,2} &= r_{B1,2} + r_{B3,2}r_{B4,2} = (b_{4,2}/b_{2,1}) \underbrace{(a_{2,3}a_{3,4} + a_{2,4}a_{4,4})}_{\bar{r}_{B1,2}}, \\
 d_B &= r_{B2,2}r_{B3,2} - r_{B1,2}r_{B4,2} = (b_{4,2}/b_{2,1})(a_{3,4}\tilde{r}_{B2,2} - a_{3,3}\bar{r}_{B1,2}), \\
 t_B &= r_{B3,2}d_B - r_{B1,2}^2 = (b_{4,2}/b_{2,1})^2 \underbrace{a_{3,4}(a_{2,4}\tilde{r}_{B2,2} - a_{2,3}\bar{r}_{B1,2})}_{\bar{t}_B},
 \end{aligned}$$

$$\Delta p_{B2}^* = p_2^* + r_{B2,2} = p_2^* + a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4},$$

$$\Delta p_{B3}^* = p_3^* + r_{B4,2} = p_3^* + a_{3,3} + a_{4,4},$$

$$q_{B1} = p_1^* + r_{B2,2}\Delta p_{B3}^* = p_1^* + (a_{3,4}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,4})(p_3^* + a_{3,3} + a_{4,4}),$$

$$\begin{aligned}
q_{B2} &= \Delta p_{B2}^* + r_{B4,2} \Delta p_{B3}^* = p_2^* + (a_{3,3} + a_{4,4}) p_3^* + a_{3,3}^2 + a_{4,4}^2 + a_{3,3} a_{4,4} + a_{3,4} a_{4,3}, \\
l_{B2,1} &= (r_{B2,2} (r_{B3,2} q_{B1} - r_{B1,2} q_{B2}) - \tilde{r}_{B1,2} p_0^*) / t_B = (b_{2,1} / b_{4,2}) \underbrace{(r_{B2,2} (a_{2,4} \tilde{q}_{B1} - a_{2,3} a_{3,4} q_{B2}) - \tilde{r}_{B1,2} p_0^*)}_{\tilde{l}_{B2,1}} / \bar{t}_B, \\
l_{B4,1} &= (r_{B3,2} p_0^* - r_{B1,2} q_{B1} + d_B q_{B2}) / t_B = (b_{2,1} / b_{4,2}) \underbrace{(a_{3,4} \tilde{r}_{B2,2} q_{B2} - \bar{r}_{B1,2} \tilde{q}_{B1} + a_{2,4} p_0^*)}_{\tilde{l}_{B4,1}} / \bar{t}_B.
\end{aligned}$$

где $\tilde{r}_{B2,2} = a_{2,4} a_{4,3} - a_{2,3} a_{4,4}$, $\tilde{q}_{B1} = q_{B1} + a_{3,3} q_{B2}$. С учетом неравенства $a_{1,2} a_{3,4} b_{2,1} b_{4,2} \neq 0$ можно утверждать, что условие (3.14) полной наблюдаемости SIMO-системы справедливо, если

$$a_{2,4}^2 a_{4,3} - a_{2,3}^2 a_{3,4} \neq a_{2,3} a_{2,4} (a_{4,4} - a_{3,3}).$$

Согласно выражению (3.13) из теоремы 4 рассчитаем наблюдатель $\mathbf{l}_B = [\mathbf{l}_{B1}^T \mid \mathbf{l}_{B2}^T]^T$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] &= \begin{bmatrix} r_{B1,1} + q_{B2} - r_{B3,2} l_{B4,1} & r_{B3,1} + \Delta p_{B3}^* \\ r_{B2,1} + \bar{l}_{B2,1} & r_{B4,1} + l_{B4,1} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{2,1} a_{1,2} + a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,1} a_{2,2} + q_{B2} - a_{2,4} \tilde{l}_{B4,1} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ (b_{2,1} / b_{4,2}) (a_{1,2} a_{4,1} + a_{3,2} a_{4,3} - a_{1,1} a_{4,2} - a_{4,4} \tilde{a}_{3,2} + \bar{l}_{B2,1}) & (b_{2,1} / b_{4,2}) (a_{4,2} + \tilde{l}_{B4,1}) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где $\tilde{l}_{B4,1} = \bar{l}_{B4,1} + \tilde{a}_{3,2}$.

По формуле (3.12) определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{l}_{B1} \mid \mathbf{l}_{B2}] \underbrace{\frac{1}{b_{2,1}} \begin{bmatrix} 1/a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1,1}/a_{1,2} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_B^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_{BA}^T \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^+} = \frac{1}{b_{2,1}} [(\mathbf{l}_{B1} + a_{1,1} \mathbf{l}_{B2}) / a_{1,2} \mid \mathbf{l}_{B2}].$$

Таким образом, последовательность расчета искомого регулятора имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{B1,2} &= a_{2,3} a_{3,4} - a_{2,4} a_{3,3}, & r_{B2,2} &= a_{3,4} a_{4,3} - a_{3,3} a_{4,4}, \\
\tilde{r}_{B1,2} &= a_{2,3} a_{3,4} + a_{2,4} a_{4,4}, & \tilde{r}_{B2,2} &= a_{2,4} a_{4,3} - a_{2,3} a_{4,4}, \\
\tilde{q}_{B1} &= a_{3,3}^3 + p_3^* a_{3,3}^2 + p_2^* a_{3,3} + p_1^* + a_{3,4} a_{4,3} (p_3^* + 2a_{3,3} + a_{4,4}), \\
q_{B2} &= p_2^* + (a_{3,3} + a_{4,4}) p_3^* + a_{3,3}^2 + a_{4,4}^2 + a_{3,3} a_{4,4} + a_{3,4} a_{4,3}, \\
\tilde{a}_{3,2} &= (a_{3,2} (a_{3,3} - a_{1,1}) + a_{1,2} a_{3,1}) / a_{3,4}, & \bar{t}_B &= a_{3,4} (a_{2,4} \tilde{r}_{B2,2} - a_{2,3} \bar{r}_{B1,2}), \\
a &= a_{1,1}^2 + a_{3,3}^2 + a_{4,4}^2 + a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,3} a_{4,4} + a_{4,4} a_{1,1} + p_3^* (a_{1,1} + a_{3,3} + a_{4,4}) + p_2^*, \\
\bar{l}_{B2,1} &= (r_{B2,2} (a_{2,4} \tilde{q}_{B1} - a_{2,3} a_{3,4} q_{B2}) - \tilde{r}_{B1,2} p_0^*) / \bar{t}_B, & \tilde{l}_{B4,1} &= (a_{3,4} \tilde{r}_{B2,2} q_{B2} - \bar{r}_{B1,2} \tilde{q}_{B1} + a_{2,4} p_0^*) / \bar{t}_B + \tilde{a}_{3,2}, \\
\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 1/b_{2,1} & 0 \\ 0 & 1/b_{4,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1} + (a_{2,3} a_{3,2} + a_{3,4} a_{4,3} + a - a_{2,4} \tilde{l}_{B4,1}) / a_{1,2} & p_3^* + a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ a_{4,1} + (a_{3,2} a_{4,3} - a_{4,4} \tilde{a}_{3,2} + \bar{l}_{B2,1} + a_{1,1} \tilde{l}_{B4,1}) / a_{1,2} & a_{4,2} + \tilde{l}_{B4,1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Символьные вычисления в MATLAB [15] подтвердили равенство полиномов (1.2).

Заключение. Для линейной динамической системы четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости, а также при соблюдении условий (2.11) или (3.11) получено аналитическое решение задачи модального управления по выходу. В основу решения положено приведение указанной задачи к задаче управления (наблюдения) с одним входом, выполненное с помощью преобразований подобия и обнуления одной из строк (одного из столбцов) матрицы регулятора (наблюдателя) по состоянию. При этом следует заметить, что условия (2.11) или (3.11), когда указанное обнуление одновременно обеспечивает существование регулятора по выходу, ограничивают класс объектов, для которых применимо предложенное решение. Данное обстоятельство обусловлено математической сложностью зада-

чи модального управления по выходу в общем виде. Однако существует ряд прикладных задач, удовлетворяющих приведенным условиям. В частности, это задача орбитальной стабилизации во взаимосвязанных каналах крен–рысканье [4, 5] при наличии измерений угла и угловой скорости только в одном из этих каналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление линейной ММО-системой по вектору измерения с использованием многоуровневой декомпозиции // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 17–26. <https://doi.org/10.31857/S0002338820020146>
2. *Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Сорокин И.В.* Управление по выходу спектром продольного движения одно-винтового вертолета // Изв. вузов. Авиационная техника. 2020. № 2. С. 70–79.
3. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Фомичёв А.В.* Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.
4. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Олейник А.С., Рябченко В.Н., Ефанов Д.Е.* Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2014. № 5. С. 3–15.
5. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138. <https://doi.org/10.1134/S0002338819040176>
6. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
7. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005. 421 с.
8. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Parametric Synthesis of Modal Control with Output Feedback for Descent Module Attitude Stabilization // Int. Russian Automation Conf. Sochi. 2019. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/RusAutoCon.2019.8867744>.
9. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass–Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. M. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64>
10. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proceedings. M. 2021. V. 2318. Iss. 1. 130009. P. 1–8. <https://doi.org/10.1063/5.0036155>.
11. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* О связи модальной управляемости по выходу динамической ММО-системы и вида матриц с желаемыми спектрами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 2. С. 1–12.
12. *Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Зубов Н.Е., Лапин А.В.* Анализ и синтез динамических ММО-систем на основе ленточных матриц специального типа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 1–14.
13. *Скороход Б.А., Колезжук В.С.* Определение индекса наблюдаемости линейной дискретной системы с векторным выходом // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. 2003. № 6. С. 24–28.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
15. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950>
16. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 629.78

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ МИКРОСПУТНИКОВ В ВИДЕ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА С УЧЕТОМ ИХ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРОВ МАСС¹

© 2023 г. Ю. М. Заболотнов^{a,*}, Ш. Чэнь^{a,b,**}

^aСамарский национальный исследовательский ун-т, Самара, Россия

^bСеверо-западный политехнический ун-т, Сиань, КНР

*e-mail: yumz@yandex.ru

**e-mail: csm.ssau@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

После доработки 09.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается процесс формирования вращающейся тросовой группировки микроспутников в виде правильного треугольника. Предлагается комбинированный метод управления при развертывании системы, использующий контроль за натяжением тросов и двигателя малой тяги. Для обоснования предлагаемого способа управления применяются две модели. Первая модель получена методом Лагранжа и предназначена для построения номинальной программы формирования группировки. В этой модели микроспутники рассматриваются как материальные точки и тросы представляют собой нерастяжимые механические связи. Вторая модель разработана для оценки возможности реализации номинальной программы управления, так как учитывает растяжимость тросов, моделирует работу механизмов выпуска тросов, принимает во внимание движение микроспутников относительно своих центров масс, от которых зависит направление сил малой тяги. Уравнения пространственного движения группировки, соответствующие второй модели, записаны в неподвижной геоцентрической системе координат и позволяют оценить влияние статической и инерционной асимметрии микроспутников на их движение относительно центра масс. Приводятся результаты численных расчетов, подтверждающих возможность применения предлагаемого способа управления для формирования тросовой группировки в виде правильного треугольника, вращающегося с постоянной заданной угловой скоростью в своем конечном состоянии.

DOI: 10.31857/S0002338823010110, EDN: JBQCSJO

Введение. В настоящее время в мире особое внимание уделяется тросовым группировкам космических аппаратов (КА), в которых благодаря существованию механических связей между КА (тросами) создаются условия для функционирования таких систем на орбите (при сохранении заданной геометрической конфигурации) в течение длительного времени практически без затрат топлива.

Первые проекты использования тросовых многоэлементных формирований на орбите появились почти полвека назад. Прежде всего этого были радиальные тросовые системы, в которых элементы располагались вдоль местной вертикали [1–3] на некотором расстоянии друг от друга. Была доказана устойчивость движения таких систем относительно вертикали в режиме гравитационной стабилизации и указаны много их полезных применений [1–6]. Позже появились публикации, где предлагались более сложные тросовые системы: многоугольные плоские и пространственные [7, 8]. Обеспечение согласованного полета по орбите тросовых группировок как многоэлементных систем КА, связанных легкими и гибкими связями, представляет собой сложную задачу, решение которой еще далеко от завершения.

Более глубокие и детальные исследования тросовых группировок КА начинают появляться в начале нашего века. Особое внимание специалистов привлекают тросовые группировки в виде “созвездий”, которые могут быть открытыми и замкнутыми (в виде кольца). Здесь можно отме-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-53002).

тить конфигурацию “ступица-спицы” (Hub-Spoke), динамика которой была исследована в [9, 10]. Система “ступица-спицы” имеет особенность с точки зрения управления, которая заключается в том, что большинство операций управления могут быть выполнены с помощью главного центрального КА. Большое количество исследований также было посвящено кольцевым конфигурациям, особенностью которых является отсутствие центрального КА и, следовательно, централизованного управления. Кольцевые конфигурации представляют собой замкнутую цепь, где все спутники соединены между собой. Особое внимание было уделено треугольной конфигурации [11–16], в частности методам управления ее движением. В [11] был проведен анализ равновесия и показана возможность полета треугольной группировки спутников в орбитальной плоскости. В [12] были разработаны законы управления движением вращающейся треугольной тросовой группировки, основанные на линеаризации и на использовании принципа обратной связи. В [13] решалась задача управления разворачиванием вращающейся треугольной тросовой группировки с помощью контроля силы натяжения в тросах. Предполагалась возможность как выпуска тросов, так и их втягивания. В [14] была рассмотрена динамическая устойчивость вращающейся треугольной тросовой группировки вблизи точек либрации на этапах разворачивания и при вращении в конечном состоянии. Теми же авторами были продолжены исследования треугольной конфигурации спутников с точки зрения влияния нелинейных эффектов на ее движение, где была показана связь между колебаниями троса и орбитальным движением системы [15]. В [16] для управления разворачиванием треугольной группировки спутников с неизмеримыми скоростями разработали робастный контроллер с наблюдателями состояния, основанный на методе управления скользящим режимом (Sliding Mode Control – SMC). Анализ перечисленных работ показывает, что в них КА рассматривались как материальные точки, т.е. не учитывалось влияние их движения относительно центра масс на качество управления. Хотя естественно, что более полная постановка и решение рассматриваемой задачи управления движением треугольной группировки спутников (как и другими геометрическими конфигурациями тросовых систем) должны включать анализ их движения вокруг своих центров масс. Динамическая неустойчивость колебаний спутников относительно центров масс может привести к провисанию и ослаблению тросов и, как следствие, к потере управляемости в системе и структурной (с точки зрения геометрии) неустойчивости.

1. Описание задачи. В статье рассматривается формирование вращающейся тросовой группировки микроспутников в виде правильного треугольника. В исходном состоянии микроспутники жестко соединены между собой (в виде правильного треугольника), т.е. представляют собой твердое тело, которое вращается с некоторой ограниченной по модулю угловой скоростью, возникающей после отделения от ракеты-носителя или от базовой космической станции. После разделения микроспутников с некоторой относительной скоростью для формирования треугольной тросовой группировки используется комбинированный способ управления. Во-первых, осуществляется регулирование сил натяжения тросов, изменение которых должно соответствовать предлагаемой номинальной программе управления. При этом рассматриваются наиболее простые механизмы выпуска тросов, которые обеспечивают только торможение тросов, т.е. предполагается, что они не могут втягивать их обратно. Во-вторых, перевод системы во вращение обеспечивается двигателями малой тяги, установленными на каждом микроспутнике так, чтобы направление векторов сил тяги составляло постоянный угол с продольной осью спутника (продольная ось спутника – это линия, проходящая через его центр масс и точку крепления одного из тросов). Величина реактивных сил постоянна в течение формирования группировки и выбирается при построении номинальной программы управления.

Построение номинальной программы изменения сил натяжения тросов и выбор других параметров процесса формирования системы (скоростей разделения спутников, направления и величин сил малой тяги) осуществляется с использованием упрощенной модели движения, построенной с помощью уравнений Лагранжа. В математической модели в форме Лагранжа микроспутники рассматриваются как материальные точки, тросы представляют собой нерастяжимые идеальные механические связи и орбита центра масс всей системы не изменяется. Параметры номинальной программы и процесса разворачивания системы выбираются исходя из выполнения конечных условий движения тросовой группировки с точки зрения приведения ее в заданное состояние, которое характеризуется размерами правильного треугольника и конечной величиной угловой скорости вращения системы относительно своего центра масс. В номинальном случае движение тросовой группировки осуществляется в плоскости орбиты центра масс системы. Для частного симметричного случая равных масс микроспутников получено аналитическое решение уравнений Лагранжа, которое может быть использовано для предварительного выбора параметров номинальной программы управления.

Для проверки возможности реализации номинальной программы управления построена более полная модель пространственного движения тросовой группировки, которая учитывает, в частности, растяжимость тросов, односторонность механических связей (тросов) между микро-спутниками и движение спутников относительно центров масс. Эта модель предназначена для оценки влияния возмущений на процесс развертывания системы, при котором должны быть выполнены следующие базовые ограничения: сохраняться заданная треугольная конфигурация системы; выполняться ограничения на амплитуду угловых колебаний микроспутников относительно направления тросов; обеспечиваться необходимая точность приведения тросовой группировки в заданное конечное состояние. Таким образом, приведем основные возмущения, которые здесь учитываются в рамках этой модели: 1) возмущения угловой скорости вращения трех микроспутников как твердого тела после отделения от ракеты-носителя или от базовой космической станции; 2) возмущения, возникающие при разделении микроспутников; 3) возмущения, связанные с направлением действия сил малой тяги из-за колебаний микроспутников относительно своих центров масс; 4) наличие возможной малой статической и инерционной асимметрии микроспутников; 5) взаимное влияние угловых колебаний микроспутников и упругих колебаний тросов. Уравнения движения системы, соответствующие более полной модели, записываются в геоцентрической неподвижной системе координат. Причем характерной ее особенностью является использование кинематических уравнений углового движения спутников, в которых интегрируемыми переменными системы дифференциальных уравнений являются компоненты матрицы перехода от геоцентрической неподвижной к связанным со спутниками системам координат. Зная эту матрицу, нетрудно определить контролируемые углы между продольными осями спутников и направлениями тросов, которые соответствуют прямым, соединяющим точки крепления тросов смежных спутников. Здесь также необходимо отметить, что при использовании более полной модели уравнения движения центра масс и относительно центра масс системы не разделяются, т.е. интегрируются совместно. Причем это относится и к уравнениям движения микроспутников относительно своих центров масс, которые являются частью общей системы дифференциальных уравнений. Программная реализация процесса моделирования по более полным уравнениям движения основывается на применении матричных вычислений.

2. Математическая модель движения системы в форме Лагранжа. Для предварительного анализа движения системы, построения номинальной программы ее формирования и выбора параметров программы развертывания используются упрощенные уравнения плоского движения системы, в которых микроспутники рассматриваются как материальные точки, а тросы — нерастяжимые связи. Построение модели осуществляется в орбитальной подвижной системе координат S_{xyz} , начало которой находится в центре масс системы, ось S_x направлена по радиус-вектору центра масс, а ось S_y — по направлению движения в плоскости орбиты. Для вывода уравнений плоского движения системы применяются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}, \quad (2.1)$$

где T_c и Π — кинетическая и потенциальная энергия системы, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (l_1, l_2, \theta_1, \theta_2)^T$ — вектор обобщенных координат, l_1, l_2 — длины тросов, θ_1, θ_2 — углы наклона тросов к местной вертикали, $\dot{\mathbf{q}}$ — соответствующий вектор обобщенных скоростей, $\mathbf{Q} = (Q_{l_1}, Q_{l_2}, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2})^T$ — вектор обобщенных непотенциальных сил. В вектор $\mathbf{Q}$ входят силы натяжения тросов и реактивные силы малой тяги, которые изменяются по заданной программе.

На рис. 1,а показаны обобщенные координаты $l_1, l_2, \theta_1, \theta_2$ и нумерация микроспутников (материальных точек) $m_i, i = \overline{1,3}$. Длина l_3 и угол θ_3 для третьего троса вычисляются через обобщенные координаты из очевидных геометрических соотношений

$$\begin{aligned} l_3 &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \cos \theta_3 &= \frac{l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2}{l_3}, \quad \sin \theta_3 = \frac{l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2}{l_3}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

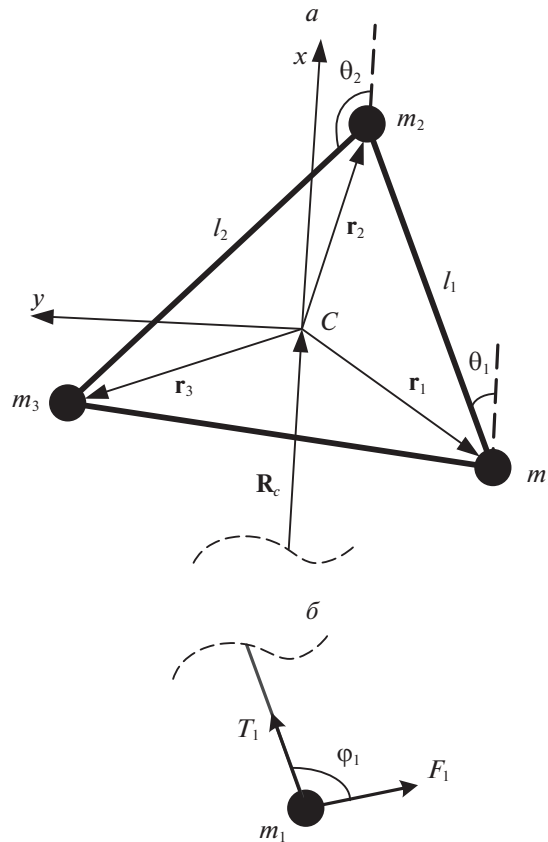


Рис. 1. Тросовая группировка как механическая система материальных точек с принятыми для ее описания обобщенными координатами

Поскольку масса тросов не учитывается, то кинетическая и потенциальная энергии системы, входящие в уравнения (2.1), определяется следующим образом:

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{\mathbf{R}}_c + \dot{\mathbf{r}}_i)^2, \quad \Pi = - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu m_i}{|\mathbf{R}_c + \mathbf{r}_i|}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{R}_c$ — радиус-вектор центра масс системы, $\mathbf{r}_i$ — радиусы-векторы микроспутников относительно центра масс системы (рис. 1).

Предполагая, что расстояние r_i много меньше, чем расстояние центра масс системы от притягивающего центра, выражение потенциальной энергии может быть аппроксимировано путем разложения его в биномиальный ряд и сохранения слагаемых до $O(1/R_c^3)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi = & - \sum_{i=1}^3 m_i \omega^2 R_c^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \{ \mu_1 (\mu_2 + \mu_3) l_1^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_1) + \mu_3 (\mu_1 + \mu_2) l_2^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_2) + \\ & + 2 \mu_1 \mu_3 l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2] \}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$, $\mu_i = m_i/m$; $\omega = \sqrt{\mu/R_c^3}$ — орбитальная скорость центра масс системы, т.е. при использовании уравнений Лагранжа предполагается, что центр масс системы движется по круговой орбите.

Дифференцируя T_c , Π по обобщенным координатам и скоростям и подставляя полученные выражения в уравнения Лагранжа (2.1), получим [17]

$$m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)\{\ddot{l}_1 - l_1[(\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2\theta_1 - 1)]\} + m\mu_1\mu_3\{[\ddot{l}_2 - l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + 2\omega)]\cos(\theta_1 - \theta_2) + [l_2\ddot{\theta}_2 + 2\dot{l}_2(\dot{\theta}_2 + \omega)]\sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2\} = Q_{l_1}, \quad (2.5)$$

$$m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)\{\ddot{l}_2 - l_2[(\dot{\theta}_2 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2\theta_2 - 1)]\} + m\mu_1\mu_3\{[\ddot{l}_1 - l_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + 2\omega)]\cos(\theta_1 - \theta_2) - [l_1\ddot{\theta}_1 + 2\dot{l}_1(\dot{\theta}_1 + \omega)]\sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\omega^2 l_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2\} = Q_{l_2}, \quad (2.6)$$

$$m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)l_1^2[\ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) + 3\omega^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1] + m\mu_1\mu_3 l_2 \{3\omega^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + [\ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega)]\cos(\theta_1 - \theta_2) + [(\dot{\theta}_2 + \omega)^2 - \omega^2 - (\ddot{l}_2/l_2)]\sin(\theta_1 - \theta_2)\} = Q_{\theta_1}, \quad (2.7)$$

$$m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)l_2^2[\ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) + 3\omega^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2] + m\mu_1\mu_3 l_1 \{3\omega^2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 + [\ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega)]\cos(\theta_1 - \theta_2) + [\omega^2 - (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + (\ddot{l}_1/l_1)]\sin(\theta_1 - \theta_2)\} = Q_{\theta_2}. \quad (2.8)$$

При определении обобщенных сил Q_{l_1} , Q_{l_2} , Q_{θ_1} , Q_{θ_2} учитываются: 1) силы T_i , $i = \overline{1,3}$, создаваемые тормозными устройствами выпуска тросов и направленные вдоль каждого троса соответственно; 2) реактивные силы $F_{1,2,3}$, создаваемые двигателями малой тяги и составляющие углы $\varphi_{1,2,3}$ с направлениями тросов длиной $l_{1,2,3}$ (рис. 1,б). Обобщенные силы вычисляются из выражений

$$Q_{q_j} = (T_1 - T_3 + F_1) \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_j} + (T_2 - T_1 + F_2) \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_j} + (T_3 - T_2 + F_3) \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial q_j}, \quad (2.9)$$

где $j = \overline{1,4}$.

3. Номинальная программа разворачивания тросовой группировки. Предлагаемый закон управления силами натяжения имеет простой вид

$$T_i = T_i^0 + p_i(l_i - L_d) + w_i \dot{l}_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.1)$$

где L_d — конечная длина троса, p_i , w_i — коэффициенты обратной связи, $T_i^0 = ml_i(\dot{\theta}_i + \omega)^2/9$ — силы натяжения тросов, определенные в идеальном случае в предположении, что в процессе разворачивания геометрическая конфигурация системы — это правильный треугольник. В выражении (3.1) слагаемые, зависящие от коэффициентов обратной связи, вводятся формально для обеспечения приведения системы в заданное конечное состояние, когда $l_i = L_d$, $\dot{l}_i = 0$, и система вращается с некоторой постоянной угловой скоростью $\omega_d = \dot{\theta}_i + \omega = \text{const}$, которая определяется моментом времени выключения двигателей t_e . В номинальном случае полагается, что модули сил $F_{1,2,3}$ и углы $\varphi_{1,2,3}$ равны: $F_{1,2,3} = F$ и $\varphi_{1,2,3} = \varphi$. Таким образом, реактивные силы изменяются по линейному закону

$$F_{1,2,3} = \begin{cases} F, & \text{если } t < t_e \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (3.2)$$

Покажем, что в частном случае $l_1 = l_2 = l_3$, $m_1 = m_2 = m_3$, который здесь принимается за номинальный, после выключения двигателей закон регулирования (3.1) при соответствующем выборе коэффициентов обратной связи обеспечивает асимптотическую устойчивость конечного состояния системы по переменным $l_i \rightarrow L_d$, $\dot{l}_i \rightarrow 0$. Причем необходимо, чтобы в процессе разворачивания $l_i < L_d$, $\dot{l}_i > 0$, т.е. переходный процесс был апериодическим, так как предполагается, что устройства выпуска троса работают только на торможение и не могут втягивать трос обратно. При этом угловая скорость вращения тросов $\dot{\theta}_i \rightarrow \dot{\theta}_d$, где $\dot{\theta}_d$ — некоторое ее постоянное значение, которое зависит от величины тяги F и времени выключения двигателей t_e .

В данном частном случае уравнения для обобщенных координат l_1, θ_1 и l_2, θ_2 , когда $F_{1,2,3} = 0$, тождественно совпадают и приводятся к линейной системе

$$\Delta \ddot{l} = -9[p \Delta l + w \Delta \dot{l}]/m, \quad (3.3)$$

$$\ddot{\theta} = -2\Delta \dot{l}/\dot{\theta} l, \quad (3.4)$$

где $\Delta l = l - L_d$, $l = l_{1,2,3}$, $\theta = \theta_{1,2,3}$, $p = p_{1,2,3}$, $w = w_{1,2,3}$.

Система уравнений (3.3)–(3.4) имеет решение

$$\Delta l(t) = C_1 e^{\lambda_1(t-t_e)} + C_2 e^{\lambda_2(t-t_e)}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{9w}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mp}{9w^2}} \right), \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_e) \exp \left(-2 \int_{t_e}^t \frac{\Delta \dot{l}(t)}{\Delta l(t) + L_d} dt \right) = \dot{\theta}(t_e) \left(\frac{C_1 + C_2 + L_d}{\Delta l(t) + L_d} \right)^2, \quad (3.6)$$

где произвольные постоянные $C_{1,2}$ определяются по значениям переменных в момент времени $t = t_e$.

Условия асимптотической устойчивости $l_i \rightarrow L_d$, $\dot{l}_i \rightarrow 0$ будут выполнены и переходный процесс будет аperiодическим ($l_i < L_d$, $\dot{l}_i > 0$), если

$$w > 0, \quad 0 < \frac{4mp}{9w^2} < 1. \quad (3.7)$$

В этом случае может быть найдено предельное значение угловой скорости

$$\dot{\theta}_d = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_e) (C_1 + C_2 + L_d)^2 / L_d^2. \quad (3.8)$$

Понятно, что момент выключения двигателей t_e должен быть выбран так, чтобы $l(t_e) < L_d$, и имелось еще время для завершения переходного процесса при разворачивании системы.

В качестве примера на рис. 2 представлены зависимости, характеризующие номинальную программу разворачивания системы и соответствующие исходным данным, приведенным в табл. 1, где $\tau = \omega t$ – безразмерное время, где ω – угловая скорость движения центра масс системы на начальной круговой орбите. В номинальном случае длины тросов, силы натяжения, линейные и угловые скорости тросов изменяются по одинаковым законам, т.е. в каждый момент времени система представляет собой правильный треугольник, вращающийся в плоскости орбиты центра масс системы (рис. 2). Зависимости для длин, линейных и угловых скоростей тросов, построенные с помощью аналитических формул для $t > t_e$ (3.5)–(3.6), практически совпадают с зависимостями, полученными численным интегрированием уравнений (2.5)–(2.8). В качестве примера на рис. 2,г изображено предельное значение $\dot{\theta}_d$ (прямая линия), вычисленное по формуле (3.8), на рис. 2,д – траектории спутников относительно центра масс системы (0, 0) в процессе ее разворачивания. Как будет показано ниже, приведенные аналитические оценки и численные результаты, полученные по уравнениям (2.5)–(2.8), подтвердились с помощью более полной модели движения тросовой группировки, записанной в геоцентрической системе координат и учитывающей движение спутников относительно своих центров масс.

В качестве двигателей малой тяги можно, например, использовать электрические двигатели, обладающие большой скоростью истечения рабочего тела (или удельным импульсом) и малым расходом массы. Так, например, при удельном импульсе $I_y = 20000$ м/с с тягой $F = 1$ Н массовый расход рабочего тела составит $F/I_y = 0.5 \times 10^{-4}$ кг/с, что для исходных данных, приведенных в табл. 1, и для предлагаемой номинальной программы управления приведет к расходу массы для трех двигателей 0.023 кг. Поэтому изменением массы микроспутников при разворачивании тросовой группировки в данном случае можно пренебречь.

4. Математическая модель движения тросовой группировки в геоцентрической неподвижной системе координат. Более полная модель движения системы записывается в геоцентрической системе координат $OXYZ$, где плоскость OXY совпадает с плоскостью экватора, а ось OX

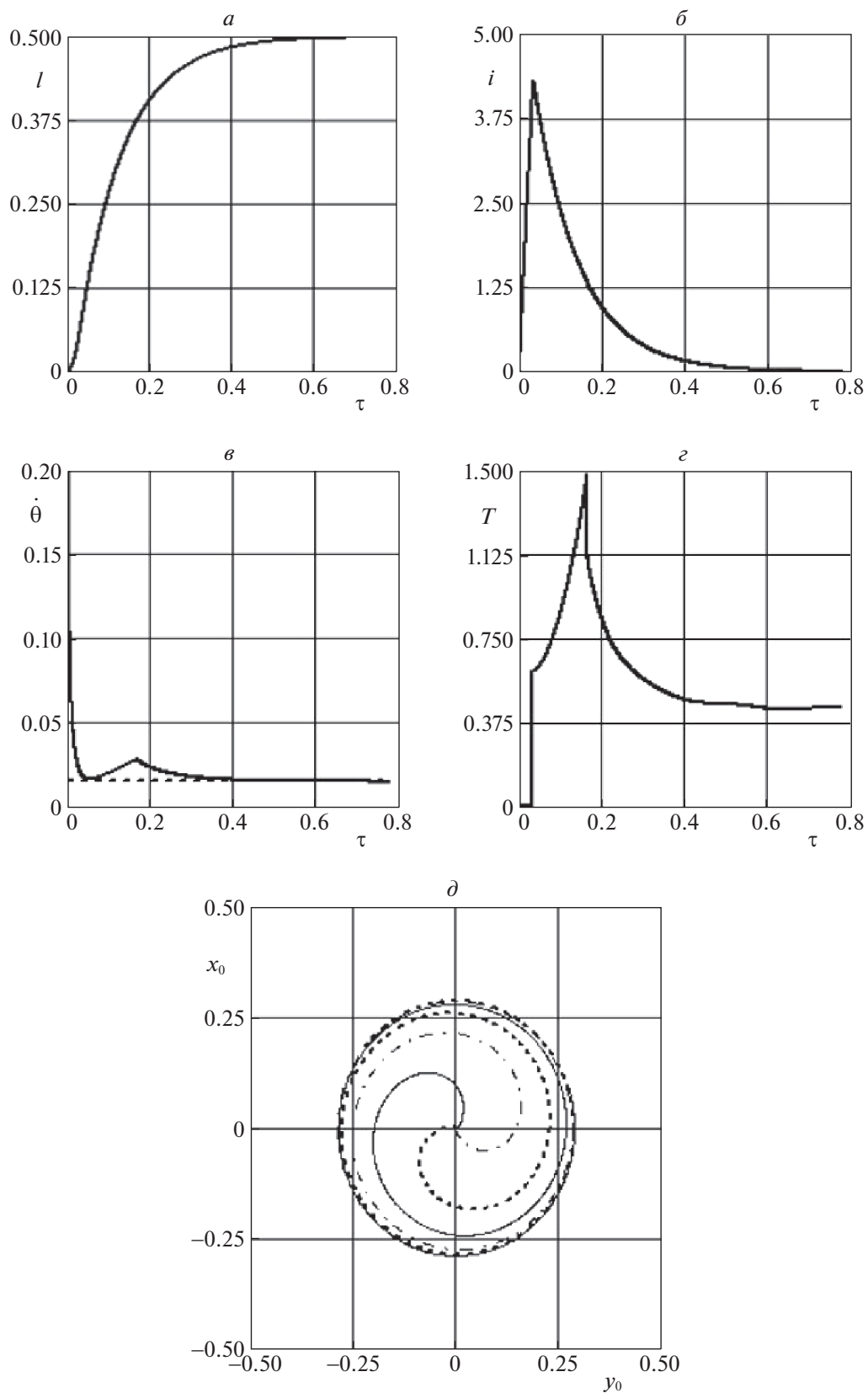


Рис. 2. Параметры номинальной программы разворачивания тросовой группировки

Таблица 1. Исходные данные для номинальной программы формирования тросовой группировки

Параметры	Значение
Масса микроспутников, кг	10
Высота начальной круговой орбиты, км	500
Конечная длина тросов L_d , км	0.5
Относительные скорости разделения спутников, м/с	0.05
Начальная угловая скорость системы до разделения спутников, c^{-1}	0.1
Тяга двигателей F , Н	1
Углы $\phi_{1,2,3}$, град	100
Коэффициенты обратной связи $p_{1,2,3}$, кг/с ²	15
Коэффициенты обратной связи $w_{1,2,3}$, кг/с	0.15
Ограничение на силы натяжения $T_{\min}$, Н	0.01
Момент времени выключения двигателей t_e , с	150

направлена в точку весеннего равноденствия. Уравнения движения центров масс микроспутников имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \mathbf{G}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}'_3 + \mathbf{F}_1, \\ m_k \ddot{\mathbf{R}}_k &= \mathbf{G}_k + \mathbf{T}_k + \mathbf{T}'_{k-1} + \mathbf{F}_k, \quad k = 2, 3, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{G}_k = -\mu m_k \mathbf{R}_k / R_k^3$, $k = \overline{1, 3}$ – гравитационные силы, μ – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{T}_k = -\mathbf{T}'_k$ – силы натяжения тросов, $\mathbf{R}_k$ – радиусы-векторы центров масс спутников, $\mathbf{F}_k$ – реактивные силы малой тяги.

Силы натяжения тросов описывают одностороннюю механическую связь между спутниками и имеют вид

$$\mathbf{T}_k = T_k \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta r_k}, \quad T_k = \begin{cases} C_s \frac{\Delta r_k - L_k}{L_k} & \text{при } \Delta r_k - L_k \geq 0, \\ 0 & \text{при } \Delta r_k - L_k < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $C_s = ES$ – жесткость тросов, E – модуль упругости Юнга, S – площадь поперечного сечения тросов, L_k – недеформированные длины тросов, $\Delta \mathbf{r}_k$, $k = \overline{1, 3}$, – радиусы-векторы, соединяющие точки крепления тросов, определяются следующим образом (рис. 3,а):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_1 &= (\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{21}) - (\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_{12}), \\ \Delta \mathbf{r}_2 &= (\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_{32}) - (\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_{23}), \\ \Delta \mathbf{r}_3 &= (\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_{13}) - (\mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_{31}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где векторы $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{21}$, $\mathbf{r}_{23}$, $\mathbf{r}_{32}$, $\mathbf{r}_{13}$, $\mathbf{r}_{31}$ определяют положение точек крепления тросов относительно центров масс микроспутников.

Процесс выпуска троса моделируется с помощью динамических уравнений [18]

$$m_e \ddot{L}_k = T_k - U_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (4.4)$$

где коэффициент m_e учитывает инерционность механизмов управления, U_k – управляющие силы. Принимается, что выпуск тросов длиной L_k осуществляется с k -го микроспутника.

Управляющие силы вычисляются с использованием принципа обратной связи:

$$U_k = p_g (L_k - l_k) + w_g (\dot{L}_k - \dot{l}_k), \quad k = \overline{1, 3}, \quad (4.5)$$

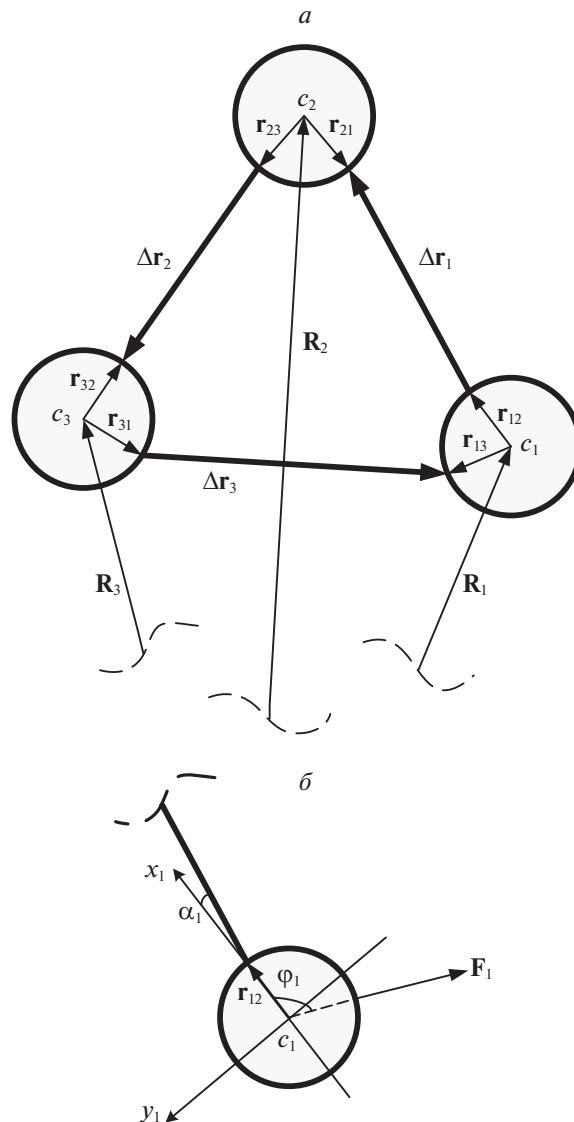


Рис. 3. Схема тросовой группировки с учетом конечных размеров микроспутников

где номинальные значения $l_k, \dot{l}_k$ определяются интегрированием системы уравнений (2.5)–(2.8) или с помощью интерполяции из заранее составленных таблиц, p_g, w_g – коэффициенты обратной связи. Предполагается, что механизмы выпуска тросов осуществляют только торможение троса, поэтому если $\dot{L}_k \leq 0$ или $T_k \leq 0$, то выпуск тросов прекращается: $\dot{L}_k = \ddot{L}_k = 0$.

При определении углового движения микроспутников относительно своих центров масс используются классические динамические уравнения Эйлера

$$\dot{\omega}_k = J_k^{-1}(\mathbf{M}_k - \omega_k \times J_k \omega_k), \quad k = \overline{1,3}, \quad (4.6)$$

где ω_k и J_k – вектор угловой скорости и тензор инерции k -го спутника, $\mathbf{M}_k$ – вектор моментов от сил натяжения тросов. Предполагается, что микроспутники – это твердые тела, форма которых близка к сфере, и движение системы происходит на достаточно больших высотах. Поэтому гравитационные и аэродинамические моменты не учитываются. Тензоры инерции J_k спутников определяются в системах координат $c_k x_k y_k z_k$, связанных с главными центральными осями инерции спутников. На рис. 3,б в качестве примера показаны направления осей $c_1 x_1$ и $c_1 y_1$ для первого спутника.

Моменты $\mathbf{M}_k$ представляют собой суммы

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{23}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_{31} + \mathbf{M}_{32}, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{T}_1$, $\mathbf{M}_{13} = \mathbf{r}_{13} \times \mathbf{T}_3$, $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{T}_1$, $\mathbf{M}_{23} = \mathbf{r}_{23} \times \mathbf{T}_2$, $\mathbf{M}_{31} = \mathbf{r}_{31} \times \mathbf{T}_3$, $\mathbf{M}_{32} = \mathbf{r}_{32} \times \mathbf{T}_2$.

Направления реактивных сил $\mathbf{F}_k$, $k = \overline{1,3}$, жестко связаны с корпусом микроспутников, лежат в плоскостях $c_k x_k y_k$ и составляют углы φ_k (рис. 3,б) с осями $c_k x_k$. Предполагается, что направления реактивных сил проходят через центры масс спутников, поэтому соответствующие моменты не учитываются.

Кинематические уравнения записываются в форме уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_{xk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{xk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{yk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{yk}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{zk} = \boldsymbol{\omega}^{(k)} \times \mathbf{e}_{zk}, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{e}_{xk}$, $\mathbf{e}_{yk}$, $\mathbf{e}_{zk}$, $k = \overline{1,3}$, – орты систем координат $c_k x_k y_k z_k$.

В этом случае проекции единичных векторов $\mathbf{e}_{xk}$, $\mathbf{e}_{yk}$, $\mathbf{e}_{zk}$ на оси неподвижной геоцентрической системы координат $OXYZ$ являются элементами матриц перехода от системы координат $OXYZ$ к системам координат $c_k x_k y_k z_k$. Эти матрицы имеют вид

$$\mathbf{E}_k = (\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk}). \quad (4.9)$$

При интегрировании уравнений (4.8) должны с заданной погрешностью выполняться условия ортогональности векторов $\mathbf{e}_{xk}$, $\mathbf{e}_{yk}$, $\mathbf{e}_{zk}$ и $|\mathbf{e}_{xk}| = |\mathbf{e}_{yk}| = |\mathbf{e}_{zk}| = 1$. Для этого можно использовать алгоритм коррекции, основанный на минимизации корректирующих добавок при изменении значений компонент векторов $\mathbf{e}_{xk}$, $\mathbf{e}_{yk}$, $\mathbf{e}_{zk}$ [19].

При развертывании группировки и при ее движении по орбите после формирования конфигурации необходимо осуществлять контроль за угловым движением микроспутников, а именно за углами между характерными осями спутников $\mathbf{e}_{xk}$ и направлениями тросов $\Delta \mathbf{r}_k$, $k = \overline{1,3}$. Эти углы определяются следующим образом (рис. 3,б):

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \arccos \left(\frac{\Delta \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{e}_{xk}}{|\Delta \mathbf{r}_k|} \right), \quad k = \overline{1,3}, \\ \alpha_k^{(k-1)} &= \arccos \left(\frac{\Delta \mathbf{r}'_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{xk}}{|\Delta \mathbf{r}'_{k-1}|} \right), \quad k = 2, 3, \\ \alpha_1^{(3)} &= \arccos \left(\frac{\Delta \mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{e}_{x3}}{|\Delta \mathbf{r}'_1|} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\Delta \mathbf{r}'_k = -\Delta \mathbf{r}_k$, $k = \overline{1,3}$. При отсутствии колебаний в идеальном случае имеем для правильного треугольника $\alpha_k = 0$, $\alpha_k^{(k-1)} = \alpha_1^{(3)} = \pi/3$. В общем случае при наличии возмущений амплитуды колебаний пространственных углов (4.10) должны быть ограничены относительно своих невозмущенных значений.

5. Расчет процесса разделения микроспутников. В качестве примера рассматриваются три одинаковых микроспутника, причем в исходном состоянии до их разделения линии, соединяющие центры масс спутников, образуют правильный треугольник. После отделения группировки спутников, жестко связанных между собой, от ракеты-носителя или космической станции вся система вращается относительно своего центра масс с угловой скоростью ω_0 . Причем в общем случае группировка спутников как твердое тело совершает пространственное движение.

После разделения спутников векторы скоростей их центров масс и угловых скоростей вычисляются в соответствии с известными теоремами теоретической механики. Обозначим через $\mathbf{V}_{r1}$ и $\mathbf{V}_{r3}$ относительные скорости отделения спутников 1 и 3 от спутника 2. Тогда, используя закон сохранения импульса, определим скорости центров масс спутников $\mathbf{V}_{1,2,3}$ после разделения

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_c - (m_1 \mathbf{V}_{r1} + m_3 \mathbf{V}_{r3})/m, \quad \mathbf{V}_{1,3} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{r1,3}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{V}_c$ – вектор скорости центра масс системы до разделения.

Таблица 2. Исходные данные для моделирования движения системы с учетом вращения спутников относительно центров масс

Параметры	Значение
Диаметр тросов, мм	0.6
Модуль Юнга материала тросов, ГПа	25
Начальные угловые скорости системы до разделения спутников $\omega_{x,y,z}$, c^{-1}	0, 0, 0.1
Коэффициент инерционности механизмов управления m_e , кг	0.2
Коэффициенты обратной связи p_g , $кг/с^2$	7.8
Коэффициенты обратной связи w_g , $кг/с$	1.5

Для определения угловых скоростей спутников после разделения используется теорема об изменении кинетического момента твердого тела при ударном воздействии:

$$\Delta K_1 = r_{12} \times S_1, \quad \Delta K_3 = r_{32} \times S_3, \quad \Delta K_2 = r_{21} \times S'_1 + r_{23} \times S'_3, \quad (5.2)$$

где $\Delta K_{1,2,3}$ — приращение кинетических моментов спутников, $S_{1,3}$ — ударные импульсы, действующие на спутники 1 и 3, причем $S'_{1,3} = -S_{1,3}$. Импульсы $S_{1,3}$ определяются из выражений

$$S_{1,3} = m_{1,3} (V_{1,3} - V_c). \quad (5.3)$$

Зная приращения $\Delta K_{1,2,3}$, нетрудно определить изменение угловых скоростей спутников после их разделения:

$$\Delta \omega_k = J_k^{-1} \Delta K_k, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (5.4)$$

Следует отметить, если векторы импульсов $S_{1,3}$ проходят через центры масс микроспутников, то их угловые скорости не изменяются и равны угловым скоростям системы до разделения спутников. Если же, например, центры масс спутников смещены относительно геометрического центра сферы (статическая асимметрия), то угловые скорости спутников после их разделения изменяются. В общем случае влияние асимметрии спутников на их угловые колебания заключается в следующем: 1) в изменении начальных угловых скоростей их движения (5.4); 2) в изменении характера колебаний спутников относительно центров масс при разворачивании тросовой системы и при ее последующем движении, которое описывается системой уравнений (4.6) и (4.8).

6. Численные результаты и их анализ. Исходные данные, принятые для численного моделирования движения тросовой группировки с использованием уравнений (4.1), (4.4), (4.6), (4.8), приводятся в табл. 2. В номинальном невозмущенном случае система до разделения спутников вращается в плоскости орбиты с некоторой ненулевой угловой скоростью (в численном примере $\omega_z = 0.1 \text{ c}^{-1}$).

Простейший приближенный анализ движения тросовой группировки в виде правильного треугольника показывает, что углы $\phi_{1,2,3}$, характеризующие направление действия сил тяги (предполагается, что они равны), должны удовлетворять неравенству $\pi/2 < \phi_{1,2,3} < 5\pi/6$. Нарушение верхнего ограничения приводит к смене знака моментов от сил тяги относительно центра масс правильного треугольника, что ведет к невозможности перевода системы во вращение в заданном направлении (против часовой стрелки). Нарушение нижнего ограничения приводит к тому, что силы тяги не растягивают, а сжимают тросы (они становятся не натянутыми), что неизбежно ведет к изменению заданной геометрической конфигурации системы, к потере управляемости и, следовательно, к невозможности выполнить поставленную задачу по формированию треугольной тросовой группировки. Моделирование процесса разворачивания системы по более полной модели (4.1) подтвердило приведенные утверждения. В частности, если $\phi_{1,2,3} \approx \pi/2$, то движение системы становилось неустойчивым, причем это относится как к сохранению ее геометрической конфигурации, так и к движению спутников относительно своих центров масс. С другой стороны, уменьшение углов $\phi_{1,2,3}$ в приведенном выше диапазоне приводит к более быстрому разворачиванию системы (моменты от сил тяги увеличиваются). В связи с этим была

выбрана некоторая компромиссная величина $\phi_{1,2,3} = 100^\circ$ (табл. 1), при которой движение системы еще было устойчиво с точки зрения ее геометрии и углового движения спутников.

Рисунок 4 иллюстрирует изменение некоторых характерных параметров движения группировки при ее развертывании в номинальном плоском случае (начальная орбита — круговая). На рис. 4,а–в для примера показано изменение характеристик углового движения первого микро-спутника: углов α_1 , $\alpha_1^{(3)}$ и угловой скорости ω_{z1} ($\omega_{y1} = \omega_{x1} = 0$). При этом угол $\alpha_1^{(3)}$ совершает колебания относительно значения $\pi/3$, амплитуда которых ограничена. Характеристики движения относительно центра масс других спутников изменяются аналогично. На рис. 4,г приводится график для угловых скоростей вращения тросов $\dot{\theta}_{1,2,3}$ длиной $l_{1,2,3}$ (жирной штриховой линией показано аналитическое решение (3.6)), определенных в соответствии с моделью (4.1), которые практически совпадают. Рисунок 4,д иллюстрирует изменение силы натяжения T_1 , где штриховой линией показана сила натяжения, определенная по модели (2.5)–(2.8). По изменению силы натяжения T_1 можно определить характерные участки движения тросовой группировки при ее развертывании. На начальном небольшом по времени участке ($0 \leq \tau < 0.05$) сила натяжения ведет себя сложным образом, что объясняется возмущением при включении реактивных двигателей (ступенчатое изменение тяги). Далее сила натяжения возрастает до момента выключения двигателей ($\tau = 0.17$). Дальнейшее развертывание системы происходит только под действием центробежных сил до достижения всеми тросами заданной длины (0.5 км). Силы натяжения $T_{2,3}$ изменяются аналогично. В конечном итоге, тросовая группировка представляет собой почти правильный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью, приблизительно равной 0.015 с^{-1} . При этом спутники совершают малые колебания относительно линий, характеризующих направления тросов (или направления действия сил натяжения). Конечное значение угловой скорости тросовой группировки можно изменить, смещая момент времени выключения реактивных двигателей. Значения коэффициентов обратной связи p_g , w_g (табл. 2) в уравнениях, записанных в геоцентрической системе координат, по сравнению с коэффициентами $p_{1,2,3}$, $w_{1,2,3}$ (табл. 1) были изменены, так как в противном случае по окончании выпуска троса, когда длина троса фиксируется, имеют место колебания сил натяжения тросов с увеличенной амплитудой (рис. 4,е).

Далее, возмущенное движение тросовой группировки микро-спутников иллюстрируется на рис. 5 и 6. Авторами специально был выбран один из наиболее сложных вариантов исходных данных для моделирования возмущенного движения группировки спутников. Рассматривались спутники с разными массами: $m_1 = 8 \text{ кг}$, $m_2 = 10 \text{ кг}$, $m_3 = 12 \text{ кг}$. До разделения спутников начальные угловые скорости системы составляли $\omega_x = \omega_z = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = -0.1 \text{ с}^{-1}$, т.е. угловые скорости по осям связанной системы координат ω_x , ω_y по модулю равны значению номинальной угловой скорости вращения ω_z системы (табл. 2). Имеет место также сложная статическая и динамическая асимметрия спутников: 1) центры масс спутников смещены по отношению к геометрическому центру сфер на величину $\Delta D/D = 0.1$, где D — диаметр спутников, ΔD — величина смещения центра масс; 2) разность моментов инерции $|J_{zk} - J_{yk}|/J_s = 0.1$, где J_s — момент инерции однородной сферы, J_{yk} , J_{zk} — моменты инерции спутников относительно систем координат $c_k x_k y_k z_k$. Наличие статической и динамической асимметрии приводит к соответствующему изменению начальных угловых скоростей спутников после разделения (5.4), так как направления импульсов не проходят через центры масс спутников и, кроме того, данная асимметрия влияет на последующее движение спутников относительно своих центров масс.

На рис. 5,а–в приводится изменение углов $\alpha_{1,2,3}$, характеризующих угловое движение спутников относительно направлений тросов длиной $l_{1,2,3}$, на рис. 5,г–е — в качестве примера изменение угловых скоростей ω_{x2} , ω_{y2} , ω_{z2} для спутника 2. Как следует из результатов, представленных на рис. 5, колебания углов $\alpha_{1,2,3}$ имеют ограниченный характер, т.е. действие рассматриваемых возмущений не приводит к неустойчивости углового движения спутников и проявляется в основном в начальных возмущениях из-за наличия статической асимметрии спутников. Изменение угловых скоростей ω_{x2} , ω_{y2} , ω_{z2} (рис. 5,г–е) показывает, что спутник 2 совершает сложное пространственное движение относительно направлений тросов. Это же имеет место для углов и угловых скоростей спутников 1 и 3, аналогичные зависимости для которых здесь не приводятся.

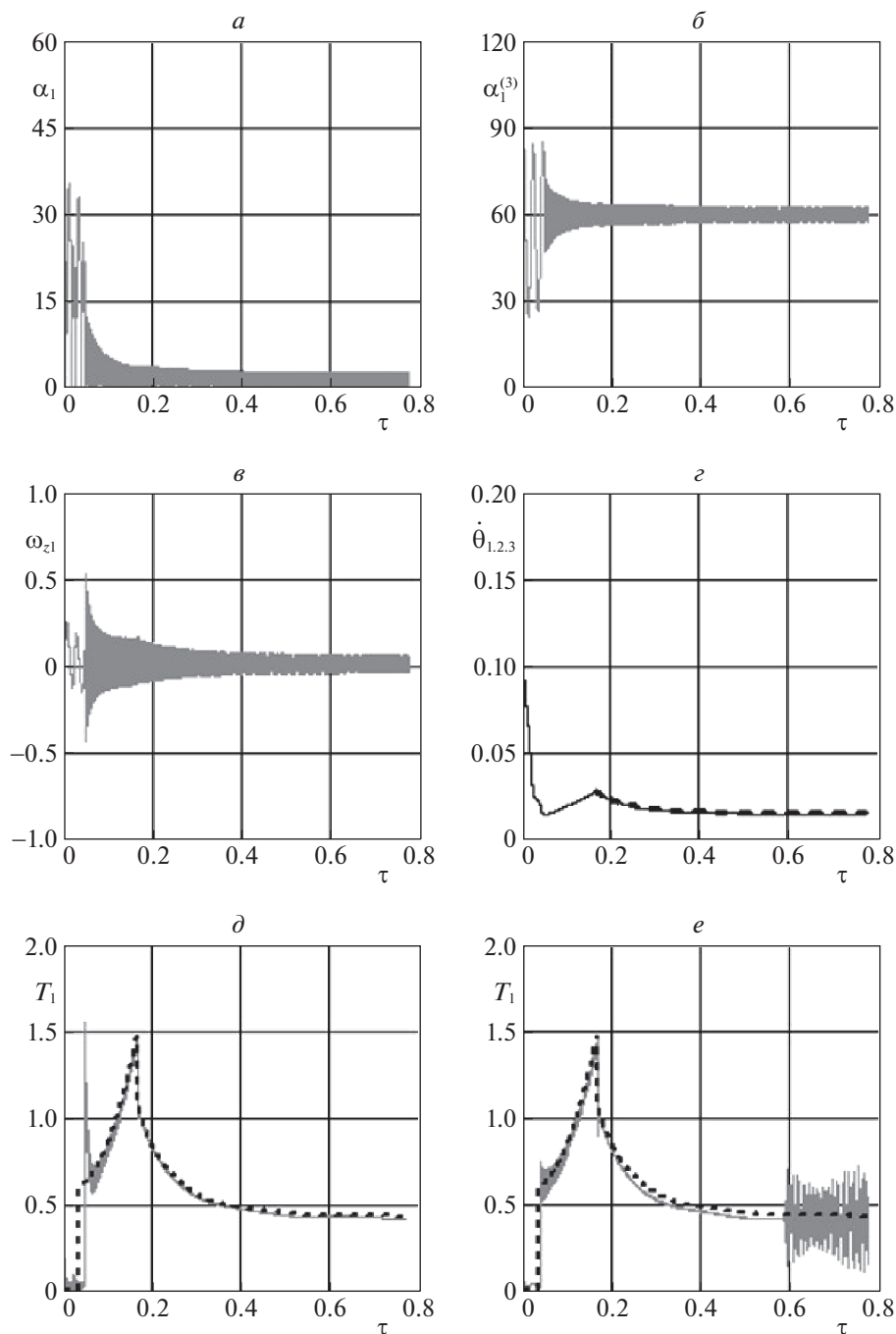


Рис. 4. Изменение характерных параметров движения тросовой группировки при ее формировании в плоском случае

Действие рассматриваемых возмущений изменяет силы натяжения тросов, величины которых по окончании разворачивания системы отличаются от номинальных значений (рис. 6, *a–в*), при этом конечная величина угловой скорости вращения системы уменьшается (рис. 6, *г*) по сравнению с невозмущенным случаем. В качестве примера на рис. 6, *д* показан переходный процесс по скорости $\Delta \dot{L}_1 = \dot{L}_1 - \dot{l}_1$ для троса длиной l_1 . Изменение ошибок регулирования для других тросов аналогично. На рис. 6, *е* показаны траектории центров масс спутников, определенные по модели в геоцентрической системе координат и построенные относительно центра масс системы (0, 0). Таким образом, действие рассматриваемых возмущений не приводит к неустойчивости углового

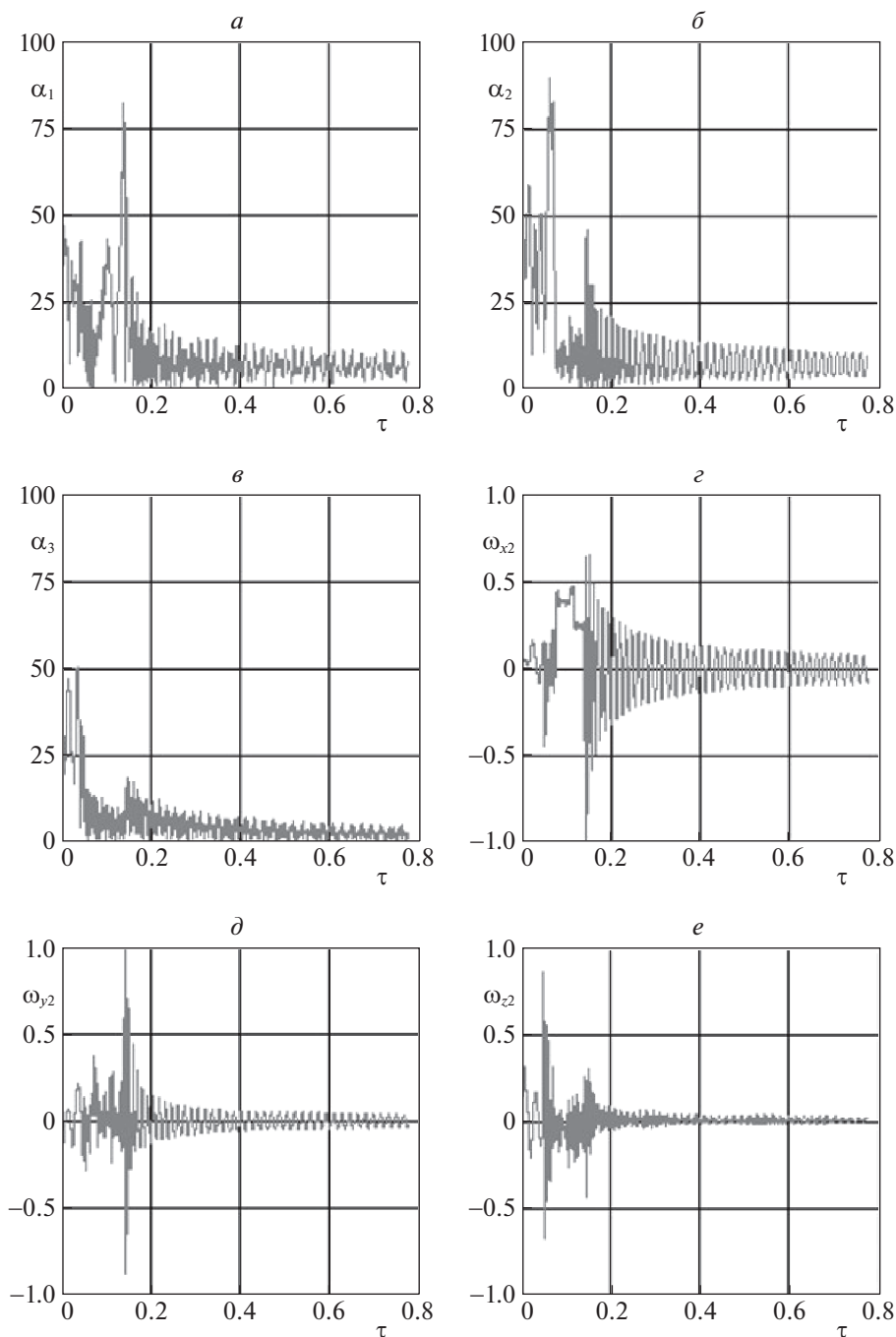


Рис. 5. Изменение характеристик углового движения микроспутников при наличии возмущений

движения спутников и слабо влияет на конечное состояние тросовой группировки, которая после окончания разворачивания имеет треугольную конфигурацию и вращается с постоянной угловой скоростью, а колебания спутников относительно направлений тросов ограничены.

Заключение. С помощью уравнений Лагранжа получена математическая модель движения рассматриваемой тросовой системы, с помощью которой построена номинальная программа формирования вращающейся группировки микроспутников треугольной конфигурации. В частном случае при отсутствии возмущений найдено аналитическое решение полученной системы уравнений, которое можно использовать для предварительных оценок при проектировании процесса формирования системы. Построена более полная модель движения тросовой

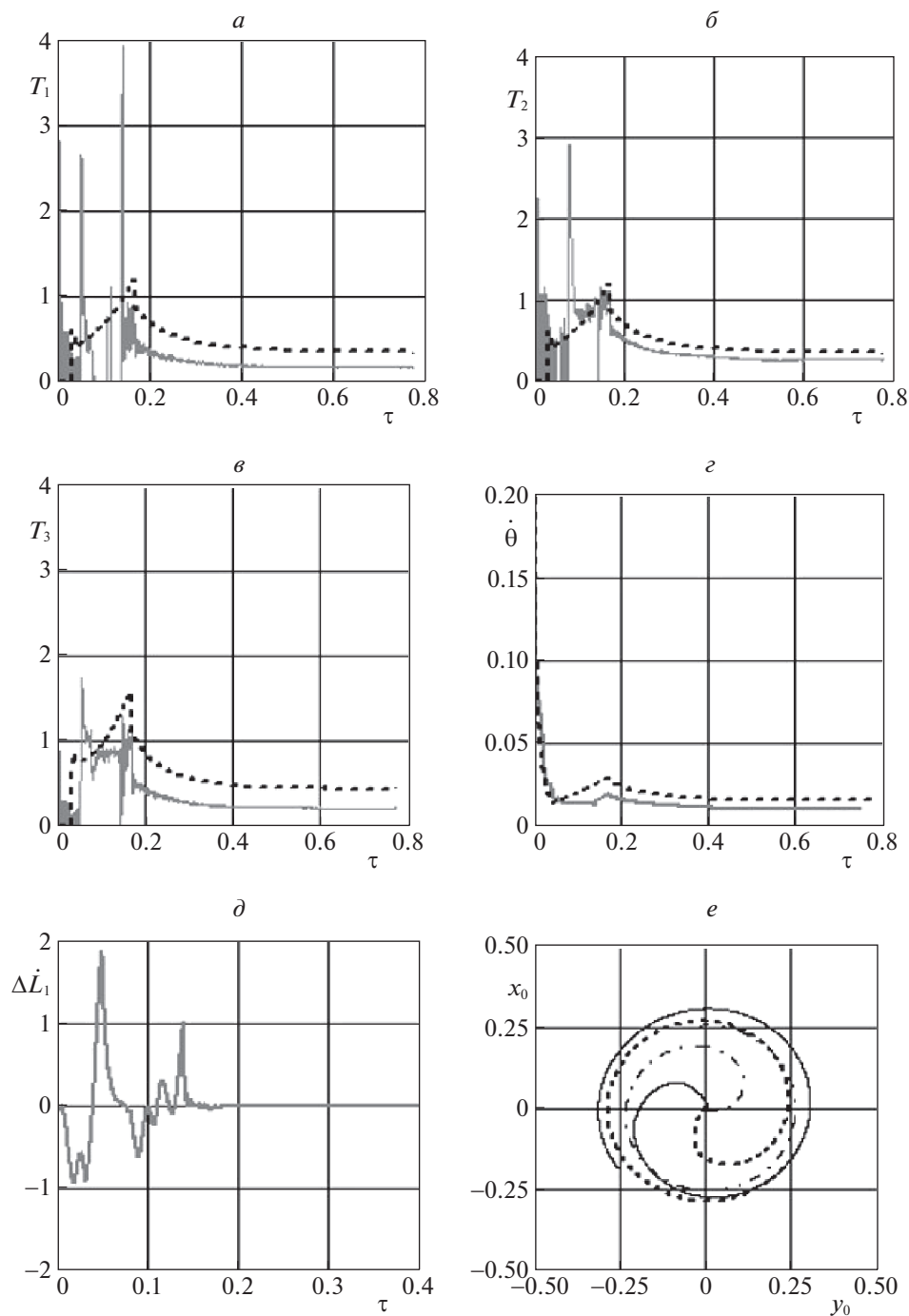


Рис. 6. Изменение характерных параметров движения тросовой группировки в возмущенном случае

группировки микроспутников в неподвижной геоцентрической системе координат, позволяющая оценить влияние на процесс разворачивания растяжимости тросов, односторонности механических связей и угловых колебаний микроспутников относительно направлений тросов. Численные результаты моделирования движения тросовой группировки в геоцентрической системе координат подтвердили возможность использования предложенной программы управления для формирования вращающейся треугольной тросовой группировки микроспутников на орбите. Показано, что наличие малых возмущений в исходных данных и массово-инерционной асимметрии микроспутников не оказывает существенного влияния на процесс формирования тросо-

вой группировки, в частности, амплитуды угловых колебаний спутников относительно направлений тросов остаются ограниченными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bainum P.M., Harkness R.E., Stuive W.* Attitude Stability and Damping of a Tethered Orbiting Interferometer Satellite System // *J. Astronaut. Sci.* 1972. V. 19. № 5. P. 364–389.
2. *Breakwell J.V., Andeen G.B.* Dynamics of a Flexible Passive Space Array // *J. Spacecraft Rockets.* 1977. V. 14. № 9. P. 556–561.
3. *Chobotov V.A.* Gravitationally Stabilized Solar Sower Station in Orbit // *J. Spacecraft Rockets.* 1977. V. 14. № 4. P. 249–251.
4. *Misra A.K., Diamond G.S.* Dynamics of a Subsatellite System Support by Two Tether // *J. Guid. Control Dynam.* 1986. V. 9. № 1. P. 12–16.
5. *Лукьянов А.В.* Пленочные отражатели в космосе. М.: Изд-во МГУ, 1977. 69 с.
6. *Ван Ч., Заболотнов Ю.М.* Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 1. С. 21–43.
7. *Bekey I.* Tethers Open New Space Options // *J. Astronautics Aeronautics.* 1983. V. 21. P. 32–40.
8. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
9. *Misra A.K., Pizzaro-Chong A.* Dynamics of Tethered Satellites in a Hub-spoke Formation // *Adv. Astronaut. Sci.* 2004. V. 117. P. 219–229.
10. *Pizzaro-Chong A., Misra A.K.* Dynamics of Multi-tethered Satellite Formations Containing a Parent Body // *Acta Astronaut.* 2008. V. 63. P. 1188–1202.
11. *Kumar K.D., Yasaka T.* Rotating Formation Flying of Three Satellites Using Tethers // *J. Spacecraft Rockets.* 2004. V. 41. № 6. P. 973–985.
12. *Kim M., Hall C.D.* Control of a Rotating Variable-length Tethered System // *J. Guid. Control Dynam.* 2004. V. 27. № 5. P. 849–858.
13. *Williams P.* Optimal Deployment/retrieval of a Tethered Formation Spinning in the Orbital Plane // *J. Spacecraft Rockets.* 2006. V. 43. № 3. P. 638–650.
14. *Cai Z., Li X., Wu Z.* Deployment and Retrieval of a Rotating Triangular Tethered Satellite Formation Near Libration Points // *Acta Astronaut.* 2014. V. 98. P. 37–49.
15. *Cai Z., Li X., Zhou H.* Nonlinear Dynamics of a Rotating Triangular Tethered Satellite Formation Near Libration Points // *Aerosp. Sci. Technol.* 2015. V. 42. P. 384–391.
16. *Su B., Zhang F., Huang P.* Robust Control of Triangular Tethered Satellite Formation with Unmeasured Velocities // *Acta Astronaut.* 2021. V. 186. P. 190–202.
17. *Chen S., Li A., Wang C.* Analysis of the Deployment of a Three-mass Tethered Satellite Formation // *International Workshop on Navigation and Motion Control (NMC 2020)* // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Samara. 2020. V. 984. C. 012–028.
18. *Zabolotnov Yu.M.* Control of the Deployment of an Orbital Tether System that Consists of Two Small Spacecraft // *Cosmic Res.* 2017. V. 55. № 3. P. 224–233.
19. *Шолов А.А.* Оптимальная коррекция матрицы направляющих косинусов при расчетах вращения твердого тела // *Уче. зап. ЦАГИ.* 1977. Т. 8. № 5. С. 137–139.

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОМПЕНСАЦИИ НЕГЛАДКИХ АДДИТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

© 2023 г. В. И. Максимов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 14.09.2022 г.

После доработки 24.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Обсуждается задача управления по принципу обратной связи нелинейной по фазовым переменным системой обыкновенных дифференциальных уравнений, подверженной влиянию неизвестного негладкого возмущения. Суть задачи состоит в построении закона формирования управляющего воздействия, гарантирующего компенсацию негладкого возмущения, а именно гарантирующего отслеживание фазовой траекторией (а также скоростью ее изменения) заданной системы, предписанной фазовой траектории (а также скорости ее изменения) при любой допустимой реализации возмущения. Рассмотрены два случая. В первом случае допустимые возмущения стеснены мгновенными ограничениями, а во втором допустимым возмущением может быть всякая функция, являющаяся элементом пространства измеримых по Лебегу функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы. Задача решается в условиях неточного измерения в дискретные моменты времени фазовых состояний обеих систем. При наличии мгновенных ограничений на возмущения задача решается также и при измерении части фазовых состояний. Сконструированы устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы решения указанной задачи, ориентированные на компьютерную реализацию. Приводятся оценки скорости сходимости алгоритмов.

DOI: 10.31857/S0002338823020129, EDN: JCRYNA

0. Введение. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u(t) - v(t), \quad t \in T = [0, \vartheta] \quad (0.1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (0.2)$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^N$ — фазовый вектор системы, $u \in \mathbb{R}^N$ — управление, $v \in \mathbb{R}^N$ — возмущение, $f(t, y)$ — некоторая функция. В дальнейшем решение системы (0.1) с начальным условием (0.2) обозначается символом $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$. Следуя теории гарантированного управления, восходящей к работам Н.Н. Красовского и его школы, возмущение в системе (0.1) записываем со знаком минус.

Предполагается, что на систему (0.1) оказывают воздействие неизвестное возмущение $v(\cdot) \in V(\cdot)$, а также подлежащее формированию управление $u(\cdot)$. Здесь $V(\cdot)$ означает множество допустимых возмущений. В работе рассмотрим два случая. В первом случае положим, что множество допустимых возмущений стеснено мгновенными ограничениями, т.е. $V(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}$, где $P \subset \mathbb{R}^N$ — известный априори выпуклый компакт, а во втором случае такие ограничения отсутствуют, при этом $V(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N)$. Здесь и ниже “п.в.” означает “почти всех”. В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряются фазовые состояния системы $x(\tau_i) = x(\tau_i; 0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$. Эти состояния измеряются с ошиб-

кой. В результате дискретных измерений траектории системы (0.1) находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$, такие, что

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_N \leq h. \quad (0.3)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения, $|\cdot|_N$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^N$. Функция f предполагается неизвестной. Известно лишь, что она липшицева по совокупности переменных с постоянной Липшица L .

Обсуждаемая в работе задача состоит в компенсации возмущения. Иными словами, задача заключается в построении алгоритма формирования такого управления $u(\cdot)$ по принципу обратной связи (со значениями в $V(\cdot)$), что фазовая траектория системы (0.1) $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ отслеживает фазовую траекторию системы того же вида, но с нулевыми управлением и возмущением, в метрике пространства $W(T; \mathbb{R}^N) = \{p(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^N) : \dot{p}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)\}$. Последняя задается следующим образом:

$$|p(\cdot)|_{W(T; \mathbb{R}^N)} = (\max_{t \in T} |p(t)|_N^2 + |\dot{p}(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2)^{1/2}.$$

Следовательно, управление $u(\cdot)$ должно быть сконструировано так, чтобы расстояние от фазовой траектории системы (0.1) до фазовой траектории системы

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in T, \quad (0.4)$$

с начальным состоянием $y(0) = y_0$, $|y_0 - x_0|_N \leq h$, в метрике пространства $W(T; \mathbb{R}^N)$ было мало при малых δ и h , какова бы ни была реализация возмущения $v(\cdot) \in V(\cdot)$. Так как функция f неизвестна, то решение системы (0.4) также неизвестно. Будем предполагать, что в моменты τ_i , $i \in \overline{0, m-1}$, становятся известны (приблизленно) состояния $y(\tau_i)$. Именно в результате дискретных измерений траектории системы (0.4) становятся известными векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^N$, такие, что

$$|y(\tau_i) - \psi_i^h|_N \leq h. \quad (0.5)$$

Управление $u(\cdot)$ в системе (0.1) будем строить в форме обратной связи:

$$u(t) = u^h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in \overline{0, m-1}.$$

При наличии мгновенных ограничений на возмущения также рассмотрим случай измерения части координат фазового вектора. При этом будем предполагать, что приведенная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x(t)) + u(t) - v(t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Здесь x_1 — вектор размерности n_1 , x_2, u и v — вектора размерности n_2 , $n_1 + n_2 = N$, $x = \{x_1, x_2\}$. Множество ограничений на возмущения (и управления) $V(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n_2}) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}$, где $P \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — выпуклый компакт. В этом случае будем считать, что в моменты τ_i измеряются координаты $x_1(\tau_i)$, а также координаты $y_1(\tau_i)$ системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= f_1(t, y(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(t, y(t)), \end{aligned}$$

где $y = \{y_1, y_2\}$. В результате измерений находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $\psi_i^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, такие, что

$$|x_1(\tau_i) - \xi_i^h|_{n_1} \leq h, \quad |y_1(\tau_i) - \psi_i^h|_{n_1} \leq h. \quad (0.7)$$

Управляемые системы довольно часто подвержены влиянию неизвестных неконтролируемых возмущений. Одним из важных разделов математической теории управления является теория управления по принципу обратной связи, которая ориентирована на создание алгоритмов формирования управляющих элементов в условиях внешних воздействий. Классическая задача этой теории — задача слежения [1–6]. При решении этой задачи, как правило, управляемой динамической системе необходимо обеспечить заданное качество процесса, в частности отслеживание

предписанной или, как иногда говорят, эталонной траектории. Решение подобной задачи усложняется, когда параметры системы известны неточно или она подвержена воздействию неизвестных возмущений. В последние годы возникло значительное число подходов, ориентированных на исследование подобных систем. В случае, когда неизвестные воздействия трактуются как воздействия, формируемые противоборствующей стороной, задачи управления исследуются в рамках теории дифференциальных игр. Среди других подходов, позволяющих конструировать системы управления, которые компенсируют внешние ограниченные возмущения, можно отметить теорию робастного управления [7], метод матричных неравенств [8], метод гарантированного управления [9], метод управления, основанный на наблюдении за возмущением (disturbance-observer-based control – DOBC-метод) [10], метод активного подавления возмущений (active disturbance rejection control – ADRC-метод) [11] и т.д.

В работе для решения задачи компенсации (подавления) возмущений будем применять подход, основанный на конструкциях теории управления по принципу обратной связи, которые используют элементы локальной регуляризации при формировании компенсирующих управляющих воздействий (см., например, работы [12–15], в которых локальная регуляризация привлекалась для решения задач восстановления входных воздействий). Впервые применение этой теории для решения исследуемой нами задачи в случае, когда система описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и измеряются в дискретные моменты времени все ее фазовые координаты, было приведено в работе [16]. При этом существенную роль играло представление решения в форме Коши. В настоящей статье, продолжающей исследование [16], рассматривается нелинейная по фазовым переменным система. Кроме того, наряду с измерением всех фазовых координат, также приведем случай измерения части координат.

Для каждого $h \in (0, 1)$ фиксируем семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0, 1). \quad (0.8)$$

В дальнейшем символы $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c_0, c_1, \dots, k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k_1, k_2, \dots$ означают положительные постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

1. Алгоритмы решения. Случай мгновенных ограничений на возмущения. Сначала укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи для системы (0.1) в случае, когда измеряются все фазовые координаты. Зафиксируем некоторое семейство Δ_h (0.8) разбиений отрезка T , а также функцию $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

До начала работы алгоритма фиксируются величины $h \in (0, 1)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (0.8). Работа алгоритма (при фиксированном h) разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются вектора u_i^h и $\tilde{u}_i^h$ по формулам

$$u_i^h = \arg \min \{2(\xi_i^h - \psi_i^h, u)_N + \alpha |u|_N^2 : u \in P\}, \quad \tilde{u}_i^h = 2L(\psi_i^h - \xi_i^h). \quad (1.1)$$

Здесь символ $(\cdot, \cdot)_N$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^N$. Затем на вход системы (0.1) подается управление $u_h(t)$ следующего вида:

$$u_h(t) = u^h(t) + \tilde{u}^h(t), \quad t \in \delta_i, \quad (1.2)$$

где

$$u^h(t) = u_i^h, \quad \tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_i^h \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \quad (1.3)$$

Под действием этого управления, а также реализации неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$ система (0.1) переходит из состояния $x^h(\tau_i)$ в состояние $x^h(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x^h(\tau_i), u_h(\cdot), v(\cdot))$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Оказывается, что при определенном согласовании величин h , $\delta(h)$ и $\alpha(h)$ управление $u_h(\cdot)$ решает рассматриваемую задачу.

Л е м м а 1. Можно указать такое $h_1 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_1)$, $t \in T$, справедливы неравенства

$$\max_{i \in 0, m_h} \varepsilon(\tau_i) \leq d_1 \{\alpha + \delta + h\}, \quad (1.4)$$

$$\int_0^{\vartheta} \|u^h(\tau)\|_N^2 d\tau \leq \int_0^{\vartheta} \|v(\tau)\|_N^2 d\tau + d_2(h + \delta)\alpha^{-1}, \quad (1.5)$$

где $\varepsilon(t) = \|x^h(t) - y(t)\|_N^2$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, d_1 и d_2 — положительные постоянные.

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

С помощью леммы 1 аналогично теореме 2 из работы [16] доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость $x^h(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$ в $W(T; \mathbb{R}^N)$ при $h \rightarrow 0$.

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости алгоритма. Для ее обоснования нам потребуется следующая лемма.

Л е м м а 2 [5, с. 29]. Пусть $x_1(\cdot) \in L_\infty(T_*; \mathbb{R}^n)$, $y_1(\cdot) \in AC(T_*; \mathbb{R}^n)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t x_1(\tau) d\tau \right|_n \leq \varepsilon, \quad |y_1(t)|_n \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ верно неравенство

$$\left| \int_a^t (x_1(\tau), y_1(\tau))_n d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T_*; y_1(\cdot))).$$

Здесь символ $\text{var}(T_*; y_1(\cdot))$ означает вариацию функции $y_1(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $AC(T_*; \mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Л е м м а 3. Пусть $v(\cdot) \in AC(T; \mathbb{R}^N)$. Пусть также выполнены условия теоремы 1. Тогда при $h \in (0, h_1)$ имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\|x^h(\cdot) - y(\cdot)\|_{W(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq d_3 \{\alpha^{1/2} + \delta^{1/2} + h^{1/2} + (h + \delta)\alpha^{-1}\}, \quad (1.6)$$

где d_3 — положительная постоянная.

Доказательство леммы 3 приведено в Приложении.

Обратимся к измерению части фазовых координат. В этом случае для решения задачи нам потребуется ввести в контур управления системой (0.6) вспомогательный блок, цель которого восстанавливать по ходу развития процесса управления неизмеряемые координаты $x_2(t)$ и $y_2(t)$. Этот блок содержит две вспомогательные управляемые системы и законы V и $\tilde{V}$ формирования управлений $v^h(\cdot)$ и $\tilde{v}^h(\cdot)$ этими системами. Динамика систем описывается векторными дифференциальными уравнениями

$$\dot{w}_1^h(t) = v^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_1^h, v^h \in \mathbb{R}^{n_1}) \quad (1.7)$$

и

$$\dot{w}_2^h(t) = \tilde{v}^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_2^h, \tilde{v}^h \in \mathbb{R}^{n_2}) \quad (1.8)$$

с начальными условиями $w_1^h(t_0) = \xi_0^h$, $w_2^h(t_0) = \psi_0^h$ и управлениями $v^h(\cdot)$ и $\tilde{v}^h(\cdot)$, которые находятся по принципу обратной связи:

$$\begin{aligned} v^h(t) &= v_i^h = V(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)), \\ \tilde{v}^h(t) &= \tilde{v}_i^h = \tilde{V}(\tau_i, \psi_i^h, w_2^h(\tau_i)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь ξ_i^h — результат измерения координаты $x_1(\tau_i)$, ψ_i^h — результат измерения координаты $y_1(\tau_i)$ (см. (0.7)). Законы $V(\cdot, \cdot, \cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\tilde{V}(\cdot, \cdot, \cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ конструируются таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta(h)$ управления $v^h(\cdot)$ и $\tilde{v}^h(\cdot)$, стоящие в правых частях систем (1.7) и (1.8) соответственно, позволяют с помощью некоторых отображений $U_1 : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $U_2 : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сконструировать функции $q_1^h(\cdot)$ и $q_2^h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} q_1^h(t) &= q_{1i}^h = U_1(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h), \\ q_2^h(t) &= q_{2i}^h = U_2(\tau_i, \psi_i^h, \tilde{v}_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in \overline{0, m_h - 1}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

являющиеся приближениями (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемых частей фазовых траекторий $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, а именно $x_2(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$. Управление $u = u^h(\cdot)$ в системе (0.6) находится по тому же правилу, что и в случае измерения всех фазовых координат. При этом ξ_i^h и ψ_i^h заменяются на q_{1i}^h и q_{2i}^h (см. (1.2), (1.3)).

Итак, перейдем к описанию алгоритма решения. Возьмем некоторое семейство Δ_h (0.8), а также две функции $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и $\alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — область, в которой остаются первые n_1 фазовых координат решений системы (0.1), порожденных всевозможными $u(\cdot) \in V(\cdot)$ и $v(\cdot) \in \tilde{V}(\cdot)$, т.е.

$$x_1(t) = x_1(t; 0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in M \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Пусть также $y_1(t) \in M$ при всех $t \in T$.

В дальнейшем полагаем, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е. В области $T \times M$ функция $x_2 \rightarrow F = f_1(t, x_1, x_2)$ имеет обратную $x_2 = f_{1x_2}^{-1}(t, x_1, F)$, которая является липшицевой функцией по совокупности переменных с постоянной Липшица L . Кроме того, функция f_1 имеет производные по каждому аргументу, и справедливо включение $\ddot{x}_1(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$, числа $\alpha_1 = \alpha_1(h)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (0.8). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются векторы v_i^h , q_{1i}^h , $\tilde{v}_i^h$, q_{2i}^h по формулам (1.9), (1.10), в которых

$$\begin{aligned} V(\tau_i, \xi_i^h, w_1^h(\tau_i)) &= -\alpha^{-1}(h)[w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h + \tau_i f_1(0, x_0)], \\ \tilde{V}(\tau_i, \psi_i^h, w_2^h(\tau_i)) &= -\alpha^{-1}(h)[w_2^h(\tau_i) - \psi_i^h + \tau_i f_1(0, y_0)], \\ U_1(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h) &= f_{1x_2}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h + f_1(0, x_0)), \\ U_2(\tau_i, \psi_i^h, \tilde{v}_i^h) &= f_{1x_2}^{-1}(\tau_i, \psi_i^h, \tilde{v}_i^h + f_1(0, y_0)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В свою очередь векторы u_i^h и $\tilde{u}_i^h$ находятся по формулам

$$u_i^h = \arg \min \{2(q_{1i}^h - q_{2i}^h, u)_{n_2} + \alpha_1(h)|u|_{n_2}^2 : u \in P\}, \quad \tilde{u}_i^h = 2L(q_{2i}^h - q_{1i}^h). \quad (1.12)$$

Затем на вход системы (1.7) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $v^h(t)$ вида (1.9), (1.11), на вход системы (1.8) — управление $\tilde{v}^h(t)$ вида (1.9), (1.11), а на вход системы (0.6) — управление $u_h(t)$ вида (1.2), (1.3), (1.12). Под действием этих управлений решение системы (1.7) переходит из состояния $w_1^h(\tau_i)$ в состояние $w_1^h(\tau_{i+1})$, решение системы (1.8) — из состояния $w_2^h(\tau_i)$ в состояние $w_2^h(\tau_{i+1})$, а решение системы (0.6) — из состояния $x^h(\tau_i)$ в состояние $x^h(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x^h(\tau_i), u_h(\cdot), v(\cdot))$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Символом $x^h(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0, u_h(\cdot), v(\cdot))$ обозначим решение системы (0.6), порожденное неизвестным возмущением $v(\cdot)$ и управлением $u_h(\cdot)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\alpha_1(h) \rightarrow 0$, $\delta(h) \rightarrow 0$, $(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0$, $(h + \delta(h))\alpha(h)^{-1}\alpha_1^{-1}(h) \rightarrow 0$, $\alpha(h)\alpha_1^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость

$$x^h(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0, u_h(\cdot), v(\cdot)) \rightarrow y(\cdot) \quad \text{в } W(T; \mathbb{R}^N) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Если $v(\cdot) \in AC(T; \mathbb{R}^{n_2})$, то верна оценка скорости сходимости алгоритма

$$\|x^h(\cdot) - y(\cdot)\|_{W(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq d_4 \{\alpha_1^{1/2} + \delta^{1/2} + (\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1})^{1/2} + [\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1} + \delta]\alpha_1^{-1}\}, \quad (1.14)$$

где d_4 — положительная постоянная, $\alpha = \alpha(h)$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е. Как видно из формулы (1.1) (см. также формулу (1.12) в случае измерения части фазовых координат), разрешающее управление $u_h(\cdot)$ состоит из двух слагаемых $u^h(\cdot)$ и $\tilde{u}^h(\cdot)$. При этом первое слагаемое при всех $t \in T$ принимает значения из множества мгновенных ограничений P . В свою очередь второе слагаемое в силу неравенства (1.4) (см. также неравенство (П.16) в случае измерения части координат) обладает следующим свойством:

$$\sup_{t \in T} |\tilde{u}^h(t)|_N \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Таким образом, каково бы ни было малое число $\nu > 0$, можно указать (в явном виде) такое число $h_\nu \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_\nu)$ и всех $t \in T$ управление $u_h(t)$ будет оставаться в ν -окрестности множества P .

2. Алгоритм решения. Случай отсутствия ограничений на возмущения. Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи при отсутствии ограничений на возмущения, т.е. при $u(\cdot) \in V(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Как и в случае наличия мгновенных ограничений на возмущения выберем некоторое семейство Δ_h (0.8) разбиений отрезка T , а также функцию $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

До начала работы алгоритма фиксируются величины $h \in (0, 1)$, $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ вида (0.8). Работа алгоритма разбивается $m - 1$, $m = m_h$, однотипных шагов. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , вычисляются вектора u_i^h и $\tilde{u}_i^h$ по формулам

$$u_i^h = \alpha^{-1}(\psi_i^h - \xi_i^h), \quad \tilde{u}_i^h = 2L(\psi_i^h - \xi_i^h). \quad (2.1)$$

Затем на вход системы (0.1) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u_h(t)$ вида (1.2), (1.3). Под действием этого управления и реализующегося неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$ система (0.1) переходит из состояния $x^h(\tau_i) = x(\tau_i; 0, x_0, u_h(\cdot), v(\cdot))$ в состояние $x^h(\tau_{i+1}) = x^h(\tau_{i+1}; \tau_i, x^h(\tau_i), u_h(\cdot), v(\cdot))$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ .

Имеют место следующие утверждения.

Л е м м а 4. Можно указать такое число $d_0 > 0$, что равномерно по всем $t \in T$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \|\dot{x}(s; x_0, u(\cdot))\|_N^2 ds \leq d_0 \left(\|x_0\|_N^2 + \int_0^t \|u(s)\|_N^2 ds \right).$$

Здесь $x(\cdot; x_0, u(\cdot))$ — решение системы (0.1) с начальным состоянием (0.2), порожденное $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$ при нулевом возмущении $v(\cdot)$.

Л е м м а 5. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда можно указать такое $h_2 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_2)$, $t \in T$, справедливы неравенства

$$\max_{i \in 0, m_h} \varepsilon(\tau_i) \leq d_5 \{\alpha + \delta + h^2 \delta^{-1}\}, \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq \{1 + d_6 \delta \alpha^{-2}\} \int_0^{\vartheta} |v(\tau)|_N^2 d\tau + d_7 \{h^2 (\alpha \delta)^{-1} + \delta \alpha^{-1}\}, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon(t) = |x^h(t) - y(t)|_N^2$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, d_5, d_6, d_7 — положительные постоянные.

Доказательство леммы 5 приведено в Приложении.

С помощью леммы 5 может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия леммы 5. Пусть также $h^2(\alpha(h)\delta(h))^{-1} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость $x^h(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$ в $W(T; \mathbb{R}^N)$ при $h \rightarrow 0$.

Укажем оценку скорости сходимости алгоритма.

Л е м м а 6. Пусть $v(\cdot) \in AC(T; \mathbb{R}^N)$. Пусть также выполнены условия теоремы 2. Тогда при $h \in (0, h_2)$ имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$|x^h(\cdot) - y(\cdot)|_{W(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq d_8 \{\alpha^{1/2} + \delta^{1/2} \alpha^{-1} + h \delta^{-1/2} + h^2 (\alpha \delta)^{-1}\}, \quad (2.4)$$

где d_8 — положительная постоянная.

Доказательство леммы 6 приведено в Приложении.

Заключение. Предложены алгоритмы устойчивого к информационным помехам и погрешностям вычислений решения задачи компенсации негладких возмущений, действующих на управляемую систему дифференциальных уравнений нелинейных по фазовой переменной. Алгоритмы позволяют строить разрешающие управления путем подходящей локальной регуляризации метода экстремального сдвига. При этом управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи по результатам дискретных измерений (с ошибкой) фазовых состояний системы. Рассмотрены случаи как наличия мгновенных ограничений на возмущения, так и отсутствия таковых. Установлены оценки скорости сходимости алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon(t)$, $t \in T$. При п.в. $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ и всех $i \in \overline{0, m-1}$, $m = m_h$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t)/dt &= 2(x^h(t) - y(t), f(t, x^h(t)) - f(t, y(t)) + u_i^h - v(t) + 2L(\psi_i^h - \xi_i^h))_N \leq \\ &\leq 2L\varepsilon(t) + 2(x^h(t) - y(t), u_i^h - v(t) + 2L(\psi_i^h - \xi_i^h))_N \leq 2L\varepsilon(t) + \sum_{j=1}^5 I_{ji}(t), \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где

$$I_{1i}(t) = 2(\xi_i^h - \psi_i^h, u_i^h - v(t))_N,$$

$$I_{2i}(t) = 4h\|u_i^h\|_N + |v(t)|_N\},$$

$$I_{3i}(t) = 2\{\|u_i^h\|_N + |v(t)|_N\} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_N ds,$$

$$I_{4i}(t) = 8Lh|x^h(t) - y(t)|_N, \quad (\text{П.2})$$

$$I_{5i}(t) = -8L(x^h(t) - y(t), x^h(\tau_i) - y(\tau_i))_N. \quad (\text{П.3})$$

Из (П.1) следует неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + 2L \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(s) ds + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{j=1}^5 I_{ji}(s) ds. \quad (\text{П.4})$$

Далее, воспользовавшись неравенством Юнга $(2^{-1/2}a)(2^{1/2}b) \leq b^2 + a^2/4$ ($a > 0, b > 0$), заключаем, что при $t \in \delta_i$ справедливы неравенства

$$I_{4i}(t) \leq 8L\varepsilon(t) + 8Lh^2, \quad (\text{П.5})$$

$$I_{5i}(t) \leq -8L\varepsilon(t) + 8L\varepsilon(t)^{1/2} \int_{\tau_i}^t \{\dot{x}^h(s)|_N + |\dot{y}(s)|_N\} ds \leq -4L\varepsilon(t) + c^{(1)}\delta^2. \quad (\text{П.6})$$

В свою очередь, учитывая правило определения u_i^h (см. (1.1)), делаем вывод, что имеет место неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [I_{1i}(t) + \alpha \{ \|u_i^h\|_N^2 - |v(t)|_N^2 \}] dt \leq 0. \quad (\text{П.7})$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{2i}(t) dt \leq c^{(2)} h \delta. \quad (\text{П.8})$$

Далее, имеем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{3i}(t) dt \leq c^{(3)} \delta^2. \quad (\text{П.9})$$

Из (П.4), учитывая (П.5)–(П.9), получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} \{ \|u^h(s)\|_N^2 - |v(s)|_N^2 \} ds \leq \varepsilon(0) + c^{(4)}(h + \delta), \quad i \in \overline{0, m-1}. \quad (\text{П.10})$$

Неравенства (1.4) и (1.5) следуют из (П.10). Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in \delta_i$ справедливо неравенство

$$\dot{\varepsilon}(t) \leq 2L\varepsilon(t) + I_{4i}(t) + I_{5i}(t) + I_{6i}(t), \quad (\text{П.11})$$

где $I_{4i}(t)$ и $I_{5i}(t)$ определены, согласно (П.2) и (П.3) соответственно:

$$I_{6i}(t) = 2(x^h(t) - y(t), u_i^h - v(t))_N.$$

Заметим, что при $t \in \delta_i$

$$\left| \int_{\tau_i}^t I_{6i}(s) ds \right|_N \leq \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + 2\tilde{I}_{2i}, \quad (\text{П.12})$$

где

$$\tilde{I}_{2i} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ \|u_i^h\|_N^2 + |v(s)|_N^2 \} ds.$$

Кроме того, при $t \in \delta_i$

$$\left| \int_{\tau_i}^t \{ I_{4i}(s) + I_{5i}(s) \} ds \right|_N \leq \varepsilon(\tau_i) + 8L^2 \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + h^2 + k^{(0)}\delta^2. \quad (\text{П.13})$$

Из (П.11) ввиду (П.12) и (П.13) получаем верную при всех $t \in \delta_i$ оценку

$$\varepsilon(t) \leq 2\varepsilon(\tau_i) + (1 + 2L + 8L^2) \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + h^2 + 2\tilde{I}_{2i} + k^{(0)}\delta^2.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, отсюда выводим неравенство

$$\varepsilon(t) \leq (2\varepsilon(\tau_i) + h^2 + 2\tilde{I}_{2i}) \exp\{(1 + 2L + 8L^2)(t - \tau_i)\}, \quad t \in \delta_i. \quad (\text{П.14})$$

Заметим, что

$$\tilde{I}_{2i} \leq k^{(1)}\delta. \quad (\text{П.15})$$

Из (П.14), учитывая лемму 1 (см. (1.4)), а также неравенства (П.15), получаем справедливое при всех $t \in T$ неравенство

$$\varepsilon(t) \leq k^{(2)}(\alpha + \delta + h). \quad (\text{П.16})$$

Следовательно, ввиду условий настоящей леммы из (П.16) вытекает цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \{u^h(s) - v(s)\} ds \right|_N &\leq k^{(3)} \left| \int_0^t \{\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s) - f(s, x^h(s)) + f(s, y(s)) - 2L(\xi^h(s) - \psi^h(s))\} ds \right|_N \\ &\leq k^{(3)} \left\{ \varepsilon^{1/2}(t) + \varepsilon^{1/2}(0) + L \int_0^t \varepsilon^{1/2}(s) ds + 4tLh + 2tL \max_{i \in \overline{0, m-1}} \varepsilon^{1/2}(\tau_i) \right\} \leq k^{(4)} \{\alpha + \delta + h\}^{1/2}, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

где $\xi^h(s) = \xi_i^h$, $\psi^h(s) = \psi_i^h$ при $s \in \delta_i$, $i \in \overline{0, m-1}$. Далее, в силу леммы 1 (см. (1.5)), имеет место оценка

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(s) - v(s)|_N^2 ds \leq 2 \int_0^{\vartheta} (v(s) - u^h(s), v(s))_N ds + \int_0^{\vartheta} |v(s)|_N^2 ds + d_2(h + \delta)\alpha^{-1}. \quad (\text{П.18})$$

В свою очередь из (П.17), в силу леммы 2, вытекает неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (u^h(s) - v(s), v(s))_N ds \right| \leq k^{(5)} \{\alpha + \delta + h\}^{1/2}. \quad (\text{П.19})$$

Неравенство (1.6) следует из неравенств (П.18), (П.19), а также неравенств

$$\begin{aligned} |x^h(\cdot) - y(\cdot)|_{W(T; \mathbb{R}^N)} &\leq k^{(6)} \{|u^h(\cdot) - v(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} + |\tilde{u}^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}\}, \\ |\tilde{u}^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} &\leq k^{(7)} \{\alpha + \delta + h\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из результата [17, лемма 2] следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} |q_1^h(\cdot) - x_2^h(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} &\leq c_1(\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}), \\ |q_2^h(\cdot) - y_2(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} &\leq c_2(\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

Теперь, повторив доказательство леммы 1, в котором заменяем h на $\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}$, получим неравенства

$$\begin{aligned} \max_{i \in \overline{0, m_h}} \varepsilon(\tau_i) &\leq c_3(\alpha_1 + \alpha + (h + \delta)\alpha^{-1} + \delta), \\ \int_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_n^2 d\tau &\leq \int_0^{\vartheta} |v(\tau)|_n^2 d\tau + c_4[\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1} + \delta]\alpha_1^{-1}. \end{aligned}$$

Сходимость (1.13) доказывается аналогично теореме 2 из [16]. Оценка (1.14) устанавливается аналогично оценке (1.6) при замене h на $\alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}$, а также α на α_1 соответственно. Теорема доказана.

Доказательство леммы 5. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon(t)$ при $t \in T$. Для $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in \overline{0, m-1}$, справедливо неравенство (П.1), из которого в свою очередь вытекает неравенство (П.4). Далее, воспользовавшись неравенством Юнга, заключаем, что при $t \in \delta_i$ справедливы неравенства

$$I_{4i}(t) \leq \varepsilon(t) + 32Lh^2, \quad (\text{П.20})$$

$$I_{5i}(t) \leq -4L\varepsilon(t) + 4L\varepsilon^{1/2}(t) \int_{\tau_i}^t \{|\dot{y}^h(s)|_N + |\dot{y}(s)|_N\} ds \leq -3L\varepsilon(t) + 16L\tilde{I}_{li}, \quad (\text{П.21})$$

где

$$\tilde{I}_{li} = \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\dot{x}^h(s)|_N^2 + |\dot{y}(s)|_N^2\} ds.$$

Учитывая правило определения u_i^h (см. (2.1)), делаем вывод, что имеет место неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [I_{li}(t) + \alpha \{ |u_i^h|_N^2 - |v(t)|_N^2 \}] dt \leq 0. \quad (\text{П.22})$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{2i}(t) dt \leq c_0 h^2 + \tilde{I}_{2i}, \quad (\text{П.23})$$

где

$$\tilde{I}_{2i} = \delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ |u_i^h|_N^2 + |v(t)|_N^2 \} dt. \quad (\text{П.24})$$

В свою очередь в силу (0.3), (2.1) верно неравенство

$$|u_i^h|_N \leq \alpha^{-1} c_1 (h + \varepsilon^{1/2}(\tau_i)). \quad (\text{П.25})$$

Поэтому

$$\delta \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(s)|_N^2 ds \leq 2\delta^2 \alpha^{-2} c_1^2 (h^2 + \varepsilon(\tau_i)). \quad (\text{П.26})$$

Ввиду (П.26) справедлива оценка

$$\delta \int_0^{\tau_{i+1}} |u^h(s)|_N^2 ds \leq 2\delta^2 \alpha^{-2} c_1^2 \left(\sum_{j=0}^i \varepsilon(\tau_j) + \vartheta h^2 \delta^{-1} \right). \quad (\text{П.27})$$

Учитывая (П.27), получаем

$$\sum_{j=0}^i \tilde{I}_{2j} \leq \delta \int_0^{\tau_{i+1}} |v(s)|_N^2 ds + 2\vartheta c_1^2 \delta h^2 \alpha^{-2} + 2c_1^2 \delta^2 \alpha^{-2} \sum_{j=0}^i \varepsilon(\tau_j). \quad (\text{П.28})$$

Далее имеем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_{3i}(t) dt \leq 2\tilde{I}_{li} + 2\tilde{I}_{2i}. \quad (\text{П.29})$$

В силу леммы 4

$$\int_0^{\tau_i} \{\dot{x}^h(s)\|_N^2 + |\dot{y}(s)|_N^2\} ds \leq c_2 \left(1 + \int_0^{\tau_i} \{u^h(s)\|_N^2 + |v(s)|_N^2\} ds \right). \quad (\text{П.30})$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^i \tilde{I}_{1j} \leq c_3 \left(\delta + \sum_{j=0}^i \tilde{I}_{2j} \right).$$

В таком случае из (П.29), (П.30) следует неравенство

$$\sum_{j=0}^i \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} I_{3j}(s) ds \leq c_4 \delta + c_5 \sum_{j=0}^i \tilde{I}_{2j}. \quad (\text{П.31})$$

Таким образом, из (П.20), (П.21), (П.23), (П.28) и (П.31) получаем

$$\sum_{j=0}^i \sum_{k=2}^5 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} I_{kj}(t) dt \leq -2L\varepsilon(t) + c_6 h^2 \delta^{-1} + c_7 \delta + c_8 \left(\delta^2 \alpha^{-2} \sum_{j=0}^i \varepsilon(\tau_j) + \delta h^2 \alpha^{-2} \right). \quad (\text{П.32})$$

В свою очередь из (П.4), воспользовавшись (П.22) и (П.32), выводим оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} \{u^h(s)\|_N^2 - |v(s)|_N^2\} ds &\leq \varepsilon(0) + \\ &+ c_6 h^2 \delta^{-1} + c_7 \delta + c_8 \delta h^2 \alpha^{-2} + c_8 \delta^2 \alpha^{-2} \sum_{j=0}^i \varepsilon(\tau_j), \quad i \in \overline{0, m-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

В силу дискретного неравенства Гронуолла (см. [18, с. 312]) из (П.33) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} |u^h(s)\|_N^2 ds &\leq \\ &\leq \left\{ \varepsilon(0) + c_6 h^2 \delta^{-1} + c_7 \delta + c_8 \delta h^2 \alpha^{-2} + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} |v(s)|_N^2 ds \right\} \exp\{c_8(i+1)\delta^2 \alpha^{-2}\}. \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

Заметим, что

$$\varepsilon(0) \leq h^2, \quad \exp\{c_8(i+1)\delta^2 \alpha^{-2}\} \leq \exp\{c_8 \vartheta \delta \alpha^{-2}\}.$$

Кроме того, если $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то при $h \in (0, h_2)$, $h_2 \in (0, 1)$, имеют место неравенства

$$\exp\{c_8 \vartheta \delta \alpha^{-2}\} \leq 1 + c_9 \delta \alpha^{-2}, \quad \delta \alpha^{-2} \leq c_{10}, \quad (\text{П.35})$$

где $c_9 = c_9(h_2) > 0$, $c_{10} = c_{10}(h_2) > 0$. Значит, ввиду (П.34), (П.35) при $h \in (0, h_2)$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) + \alpha \int_0^{\tau_{i+1}} |u^h(s)\|_N^2 ds \leq \alpha(1 + c_{11} \delta \alpha^{-2}) \int_0^{\tau_{i+1}} |v(s)|_N^2 ds + c_{12} \{h^2 \delta^{-1} + \delta\}.$$

Неравенства (2.2) и (2.3) следуют из последнего неравенства. Лемма доказана.

Доказательство леммы 6. Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in \delta_i$ справедливо неравенство

$$\dot{\varepsilon}(t) \leq 2L\varepsilon(t) + I_{4i}(t) + I_{5i}(t) + I_{6i}(t), \quad (\text{П.36})$$

где $I_{4i}(t)$ и $I_{5i}(t)$ определены, согласно (П.2) и (П.3) соответственно:

$$I_{6i}(t) = 2(x^h(t) - y(t), u_i^h - v(t))_N.$$

Заметим, что при $t \in \delta_i$

$$\left| \int_{\tau_i}^t I_{6i}(s) ds \right|_N \leq \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + 2\delta^{-1} \tilde{I}_{2i}, \quad (\text{П.37})$$

где $\tilde{I}_{2i}$ найдены в (П.24). Кроме того, при $t \in \delta_i$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_i}^t I_{4i}(s) ds \right| &\leq L^2 \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + 16h^2, \\ \left| \int_{\tau_i}^t I_{5i}(s) ds \right| &\leq \varepsilon(\tau_i) + 16L^2 \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \int_{\tau_i}^t \{I_{4i}(s) + I_{5i}(s)\} ds \right|_N \leq \varepsilon(\tau_i) + 17L^2 \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + 16h^2. \quad (\text{П.38})$$

Из (П.36) ввиду (П.37) и (П.38) получаем верную при всех $t \in \delta_i$ оценку

$$\varepsilon(t) \leq 2\varepsilon(\tau_i) + (1 + 2L + 17L^2) \int_{\tau_i}^t \varepsilon(s) ds + 16h^2 + 2\delta^{-1} \tilde{I}_{2i}.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, отсюда выводим неравенство

$$\varepsilon(t) \leq (2\varepsilon(\tau_i) + 16h^2 + 2\delta^{-1} \tilde{I}_{2i}) \exp\{(1 + 2L + 17L^2)(t - \tau_i)\}, \quad t \in \delta_i. \quad (\text{П.39})$$

При $h \in (0, h_2)$ в силу ограниченности функции $v(\cdot)$ и неравенства (П.25) верны соотношения

$$\delta^{-1} \tilde{I}_{2i} \leq k_2 \delta + \delta |u_i^h|_N^2 \leq k_2 \delta + k_3 \delta \alpha^{-2} (h^2 + \varepsilon(\tau_i)) \leq k_4 \delta \alpha^{-2}. \quad (\text{П.40})$$

Из (П.39), учитывая лемму 5 (см. (2.2)), а также неравенства (П.40), получаем справедливое при всех $t \in T$ неравенство

$$\varepsilon(t) \leq k_1 (\alpha + \delta \alpha^{-2} + h^2 \delta^{-1}). \quad (\text{П.41})$$

Следовательно, ввиду условий настоящей леммы, из (П.41) следует цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \{u^h(s) - v(s)\} ds \right|_N &\leq k_5 \left| \int_0^t \{\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s) - f(s, x^h(s)) + f(s, y(s))\} ds - 2L(\xi^h(s) - \psi^h(s)) \right|_N \leq \\ &\leq k_5 \left\{ \varepsilon^{1/2}(t) + \varepsilon^{1/2}(0) + L \int_0^t \varepsilon^{1/2}(s) ds + 4tLh + 42tL \max_{i \in \overline{0, m-1}} \varepsilon^{1/2}(\tau_i) \right\} \leq \\ &\leq k_6 \{\alpha + \delta \alpha^{-2} + h^2 \delta^{-1}\}^{1/2}, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (\text{П.42})$$

где $\xi^h(s) = \xi_i^h$, $\psi^h(s) = \psi_i^h$ при $s \in \delta_i$, $i \in \overline{0, m-1}$. Далее, в силу леммы 5 (см. (2.3)) имеет место оценка

$$\int_0^{\vartheta} \|u^h(s) - v(s)\|_N^2 ds \leq 2 \int_0^{\vartheta} (v(s) - u^h(s), v(s))_N ds + d_4 \delta \alpha^{-2} \int_0^{\vartheta} \|v(s)\|_N^2 ds + d_5 \{h^2 (\alpha \delta)^{-1} + \delta \alpha^{-1}\}. \quad (\text{П.43})$$

В свою очередь, из (П.42) в силу леммы 2 вытекает неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (u^h(s) - v(s), v(s))_N ds \right| \leq k_7 \{\alpha + \delta \alpha^{-2} + h^2 \delta^{-1}\}^{1/2}. \quad (\text{П.44})$$

Неравенство (2.4) следует из неравенств (П.43) и (П.44), а также неравенства $\delta \alpha^{-1} \leq \delta^{1/2} \alpha^{-1}$. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
2. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
3. *Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5. С. 25–32.
4. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // АиТ. 2014. № 9. С. 45–64.
5. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 18–25.
6. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 993–1002.
7. *Поляк Б.Т., Шербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
8. *Баладин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе матричных неравенств. М.: Наука, 2007.
9. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
10. *Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H.* Disturbance-observer-based-control and Related Methods: an Overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2015. V. 63. № 2. P. 1083–1095.
11. *Zhao Z., Guo B.* A Nonlinear Extended State Observer Based on Fractional Power Functions // Automatica. 2017. V. 81. № 2. P. 286–296.
12. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потанов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд. МГУ, 1999.
13. *Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
14. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
15. *Maksimov V.I.* The Methods of Dynamical Reconstruction of an Input in a System of Ordinary Differential Equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29. № 1. P. 125–156.
16. *Maksimov V.I.* On the Stable Solution of a Problem of Disturbance Reduction // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2021. V. 31. № 2. P. 187–194.
17. *Максимов В.И.* Обратная связь в задаче слежения при измерении в дискретные моменты времени части координат фазового вектора // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 44–53.
18. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 629.78-004.023

ПОСЛЕПОЛЕТНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИНФОРМАЦИИ СОЛНЕЧНОГО ДАТЧИКА¹

© 2023 г. И. В. Белоконов^{a,*}, И. А. Ломака^{a,**}

^aСамарский университет, Самара, Россия

*e-mail: ibelokonov@mail.ru

**e-mail: igorlomaka63@gmail.com

Поступила в редакцию 17.08.2022 г.

После доработки 25.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Расширено использование разработанной технологии решения обратных задач параметрической идентификации вращательного движения космического аппарата по накопленной выборке измерений различного состава. На примере обработки телеметрических данных (измерения вектора направления на Солнце) малого космического аппарата BugSat-1 продемонстрирована возможность определения не только характеристик вращательного движения, но и его коэффициента инерции. Определение вращательного движения производилось на основе данных, полученных для пяти интервалов времени с января по май 2022 г., в течение которых BugSat-1 совершал неуправляемое движение вокруг вектора направления на Солнце. Такой характер движения не позволил применить традиционные подходы к определению динамики его вращения. В процессе обработки данных была использована упрощенная модель вращения малого космического аппарата. При этом были оценены начальные условия вращательного движения — вектор угловой скорости и углы ориентации, которые дали возможность сделать вывод о прецессионном движении малого космического аппарата. Применяя аналитическую модель регулярной прецессии, удалось оценить коэффициент инерции малого космического аппарата. Приведены результаты обработки полетной информации, оценены погрешности полученных результатов.

DOI: 10.31857/S0002338823020051, EDN: JCUUSM

Введение. Методики послеполетного восстановления вращательного движения космического аппарата (КА) по накопленной выборке измерений широко применяются в современной космонавтике. Они используются для решения таких задач, как определение фактической величины аэродинамического момента на низких околоземных орбитах [1, 2], оценка условий микрогравитации на борту КА [3–5], нахождение инерционных параметров КА [6, 7], исследование неуправляемого углового движения КА [8–10]. В процессе обработки измерительной информации обычно оцениваются кинематические (углы ориентации или кватернион), динамические (компоненты угловой скорости) и инерционные (коэффициенты инерции) параметры КА, а также другие параметры математической модели движения, характеризующие влияние внешней среды [11, 12]. В данной статье для послеполетного восстановления вращательного движения малого космического аппарата (МКА) BugSat-1 использовались элементы методики, разработанной авторами и опубликованной в [11].

МКА BugSat-1 — технологический демонстратор, созданный аргентинской компанией Satellogic S.A. и предназначенный для отработки технологий дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). В этой миссии были проведены летные испытания бортовых систем, которые в последующем применялись при создании группировки спутников ДЗЗ Aleph-1. МКА был запущен 19 июня 2014 г. с космодрома “Ясный” на ракете-носителе “Днепр” и выведен на солнечно-синхронную орбиту с наклоном 91.3°, высотой апогея 612 км и высотой перигея 570 км. После завершения основной миссии по отработке технологий ДЗЗ МКА использовался как ретранслятор

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00617-А.

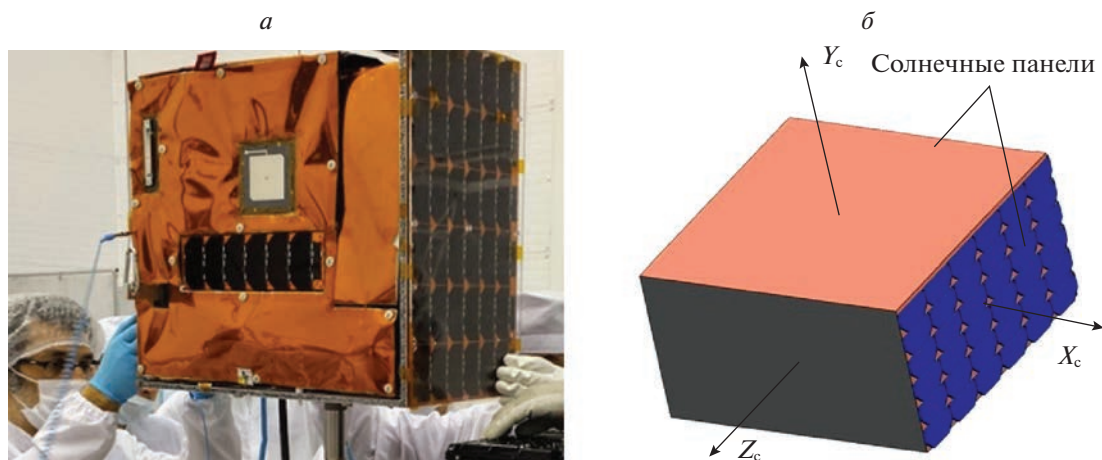


Рис. 1. Внешний вид BugSat-1 (а), принятое расположение связанной системы координат (б)

для любительской радиосвязи. Конструктивные характеристики МКА приведены в [13], масса составляет 22 кг, а габариты — $500 \times 500 \times 275$ мм. Данные об инерционных характеристиках МКА отсутствуют. На рис. 1 представлен внешний вид МКА и расположение осей связанной системы координат.

1. Постановка задачи. Полетные данные МКА получены с помощью сервиса, предоставляющего открытые телеметрические данные SatNOGS [14]. Продолжительности рассматриваемых интервалов измерений вектора направления на Солнце $S_{\text{изм}}(t_i)$ (выбраны на основании рекомендаций, приведенных в [11]) и количество измеренных векторов представлены в табл. 1.

Для записи уравнений движения МКА вокруг центра масс (точка O') (рис. 2), а также соотношений, используемых при обработке данных, вводятся три правые декартовы системы координат.

Связанная с МКА система координат (ССК) образована главными центральными осями инерции и имеет обозначение $O' X_c Y_c Z_c$. Абсолютная геоцентрическая система координат (АСК) имеет обозначение $O X_a Y_a Z_a$ с началом в центре масс Земли (точка O). Ось X_a направлена в точку весеннего равноденствия, ось Z_a — в северный полюс мира, ось Y_a дополняет систему до правой.

Орбитальная система координат (ОСК) имеет обозначение $O' X_o Y_o Z_o$, ось X_o направлена по радиус-вектору МКА, ось Z_o перпендикулярна плоскости орбиты, ось Y_o дополняет систему до правой, начало системы находится в центре масс МКА.

Положение ССК относительно ОСК (рис. 3) задается тремя последовательными поворотами на угол прецессии ψ вокруг оси Y_o , угол нутации α вокруг новой оси Z'_o и на угол собственного вращения φ вокруг новой оси Y''_o .

Телеметрические данные об угловой скорости вращения МКА показывают, что компоненты абсолютной угловой скорости мало изменяются на протяжении интервалов накопления измерений. Данный факт проиллюстрирован на примере интервала измерений № 1 (рис. 4).

Таблица 1. Используемые выборки измерений

Дата и время (UTC) начала интервала измерений	Длительность интервала, с	Количество измерений
10.01.2022 18:13:00	6370	113
05.02.2022 07:45:00	6550	119
27.03.2022 02:20:00	6180	89
24.04.2022 08:47:00	6480	137
15.05.2022 08:41:00	6420	117

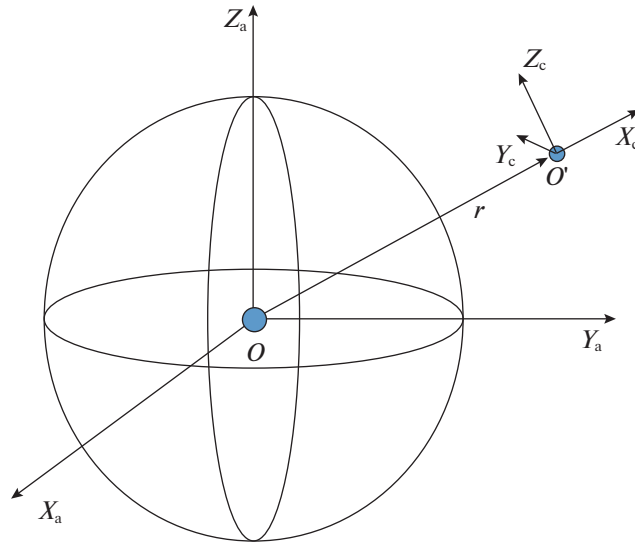


Рис. 2. Системы координат

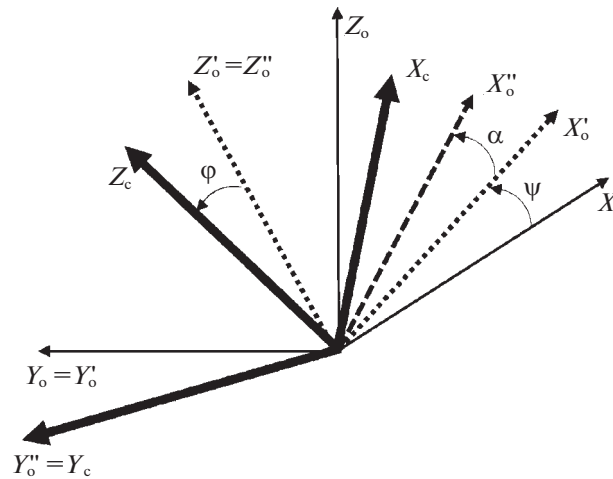


Рис. 3. Расположение ССК относительно ОСК

Особенностью всех использованных телеметрических данных является то, что измерения присутствуют только на начало и конец интервала. Исходя из характера доступных измерений вектора угловой скорости ω , в работе сделано допущение, что компоненты вектора угловой скорости ω не меняются на протяжении интервала формирования выборки измерительной информации. В связи с этим принимается, что уравнение для вектора угловой скорости МКА имеет вид

$$\dot{\omega} = 0.$$

Кинематические уравнения запишем следующим образом [15]:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega q,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_{x_0}) & -(\omega_y - \omega_{y_0}) & -(\omega_z - \omega_{z_0}) \\ (\omega_x - \omega_{x_0}) & 0 & (\omega_z - \omega_{z_0}) & -(\omega_y - \omega_{y_0}) \\ (\omega_y - \omega_{y_0}) & -(\omega_z - \omega_{z_0}) & 0 & (\omega_x - \omega_{x_0}) \\ (\omega_z - \omega_{z_0}) & (\omega_y - \omega_{y_0}) & (\omega_x - \omega_{x_0}) & 0 \end{bmatrix},$$

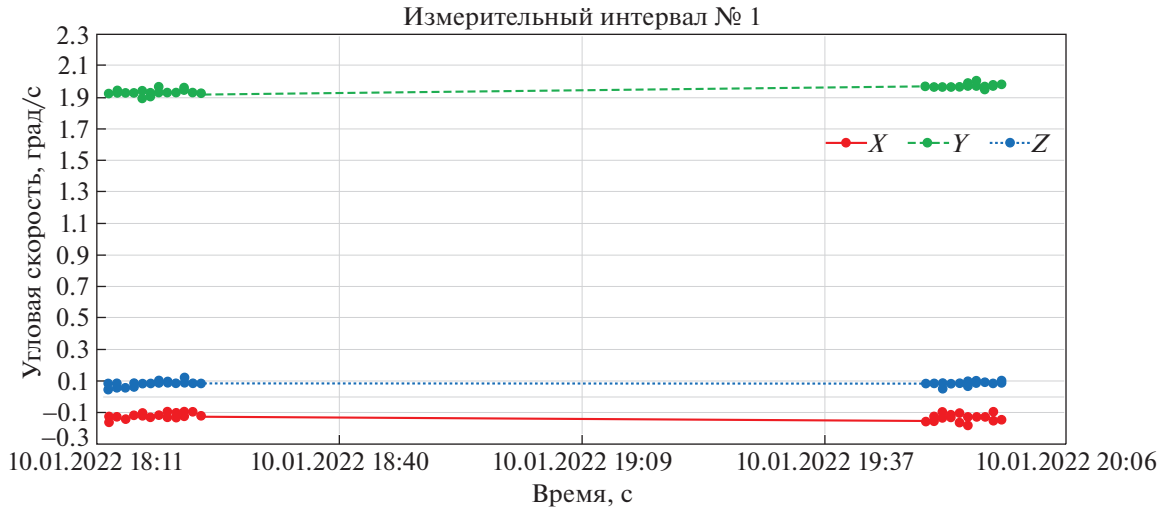


Рис. 4. Угловая скорость МКА на протяжении первого измерительного интервала

где $\omega_o = \mathbf{A}(\mathbf{q})[0 \ 0 \ \sqrt{\mu_e/r^3}]^T$ — вектор орбитальной угловой скорости МКА, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор МКА, вычисленный с использованием TLE-файлов (two line elements, двухстрочный набор элементов), $\mathbf{q}$ — кватернион ориентации МКА, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ — матрица поворота из ОСК в ССК, которая имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{E} + 2 \begin{bmatrix} -(q_2^2 + q_3^2) & q_1q_2 + q_3q_0 & q_1q_3 + q_2q_0 \\ q_1q_2 + q_3q_0 & -(q_1^2 + q_3^2) & q_2q_3 + q_1q_0 \\ q_1q_3 + q_2q_0 & q_2q_3 + q_1q_0 & -(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

В [11] авторами данной статьи описана методика идентификации бортовой математической модели наноспутника. В данной работе использованы элементы созданной методики — процедуры идентификации параметров математической модели и оценки погрешностей.

Восстановление вращательного движения МКА происходит в результате минимизации следующей целевой функции:

$$J(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i) - \mathbf{S}_{\text{мод}}(\mathbf{b}, t_i))^T (\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i) - \mathbf{S}_{\text{мод}}(\mathbf{b}, t_i)), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i)$ — измеренный вектор направления на Солнце в момент времени t_i , $\mathbf{S}_{\text{мод}}(\mathbf{b}, t_i)$ — смоделированный вектор направления на Солнце [16], N — число измеренных векторов $\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i)$, $\mathbf{b}$ — вектор оцениваемых параметров, содержит кинематические и динамические параметры движения МКА и имеет следующий вид:

$$\mathbf{b} = [\omega(t_0) \ \psi(t_0) \ \alpha(t_0) \ \varphi(t_0)]^T. \quad (1.2)$$

Движение центра масс МКА рассчитывалось по модели SGP4, учитывающей влияние 2-й и 4-й зональных гармоник гравитационного поля Земли, в качестве начальных условий движения использовались данные наиболее близкого ко времени измерений TLE-файла МКА BugSat-1 [17].

Как будет показано ниже, вращение МКА происходит вокруг измеряемого вектора направления на Солнце. При таком вращении невозможно оценить три угла ориентации, поэтому в векторе оцениваемых параметров начальный угол $\varphi(t_0)$ принимается равным нулю. Для удобства реализации численной процедуры минимизации (1.1) все расчеты производятся в кватернионах, затем кватернион переводится в углы для наглядности интерпретации.

Таблица 2. Диапазоны поиска оцениваемых параметров

Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
$\omega_x(t_0)$	–3 град/с	3 град/с
$\omega_y(t_0)$	–3 град/с	3 град/с
$\omega_z(t_0)$	–3 град/с	3 град/с
$\psi(t_0)$	0°	360°
$\alpha(t_0)$	0°	90°

Таблица 3. Результаты обработки данных

$ \omega $, град/с	$\omega(t_0)$, град/с	$\delta\omega \times 10^{-3}$, град/с	ψ , град	$\delta\psi$, град	α , град	$\delta\alpha$, град	σ_J	δ_S , град
1.988	[–0.043 1.98 0.013]	[5 0.007 10]	263	4.5	74	1	0.11	6.3
1.765	[–0.188 1.75 0.086]	[0.3 0.004 1]	13	1	76	10	0.12	6.9
1.998	[–0.178 1.98 0.061]	[0.8 0.008 6]	240	10	6	1.2	0.12	6.9
2.006	[–0.138 1.99 0.098]	[1 0.007 2.2]	46	3.7	40	1.5	0.08	4.6
2.048	[–0.015 2.05 0.086]	[15 0.008 3]	187	2	65	5.5	0.12	6.9

Погрешности оцененных параметров определялись по следующей формуле [11]:

$$\Delta b_i = \sigma_J^2 \left(\frac{\partial J}{\partial b_i} \right)^{-1}, \quad (1.3)$$

где $\sigma_J = \sqrt{J(\hat{\mathbf{b}})/(3N - 5)}$ – среднеквадратическая погрешность [10], показывает, насколько математическая модель измерений близка к фактическим измерениям, $\hat{\mathbf{b}}$ – оценка вектора искомых параметров, полученная в результате минимизации функции (1.1). Погрешность σ_J в данной работе можно наглядно представить через угол δ_S между единичными векторами $\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i)$ и $\mathbf{S}_{\text{мод}}(\mathbf{b}, t_i)$ в трехмерном пространстве

$$\delta_S = \arccos(1 - 0.5\sigma_J^2). \quad (1.4)$$

2. Восстановление параметров углового движения. Идентификация вектора параметров углового движения МКА (1.2) проводилась с использованием процедуры идентификации [11]. Для минимизации функции (1.1) применялся метод дифференциальной эволюции (ДЭ) [18]. Для корректной работы метода ДЭ требуется настроить диапазоны поиска оцениваемых параметров табл. 2. Диапазоны для компонент вектора угловой скорости выбирались исходя из телеметрических данных с датчика угловой скорости, а для углов ориентации МКА – исходя из априорных телеметрических данных $\mathbf{S}_{\text{изм}}(t_i)$. Параметры алгоритма ДЭ, отвечающие за сходимость, выбраны исходя из рекомендованных значений [18], коэффициент $F = 0.5$, $P = 0.9$.

На рис. 5–9 приведены результаты выполненной обработки измерений вектора направления на Солнце (промежутки с отсутствующими измерениями вырезаны). Также следует отметить, что измерения приводились к постоянному шагу по времени с помощью линейной интерполяции. Это привело к несущественным погрешностям при обработке данных

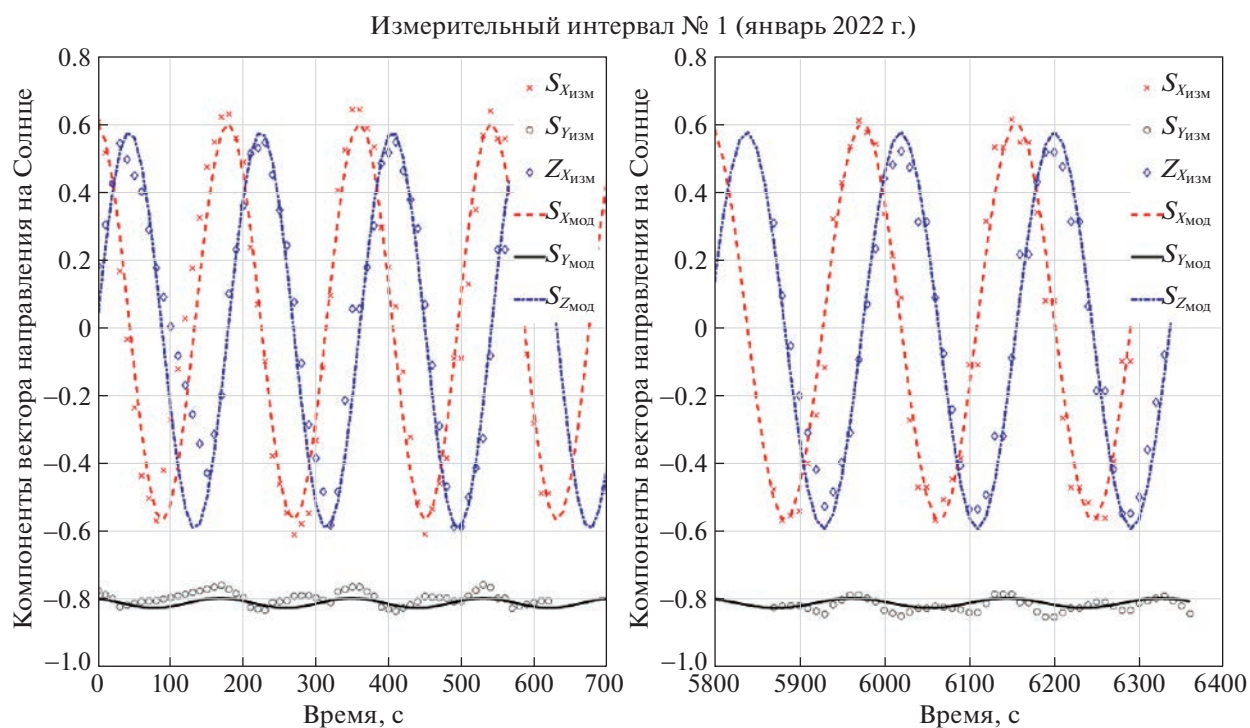


Рис. 5. Обработка данных измерительного интервала № 1

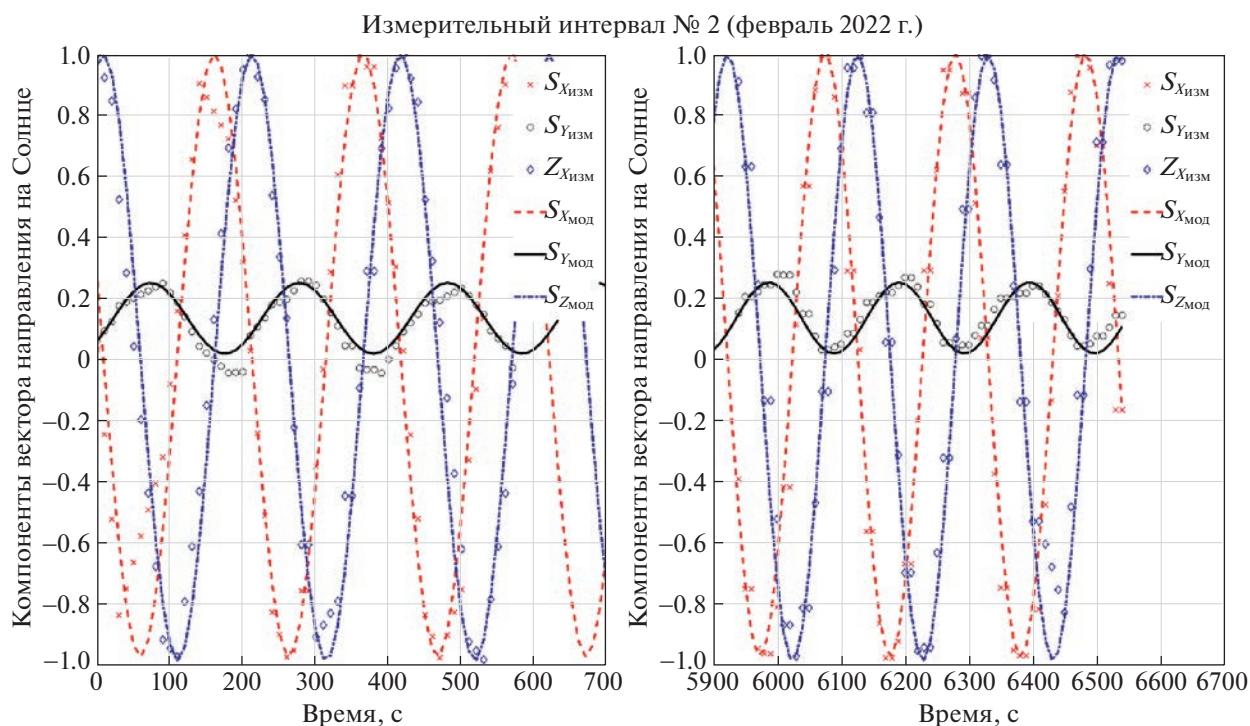


Рис. 6. Обработка данных измерительного интервала № 2

Согласно рис. 5–9, был сделан вывод о достаточном согласовании математической модели вектора направления на Солнце и измерений. Результаты обработки данных представлены в табл. 3. Погрешности оценки параметров вычислены по формуле (1.3), угол рассогласования δ_s оценен по соотношению (1.4).

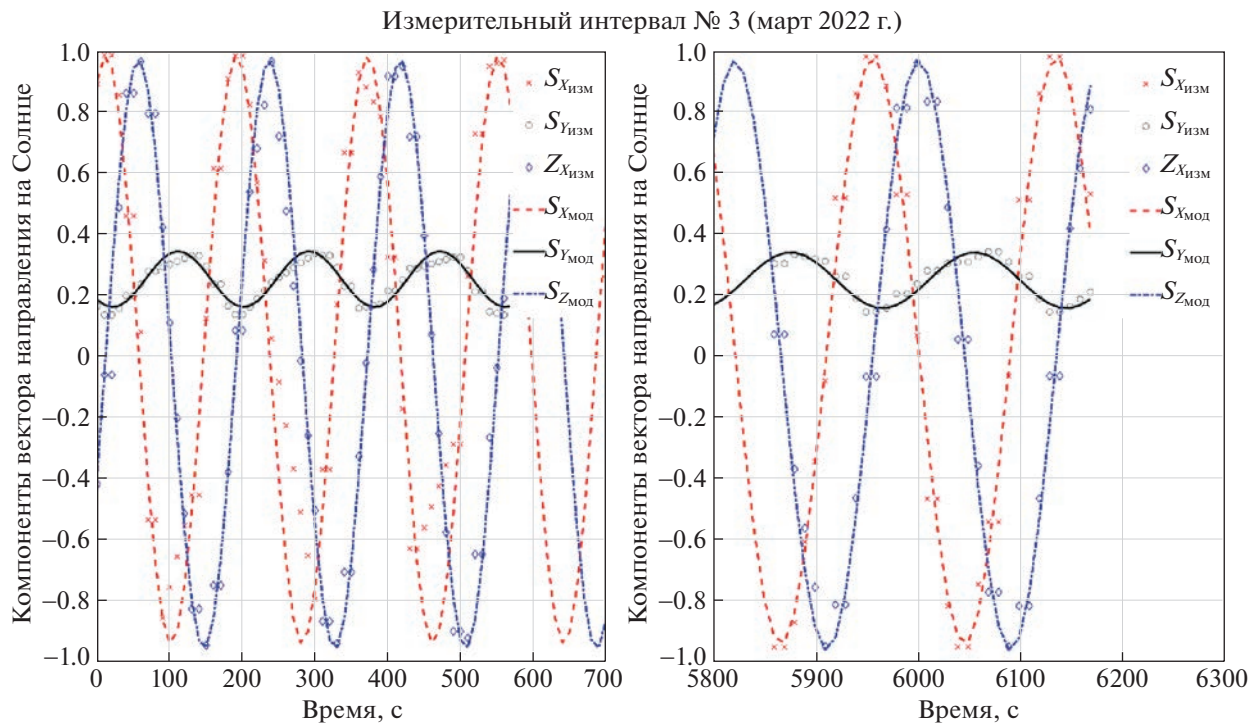


Рис. 7. Обработка данных измерительного интервала № 3

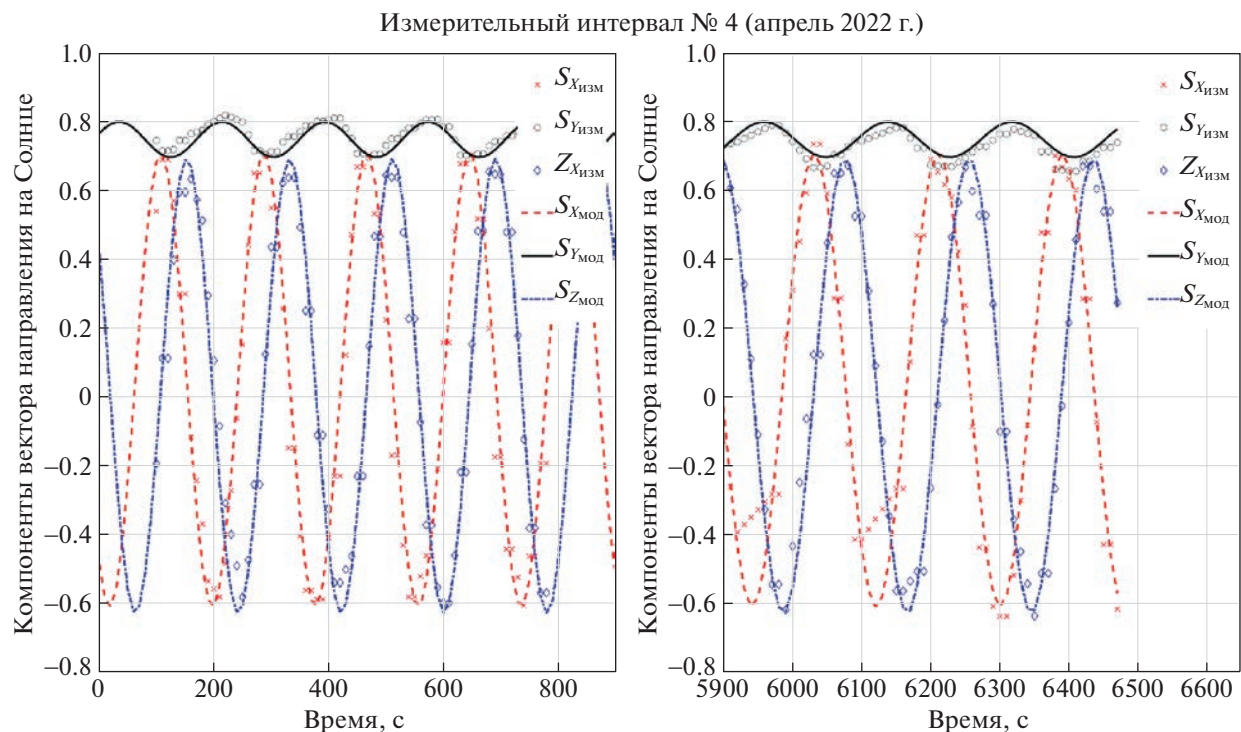


Рис. 8. Обработка данных измерительного интервала № 4

По оцененным параметрам углового движения МКА были построены вектор кинетического момента МКА в АСК на единичной сфере и вектор направления на Солнце для каждого интервала измерений. Направление вектора кинетического момента МКА на рассматриваемых интервалах времени, характеризующихся малыми изменениями значений угловых скоростей,

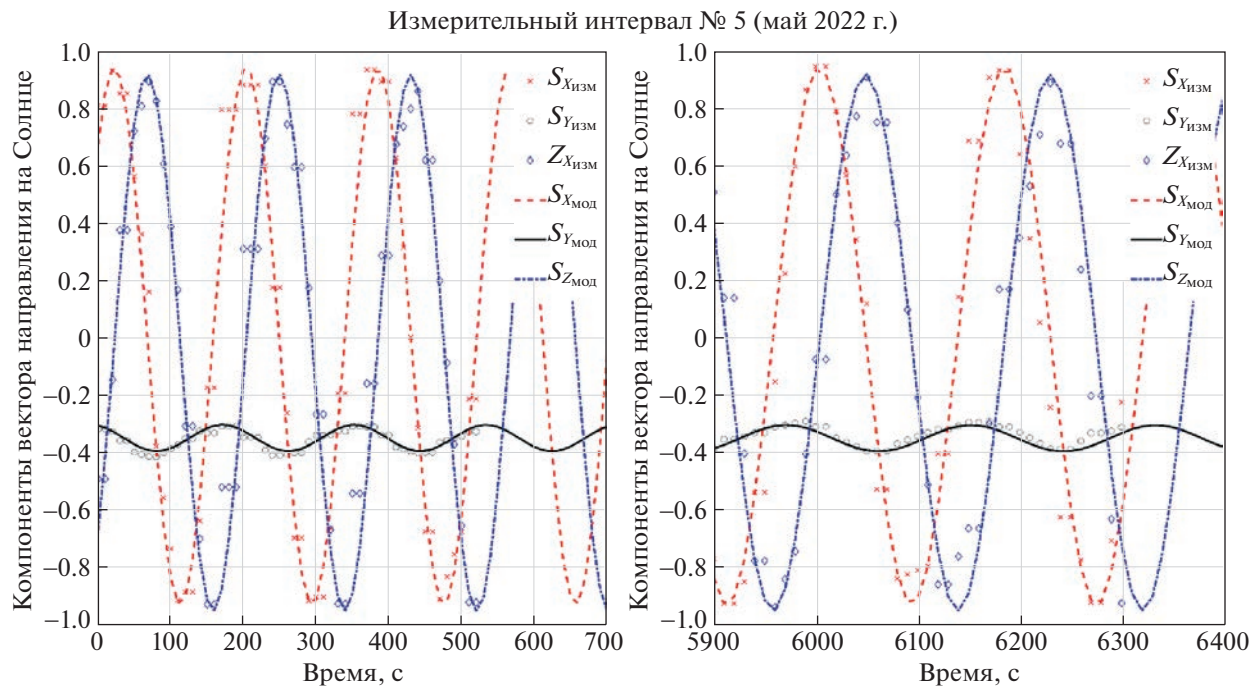


Рис. 9. Обработка данных измерительного интервала № 5

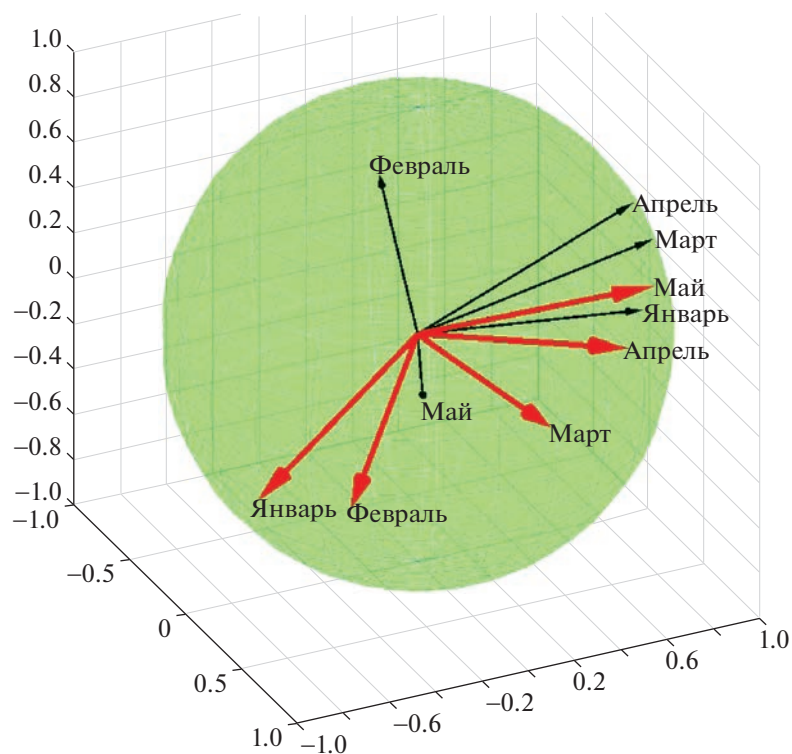


Рис. 10. Взаимное расположение вектора кинетического момента МКА (тонкие стрелки) и вектора направления на Солнце (толстые стрелки) в АСК

принималось совпадающим с осью конуса прецессии в рамках принятой модели движения и вычислялось исходя из предположения, что ось Y_c совершает равномерное вращение вокруг вектора кинетического момента. Взаимное расположение векторов представлено на рис. 10.

Согласно рис. 10, можно сделать вывод, что между измерительными интервалами МКА совершает переориентацию вектора кинетического момента.

Были построены годографы оси Y_c МКА в ОСК для каждого измерительного интервала (рис. 11).

Из рис. 10 видно, что угловое движение МКА на рассматриваемых интервалах близко к случаю регулярной прецессии. Для оценки параметров прецессии была составлена расчетная схема (рис. 12).

На рис. 12 $\omega_n = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2}$ – поперечная угловая скорость, ψ – скорость прецессии, ϕ – угловая скорость собственного вращения, $\mathbf{K}$ – вектор кинетического момента, α_k – угол полураствора конуса прецессии, который в принятой модели регулярной прецессии считается постоянным. Зная положение оси Y_c в каждый момент времени, была оценена скорость прецессии и угол полураствора конуса прецессии. Согласно [19], из выражения $\dot{\phi}/|\omega_y| = \mu$ и геометрических соотношений рис. 11 получили формулу для оценки инерционного параметра МКА:

$$\mu = 1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_y} \right) \operatorname{ctg} \alpha_k,$$

где $\mu = (I_y - I_z)/I_x$ – коэффициент инерции МКА, ω_n – поперечная угловая скорость. Также был вычислен угол между вектором кинетического момента МКА и вектором направления на Солнце ϵ . Исходя из погрешностей оценки вектора угловой скорости ω и угла конуса прецессии α_k оценили математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение параметра μ . Оценка проводилась на основе допущения о нормальном распределении параметра μ . Результаты расчетов представлены в табл. 4.

Полученные результаты позволили сделать вывод, что МКА находится в режиме одноосной солнечной ориентации. Положение вектора кинетического момента на рассматриваемых интервалах постоянно относительно Солнца. Угол между направлением на Солнце и осью Y_c в период с февраля по март близок к 90° , что обеспечивает эффективное использование солнечных батарей.

Угол конуса прецессии изменялся в диапазоне от 1.97 до 9.5° , что предположительно связано с работой системы управления движением. Угловая скорость прецессии МКА на всех интервалах оставалась примерно постоянной – порядка 2, при этом в феврале 2022 г. наблюдалось снижение до 1.77 град/с.

Оценки коэффициента инерции МКА оставались в диапазоне от 0.235 до 0.377, усредненное значение коэффициента инерции на всех рассмотренных интервалах составило 0.298. Оценки коэффициента инерции отклонялись от усредненного значения не более чем на 13%. Погрешность оценки коэффициента инерции соответствует погрешностям, указанным в работах близкой тематики [8, 9].

Заключение. Показана возможность использования упрощенной математической модели углового движения МКА в задаче восстановления углового движения МКА. Восстановлено фактическое неуправляемое движение МКА BugSat-1 по выборкам данных об ориентации вектора направления на Солнце в связанной системе координат, извлеченных из телеметрии, которая находится в свободном доступе. Продемонстрирована возможность оценки инерционных

Таблица 4. Результаты анализа прецессии МКА

α_k , град	ψ , град/с	ϵ , град	M_μ	σ_μ
1.97	1.99	144	0.337	0.05
9.5	1.77	82	0.296	0.001
7.6	1.99	75	0.288	0.005
6.35	2	40	0.235	0.004
3.98	1.98	110	0.337	0.027

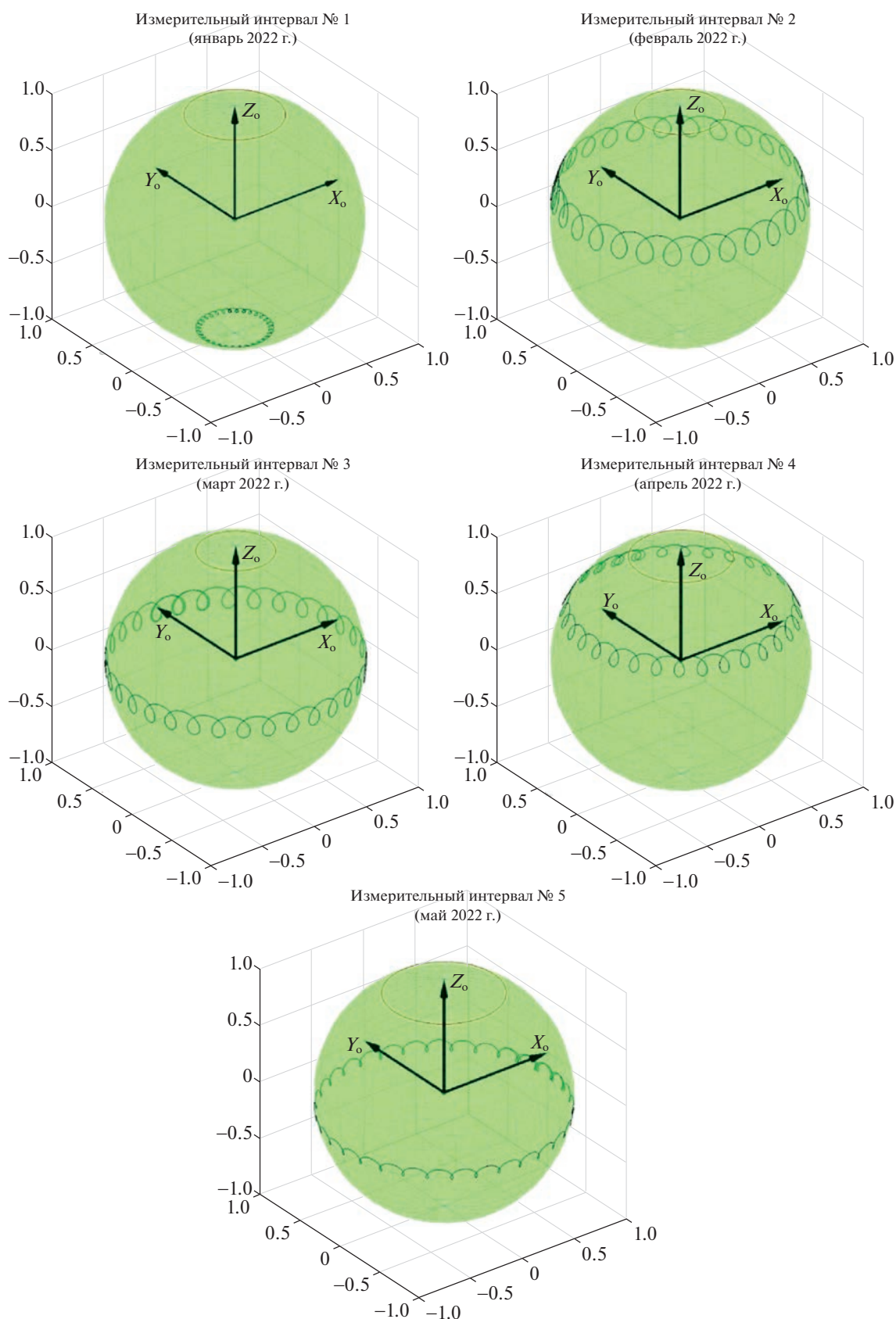


Рис. 11. Годографы вектора оси Y_c МКА (спиральная линия) и вектора направления на Солнце (гладкая) в ОСК

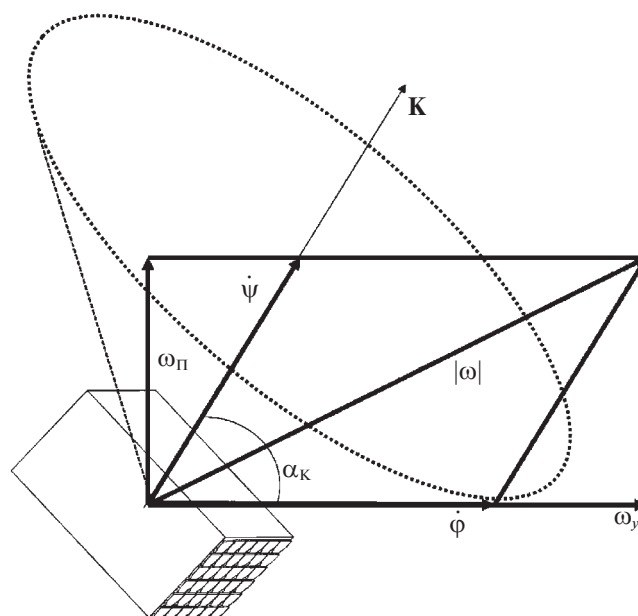


Рис. 12. Расчетная схема прецессии МКА

характеристик МКА в условиях априорной неопределенности на основании выполненного анализа вращательного движения и привлечения аналитической модели регулярной прецессии. Погрешности оценки углов ориентации МКА BugSat-1 не превысили 10° , погрешность определения вектора угловой скорости не превышала 0.015 град/с, а разброс оценок коэффициента инерции составил 13% , что демонстрирует возможность косвенного контроля характера условий проведения космических экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Сазонов Вас.В., Сазонов В.В. Расчет аэродинамического момента в задачах математического моделирования вращательного движения транспортных грузовых кораблей Прогресс // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 29. С. 1–41.
2. Сазонов В.В., Сазонов Вас.В. Использование уточненной модели аэродинамического момента в задачах исследования вращательного движения спутников “Фотон” // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 2. С. 117–127.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка уровня квазистатических микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 54. С. 1–28.
4. Готов Ю.М., Сазонов В.В. Мониторинг микроускорений на борту ориентированного космического аппарата // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 63. С. 1–46.
5. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В. Проверка данных измерений микроускорения, полученных на борту КА “Фотон М-3” // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 12. С. 1–36.
6. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Реконструкция вращательного движения кораблей “Прогресс” в режиме одноосной солнечной ориентации по данным измерений тока солнечных батарей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 211. С. 1–45.
7. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В., Цветков В.В. Определение вращательного движения кораблей “Прогресс” по данным измерений угловой скорости и тока солнечных батарей // Космическая техника и технологии. 2013. № 2. С. 19–23.
8. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пяков А.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Филиппов А.С., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение опытного образца малого космического аппарата “Аист” // Космич. исслед. 2017. Т. 55. № 2. С. 135–149.
9. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И., Рулев Д.Н., Сазонов В.В. Эксперименты с неуправляемым вращательным движением КА “Прогресс” // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 4. С. 1–39.

10. Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Режимы неуправляемого вращательного движения КА “Прогресс” для экспериментов в области микрогравитации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 44. С. 1–29.
11. Белоконов И.В., Ломака И.А. Методика параметрической идентификации модели углового движения наноспутника // Космонавтика и ракетостроение. 2020. Т. 117. № 6. С. 134–145.
12. Белоконов И.В., Крамлих А.В., Ломака И.А., Николаев П.Н. Восстановление углового движения космического аппарата по данным о токосъеме с панелей солнечных батарей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 133–144.
13. Krebs G.D. BugSat 1 (Tita). Gunter’s Space Page. Retrieved June 24, 2022. https://space.skyrocket.de/doc_sdat/bugsat-1.html
14. Открытые данные телеметрии. <https://dashboard.satnogs.org/d/gIFGSdwik/bugsat-1?orgId=1> (дата обращения: 01.04.2022).
15. Иванов Д.С., Иванова Т.А., Ивлев Н.А., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Оценка тензора инерции и автоматическая балансировка макета микроспутника на аэродинамическом подвесе // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 2. С. 138–155.
16. Модель вектора направления на Солнце. http://www.vadimchazov.narod.ru/text_pdf/comalg.pdf (дата обращения: 01.04.2022).
17. Модель SGP4. <https://celestrak.org/publications/AIAA/2008-6770/AIAA-2008-6770.pdf> (дата обращения: 01.04.2022).
18. Storn R., Price K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization Over Continuous Spaces. Berkeley: International Computer Science Institute, 1995.
19. Тимбай И.А., Белоконов И.В., Сторож А.Д. Анализ неуправляемого движения верхней ступени ракеты-носителя “Союз” после отделения полезной нагрузки // Вестн. Самарского государственного аэрокосмического ун-та им. академика С.П. Королева (национального исследовательского ун-та). 2012. № 4. С. 44–51.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 517.977

ИГРОВОЕ ВЗАИМОСВЯЗАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ¹

© 2023 г. В. А. Болдинов^{a,*}, В. А. Бухалёв^b, А. А. Скрынников^{a,c}

^a Московский авиационный ин-т (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^b Московский научно-исследовательский телевизионный ин-т, Москва, Россия

^c Государственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, Москва, Россия

*e-mail: viktorboldinov@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается задача игрового управления группой беспилотных летательных аппаратов в условиях информационного противодействия со стороны группы неподвижных объектов. Получены два рекуррентных информационно-управляющих алгоритма: алгоритм взаимосвязанного управления группой беспилотных летательных аппаратов и алгоритм управления постановщика помех, основанные на теории стохастических многошаговых игр и теории систем со случайной скачкообразной структурой.

DOI: 10.31857/S0002338823020063, EDN: JDHTCO

Введение. В [1] рассматривалась задача построения алгоритмов взаимосвязанного управления группой беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) при наведении на группу объектов, часть из которых является ложными, создаваемыми с помощью имитационных помех и усиливаемыми маскирующими помехами, вызывающими перебои информации.

Если система противодействия обладает способностью оценивать какие-то параметры процесса наведения, то она может активно влиять на управление им [2–4].

В этих условиях задача построения информационно-управляющих алгоритмов может быть сформулирована как антагонистическая дифференциальная или многошаговая стохастическая игра [3, 5–10]. Эта задача рассматривается в настоящей статье.

1. Постановка задачи. Группа БПЛА наводится на группу неподвижных объектов, прикрываемых имитационными и маскирующими помехами, в результате чего в информационных каналах систем БПЛА появляются сигналы от ложных объектов и возникают перебои информации. Соседние БПЛА обмениваются информацией по двухсторонней линии связи для поддержания требуемой дистанции между ними. В системе управления каждого участника группы измеряются наблюдаемые координаты объектов и их некоторые различительные признаки. На основании измерений формируются необходимые оценки и сигналы управления БПЛА.

Управление БПЛА направлено на повышение точности наведения, управление системы противодействия — на ее снижение. При этом каждый из противников рассчитывает на наихудшее для себя поведение соперника.

Математически задача формулируется как антагонистическая многошаговая стохастическая игра, описываемая следующими уравнениями.

Схема наведения двух БПЛА (соседних участников группы) на два неподвижных объекта в вертикальной плоскости декартовой прямоугольной системы координат (O, y_L, x_L) представлена на рис. 1. Здесь через L обозначена дистанция между соседними БПЛА (1 и 2), наводящихся на два неподвижных объекта (1' и 2'), которые отстоят друг от друга на расстоянии l . Дальности от БПЛА до объектов и углы пеленга объектов обозначены как $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ и $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ соответственно.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

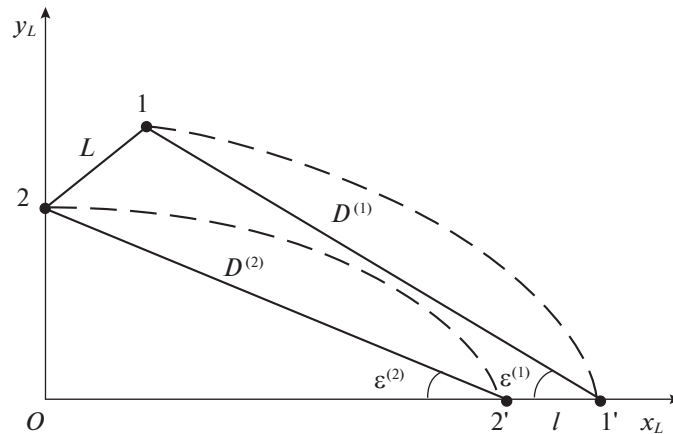


Рис. 1. Траектории наведения двух БПЛА на два объекта

Наведение осуществляется по заданным траекториям, описываемым уравнениями (в непрерывной форме):

$$\dot{\bar{\epsilon}}(t) = \bar{\omega}(t), \quad \dot{\bar{\omega}}(t) = \tau^{-1}(t)(1 - \nu)\bar{\omega}(t), \quad (1.1)$$

где $\bar{\epsilon}(t)$, $\bar{\omega}(t)$ – требуемые угол и угловая скорость пеленга с заданными начальными и конечными условиями $\bar{\epsilon}(0) = \bar{\epsilon}_0$, $\bar{\epsilon}(t_n) = \bar{\epsilon}_n$, $\bar{\omega}(0) = t_n^{-1}\nu(\bar{\epsilon}_n - \bar{\epsilon}_0)$, $\bar{\omega}(t_n) = 0$; ν – коэффициент крутизны траектории, $\nu = \text{const}$, $\nu > 1$; t_n – конечный момент времени наведения; $\tau = t_n - t$ – время, оставшееся до конца наведения.

Согласно выражению (1.1), заданная траектория – это кривая, описываемая формулами

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(t) &= (\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_n) \left(\frac{\tau}{t_n} \right)^\nu + \bar{\epsilon}_n, \\ \bar{\omega}(t) &= \frac{\nu}{t_n} (\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_n) \left(\frac{\tau}{t_n} \right)^{\nu-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

и проходящая через две точки с углами наклона $\bar{\epsilon}_0$ и $\bar{\epsilon}_n$.

Форма кривой зависит от коэффициента крутизны ν . В частности, при $\nu = 1$ $\bar{\omega}(t) = t_n^{-1}(\bar{\epsilon}_n - \bar{\epsilon}_0) = \text{const}$, что соответствует движению с постоянной угловой скоростью по траектории, близкой к баллистической. Влияние ν на форму траектории показано на рис. 2.

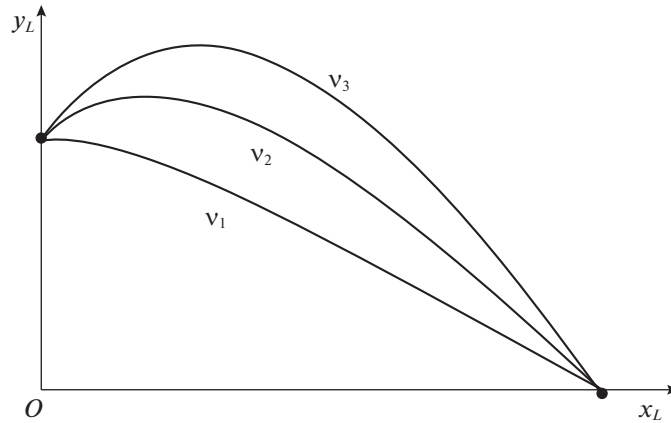
В общем случае заданные траектории обоих БПЛА не одинаковы: $\nu^{(1)} \neq \nu^{(2)}$, а требуемая дистанция $\bar{L}$ между ними определяется, как следует из рис. 1, формулой

$$\bar{L} = \sqrt{(\bar{D}^{(1)})^2 + (\bar{D}^{(2)})^2 - 2\bar{D}^{(1)}\bar{D}^{(2)}\cos(\bar{\epsilon}^{(1)} - \bar{\epsilon}^{(2)})}, \quad (1.3)$$

где $\bar{D}^{(1)}$, $\bar{D}^{(2)}$, $\bar{\epsilon}^{(1)}$, $\bar{\epsilon}^{(2)}$ – требуемые дальности и углы пеленга первого и второго БПЛА.

В каждом БПЛА измеряются пространственные координаты истинного объекта, условно именуемого “цель” (Ц), и ложного объекта, условно именуемого “помеха” (П). Динамика и измерение параметров объектов описываются следующими формулами и уравнениями в дискретной форме:

$$\begin{aligned} D_{k+1}^j &= [D^j - \Delta t \nu + \xi^{D^j}]_k, \quad D_0^{\text{Ц}} \neq D_0^{\text{П}}, \\ \epsilon_{k+1}^j &= [\epsilon^j + \Delta t \omega^j]_k, \quad \epsilon_0^{\text{Ц}} \neq \epsilon_0^{\text{П}}, \\ \omega_{k+1}^j &= \left[\omega^j + \frac{\Delta t}{\tau} (2\omega + u + \xi^{\epsilon^j}) \right]_k, \quad \omega_0^{\text{Ц}} \neq \omega_0^{\text{П}}, \quad j = \text{Ц, П}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рис. 2. Зависимость траектории от коэффициента крутизны v

$$\begin{aligned} \bar{D}_k^i &= [D^j + \zeta^{D^j}]_k [1 - \delta(s_k, 3)], \\ \bar{\epsilon}_k^i &= [\epsilon^j + \zeta^{\epsilon^j}]_k [1 - \delta(s_k, 3)], \quad i = 1, 2, \quad j = \text{Ц, П}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\pi(\bar{r}_k^i | r_k^j), \quad i = 1, 2, \quad j = \text{Ц, П}. \quad (1.6)$$

Здесь символом $\sim$ обозначены измерения соответствующих переменных; k – дискретный момент времени, $k = \overline{0, n}$ (индекс k у квадратных скобок $[\bullet]_k$ относится ко всем переменным внутри этих скобок); $\Delta t = t_{k+1} - t_k$; j – индекс объекта: Ц, П; i – номер канала наблюдения, $i = 1, 2$; D_k^j – дальности до Ц и до П; ϵ_k^j – углы пеленга Ц и П; ω_k^j – угловые скорости пеленгов; u_k – сигнал управления БПЛА; $\xi_k^{D^j}, \xi_k^{\epsilon^j}$ – центрированные гауссовские дискретные белые шумы возмущений с дисперсиями соответственно G^{D^j} и G^{ϵ^j} ; $\zeta_k^{D^j}, \zeta_k^{\epsilon^j}$ – центрированные гауссовские дискретные белые шумы ошибок измерения с дисперсиями соответственно Q^{D^j} и $Q^{\epsilon^j}/(\tau_k^j)^2$; $\tau_k^j = D_k^j/v_k$ – время, оставшееся до конца наведения БПЛА соответственно на Ц и на П; v_k – априорная оценка скорости сближения БПЛА с объектами (известная функция времени);

$$\delta(s_k, 3) = \begin{cases} 1 & \text{при } s_k = 3, \\ 0 & \text{при } s_k \neq 3 \end{cases}$$

– символ Кронекера, описывает перерыв поступления информации, вызванный воздействием маскирующей помехи; s_k – индекс структуры, $s_k = 1, 2, 3$; $\pi(\bar{r}_k^i | r_k^j)$ – условные вероятности правильных (при $\bar{r}_k^i = r_k^j$) и ошибочных (при $\bar{r}_k^i \neq r_k^j$) показаний индикатора $\bar{r}_k^j$ информационного различительного признака r_k^j (известная функция времени) Ц и П ($j = \text{Ц, П}$) в первом ($i = 1$) и втором ($i = 2$) каналах наблюдения.

Индекс структуры (помеховой ситуации) s_k – марковская цепь, заданная вероятностями переходов $q_k(s_{k+1} | s_k)$ из состояния s_k в состояние s_{k+1} ($s_k, s_{k+1} = \overline{1, 3}$):

$$\begin{aligned} q_k(2|1) &= q_k(1|2) = 0, \quad q_k(1|3) = q_k(2|3) = d_k = d^{\min}, d^{\max}, \\ q_k(3|1) &= q_k(3|2) = g_k = g^{\min}, g^{\max}, \quad 0 < d, \quad g < 0.5. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Множество возможных состояний структуры представлено в таблице 1.

Как видно из таблицы, при $s = 1$ в первом информационном канале ($i = 1$) наблюдается цель, во втором – помеха; при $s = 2$ – в $i = 1$ – помеха, в $i = 2$ – цель; при $s = 3$ – перерыв информации.

Таблица 1. Множество возможных состояний структуры

s	$i = 1$	$i = 2$
1	$j = \Pi$	$j = \Pi$
2	$j = \Pi$	$j = \Pi$
3	0	0

Состояния структуры s_k фиксируются с ошибками индикаторами маскирующих помех, которые описываются условными вероятностями $\pi_{k+1}^\psi(\tilde{s}_k^\psi | s_k)$ правильных (при $\tilde{s}_k^\psi = s_k$) и ошибочных (при $\tilde{s}_k^\psi \neq s_k$) показаний индикаторов, где s_k – индекс структуры, $s_k = \overline{1, 3}$; $\tilde{s}_k^\psi$ – показания индикатора, $\tilde{s}_k^\psi = \overline{1, 3}$; $\psi = \text{Б, П}$; символ Б означает БПЛА, символ П – постановщик помехи (помеха).

Критерии оптимальности управлений описываются формулами

$$J^* = \min_{u_{0,n-1}} J; \quad (1.8)$$

$$J = \sum_{k=1}^n M[W_k^u | \bar{D}_{0,k-1}, \bar{\epsilon}_{0,k-1}, \bar{r}_{0,k-1}, \bar{s}_{0,k-1}^{\text{Б}}]; \quad (1.9)$$

$$W_k^u \triangleq \alpha_\epsilon \tau_k^{-2} (\epsilon_k - \bar{\epsilon}_k)^2 + \alpha_\omega (\omega_k - \bar{\omega}_k)^2 + \beta u_{k-1}^2; \quad (1.10)$$

$$J^{\text{Б}*} = \min_{d_{0,n-1}} \max_{g_{0,n-1}} J^{\text{Б}}; \quad J^{\text{П}*} = \max_{g_{0,n-1}} \min_{d_{0,n-1}} J^{\text{П}}; \quad (1.11)$$

$$J^{\text{Б}} = \sum_{k=1}^n M[W_k^{\text{Б}}(s_k, d_{k-1}, g_{k-1}) | \bar{D}_{0,k-1}, \bar{\epsilon}_{0,k-1}, \bar{r}_{0,k-1}, \bar{s}_{0,k-1}^{\text{Б}}]; \quad (1.12)$$

$$J^{\text{П}} = \sum_{k=1}^n M[W_k^{\text{П}}(s_k, d_{k-1}, g_{k-1}) | \bar{s}_{0,k-1}^{\text{П}}]; \quad (1.13)$$

$$W_k^{\text{Б}} = \delta(s_k, 3) + \lambda^{\text{Б}} d_{k-1} - \mu^{\text{Б}} g_{k-1}; \quad (1.14)$$

$$W_k^{\text{П}} = \delta(s_k, 3) + \lambda^{\text{П}} d_{k-1} - \mu^{\text{П}} g_{k-1}, \quad (1.15)$$

где J^* , $J^{\text{Б}*}$, $J^{\text{П}*}$ – критерии оптимальности управлений; J , $J^{\text{Б}}$, $J^{\text{П}}$ – показатели эффективности; $W_k^u(\cdot)$, $W_k^{\text{Б}}(\cdot)$, $W_k^{\text{П}}(\cdot)$ – текущие функции потерь; α_ϵ , α_ω , β , λ , μ – положительные константы – весовые коэффициенты, регулирующие распределение приоритетов между частными показателями в (1.8)–(1.15).

В начальный момент известны математические ожидания и ковариации фазовых координат процесса наведения, а также вероятности структуры $p_0^{\text{Б}}(s_0)$, $p_0^{\text{П}}(s_0)$. Весовые коэффициенты либо задаются, либо определяются путем параметрической оптимизации в процессе имитационного математического моделирования синтезированной системы.

Требуется найти оптимальные управления u_k^* , d_k^* , g_k^* в классе детерминированных зависимостей от наблюдений $\bar{D}_{0,k}$, $\bar{\epsilon}_{0,k}$, $\bar{r}_{0,k}$, $\bar{s}_{0,k}^{\text{Б}}$, $\bar{s}_{0,k}^{\text{П}}$.

2. Информационно-управляющие алгоритмы. Оптимальные игровые алгоритмы управления линейными системами с марковской структурой рассмотрены в [3, 5, 8, 9]. Их особенностью по сравнению с системами с детерминированной структурой является многоканальность, обусловленная числом состояний структуры.

Как показано в [3], способом приближенной замены состояния структуры s_k его оценкой $\hat{s}_k$ можно получить более простые одноканальные алгоритмы. Схема игрового управления БПЛА приведена на рис. 3.

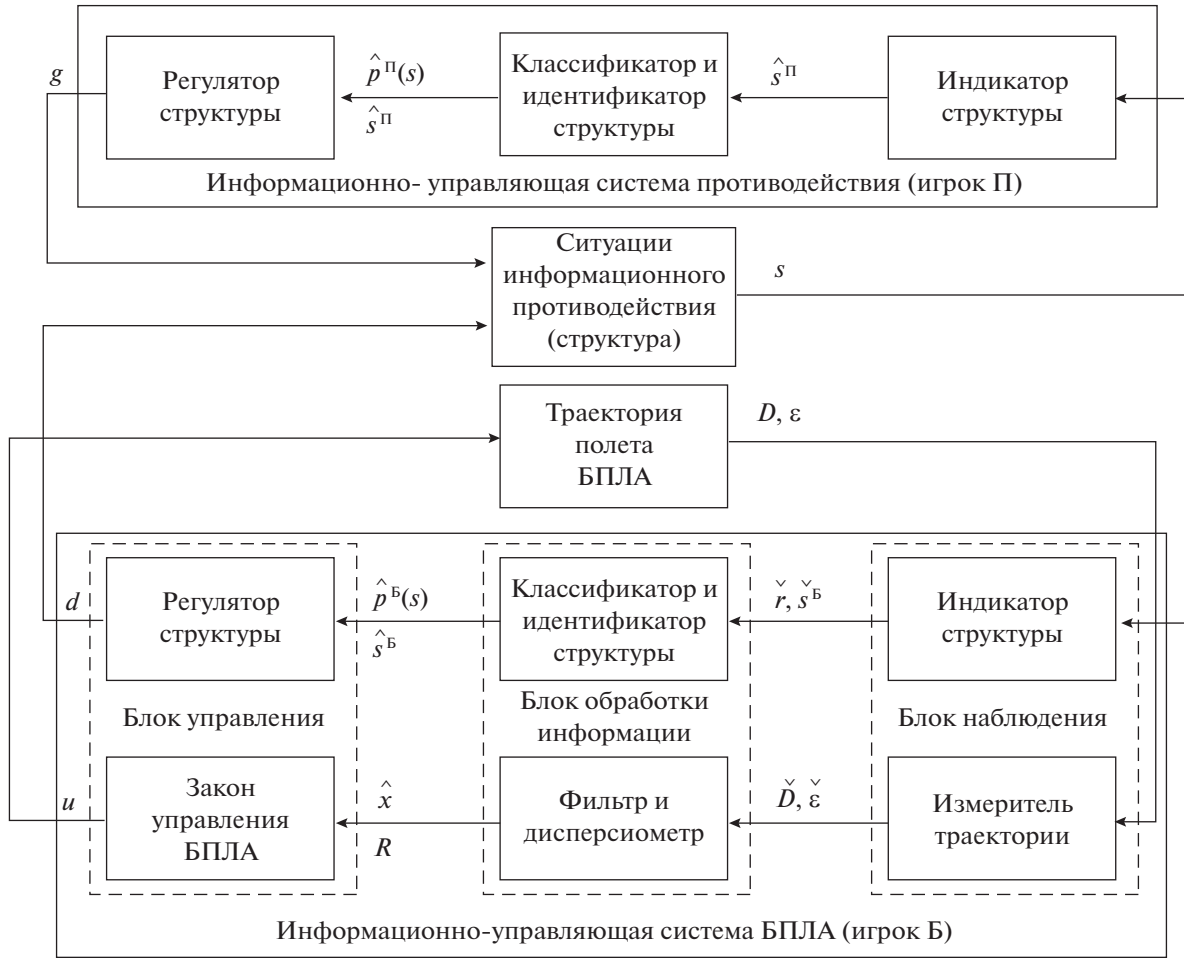


Рис. 3. Схема игрового управления БПЛА

2.1. Алгоритм игрока Б (БПЛА). 1. *Закон управления БПЛА*. Структурно-адаптивный одноканальный алгоритм, основанный на приближенной замене состояния структуры s_k его оценкой $\tilde{s}_k^Б$, согласно условиям задачи (1.1)–(1.15), имеет следующий вид:

$$u_k^* = -[\tau^{-1}C_\varepsilon(\hat{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}) + C_\omega(\hat{\omega} - \bar{\omega}) + (v+1)\bar{\omega} + C_l(\hat{L} - \bar{L}) + C_v(\hat{v} - \bar{v})]_k, \quad (2.1)$$

где $v \triangleq \dot{L}$, $\hat{v}_k = \dot{\hat{L}}_k$, $\bar{v}_k = \dot{\bar{L}}_k$, коэффициенты C_L , C_v определяются путем параметрической оптимизации, а коэффициенты C_ε , C_ω находятся из уравнений

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(C_\varepsilon - C_\omega + 2) - \beta^{-1}\alpha_\varepsilon &= 0, \\ C_\omega^2 - 3C_\omega - 2C_\varepsilon - \beta^{-1}\alpha_\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. *Регулятор структуры (помеховых ситуаций)*. Применяя метод динамического программирования Беллмана [11], обобщенный на класс систем со случайной скачкообразной структурой (ССС) [3, 5, 8], и критерий оптимальности $J^{Б*}$ – (1.12), (1.14), получаем приближенно-оптимальный алгоритм регулятора:

$$d_k^* = \begin{cases} d^{\min} & \text{при } \hat{p}_k^Б(3) \leq \tilde{\lambda}^Б, \\ d^{\max} & \text{при } \hat{p}_k^Б(3) > \tilde{\lambda}^Б; \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\tilde{g}_k = \begin{cases} g^{\min} & \text{при } \hat{p}_k^B(3) \geq 1 - \tilde{\mu}^B, \\ g^{\max} & \text{при } \hat{p}_k^B(3) < 1 - \tilde{\mu}^B; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\tilde{\lambda}^B = \frac{\lambda^B(d^{\max} + g^{\max})}{1 + \lambda^B(d^{\max} - d^{\min}) + \mu^B(g^{\max} - g^{\min})}, \quad \tilde{\mu}^B = \frac{\mu^B}{\tilde{\lambda}^B}, \quad (2.5)$$

где d_k^* – оптимальное управление игрока Б; $\tilde{g}_k$ – предполагаемое игроком Б оптимальное управление игрока П, основанное на наблюдениях игрока Б; $\hat{p}_k^B(1)$ – апостериорная вероятность состояния структуры $s_k = 1$, определяемая классификатором.

3. *Фильтр*. Структурно-адаптивный одноканальный фильтр с учетом условий задачи описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{k+1}^j &= [\tilde{D}^j + (1 - \delta(\hat{s}^B, 3))K^{D^j}(\tilde{D}^{i(\hat{s}^B)} - \tilde{D}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{D}_{k+1}^j &= [\hat{D}^j - \Delta t v]_k; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{k+1}^j &= [\tilde{\epsilon}^j + (1 - \delta(\hat{s}^B, 3))K^{\epsilon^j}(\tilde{\epsilon}^{i(\hat{s}^B)} - \tilde{\epsilon}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{\epsilon}_{k+1}^j &= [\hat{\epsilon}^j - \Delta t \hat{\omega}^j]_k; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{k+1}^j &= [\tilde{\omega}^j + (1 - \delta(\hat{s}^B, 3))(K^{\omega^j} + K^{\epsilon^j} \tau^{-1})(\tilde{\omega}^{i(\hat{s}^B)} - \tilde{\omega}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{\omega}_{k+1}^j &= [\hat{\omega}^j + \Delta t \tau^{-1}(2\hat{\omega}^j + u^*)]_k; \\ \hat{D}_0^j &= D_0^j, \quad \hat{\epsilon}_0^j = \epsilon_0^j, \quad \hat{\omega}_0^j = \omega_0^j, \\ i &= 1, 2, \quad \hat{s} = 1, 2, 3, \quad j = \text{Ц, П}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $j = \text{Ц}$:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{s}_k^B = 1, \\ 2 & \text{при } \hat{s}_k^B = 2, \end{cases} \quad (2.9)$$

при $j = \text{П}$:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{s}_k^B = 2, \\ 2 & \text{при } \hat{s}_k^B = 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\hat{L}_k = \left[\sqrt{(\hat{D}^{(\text{Ц1})})^2 + (\hat{D}^{(\text{П2})})^2 - 2\hat{D}^{(\text{Ц1})}\hat{D}^{(\text{П2})}\cos(\hat{\epsilon}^{(\text{Ц1})} - \hat{\epsilon}^{(\text{П2})})} \right]_k. \quad (2.11)$$

Здесь символ $\wedge$ обозначает, как обычно, апостериорные оценки координат цели, вычисляемые первым и вторым БПЛА.

4. *Дисперсиометр*. Алгоритм дисперсиометра состоит из формул для положительных постоянных “коэффициентов доверия” K^{D^j} , K^{ϵ^j} , K^{ω^j} , получаемых в результате приближенного решения в установившемся режиме уравнений для ковариаций ошибок оценивания координат цели и помех [3]:

$$K^{D^j} = \Delta \omega^j \left(\sqrt{1 + \frac{G^{D^j}}{Q^{D^j}}} - 1 \right), \quad K^{\epsilon^j} = \sqrt{2K^{\omega^j}}, \quad K^{\omega^j} = \sqrt{\frac{G^{\omega^j}}{Q^{\omega^j}}}, \quad j = \text{Ц, П}. \quad (2.12)$$

5. *Классификатор структуры*. Алгоритм классификатора, согласно [3], с учетом условий задачи описывается следующими уравнениями:

$$\hat{p}_k^B(s_k) = \frac{\vartheta_k^B(s_k)}{\sum_{s_k} \vartheta_k^B(s_k)}, \quad \hat{p}_0^B(s_0) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } s_0 = 1, 2, \\ 0 & \text{при } s_0 = 3; \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_k^B(1) &= \left[\tilde{p}^B(1) \pi^r(\tilde{r}^1 | r^{\Pi}) \pi^r(\tilde{r}^2 | r^{\Pi}) \pi^B(\tilde{s}^B | 1) e^{-\Delta(1)} \right]_k, \\
\vartheta_k^B(2) &= \left[\tilde{p}^B(2) \pi^r(\tilde{r}^1 | r^{\Pi}) \pi^r(\tilde{r}^2 | r^{\Pi}) \pi^B(\tilde{s}^B | 2) e^{-\Delta(2)} \right]_k, \\
\vartheta_k^B(3) &= \tilde{p}_k^B(3) \pi^B(\tilde{s}^B | 3);
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_k(1) &= \frac{1}{2} \left[\left[K^D(\tilde{D}^1 - \hat{D}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^E(\tilde{\epsilon}^1 - \hat{\epsilon}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^D(\tilde{D}^2 - \hat{D}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^E(\tilde{\epsilon}^2 - \hat{\epsilon}^{\Pi}) \right]^2 \right]_k, \\
\Delta_k(2) &= \frac{1}{2} \left[\left[K^D(\tilde{D}^1 - \hat{D}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^E(\tilde{\epsilon}^1 - \hat{\epsilon}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^D(\tilde{D}^2 - \hat{D}^{\Pi}) \right]^2 + \left[K^E(\tilde{\epsilon}^2 - \hat{\epsilon}^{\Pi}) \right]^2 \right]_k, \\
\Delta_k(3) &= 0;
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{k+1}^B(1) &= [\hat{p}(1) + d^* \hat{p}(3)]_k^B, \\
\tilde{p}_{k+1}^B(2) &= [\hat{p}(2) + d^* \hat{p}(3)]_k^B, \\
\tilde{p}_{k+1}^B(3) &= [\tilde{g}(\hat{p}(1) + \hat{p}(2)) + (1 - 2d^*) \hat{p}(3)]_k^B.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

6. Идентификатор структуры:

$$\hat{s}_k^B = \arg \max_{s_k} \hat{p}_k^B(s_k), \quad s_k = 1, 2, 3. \tag{2.17}$$

В целом, алгоритм игрока Б описывается замкнутой системой уравнений (2.1)–(2.17) с входными сигналами $\tilde{D}_k^{ij}$, $\tilde{\epsilon}_k^{ij}$, $\tilde{r}_k^i$, $\tilde{s}_k^B$ и выходными сигналами u_k^* , d_k^* , $\hat{D}_k^j$, $\hat{\epsilon}_k^j$, $\hat{\omega}_k^j$, $\hat{p}_k^B(s_k)$, $\hat{s}_k^B$, $i = 1, 2$; $j = \Pi, B$.

2.2. Алгоритм игрока П. Алгоритм состоит из регулятора, классификатора и идентификатора, описываемых уравнениями соответственно (2.3)–(2.5), (2.13)–(2.16) и (2.17), в которых надо заменить $d_k^* \rightarrow \tilde{d}_k$, $\tilde{g}_k \rightarrow g^*$, $\tilde{\lambda}^B \rightarrow \tilde{\lambda}^{\Pi}$, $\tilde{\mu}^B \rightarrow \tilde{\mu}^{\Pi}$, $\hat{p}_k^B(s_k) \rightarrow \hat{p}_k^{\Pi}(s_k)$, $\tilde{p}_k^B(s_k) \rightarrow \tilde{p}_k^{\Pi}(s_k)$, $\hat{s}_k^B \rightarrow \hat{s}_k^{\Pi}$.

1. Регулятор структуры:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_k &= \begin{cases} d^{\min} & \text{при } \hat{p}_k^{\Pi}(3) \leq \tilde{\lambda}^{\Pi}, \\ d^{\max} & \text{при } \hat{p}_k^{\Pi}(3) > \tilde{\lambda}^{\Pi}, \end{cases} \quad g_k^* = \begin{cases} g^{\min} & \text{при } \hat{p}_k^{\Pi}(3) \geq 1 - \tilde{\mu}^{\Pi}, \\ g^{\max} & \text{при } \hat{p}_k^{\Pi}(3) < 1 - \tilde{\mu}^{\Pi}, \end{cases} \\
\tilde{\lambda}^{\Pi} &= \frac{\lambda^{\Pi}(d^{\max} + g^{\max})}{1 + \lambda^{\Pi}(d^{\max} - d^{\min}) + \mu^{\Pi}(g^{\max} - g^{\min})}, \quad \tilde{\mu}^{\Pi} = \frac{\mu^{\Pi}}{\tilde{\lambda}^{\Pi}},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где g^* и $\tilde{d}$ – соответственно оптимальное управление игрока П и предполагаемое им оптимальное управление игрока Б, основанные на наблюдениях игрока П; $\hat{p}_k^{\Pi}(1)$ – апостериорная вероятность состояния структуры $s_k = 1$.

2. Классификатор структуры:

$$\hat{p}_k^{\Pi}(s_k) = \frac{\vartheta_k^{\Pi}(s_k)}{\sum_{s_k} \vartheta_k^{\Pi}(s_k)}, \quad \hat{p}_0^{\Pi}(s_0) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } s_0 = 1, 2, \\ 0 & \text{при } s_0 = 3, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\vartheta_k^{\Pi}(1) = \tilde{p}_k^{\Pi}(s_k) \pi^{\Pi}(\tilde{s}^{\Pi} | s_k), \quad s_k = \overline{1, 3};$$

$$\tilde{p}_{k+1}^{\Pi}(1) = [\hat{p}(1) + \tilde{d} \hat{p}(3)]_k^{\Pi},$$

$$\tilde{p}_{k+1}^{\Pi}(2) = [\hat{p}(2) + \tilde{d} \hat{p}(3)]_k^{\Pi}, \tag{2.20}$$

$$\tilde{p}_{k+1}^{\Pi}(3) = [g^*(\hat{p}(1) + \hat{p}(2)) + (1 - 2\tilde{d})\hat{p}(3)]_k^{\Pi}.$$

3. Идентификатор структуры:

$$\hat{s}_k^{\Pi} = \arg \max_{s_k} \hat{p}_k^{\Pi}(s_k). \tag{2.21}$$

Заключение. Представлены взаимосвязанные информационно-управляющие алгоритмы соседних участников группы БПЛА, наводящихся на группу неподвижных объектов по заданным траекториям. Часть объектов является истинными целями, часть – ложными целями, создаваемые

мыми с помощью имитационных помех. Кроме того, противодействие осуществляется путем постановки маскирующих помех, прерывающих поступление информации в системе управления БПЛА.

Задача построения алгоритмов поставлена и решена как антагонистическая стохастическая многошаговая игра в чистых стратегиях в системах ССС [8] двух противников (игроков) Б и П, управляющих процессом наведения. Игрок Б оптимизирует свое управление по минимаксному критерию, а игрок П — по максиминному критерию, основываясь каждый на показаниях своих измерителей и индикаторов.

Алгоритмы игроков основаны на теории систем ССС. Алгоритм игрока Б осуществляет распознавание помеховых ситуаций, оценивание координат объектов и соседних участников группы БПЛА и управление БПЛА для выполнения требуемых точности наведения и дистанции между соседними БПЛА.

Алгоритм игрока П осуществляет распознавание и управление перерывами информации, ухудшая тем самым точность наведения и соблюдение требуемой дистанции между соседними БПЛА.

Рассмотренная задача представляет собой игру с неполной информацией, ненулевой суммой и без седловой точки вследствие неодинаковости информированности игроков о состоянии игры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдинов В.А., Бухалёв В.А., Скрынников А.А. Система взаимосвязанного управления группой беспилотных летательных аппаратов в условиях информационного противодействия // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 6. С. 11–19.
2. Баханов Л.Е., Давыдов А.Н., Корниенко В.Н. и др. Системы управления вооружением истребителей. Основы интеллекта многофункционального самолета / Под ред. Е.А. Федосова. М.: Машиностроение, 2005.
3. Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д. Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд. МАИ, 2015.
4. Бухалёв В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
5. Piers B. D., Swarder D. D. Bayes and Minimax Controllers for a Linear Systems for Stochastic Jump Parameters // IEEE Trans. AC-16. 1971. № 4. P. 677–685.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
7. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2021.
8. Moon J.A Sufficient Condition for Linear-Quadratic Stochastic Zero-Sum Differential Games for Markov Jump Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64. № 4. P. 1619–1626.
9. Оуэн Г. Теория игр. М.: Вузовская книга, 2007.
10. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 681.514.5

ОПЕРАТИВНОЕ АБСОЛЮТНО ОПТИМАЛЬНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ПО ЕГО ВЫХОДУ

© 2023 г. Е. А. Руденко^{а,*}

^аМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.10.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается задача синтеза оптимального в среднем закона управления динамическим объектом, который подвержен действию случайных возмущений, если переменные его состояния измеряются частично или со случайными погрешностями. Используя метод апостериорных достаточных координат, описана сложность построения известного интервально-оптимального регулятора Мортенсена и получен существенно более простой алгоритм нахождения его оперативно-оптимального аналога. Новый регулятор не требует решения в обратном времени соответствующего уравнения Беллмана, так как оптимален в смысле переменного во времени критерия. Это позволяет не учитывать информацию о будущем поведении объекта и сводит процедуру нахождения зависимости управления от достаточных координат к интегрированию в прямом времени уравнения типа Фоккера–Планка–Колмогорова и к решению задачи параметрического нелинейного программирования. Применение полученного алгоритма демонстрируется на примере линейно-квадратично-гауссовской задачи, в результате решения которой сформулирована новая оперативная версия известной теоремы разделения. Она представляет стохастическое устройство управления как соединение линейного фильтра Калмана–Бьюси и линейного оперативно-оптимального позиционного регулятора. Последний отличается от традиционного интервально-оптимального регулятора известностью своего коэффициента усиления и не требует решения в обратном времени соответствующего матричного уравнения Риккати.

DOI: 10.31857/S0002338823020166, EDN: JDIVKJ

Введение. Как известно, решением задачи синтеза управления объектом, оптимального в среднем и на определенном интервале времени, в случае отсутствия точных измерений всех переменных его состояния является динамическое преобразование измерений в управление [1–6]. Оно состоит из инерционного стохастического фильтра Стратоновича, который накапливает информацию об измерениях, преобразуя их в апостериорную плотность вероятности неизмеряемого вектора состояния объекта, и безынерционного детерминированного регулятора Мортенсена, который в каждый момент времени вычисляет управление по сечению (мгновенному виду) апостериорной плотности в этот момент времени. На такой закон управления никакие ограничения вроде объема используемой памяти и скорости обработки измерений не накладываются. Поэтому будем называть подобные устройства управления *абсолютно оптимальными*, подчеркивая этим их способность обеспечивать достижение глобального экстремума соответствующего критерия качества управления. Эффективность же других устройств, учитывающих какие-либо ограничения, например конечномерность [7], будет заведомо хуже, но при их лучшей реализуемости.

Однако процедура *построения* интервально-оптимального регулятора Мортенсена весьма сложна из-за необходимости находить функционал от апостериорной плотности. В этом случае метод динамического программирования приводит к необходимости решать весьма сложное уравнение Беллмана–Мортенсена в вариационных производных Фреше. Только замена апостериорной плотности вероятности соответствующими ей достаточными координатами (статистиками) неизмеряемого состояния объекта в виде всех его условных моментов, квазимоментов или кумулянтов приводит к поиску функции Беллмана из уравнения в частных производных. Хотя

эта функция и имеет бесконечное количество аргументов, но, ограничиваясь достаточными координатами только нескольких младших порядков, можно найти некоторое приближение к абсолютно оптимальному регулятору.

Таким способом в частном случае *линейно-квадратично-гауссовской* (ЛКГ) задачи неограниченного управления удалось доказать теорему (принцип) разделения [3, 4, 6, 8], согласно которой оптимальное устройство управления Стратоновича–Мортенсена распадается на два легко получаемых и реализуемых блока. Первым из них является линейный стохастический фильтр Калмана–Бьюси, оптимальный в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценивания в каждый момент времени. Синтез фильтра сводится к решению независимого от измерений *прямого* (в прямом времени) дифференциального уравнения Риккати для матрицы ковариаций этой ошибки, которое учитывает только параметры управляемой системы. Вторым представляет собой линейный позиционный регулятор, оптимальный в смысле детерминированной версии квадратичного критерия качества управления. Построение этого регулятора требует решения своего *обратного* (в обратном времени) уравнения Риккати, которое учитывает еще и весовые матрицы критерия. Но нарушение любого из четырех довольно жестких условий этой теоремы приводит к необходимости все же решать уравнение Беллмана.

В работе предлагается более простая процедура синтеза абсолютно оптимального безынерционного регулятора, который тоже использует апостериорные достаточные координаты, но оптимален в несколько другом смысле. Традиционный интервальный критерий оптимальности, обеспечивающий управление объектом на всем заранее заданном интервале времени, а потому от времени не зависящий, заменяется похожим критерием, но зависящим от времени. Это позволяет учитывать информацию только о прошлом и текущем состоянии объекта, оперативно меняя закон управления при чем-либо вызванных изменениях его будущего поведения. Кроме того, переменный критерий оптимальности существенно упрощает процедуру синтеза регулятора, позволяя отказаться от решения уравнения Беллмана. В частности, в доказанной ниже оперативной теореме разделения коэффициент усиления соответствующего линейного позиционного регулятора оказывается известным из условий задачи. Подобный эффект от оперативного критерия в нелинейном детерминированном случае продемонстрирован в [9]. Кроме того, процедура синтеза стохастического оперативно-оптимального конечномерного устройства управления, который учитывает требования к скорости обработки измерений, а потому не является абсолютно оптимальным, описана в [7].

1. Постановки задачи. Рассмотрим две задачи управления динамическими объектами в предположении марковости и диффузионности (отсутствия скачков) их векторов состояния, для описания которых будем использовать стохастические дифференциальные уравнения Ито.

Пусть $t \geq 0$ – время, X_t – n -мерный не измеряемый вектор состояния объекта управления, Y_t – m -мерный вектор его измеряемого выхода, U_t – l -мерный вектор кусочно-непрерывного управления из в общем случае ограниченной области Ω , V_t – k -мерный вектор непрерывных возмущений в виде центрированного и нормированного белого шума.

1.1. Управление по неполным точным измерениям. Эта задача возникает в случае, когда имеет место *парная* марковская модель объекта управления в виде системы из двух взаимозависимых уравнений для его общего вектора состояния (X_t, Y_t) :

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= a(t, X_t, Y_t, U_t) + B(t, X_t, Y_t, U_t)V_t, & \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} &\sim p_0(x, y). \\ \dot{Y}_t &= c(t, X_t, Y_t, U_t) + D(t, Y_t, U_t)V_t, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и далее производные случайных функций по времени t будем понимать как отношение их стохастического дифференциала Ито вроде dX_t к дифференциалу времени, например $\dot{X}_t = dX_t/dt$. В этом смысле белый шум является производной $V_t = dW_t/dt$ соответствующего стандартного винеровского процесса W_t .

В (1.1) плотность распределения вероятности $p_0(x, y)$ начальных условий X_0, Y_0 известна не полностью, а лишь с точностью до условной плотности вероятности $\rho_0(x|y)$ начального значения неизмеряемого вектора X_0 , тогда как маргинальная (частная) плотность вероятности $q_0(y)$ измеряемого вектора Y_0 может быть произвольной:

$$p_0(x, y) = \rho_0(x|y)q_0(y) \quad \forall q_0(y). \quad (1.2)$$

Требуется найти не упреждающую зависимость управления U_t объектом (1.1), (1.2) от всех предыдущих измерений $Y_0^t = \{Y_\tau | \tau \in [0, t)\}$ и выполненных управлений $U_0^t = \{U_\tau | \tau \in [0, t)\}$ как таковой их функционал:

$$U_t = \vartheta(t, Y_0^t, U_0^t), \quad (1.3)$$

который обеспечивает минимум некоторому критерию качества управления состоянием объекта. В зависимости от объема располагаемой информации о процессе управления будем различать два вида таких критериев.

Обычно требуется минимизация *постоянного* во времени критерия оптимальности, задаваемого как среднее значение полученной на всем заданном отрезке времени $t \in [0, T]$ суммы случайных интегральных и терминальных потерь от управления:

$$J[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^T \mu(\tau, X_\tau, Y_\tau, U_\tau) d\tau + v(X_T, Y_T) \right] \rightarrow \min \quad \forall q_0(y). \quad (1.4)$$

Здесь M — оператор математического ожидания, конечный момент времени T будем считать, для простоты, фиксированным, а функции потерь являются неотрицательными $\mu(t, x, y, u) \geq 0$, $v(x, y) \geq 0$. Далее такой критерий будем называть *интервальным* (И-критерий).

Однако получаемое с его помощью управление (1.3) хоть и является не упреждающим, но в каждый текущий момент времени t требует информации о процессе функционирования объекта и в будущем, на интервале времени $(t, T]$. Это проявляется в использовании при решении задачи предварительного знания функций его уравнений (1.1) на *всем интервале* управления $[0, T]$, которое наблюдается при применении соответствующих стохастических версий как принципа максимума Понтрягина, так и метода динамического программирования Беллмана. Более того, функции потерь критерия (1.4) штрафуют и возможное будущее поведение объекта управления. Таким образом, использование критерия (1.4) требует полной информации как об уравнениях объекта, так и функциях потерь критерия оптимальности на всем плановом отрезке времени управления $[0, T]$.

В отличие от такой традиционной постановки задачи управления в последнее время усилился интерес к оптимизации *переменного* во времени критерия [7, 9]

$$I_t[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^t \varphi(\tau, X_\tau, Y_\tau, U_\tau) d\tau + \psi(t, X_t, Y_t) \right] \rightarrow \min \quad \forall q_0(y), \quad (1.5)$$

с функциями потерь $\varphi(t, x, y, u) \geq 0$, $\psi(t, x, y) \geq 0$, который будем называть *оперативным* (О-критерий). В отличие от И-критерия (1.4) он уже *не штрафует* неизвестное будущее поведение объекта и, как показало исследование его детерминированного аналога [9], получаемое с его помощью управление *не использует информации* об этом будущем. В результате внезапно возникшие в уравнениях объекта изменения *не требуют пересчета* всего закона оптимального управления им, а вид функций потерь $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ этого критерия можно, по мере необходимости, изменять со временем без какого-либо их влияния на предыдущее управление. Применение такого критерия в стохастической задаче синтеза *конечномерного* динамического устройства управления продемонстрировано в [7].

1.2. Управление по измерениям со случайными погрешностями. Такая более популярная задача возникает, если имеет место *скрытая* марковская модель объекта управления, когда измеряемый выход Y_t не влияет на неизмеряемое состояние X_t . В таком случае система уравнений (1.1) распадается на независимое от измерений Y_t уравнение состояния объекта с полностью известным начальным условием

$$\dot{X}_t = a(t, X_t, U_t) + B(t, X_t, U_t)V_t, \quad X_0 \sim p_0(x) \quad (1.6)$$

и зависимое только от состояния X_t и управления U_t уравнение измерителя этого состояния

$$\dot{Y}_t = c(t, X_t, U_t) + D(t, U_t)V_t, \quad Y_0 = 0, \quad (1.7)$$

причем его нулевое начальное условие общности измерений не ограничивает.

Тогда для синтеза закона управления (1.3) только состоянием объекта (1.6) И-критерий (1.4) не должен штрафовать сами измерения, поэтому он принимает вид

$$J[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^T \mu(\tau, X_\tau, U_\tau) d\tau + v(X_T) \right] \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

Аналогично изменяется и О-критерий (1.5):

$$I_l[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^t \varphi(\tau, X_\tau, U_\tau) d\tau + \psi(t, X_t) \right] \rightarrow \min. \quad (1.9)$$

Формально уравнения (1.6), (1.7) и критерии (1.8), (1.9) отличаются от системы уравнений (1.1) и критериев (1.4), (1.5) лишь независимостью определяющих их функций от переменной выхода y . Поэтому и весь алгоритм решения этой задачи может быть получен из результатов решения предыдущей простым удалением из них этой переменной.

2. Апостериорная плотность и достаточные координаты. Синтез абсолютно оптимального закона управления основан на использовании наиболее полной информации о возможных значениях случайного вектора X_t , которая получена в результате всех произведенных к моменту времени t измерений Y_0^t и выполненных управлений U_0^t . Эта информация содержится в случайных значениях $\rho(t, x | Y_0^t, U_0^t)$ функционала условной плотности вероятности $\rho(t, x | y_0^t, u_0^t)$, определенной в результате регистрации измерений $Y_0^t = y_0^t$ и управлений $U_0^t = u_0^t$. Называемая поэтому *апостериорной плотностью вероятности* (АПВ), случайная функция

$$P(t, x) = \rho(t, x | Y_0^t, U_0^t)$$

удовлетворяет сложному стохастическому *интегродифференциальному уравнению* (ИДУ) Стратоновича—Кушнера. Последнее является уравнением состояния *абсолютно оптимального фильтра* (АОФ) Стратоновича, который представляет собой динамическое устройство с распределенными параметрами. Поэтому практическое использование АПВ как функции его состояния весьма затруднительно.

Выход состоит в замене АПВ вектором зависящих только от времени t статистик S_t неизменяемого вектора X_t в виде числовых характеристик АПВ, называемых *достаточными координатами* (ДК) [1]. Ими могут быть бесконечные последовательности соответствующих условных моментов, квазимоментов или кумулянтов [10, 11]. Каждая из них, являясь функционалом измерений и управлений, определяется по АПВ с помощью определенной производящей вектор-функции $\xi(x)$ как ее апостериорное среднее:

$$S_t = \hat{\xi}(t, Y_0^t, U_0^t) = M[\xi(X_t) | Y_0^t, U_0^t] = \int \xi(x) P(t, x) dx. \quad (2.1)$$

Например, производящая функция начальных моментов содержит все степени элементов усредняемого вектора $\xi(x) = [x_i, x_i x_j, x_i x_j x_k, \dots]_{i,j,k,\dots=1,n}$. Далее символом “ $\wedge$ ” над именами и других функций будем отмечать результаты их *апостериорного усреднения*:

$$\hat{\eta}(t, Y_0^t, U_0^t) = M[\eta(t, x, Y_t, U_t) | Y_0^t, U_0^t] = \int \eta(t, x, Y_t, U_t) P(t, x) dx, \quad (2.2)$$

а подобные интегралы считать определенными, берущимися по всему евклидову пространству соответствующей размерности:

$$\int \alpha(x) dx \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx.$$

Восстановление АПВ по ДК выполняется по формуле

$$\rho(t, x | Y_0^t, U_0^t) = \pi(t, x, S_t), \quad (2.3)$$

где в качестве функции $\pi(\cdot)$ выступает функциональный ряд Эджворта или Грама—Шарлье.

Второе преимущество ДК, кроме их зависимости только от времени, состоит в возможности “урезания” бесконечных последовательностей квазимоментов или кумулянтов волевым обнулением (отбрасыванием) старших из них, начиная с некоторого порядка $L = 3, 4, \dots$. Это позволяет

получать приближенные решения задач, улучшая точность за счет увеличения порядка L . Недостатком такой процедуры является факториально быстрый рост размерности урезанного вектора $S_t^{(L)}$, определяемый по формуле [10]

$$\dim S_t^{(L)} = n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+L-1)}{L!} = \frac{(n+L)!}{n!L!} - 1,$$

где n — размерность вектора X_t .

Приведем уравнения, которым удовлетворяют ДК в двух рассматриваемых случаях.

2.1. **Неполные измерения.** Если объект управления определяется соотношениями (1.1), (1.2), то АПВ является решением следующего стохастического ИДУ в частных производных [4, 10, 11]:

$$\frac{\partial P(t, x)}{\partial t} = K_x^{Y_t, U_t} [P] + \left[(c - \hat{c})^T P - \nabla_x^T (\Sigma P) \right] R^{-1} (\dot{Y}_t - \hat{c}) \quad (2.4)$$

с известным начальным условием

$$P(0, x) = \rho_0(x | Y_0) \quad (2.5)$$

и с естественными нулевыми граничными условиями на бесконечности для нее самой $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(t, x) = 0$ и для вектора потока ее вероятности $\Pi = aP - 0.5[\nabla_x^T(QP)]^T$. Здесь $K_x^{y, u}$ — прямой производящий дифференциальный оператор *Фоккера—Планка—Колмогорова* (ФПК) управляемого диффузионного процесса X_t , в обозначении которого верхние индексы подчеркивают зависимости его коэффициентов от соответствующих переменных, а нижний — переменную, по которой им осуществляется дифференцирование:

$$K_x^{y, u} [P(t, x)] = -\nabla_x^T [a(t, x, y, u)P(t, x)] + 0.5 \text{tr} [\nabla_x \nabla_x^T [Q(t, x, y, u)P(t, x)]],$$

тогда как $Q = BB^T$, $R = DD^T$, $\Sigma = BD^T$ — матрицы условных интенсивностей собственных и взаимных возмущений элементов X_t , Y_t вектора состояния объекта (1.1). При этом в уравнении (2.4) функции $a(\cdot)$, $c(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $\Sigma(\cdot)$ зависят от аргументов (t, x, Y_t, U_t) , а не зависят от переменной x только функции $\hat{c} = \hat{c}(t, Y_0^t, U_0^t)$, $R = R(t, Y_t, U_t)$.

Для нахождения соответствующего уравнения для вектора ДК, определяющего состояние АОФ Стратоновича, продифференцируем по времени его связь с АПВ (2.1) и подставим в нее (2.4). Получаем

$$\dot{S}_t = \int \xi(x) \left\{ K_x^{Y_t, U_t} [P] + \left[(c - \hat{c})^T P - \nabla_x^T (\Sigma P) \right] R^{-1} (\dot{Y}_t - \hat{c}) \right\} dx$$

или, учитывая независимость множителя $R^{-1}(\dot{Y}_t - \hat{c})$ от переменной интегрирования,

$$\dot{S}_t = \int \xi K_x^{Y_t, U_t} [P] dx + \left[\int [\xi c^T - \xi \hat{c}^T] P dx - \int \xi \nabla_x^T (\Sigma P) dx \right] R^{-1} (\dot{Y}_t - \hat{c}).$$

Избавляясь здесь от частных производных АПВ по x вычислением первого и третьего интеграла по частям, с учетом упомянутых выше нулевых граничных условий для АПВ находим

$$\dot{S}_t = \int K_x^{*Y_t, U_t} [\xi] P dx + [(\widehat{\xi c^T} - \widehat{\xi \hat{c}^T}) + \int (\xi_x \Sigma) P dx] R^{-1} (\dot{Y}_t - \hat{c}), \quad (2.6)$$

где $K_x^{*y, u}$ — сопряженный к оператору $K_x^{y, u}$ обратный производящий оператор процесса X_t :

$$K_x^{*y, u} = a^T \nabla_x + 0.5 \text{tr} [Q \nabla_x \nabla_x^T],$$

причем результат его действия на вектор-функцию $\xi(x) = [\xi^{(i)}(x)]_{i=1,2,\dots}$ следует понимать поэлементно как $K_x^{*y, u} [\xi] = [K_x^{*y, u} [\xi^{(i)}]]_{i=1,2,\dots}$, а $\xi_x = (\nabla_x \xi^T)^T$ — матрица Якоби первых частных производных вектор-функции $\xi(x)$. Поэлементная запись выражения (2.6) имеет вид

$$\dot{S}_t^{(i)} = \int K_x^{*y, u} [\xi^{(i)}] P dx + \left[(\widehat{\xi^{(i)} c^T} - \widehat{\xi^{(i)} \hat{c}^T}) + \int [\xi_x^{(i)T} \Sigma] P dx \right] R^{-1} (\dot{Y}_t - \hat{c}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

и при отсутствии управления она совпадает с формулой для стохастического дифференциала апостериорного среднего $\hat{\xi}^{(i)}(\cdot)$, непосредственно полученной в [10, с. 401].

Наконец, заменяя АПВ функцией $\pi(\cdot)$ ее восстановления (2.3) по ДК, получаем, что апостериорное среднее (2.2) из функционала прошлых измерений и управлений превращается в обычную функцию

$$\hat{\eta}(t, y, u, s) = \int \eta(t, x, y, u) \pi(t, x, s) dx, \quad (2.7)$$

а соотношение (2.6) принимает вид искомого уравнения состояния АОФ [4]:

$$\dot{S}_t = h(t, Y_t, U_t, S_t) + \Theta(t, Y_t, U_t, S_t) [\dot{Y}_t - \hat{c}(t, Y_t, U_t, S_t)]. \quad (2.8)$$

Здесь функция смещения $h(\cdot)$ и коэффициент усиления измерения $\Theta(\cdot)$ вычисляются по использующим исходные данные (1.1) формулам

$$h(t, y, u, s) = \int K_x^{*y, u} [\xi(x)] \pi(t, x, s) dx, \\ \Theta(t, y, u, s) = \left[(\hat{\xi} c^T - \hat{\xi} \hat{c}^T) + \int (\xi_x \Sigma) \pi(t, x, s) dx \right] R^{-1}(t, y, u).$$

Начальным же условием для уравнения (2.8) является, согласно (2.1), (2.5), случайная величина

$$S_0 = \hat{\xi}(Y_0) = \int \xi(x) p_0(x | Y_0) dx. \quad (2.9)$$

В результате уравнение состояния АОФ из интегродифференциального (2.4) преобразовано в дифференциальное (2.8), что существенно облегчает решение задачи управления.

2.2. Стохастические измерения. Пусть теперь объект управления определяется уравнениями (1.6), (1.7). Тогда из-за независимости их функций $a(\cdot)$, $B(\cdot)$, $c(\cdot)$, $D(\cdot)$, $p_0(\cdot)$ от вектора измерений Y_t уравнение состояния АОФ (2.8) и его начальное условие (2.9) упрощаются соответственно:

$$\dot{S}_t = h(t, U_t, S_t) + \Theta(t, U_t, S_t) [\dot{Y}_t - \hat{c}(t, U_t, S_t)], \quad S_0 = \hat{\xi}_0 = \int \xi(x) p_0(x) dx, \quad (2.10)$$

причем структурные функции этого уравнения определяются по формулам

$$h(t, u, s) = \int K_x^{*u} [\xi(x)] \pi(t, x, s) dx, \\ \Theta(t, u, s) = \left[(\hat{\xi} c^T - \hat{\xi} \hat{c}^T) + \int (\xi_x \Sigma) \pi(t, x, s) dx \right] R^{-1}(t, u), \\ \hat{\eta}(t, u, s) = \int \eta(t, x, u) \pi(t, x, s) dx.$$

3. Интервально-оптимальный регулятор. Представим основанные на применении ДК известные решения обеих задач оптимального управления с И-критериями [4].

3.1. Неполные измерения. Сначала рассмотрим задачу (1.1)–(1.4). Согласно (2.1), вектор S_t информативно эквивалентен всем прошлым измерениям Y_0^t и управлениям U_0^t , поэтому текущее управление U_t можно искать не как их инерционный функционал (1.3), а как позиционную версию регулятора Мортенсена в виде безынерционной зависимости управления от последнего измерения и текущего вектора ДК:

$$U_t = u(t, Y_t, S_t). \quad (3.1)$$

Тогда, исключая переменную U_t из уравнений (1.1), (2.8), получим замкнутую систему из трех уравнений Ито:

$$\dot{X}_t = a^u(t, X_t, Y_t, S_t) + B^u(t, X_t, Y_t, S_t) V_t, \\ \dot{Y}_t = c^u(t, X_t, Y_t, S_t) + D^u(t, Y_t, S_t) V_t, \\ \dot{S}_t = e^u(t, X_t, Y_t, S_t) + F^u(t, Y_t, S_t) V_t. \quad (3.2)$$

Здесь функции сноса и диффузии третьего уравнения имеют вид

$$e''(t, x, y, s) = h''(t, y, s) + \Theta''(t, y, s)[c''(t, x, y, s) - \hat{c}''(t, y, s)],$$

$$F''(t, y, s) = \Theta''(t, y, s)D''(t, y, s),$$

а верхним индексом “ u ” отмечены сложные функции своих аргументов, содержащие функцию выхода $u(\cdot)$ регулятора (3.1), например

$$a''(t, x, y, s) = a(t, x, y, u(t, y, s)). \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что случайный процесс (X_t, Y_t, S_t) является марковским со следующей вектор-функцией сноса $\omega(\cdot)$ и матричной функцией диффузии $\Upsilon(\cdot)$:

$$\omega''(t, x, y, s) = \begin{bmatrix} a''(t, x, y, s) \\ c''(t, x, y, s) \\ e''(t, x, y, s) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon''(t, x, y, s) = \begin{bmatrix} B''(t, x, y, s) \\ D''(t, y, s) \\ F''(t, y, s) \end{bmatrix}.$$

Его совместная плотность вероятности $r(t, x, y, s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению ФПК:

$$\frac{\partial r(t, x, y, s)}{\partial t} = K''_{xys}[r] \triangleq -\nabla^T(\omega''r) + 0.5\text{tr}[\nabla\nabla^T(\Upsilon''\Upsilon''^Tr)], \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

где $\nabla = (\nabla_x^T, \nabla_y^T, \nabla_s^T)^T$ — оператор общего градиента, или соответствующему интегродифференциальному тождеству ФПК [12, 13]:

$$\frac{d}{dt} \iiint \eta r dx dy ds = \iiint \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + K''_{xys}[\eta] \right) r dx dy ds \quad \forall \eta(t, x, y, s) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}, \quad (3.5)$$

в котором сопряженный к K''_{xys} обратный производящий оператор K''_{xys}^* этого же процесса определим более подробным выражением:

$$K''_{xys}^*[\eta] = a''^T \eta_x + c''^T \eta_y + e''^T \eta_s + 0.5\text{tr}[Q'' \eta_{xx}] + 0.5\text{tr}[2\Sigma''^T \eta_{xy} + R'' \eta_{yy}] + \\ + 0.5\text{tr}[2\Theta'' \Sigma''^T \eta_{xs} + 2\Theta'' R'' \eta_{ys} + \Theta'' R'' \Theta''^T \eta_{ss}]. \quad (3.6)$$

Начальное значение совместной плотности $r(\cdot)$, согласно (1.2), (2.9), задано частично:

$$r(0, x, y, s) = \rho_0(x|y)q_0(y)\delta[s - \hat{\xi}(y)], \quad (3.7)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, а плотность $q_0(y)$ является произвольной.

Подобным соотношениям, но с другим начальным условием удовлетворяет и характеризующая переход этого процесса за интервал времени $[t, \theta]$ из состояния $(X_t = x, Y_t = y, S_t = s)$ в состояние $(X_\theta = \tilde{x}, Y_\theta = \tilde{y}, S_\theta = \tilde{s})$ плотность вероятности перехода $p(\theta, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s} | t, x, y, s)$. Она позволяет определить функцию будущих *априорных* средних потерь $w(t, x, y, s)$ как ту часть минимизируемого И-критерия общих потерь (1.4), которые будут получены за оставшееся время управления $\theta \in [t, T]$ при старте из любого текущего состояния $(X_t = x, Y_t = y, S_t = s)$:

$$w(t, x, y, s) = \int_t^T d\theta \iiint \mu''(\theta, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) p(\theta, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s} | t, x, y, s) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{s} + \iiint v(\tilde{x}, \tilde{y}) p(T, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s} | t, x, y, s) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{s}.$$

Однако эта функция зависит от значения x неизменяемого вектора X_t . Не зависящим от него является ее *апостериорное* среднее:

$$W(t, y, s) = \hat{w}(t, y, s) = \int w(t, x, y, s) \pi(t, x, s) dx,$$

которое удовлетворяет следующему уравнению Беллмана [4]:

$$-\frac{\partial W(t, y, s)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \left\{ \hat{u} + \hat{c}^T W_y + h^T W_s + 0.5\text{tr} \left(\begin{bmatrix} W_{yy} & W_{ys} \\ W_{sy} & W_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & R\Theta^T \\ \Theta R & \Theta R \Theta^T \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (3.8)$$

с конечным условием в виде *апостериорного* среднего терминального члена критерия

$$W(T, y, s) = \hat{v}(T, y, s) = \int v(x, y) \pi(T, x, s) dx \quad (3.9)$$

и следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \hat{c}(t, y, u, s) = \int c(t, x, y, u) \pi(t, x, s) dx, & R &= D(t, y, u) D^T(t, y, u), \\ \hat{\mu} &= \hat{\mu}(t, y, u, s) = \int \mu(t, x, y, u) \pi(t, x, s) dx, & h &= h(t, y, u, s), & \Theta &= \Theta(t, y, u, s). \end{aligned}$$

Однако, как обычно, процедура применения уравнения Беллмана (3.8) требует выполнения двух весьма сложных операций. Во-первых, необходимо найти частный минимум по переменной u функции $f(\cdot)$ его правой части:

$$v(t, y, s, W) = \arg \min_{u \in \Omega} f(t, y, s, u, W) \quad \forall t, y, s, W.$$

Во-вторых, следует решить в обратном времени, учитывая конечное условие (3.9), полученное в результате уравнение в частных производных, найдя тем самым функцию Беллмана $W(t, y, s)$. Наконец, подставляя ее в функцию частного минимума, получим искомую функцию безынерционной версии регулятора Мортенсена:

$$u(t, y, s) = v[t, y, s; W(t, y, s)].$$

Подчеркнем, что уравнение АОФ Стратоновича (2.8) при синтезе этого регулятора решать не требуется. Оно используется только на следующем этапе реализации оптимального устройства управления, поставляя информацию регулятору Мортенсена (3.1) для получения управления U_t и учитывая это управление в своих структурных функциях $h(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $\hat{c}(\cdot)$ для соответствующей коррекции своего состояния S_t .

3.2. Стохастические измерения. Если же имеет место более простая задача управления (1.6)–(1.8), то из-за отсутствия в ней влияния измерения Y_t на состояние X_t объекта и на значение И-критерия J можно, в отличие от (3.1), искать управление без непосредственного учета измерения как функцию только ДК:

$$U_t = u(t, S_t). \quad (3.10)$$

Тогда, учитывая соответствующее уравнение АОФ (2.10), вместо трех уравнений Ито (3.2) удастся ограничиться рассмотрением только двух:

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= a''(t, X_t, S_t) + B''(t, X_t, S_t) V_t, & X_0 &\sim p_0(x), \\ \dot{S}_t &= e''(t, X_t, S_t) + F''(t, S_t) V_t, & S_0 &= \hat{\xi}_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

с такими функциями второго из них:

$$\begin{aligned} e''(t, x, s) &= h''(t, s) + \Theta''(t, s) [c''(t, x, s) - \hat{c}''(t, s)], \\ F''(t, s) &= \Theta''(t, s) D''(t, s). \end{aligned}$$

Поэтому процесс (X_t, S_t) марковский, а его плотность вероятности $r(t, x, s)$ удовлетворяет аналогичному (3.5) тождеству ФПК:

$$\frac{d}{dt} \iint \eta r dx ds = \iint \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xs}^{*u}[\eta] \right) r dx ds \quad \forall \eta(t, x, s) \in \mathbb{C}^{1,2,2} \quad (3.12)$$

с полностью заданным начальным условием $r(0, x, s) = \rho_0(x) \delta(s - \bar{\xi}_0)$ и с оператором

$$K_{xs}^{*u}[\eta] = a^{uT} \eta_x + e^{uT} \eta_s + 0.5 \text{tr}[Q'' \eta_{xx}] + 0.5 \text{tr}[2\Theta'' \Sigma^{uT} \eta_{xs} + \Theta'' R'' \Theta^{uT} \eta_{ss}].$$

В результате уравнение Беллмана (3.8) и его конечное условие (3.9) тоже принимают более простой вид

$$-\frac{\partial W(t, s)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \{ \hat{\mu} + h^T W_s + 0.5 \text{tr}[W_{ss} \Theta R \Theta^T] \}, \quad W(T, s) = \hat{v}(T, s). \quad (3.13)$$

Однако процедура его решения остается по-прежнему весьма сложной. Аналитически оно решено только в весьма частном случае ЛКГ-задачи неограниченного управления, которая будет рассмотрена в разд. 5.

4. Оперативно-оптимальный регулятор. Приступим теперь к решению двух новых задач синтеза аналогов регулятора Мортенсена, оптимальных в смысле изменяющихся во времени О-критериев качества (1.5) или (1.9).

4.1. **Неполные измерения.** Снова рассмотрим *парную* марковскую модель объекта управления (1.1) с начальными условиями (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= a(t, X_t, Y_t, U_t) + B(t, X_t, Y_t, U_t)V_t, & \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} &\sim \rho_0(x|y)q_0(y), \\ \dot{Y}_t &= c(t, X_t, Y_t, U_t) + D(t, Y_t, U_t)V_t, \end{aligned}$$

для которой уравнение АОФ имеет вид (2.8) с начальным условием (2.9). Для этого объекта также будем искать уравнение безынерционного регулятора (3.1):

$$U_t = u(t, Y_t, S_t), \quad (4.1)$$

но от последнего потребуем оптимальности в смысле О-критерия (1.5), который в результате подстановки в него выражения (4.1) принимает вид

$$I_t = M \left[\int_0^t \varphi''(\tau, X_\tau, Y_\tau, S_\tau) d\tau + \psi(t, X_t, Y_t) \right]. \quad (4.2)$$

В таком случае вместо метода динамического программирования приходится использовать метод припасовывания, состоящий в последовательной оптимизации сначала стартового значения критерия

$$I_0 = M[\psi(0, X_0, Y_0)] = \int \psi(0, x, y) \rho_0(x|y) q_0(y) dx dy,$$

которое в данном случае от выбора управления не зависит, а затем и приращения этого критерия за каждый сколь угодно малый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t \downarrow 0$. Последнее, как показано в [7, 13], сводится к минимизации скорости изменения этого функционала в любой момент времени:

$$\dot{I}_t \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3)$$

что известно как *условие локальной оптимальности*. Заметим, что вследствие неотрицательности самого критерия $I_t \geq 0$ эта скорость ограничена снизу $\dot{I}_t > -\infty$, так что ее минимум существует.

Для нахождения зависимости $\dot{I}_t$ от искомой функции регулятора $u(\cdot)$ представим критерий (4.2) через плотность вероятности $r(t, x, y, s)$ случайных аргументов усредняемых в нем функций потерь:

$$I_t = \int_0^t \langle \varphi''(\tau, x, y, s), r(\tau, x, y, s) \rangle d\tau + \langle \psi(t, x, y), r(t, x, y, s) \rangle. \quad (4.4)$$

Здесь для краткости символом $\langle \eta, r \rangle$ обозначен интеграл от произведения функций $\eta(\cdot)$ и $r(\cdot)$, который в данном случае имеет смысл математического ожидания (среднего значения) первой из них:

$$\langle \eta, r \rangle = \iiint \eta(t, x, y, s) r(t, x, y, s) dx dy ds = M[\eta(t, X_t, Y_t, S_t)]. \quad (4.5)$$

Дифференцируя равенство (4.4) по времени, имеем $\dot{I}_t = \langle \varphi'', r \rangle + d \langle \psi, r \rangle / dt$ или, используя во втором слагаемом этой суммы тождество ФПК (3.5), находим вид производной критерия:

$$\dot{I}_t = \left\langle \varphi'' + \frac{\partial \psi}{\partial t} + K_{xy's}^{*u}[\psi], r \right\rangle.$$

Искомая функция входит в это выражение только в виде ее сечения $u(t, \cdot)$ при фиксированном t . Так как слагаемое $\langle \partial \psi / \partial t, r \rangle$ от него не зависит, то, согласно (4.3), достаточно минимизировать функционал

$$\Xi_t[u(t, \cdot)] = \langle \varphi'' + K_{xys}^{*u}[\psi], r \rangle \rightarrow \min_{u(t, \cdot)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Учитывая в нем вид (3.6) оператора K_{xys}^{*u} и независимость дифференцируемой им функции текущих потерь $\psi(t, x, y)$ от переменной s , получаем явное выражение

$$\Xi_t[u(t, \cdot)] = \left\langle \varphi'' + a^{uT} \psi_x + c^{uT} \psi_y + 0.5 \text{tr} [Q^u \psi_{xx}] + 0.5 \text{tr} [2\Sigma^{uT} \psi_{xy} + R^u \psi_{yy}], r \right\rangle. \quad (4.6)$$

Так как искомая функция $u(t, y, s)$ от одной из трех переменных интегрирования не зависит, то этот функционал можно упростить, заменив совместную плотность вероятности $r(\cdot)$ случайного процесса (X_t, Y_t, S_t) произведением маргинальной (частной) плотности $q(\cdot)$ случайных величин Y_t, S_t на соответствующую условную плотность $\rho(\cdot)$:

$$r(t, x, y, s) = q(t, y, s) \rho(t, x | y, s), \quad q(t, y, s) = \int r(t, x, y, s) dx. \quad (4.7)$$

Действительно, представляя тройной интеграл совместного среднего (4.5) в виде повторного, состоящего из внутреннего интеграла усреднения по условной плотности и внешнего интеграла усреднения по маргинальной плотности

$$\langle \eta, r \rangle = \iint \left[\int \eta(t, x, y, s) \rho(t, x | y, s) dx \right] q(t, y, s) dy ds,$$

получаем, что функционал (4.6) принимает вид маргинального среднего

$$\Xi_t[u(t, \cdot)] = \iint \zeta[t, y, z; u(t, y, s)] q(t, y, s) dy ds$$

от следующей подинтегральной функции условного среднего:

$$\zeta(t, y, s; u) = \int (\varphi + a^T \psi_x + c^T \psi_y + 0.5 \text{tr} [Q \psi_{xx}] + 0.5 \text{tr} [2\Sigma^T \psi_{xy} + R \psi_{yy}]) \rho dx. \quad (4.8)$$

Тогда из свойства монотонности операции интегрирования и неотрицательности плотности вероятности $q(\cdot) \geq 0$ следует [7, 13], что для отыскания минимума функционала (4.6) достаточно найти минимум его маргинально усредняемой функции условного среднего $\zeta(\cdot)$ по одному из ее аргументов при любых значениях других:

$$u(t, y, s) = \arg \min_{v \in \Omega \subset \mathbb{R}^l} \zeta(t, y, s; v), \quad \forall t, y, s. \quad (4.9)$$

Однако минимизируемая здесь функция (4.8) требует знания условной плотности вероятности $\rho(\cdot)$. Хотя она формулами (4.7) и выражается через совместную плотность $r(\cdot)$, которая определяется как решение задачи Коши (3.4), (3.7) для уравнения ФПК или соответствующего ему тождества (3.5), но частичная неопределенность начальных условий (1.2) объекта управления (1.1) делает нахождение плотности $r(\cdot)$ в общем случае *невозможным*.

Поэтому при неопределенности плотности вероятности $q_0(y)$ начального измерения Y_t следует решать, вместо уравнения ФПК, полностью определенную задачу Коши для ИДУ относительно условной плотности $\rho(\cdot)$ [13]. Оно получено декомпозицией уравнения ФПК (3.4) на независимое уравнение для плотности $\rho(\cdot)$ и зависящее от нее уравнение для маргинальной плотности $q(\cdot)$. В рассматриваемом здесь случае это уравнение и его начальное условие имеют вид

$$\frac{\partial \rho(t, x | y, s)}{\partial t} = -\nabla_x^T (a^u \rho) + 0.5 \text{tr} [\nabla_x \nabla_x^T (Q^u \rho)] - L_{ys}^{*u}[\rho], \quad \rho(0, x | y, s) = \rho_0(x | y), \quad (4.10)$$

причем в коэффициенты его оператора

$$L_{ys}^{*u}[\rho] = \rho_y^T \bar{c}^u + \rho_s^T \bar{e}^u + 0.5 \text{tr} [R^u \rho_{yy}] + 0.5 \text{tr} [2\Theta R^u \rho_{ys} + \Theta R^u \Theta^T \rho_{ss}],$$

входят интегральные функции условного среднего $\bar{c}^u$, $\bar{e}^u$, обозначенные, в отличие от (2.7), чертой сверху:

$$\bar{\eta}(t, y, u, s) = \int \eta(t, x, y, u) \rho(t, x | y, s) dx.$$

Таким образом, синтез оперативно-оптимального регулятора (4.1) сведен к задаче параметрического нелинейного программирования (4.9), но минимизируемая в ней функция $\zeta(\cdot)$ с течением

времени изменяется не только из-за нестационарности исходных функций объекта управления (1.1) и оперативного критерия (1.5), но и благодаря изменению условной плотности $\rho(\cdot)$. Динамика последней определяется задачей Коши (4.10), которая функцию $u(\cdot)$ использует. Оперативность этой процедуры, в отличие от решения уравнения Беллмана (3.8), состоит в неиспользовании информации о будущем поведении объекта.

4.2. Стохастические измерения. Теперь рассмотрим *скрытую* марковскую модель объекта управления (1.6), (1.7):

$$\begin{aligned}\dot{X}_t &= a(t, X_t, U_t) + B(t, X_t, U_t)V_t, & X_0 &\sim p_0(x), \\ \dot{Y}_t &= c(t, X_t, U_t) + D(t, U_t)V_t, & Y_0 &= 0.\end{aligned}$$

Снова будем искать закон управления (3.10):

$$U_t = u(t, S_t),$$

но оптимальный в смысле О-критерия (1.9)

$$I_t[\vartheta(\cdot)] = M \left[\int_0^t \varphi(\tau, X_\tau, U_\tau) d\tau + \psi(t, X_t) \right] \rightarrow \min.$$

В этом случае уравнение состояния АОФ имеет вид (2.10), а тождество ФПК для совместной плотности вероятности $r(t, x, s)$ – (3.12).

Тогда, повторяя рассуждения из разд. 4.1, из (4.8), (4.9) получаем, что построение О-регулятора также сводится к параметрической минимизации:

$$u(t, s) = \arg \min_{v \in \Omega \subset \mathbb{R}^l} \zeta(t, s; v), \quad \forall t, s, \quad (4.11)$$

но более простой функции условного среднего:

$$\zeta(t, s; u) = \int (\varphi + a^T \psi_x + 0.5 \operatorname{tr}[Q \psi_{xx}]) \rho dx. \quad (4.12)$$

Здесь условная плотность $\rho(\cdot)$ определяется либо по получаемой решением задачи Коши для тождества ФПК (3.12) совместной плотности $r(\cdot)$ как отношение

$$\rho(t, x|s) = r(t, x, s) / \int r(t, x, s) dx,$$

либо находится из своего уравнения, которое является частным случаем (4.10) и имеет вид [13]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(t, x|s)}{\partial t} &= -\nabla_x^T (a^u \rho) + 0.5 \operatorname{tr}[\nabla_x \nabla_x^T (Q^u \rho)] - L_s^{*u}[\rho], & \rho(0, x|s) &= p_0(x), \\ L_s^{*u}[\rho] &= \rho_s^T \bar{e}^{-u} + 0.5 \operatorname{tr}[\Theta R^u \Theta^T \rho_{ss}].\end{aligned} \quad (4.13)$$

5. Пример ЛКГ-задачи. Ограничимся более простым вариантом случайных измерений. Пусть уравнения объекта (1.6) и измерителя (1.7) линейные:

$$\dot{X}_t = A(t)X_t + K(t)U_t + B(t)V_t, \quad X_0 \sim N(x \| m_0^x, D_0^x), \quad (5.1)$$

$$\dot{Y}_t = C(t)X_t + M(t)U_t + D(t)V_t, \quad Y_0 = 0, \quad (5.2)$$

начальное состояние объекта X_0 гауссовское с плотностью вероятности нормального закона распределения $N(\cdot)$ при математическом ожидании m_0^x и ковариации D_0^x , управление не ограничено $U_t \in \Omega = \mathbb{R}^l$, а критерии его оптимальности (1.8), (1.9) являются квадратическими:

$$J = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^T [X_\tau^T X(\tau) X_\tau + U_\tau^T \Phi(\tau) U_\tau] d\tau + X_T^T \Pi X_T \right\} \rightarrow \min, \quad (5.3)$$

$$I_t = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^t [X_\tau^T X(\tau) X_\tau + U_\tau^T \Phi(\tau) U_\tau] d\tau + X_t^T \Upsilon(t) X_t \right\} \rightarrow \min \quad (5.4)$$

с весовыми матрицами $\Phi(t), \Upsilon(t) > 0, X(t), \Pi \geq 0$.

Исходные соотношения этой задачи отличаются от общих выражений линейностью функций сноса объекта и измерителя $a(t, x, u) = A(t)x + K(t)u$, $c(t, x, u) = C(t)x + M(t)u$, зависимостью интенсивностей шумов только от времени $Q(t, x, u) = Q(t)$, $R(t, u) = R(t)$, $S(t, x, u) = S(t)$, гауссовостью начальной плотности вероятности $p_0(x) = N(x \| m_0^x, D_0^x)$, а также квадратичностью интегрантов и терминантов обоих критериев:

$$\mu(t, x, u) = \varphi(t, x, u) = 0.5[x^T X(t)x + u^T \Phi(t)u], \quad v(x) = 0.5x^T \Pi x, \quad \psi(t, x) = 0.5x^T \Upsilon(t)x.$$

Далее очевидные зависимости параметров системы и критериев от времени t будем опускать.

5.1. **Л и н е й н ы й ф и л ь т р К а л м а н а – Б ю с и.** Из-за линейности уравнений (5.1), (5.2) и гауссовости как начального состояния X_0 , так и белого возмущения V_t , АПВ (2.3) является гауссовской $\pi(t, x, S_t) = N(x \| \hat{X}_t, P_t)$, так что вектор кумулянтных или квазиомоментных ДК состоит только из двух компонент $S_t = (\hat{X}_t, P_t)$. При этом случайная оценка $\hat{X}_t$ состояния X_t определяется управляемым стохастическим уравнением Ито:

$$\dot{\hat{X}}_t = A\hat{X}_t + KU_t + (P_t C^T + \Sigma)R^{-1}[\dot{Y}_t - (C\hat{X}_t + MU_t)], \quad \hat{X}_0 = m_0^x, \quad (5.5)$$

а детерминированная матрица ковариаций ошибки оценивания $P_t = \text{cov}(X_t - \hat{X}_t)$ находится из не зависящего ни от оценки $\hat{X}_t$, ни от управления U_t прямого уравнения Риккати:

$$\dot{P}_t = AP_t + P_t A^T + Q - [P_t C^T + \Sigma]R^{-1}[CP_t + \Sigma^T], \quad P_t = D_0^x. \quad (5.6)$$

Последнее обстоятельство делает матрицу P_t заранее известной функцией времени. Это позволяет исключить ее из состава ДК, считая теперь $S_t = \hat{X}_t$, и искать управление вместо (3.10) как функцию только от оценки

$$U_t = u(t, \hat{X}_t). \quad (5.7)$$

При этом уравнением состояния фильтра (2.10) становится только уравнение для оценки (5.5), так что далее

$$h(t, u, \hat{x}) = A\hat{x} + Ku, \quad \Theta(t, u, \hat{x}) = \Theta(t) = (P_t C^T + \Sigma)R^{-1}.$$

5.2. **И н т е р в а л ь н а я т е о р е м а р а з д е л е н и я.** Приведем известный результат [4, 8]. Оптимизируем функцию (5.7) по квадратическому И-критерию (5.3), для чего воспользуемся уравнением Беллмана (3.13). Оно теперь принимает вид

$$-\frac{\partial W(t, \hat{x})}{\partial t} = \min_{u \in \mathbb{R}^l} \{ \hat{\mu} + h^T W_{\hat{x}} + 0.5 \text{tr}[W_{\hat{x}\hat{x}} \Theta R \Theta^T] \}, \quad W(T, \hat{x}) = \hat{v}(T, \hat{x}), \quad (5.8)$$

в котором

$$\hat{\mu}(t, u, \hat{x}) = 0.5 \int (x^T X x + u^T \Phi u) N(x \| \hat{x}, P_t) dx = 0.5(\text{tr}[X(P_t + \hat{x}\hat{x}^T)] + u^T \Phi u),$$

$$\hat{v}(T, \hat{x}) = 0.5 \int x^T \Pi x N(x \| \hat{x}, P_T) dx = 0.5 \text{tr}[\Pi(P_T + \hat{x}\hat{x}^T)].$$

В уравнении (5.8) минимизируемая по переменной $u \in \mathbb{R}^l$ функция является квадратической:

$$f(t, \hat{x}, u, W) = 0.5u^T \Phi u + u^T K^T W_{\hat{x}} + \text{invar}(u)$$

и (так как $\Phi > 0$) достигает минимума в точке

$$u = -\Phi^{-1} K^T W_{\hat{x}}. \quad (5.9)$$

Подставляя это в (5.8), имеем обратную задачу Коши для уравнения в частных производных:

$$-\frac{\partial W(t, \hat{x})}{\partial t} = 0.5(\text{tr}[X(P_t + \hat{x}\hat{x}^T)] + W_{\hat{x}}^T K \Phi^{-1} K^T W_{\hat{x}}) + (A\hat{x} - K \Phi^{-1} K^T W_{\hat{x}})^T W_{\hat{x}} + 0.5 \text{tr}[W_{\hat{x}\hat{x}} \Theta R \Theta^T], \quad (5.10)$$

$$W(T, \hat{x}) = 0.5(\text{tr}[\Pi P_T] + \hat{x}^T \Pi \hat{x}).$$

Покажем, что его решением является смещенная по времени квадратическая форма

$$W(t, \hat{x}) = 0.5[\sigma(t) + \hat{x}^T L(t) \hat{x}],$$

а формула (5.9) принимает вид

$$u = -\Phi^{-1} K^T L \hat{x}. \quad (5.11)$$

Действительно, подставляя производные $\partial W / \partial t = 0.5[\dot{\sigma} + \hat{x}^T \dot{L} \hat{x}]$, $W_{\dot{x}} = L \hat{x}$, $W_{\hat{x}\hat{x}} = L$ в равенство (5.10) и приводя в нем подобные члены, получаем два алгебраических тождества:

$$\begin{aligned} -\dot{\sigma} - \hat{x}^T \dot{L} \hat{x} &= \text{tr}[X P_t] + \hat{x}^T (X - L^T K \Phi^{-1} K^T L) \hat{x} + 2 \hat{x}^T (A^T L) \hat{x} + \text{tr}[L \Theta R \Theta^T], \\ \sigma(T) + \hat{x}^T L(T) \hat{x} &= \text{tr}[\Pi P_T] + \hat{x}^T \Pi \hat{x}, \end{aligned}$$

которые справедливы при любых значениях переменной $\hat{x}$. Приравнявая в них свободные члены, находим уравнение для величины смещения $\sigma(t)$:

$$-\dot{\sigma} = \text{tr}[X P_t] + \text{tr}[L \Theta R \Theta^T], \quad \sigma(T) = \text{tr}[\Pi P_T],$$

а из равенства квадратичных форм, представив одну из них в симметрическом виде $2 \hat{x}^T (A^T L) \hat{x} = \hat{x}^T (A^T L) \hat{x} + \hat{x}^T (A^T L)^T \hat{x}$, имеем известное обратное уравнение Риккати для матрицы коэффициентов $L(t)$:

$$-\dot{L} = A^T L + L A + X - L^T K \Phi^{-1} K^T L, \quad L(T) = \Pi. \quad (5.12)$$

В результате из (5.7), (5.11) следует, что интервально-оптимальным в рассматриваемой ЛКГ-задаче является линейный регулятор

$$U_t = -F(t) \hat{X}_t, \quad F(t) = \Phi^{-1}(t) K^T(t) L(t), \quad (5.13)$$

часть $L(t)$ матрицы коэффициентов которого $F(t)$ вычисляется заранее путем решения в обратном времени уравнения (5.12). Для этого на всем плановом отрезке управления $t \in [0, T]$ должны быть известны матрицы $A(t)$, $K(t)$ уравнения состояния объекта (5.1) и весовые матрицы $\Phi(t)$, $X(t)$ квадратичного критерия (5.3), а также его терминальная матрица Π .

Отметим, что матрица усиления $F(t)$ оценки $\hat{X}_t$ в (5.13) совпадает с таковой у позиционного регулятора $u_t = u(t, x_t)$, оптимального в *детерминированной* линейно-квадратической задаче:

$$\dot{x}_t = A x_t + K u_t, \quad x_0 = m_0^x, \quad (5.14)$$

с соответствующим (5.3) интервальным критерием оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T [x_t^T X(t) x_t + u_t^T \Phi(t) u_t] dt + x_T^T \Pi x_T \right\} \rightarrow \min,$$

так как в этом случае $u_t = -F(t) x_t$. Это обстоятельство и позволило называть инерционный закон стохастического управления (5.5), (5.13) термином “разделенный”. Итак, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1 [8]. В интервальной ЛКГ-задаче (5.1)–(5.3) абсолютно оптимальное устройство управления (1.3) разделяется на линейный фильтр Калмана–Бьюси (5.5) с параметром, оперативно получаемым по (5.6), и интервально-оптимальный линейный детерминированный регулятор (5.13), настраиваемый на весь отрезок управления по (5.12).

5.3. О п е р а т и в н а я т е о р е м а р а з д е л е н и я. Если же оптимизировать функцию (5.7) по квадратическому О-критерию (5.4), то достаточно найти частный минимум (4.11) функции условного среднего (4.12). В данном случае она имеет вид

$$\zeta(t, \hat{x}; u) = \int (0.5(x^T X x + u^T \Phi u) + (A x + K u)^T \Upsilon x + 0.5 \text{tr}[Q \Upsilon]) \rho(t, x | \hat{x}) dx,$$

в котором от переменной $u \in \mathbb{R}^l$ зависят только два слагаемых:

$$\zeta(t, \hat{x}; u) = 0.5 u^T \Phi u + u^T K^T \Upsilon \bar{x}(t, \hat{x}) + \text{invar}(u),$$

где $\bar{x}(t, \hat{x}) = \int x p(t, x | \hat{x}) dx$ — условное среднее. Так как и здесь $\Phi > 0$, то минимум этой квадратичной функции достигается в точке

$$u(t, \hat{x}) = -\Phi^{-1} K^T \Upsilon \bar{x}(t, \hat{x}). \quad (5.15)$$

При этом из линейности уравнений объекта (5.1), измерителя (5.2) и фильтра (5.5), а также из гауссовости их возмущения и начальных условий следует, что совместная плотность вероятности $r(t, x, \hat{x})$ является гауссовской:

$$r(t, x, \hat{x}) = N(x, \hat{x} | m_t^x, m_t^{\hat{x}}, D_t^x, D_t^{\hat{x}}, D_t^{x\hat{x}}),$$

а ее параметры могут быть определены из уравнений метода моментов Пугачева—Дункана. Тогда по теореме о нормальной корреляции [14] гауссова и условная плотность

$$\rho(t, x | \hat{x}) = N[x | \bar{x}(t, \hat{x}), \Gamma(t)],$$

а ее среднее и ковариация находятся по известным формулам

$$\bar{x}(t, \hat{x}) = m_t^x + D_t^{x\hat{x}} D_t^{\hat{x}\oplus} (\hat{x} - m_t^{\hat{x}}), \quad \Gamma(t) = D_t^x - D_t^{x\hat{x}} D_t^{\hat{x}\oplus} D_t^{\hat{x}\hat{x}},$$

где $\oplus$ — символ псевдообращения матрицы по Муру—Пенроузу. Используя здесь известные свойства несмещенности оценки $M[\hat{X}_t] = M[X_t]$ и ее ортогональности к ошибке оценивания $\text{cov}(X_t - \hat{X}_t, \hat{X}_t) = 0$ [13, 15], имеем равенства $m_t^{\hat{x}} = m_t^x$, $D_t^{x\hat{x}} = D_t^{\hat{x}}$. В результате предыдущие общие соотношения существенно упрощаются:

$$\bar{x}(t, \hat{x}) = \hat{x}, \quad \Gamma(t) = D_t^x - D_t^{\hat{x}},$$

формула (5.15) принимает вид $u(t, \hat{x}) = -\Phi^{-1} K^T \Upsilon \hat{x}$, а из (5.7) окончательно получаем

$$U_t = -G(t) \hat{X}_t, \quad G(t) = \Phi^{-1}(t) K^T(t) \Upsilon(t). \quad (5.16)$$

Таким образом оперативно-оптимальным в ЛКГ-задаче тоже является линейный регулятор, но матрица его коэффициентов полностью известна из исходных данных. Действительно, сравнивая полученное соотношение (5.16) с (5.13), видим, что место определяемой из уравнения Риккати (5.12) матрицы $L(t)$ здесь заняла заданная весовая матрица $\Upsilon(t)$ терминального члена О-критерия (5.4). В этом состоит *принципиальное отличие* данного оперативно-оптимального случая от рассмотренного выше интервально-оптимального, когда для синтеза регулятора еще нужно решать и обратное уравнение Риккати (5.12), используя для этого дополнительную информацию о будущем.

Остается отметить, что в детерминированной задаче при управлении линейным объектом (5.14) по соответствующему (5.4) О-критерию

$$I_t = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t [x_\tau^T X(\tau) x_\tau + u_\tau^T \Phi(\tau) u_\tau] d\tau + x_t^T \Upsilon(t) x_t \right\} \rightarrow \min$$

оптимальным является подобный (5.16) закон позиционного управления $u_t = -G(t)x_t$ [9]. Итак, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. В оперативной ЛКГ-задаче (5.1), (5.2), (5.4) абсолютно оптимальное устройство управления (1.3) разделяется на линейный фильтр Калмана—Бьюси (5.5), (5.6) и оперативно-оптимальный линейный детерминированный регулятор (5.16) с известной матрицей усиления.

Заключение. Поставлена и решена новая задача синтеза оперативно получаемого закона оптимального в среднем управления нелинейным стохастическим динамическим объектом по его измеряемому выходу. Она обобщает задачу синтеза локально-оптимального управления детерминированным объектом по измерениям его состояния [9]. При этом также применяется переменный во времени критерий оптимальности, который минимизирует потери, накопленные к текущему моменту времени, и не учитывает их будущие значения. Это позволяет не принимать во внимание и возможные в будущем изменения параметров и структуры управляемого объекта.

Для получения управления используется абсолютно вся статистическая информация о его случайном состоянии, которую дают проведенные измерения. Сосредоточенная в известном векторе апостериорных достаточных координат, получаемых с помощью инерционного нели-

нейного фильтра Стратоновича, она позволяет искать управление в виде функции этих координат. Следовательно, задача оптимизации управления сводится к синтезу такого безынерционного регулятора. Но построение традиционного интервально-оптимального регулятора, который обеспечивает минимизацию всех потерь на заданном плановом отрезке времени как прошлых так и будущих, требует априорного синтеза регулятора путем решения в обратном времени уравнения Беллмана.

Показано, что синтез предлагаемого регулятора может быть выполнен оперативно, в темпе со временем, решением задачи Коши для уравнения типа ФПК и задачи нелинейного программирования. Процедура синтеза продемонстрирована на примере ЛКГ-задачи, в результате чего показана новая оперативная версия известной теоремы разделения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратонович Р.Л. К теории оптимального управления. Достаточные координаты // *АиТ*. 1962. № 7. С. 910–917.
2. Mortensen R.E. Stochastic Optimal Control with Noisy Observations // *Int. J. Control*. 1966. V. 4. № 5. P. 455–466.
3. Davis M.H.A., Varaiya P.P. Dynamic Programming Conditions for Partially Observable Stochastic Systems // *SIAM J. Control*. 1973. V. 11. № 2. P. 226–262.
4. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
5. Benes V.E., Karatzas I. On the Relation of Zakai's and Mortensen's Equations // *SIAM J. Control and Optimization*. 1983. V. 21. № 3. P. 472–489.
6. Bensoussan A. Stochastic Control of Partially Observable Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
7. Руденко Е.А. Оперативно-оптимальный конечномерный динамический регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. I. Общий нелинейный случай // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 5. С. 23–39.
8. Wonham W.M. On the Separation Theorem of Stochastic Control // *SIAM J. Control*. 1968. V. 6. № 2. P. 312–326.
9. Верба В.С., Меркулов В.И., Руденко Е.А. Линейно-кубическое локально-оптимальное управление линейными системами и его применение для наведения летательных аппаратов // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 5. С. 129–141.
10. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1985.
11. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.
12. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
13. Руденко Е.А. Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2013. № 6. С. 25–51.
14. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
15. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана–Бьюси / Пер. с англ. М.: Наука, 1982.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.853.4

СРАВНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ¹

© 2023 г. А. Ю. Горчаков^{a,*}, М. А. Посыпкин^{a,**}

^aФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: agorchakov@frccsc.ru

**e-mail: mposypkin@frccsc.ru

Поступила в редакцию 20.10.2022 г.

После доработки 22.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматриваются четыре параллельных алгоритма, реализующих метод ветвей и границ для решения задач поиска глобального минимума. Алгоритмы предназначены для вычислительных систем с общей памятью. Метод ветвей и границ базируется на двух основных операциях — ветвление и отсев. Для реализации операции отсева используется интервальная арифметика, которая для вещественных интервалов определяет операции, аналогичные обычным арифметическим. Основное отличие алгоритмов заключается в различной реализации хранения списка подзадач. В процессе тестирования на представительном наборе тестовых задач исследованы быстродействие алгоритмов, масштабируемость и устойчивость к аномалиям поиска.

DOI: 10.31857/S0002338823020099, EDN: JDULMW

0. Введение. Рассматривается задача оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (0.1)$$

состоящая в поиске минимума целевой функции $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на допустимом множестве (множестве допустимых решений) $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Точки множества X в дальнейшем будем называть допустимыми решениями. Точка $x^* \in X$ является глобальным решением задачи (0.1), если для каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$f(x^*) \leq f(x). \quad (0.2)$$

Для приближенного решения задачи достаточно найти хотя бы одну точку, принадлежащую множеству ε -решений этой задачи:

$$X_*^\varepsilon = \{x \in X : f(x) \geq f(x^*) + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (0.3)$$

где ε — наперед заданная абсолютная точность расчетов. Другими словами, необходимо с заданной точностью ε определить величину глобального минимума функции, найти точку, в которой это приближенное значение достигается. Здесь мы следуем классическому определению приближенного минимума [1]. Отметим, что в ряде постановок используется другой подход, когда задается относительная, а не абсолютная погрешность.

Методы поиска глобального минимума условно делятся на два типа — с доказательством и без доказательства оптимальности. К первой группе относятся различные варианты метода ветвей и границ (МВГ) [2], например метод неравномерных покрытий [3]. Вторая группа методов основана на различных стратегиях случайного поиска — методы Монте-Карло [4, 5], мултистарта [6–8], популяционные алгоритмы [9].

Современные методы оптимизации сложно представить без применения параллельных вычислений. Для систем с общей памятью применяются технологии распараллеливания OpenMP, векторизации AVX2/AVX512 и реже — message passing interface (MPI). Распараллеливание методов

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-15-2020-799).

случайного поиска в большинстве случаев заключается в запуске множества вычислительных потоков и операции редукции в конце вычислений. Особую актуальность имеет распараллеливание детерминированных методов, так как численное доказательство оптимальности найденных решений, как правило, требует очень существенных вычислений. Реализация одного из наиболее распространенных методов решения задач глобальной оптимизации — МВГ в параллельном варианте осложняется необходимостью, во-первых, регулярно обновлять *рекордное значение*, во-вторых, обращаться к дереву ветвления, чья структура заранее не известна и строится в процессе решения.

В процессе работы параллельного МВГ наблюдаются поисковые аномалии [10], т.е. ситуации, когда общее число итераций изменяется от запуска к запуску. Этот эффект обусловлен различным упорядочиванием операций ветвления и, как следствие, различной скоростью обновления рекорда, что в свою очередь может приводить к изменению числа произведенных итераций алгоритма. Недетерминированная природа динамической балансировки нагрузки между потоками параллельного приложения, применяемой в параллельной реализации МВГ, является дополнительной причиной существенных колебаний времени решения одной и той же задачи при разных запусках. Существенные колебания времени работы параллельных реализаций МВГ делают затруднительным применение таких традиционных инструментов анализа эффективности параллельных вычислений, как ускорение и масштабируемость. Необходимо проводить многократные повторные запуски на одних и тех же входных данных и анализировать разброс времени решения, исследовать статистические характеристики результатов изменения времени работы параллельного алгоритма.

В данной работе мы провели сравнительное тестирование четырех различных параллельных реализаций МВГ — двух версий parallel AMIGO (PAMIGO) [11] (global-PAMIGO и local-PAMIGO) и двух авторских реализаций BnB-Brf и BnB-Atomic. Тестирование проводилось на наборе тестовых задач [12], из 150 задач по объективным критериям было выбрано подмножество из 7 задач. На этом подмножестве задач было показано отсутствие масштабируемости у global-PAMIGO — предел 8 ядер процессора, и у алгоритмов local-PAMIGO и BnB-Brf — предел 32 ядра.

1. Общая схема МВГ. Настоящая схема является базовой алгоритмической схемой многих методов глобальной оптимизации. Считается, что МВГ был впервые предложен в работе [13] для задач частично-целочисленного линейного программирования. В дальнейшем эта схема использовалась при решении многих задач. МВГ оперирует подзадачами. Подзадачей называется задача вида

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \hat{X}, \quad (1.1)$$

где $\hat{X} \subseteq X$ — подмножество исходного допустимого множества. Поскольку подзадача полностью определяется своим допустимым подмножеством $\hat{X}$, то в дальнейшем будем использовать его для обозначения подзадачи (“подзадача $\hat{X}$ ”).

МВГ основан на двух основных операциях — ветвление и отсев. Операция ветвления заключается в декомпозиции подзадачи на несколько подзадач таким образом, что совокупность множеств допустимых решений подзадач содержит множество допустимых решений исходной подзадачи. Для подзадачи, задаваемой (1.1), определим операцию ветвления *split* следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{split}(\hat{X}_0) &= \{\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k\}, \\ \hat{X}_0 &= \hat{X}_1 \cup \dots \cup \hat{X}_k. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Операция ветвления разбивает подзадачу $\hat{X}_0$ на k подзадач $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k$. Следующее утверждение, которое мы оставляем без доказательства ввиду его очевидности, играет ключевую роль в обосновании корректности метода ветвей и границ.

У т в е р ж д е н и е. Пусть

$$f_i^* = \min_{x \in \hat{X}_i} f(x), \quad i = \overline{1, k},$$

где $\hat{X}_i, i = \overline{0, k}$ удовлетворяют соотношению (1.2). Тогда $f_0^* = \min_{i=\overline{1, k}} f_i^*$.

В процессе работы МВГ сохраняется “лучшее” найденное на данный момент решение x^r , так называемое *рекордное решение* и *рекордное значение* $z^r = f(x^r)$. Рекордные решение и значение периодически обновляются с помощью функции `update_record(x)`. Данная функция, псевдокод которой представлен в листинге 1, сравнивает значение целевой функции в некоторой допустимой точке x с рекордным.

Листинг 1. Функция модификации рекорда

```

1 Function update_record ( $x, z$ )
    Input:  $x$  — допустимая точка
    Input:  $z$  — значение функции в этой точке ( $z = f(x)$ )
2
3   if  $z < f^r$  then
4        $x^r := x$ 
5        $f^r := z$ 
6   end
7 end

```

Если значение целевой функции, вычисленное в точке x , меньше рекордного значения, то производится замена точки x^r на x и значения f^r на z .

Рекордное значение используется для сокращения перебора с помощью *правила отсева подзадач*, реализуемого функцией `discard(Y)` (листинг 2).

Листинг 2. Функция отсева

```

1 Function discard ( $Y$ )
    Input:  $Y$  — подзадача
2
3   if get_bound( $Y$ )  $\leq f^r - \varepsilon$  then
4       return false
5   else
6       return true
7   end
8 end

```

Эта функция сравнивает `get_bound`(Y) — нижнюю оценку значения целевой функции в подзадаче Y и величину $f^r - \varepsilon$. На основании этого сравнения формируется возвращаемое логическое значение. Если `discard`(Y) = *true*, то подзадача исключается из дальнейшего рассмотрения. В противном случае — подвергается дальнейшему ветвлению. Нижняя оценка значения целевой функции вычисляется с помощью библиотеки интервальной арифметики [12].

Функция обработки подзадач `process`, представленная в листинге 3, получает на вход подзадачу Y и генерирует по ней список новых (“дочерних”) подзадач $\mathcal{Y}$ с помощью функции `split()` (строка 4).

Листинг 3. Функция обработки подзадач

```

1 Function Process( $Y, \mathcal{L}$ )
    Input:  $Y$  — подзадача для ветвления
    Input:  $\mathcal{L}$  — список подзадач
2
3   if discard( $Y$ ) = false then
4        $\mathcal{Y} = \text{split}(Y)$ 
5        $z^* := \infty$ 
6        $y^* := (0, \dots, 0)$ 
7       for  $\hat{Y} \in Y$  do
8            $y = \text{get\_trial\_point}(\hat{Y})$ 
9       end for
10      return  $\mathcal{Y}$ 
11 end

```

```

8       $z = f(y)$ 
9      if  $z < z^*$  then
10          $z^* := z$ 
11          $y^* := y$ 
12     end
13 end
14 if  $z^* \neq \infty$  then
15      $\text{update\_record}(y^*, z^*)$ 
16 end
17 for  $\hat{Y} \in \mathcal{Y}$  do
18     if  $\text{discard}(Y) = \text{false}$  then
19          $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \hat{Y}$ 
20     end
21 end
22 end
23 end

```

В наиболее распространенном случае подзадача разбивается на две. Возможны и другие варианты.

Для каждой подзадачи из списка с помощью функции `get_trial_point` находится новая допустимая точка, в которой вычисляется значение целевой функции (строки 8, 9). Из всех найденных решений выбирается решение y^* , соответствующее минимальному значению целевой функции z^* . Это решение используется для обновления рекордного решения и значения в строке 15. В цикле в строках 18–22 для каждой подзадачи из списка $\mathcal{Y}$ вычисляется нижняя граница.

В случае, когда эта граница не превосходит $f^* - \varepsilon$, подзадача добавляется к общему списку подзадач $\mathcal{L}$.

Функция BnB (листинг 4) выполняет основной цикл метода ветвей и границ.

Листинг 4. Базовая функция MBГ

```

1 Function BnB ( $\mathcal{L}, N_{\max}$ ):
   Input:  $\mathcal{L}, x_r$ 
2 while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  and  $N_{\max} > 0$  do
3     select  $\hat{X}$  from  $\mathcal{L}$ 
4      $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \hat{X}$ 
5     Process ( $\hat{X}, \mathcal{L}$ )
6      $N_{\max} := N_{\max} - 1$ 
7 end
8 end

```

В процессе ее работы модифицируется список $\mathcal{L}$ текущих подзадач, которые не были отсеяны и еще не подверглись ветвлению. Этот список передается в функцию в качестве входного параметра. На каждом шаге одна из подзадач извлекается из списка и обрабатывается функцией `process`, в результате работы которой изменяется список $\mathcal{L}$. Работа алгоритма прекращается, если исчерпан список подзадач $\mathcal{L}$ или превышено ограничение на максимальное число итераций $N_{\max}$.

Последовательная программа для решения задачи MBГ представляет собой вызов функции BnB со списком, состоящим только из одного элемента — исходной задачи. Параметр $N_{\max}$ задается таким образом, чтобы обеспечить завершение программы в любом случае за разумное время.

Список $\mathcal{L}$ может быть реализован различными способами. Классические варианты реализации перечислены далее. Структура last-in-first-out (LIFO) соответствует “ветвлению в глубину”, так как на каждом шаге из списка извлекается одна из подзадач, сгенерированных на предыдущем этапе. Организация списка по принципу first-in-first-out (FIFO), наоборот, соответствует “ветвлению в ширину”. При таком подходе для обработки всегда выбирается подзадача, которая расположена в дереве ближе всего к его корню. Тем самым достигается последовательное раскрытие уровней дерева ветвления.

Третьим классическим подходом является использование упорядоченного списка, в котором порядок подзадач определяется их нижней оценкой. На очередном шаге для ветвления всегда выбирается подзадача с наименьшей нижней оценкой, находящаяся в начале списка. При таком подходе нижняя оценка подзадачи, соответствующей началу списка, дает нижнюю оценку для оптимального решения исходной задачи. Таким образом, на каждом шаге легко определяется интервал, которому принадлежит значение оптимального решения. Правым и левым концами этого интервала являются значения рекордного решения и нижней оценки подзадачи из вершины упорядоченного списка соответственно. Достоинством этого подхода также является возможность быстрого сокращения списка за счет удаления подзадач, удовлетворяющих правилу отсева, с конца списка.

2. Варианты параллельной реализации МВГ. В работе в качестве вычислительной платформы рассматривается многопроцессорная система с общей памятью, являющаяся на данный момент наиболее распространенной архитектурой параллельных вычислительных систем. В этой модели вычислительные ядра имеют доступ к единому адресному пространству. Каждое ядро может выполнять команды чтения и записи данных по любому адресу оперативной памяти. Для обеспечения корректности работы программы необходимы механизмы синхронизации доступа к памяти с разных вычислительных ядер.

Для изучения были выбраны алгоритмы Global-PAMIGO и Local-PAMIGO [11] и две авторские реализации МВГ – BnB-Brf и BnB-Atomic.

2.1. Global-PAMIGO. Алгоритм global-PAMIGO, предложенный в работе [11], предполагает наличие единого списка подзадач $\mathcal{L}$ для всех потоков. Подробно работа алгоритма представлена на листинге 5.

Листинг 5. Алгоритм global-PAMIGO

```

1  Function global-PAMIGO ( $\mathcal{L}$ ):
2      while true do
3          critical
4               $nt_{idle} := nt_{idle} + 1$ 
5              wait ( $\mathcal{L} \neq \emptyset$  or  $nt_{idle} = nt_{max}$  or  $N = N_{max}$ )
6              if  $N = N_{max}$  or ( $\mathcal{L} = \emptyset$  and  $nt_{idle} = nt_{max}$ ) then
7                  notify_all
8                  break
9              else
10                 select  $\hat{X}$  from  $\mathcal{L}$ 
11                  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \hat{X}$ 
12                  $nt_{idle} := nt_{idle} - 1$ 
13             end
14         end
15         Process( $\hat{X}, \mathcal{L}$ )
16          $N := N + 1$ 
17     end
18 end

```

Основной цикл while выполняется всеми потоками одновременно. В критической секции (строки 3–13) ведется подсчет числа участвующих в работе потоков (глобальная переменная $nt - idle$). Далее поток переходит в состояние ожидания до момента выполнения хотя бы одного

из трех условий — общий список подзадач не пуст, число итераций стало равным максимально-му, число шагов метода достигло максимально допустимого значения.

Ожидание реализуется с помощью механизма условных переменных. При срабатывании условной переменной проверяется указанный предикат. Если его значение — `true`, то функция `wait` завершается. В противном случае ожидание возобновляется. Во время ожидания на условной переменной поток не находится в критической секции, позволяя тем самым другим потокам ее выполнять. После завершения ожидания критическая секция возобновляется.

В алгоритме `global-AMIGO` при выходе из ожидания выполняется проверка условия достижения максимального числа итераций. Если оно верно, то все потоки оповещаются с использованием вызова `notify_all` условной переменной и цикл разрывается. Отметим, что при разрыве цикла завершается также и критическая секция. Те же действия производятся в случае, когда список подзадач пуст и все потоки находятся в состоянии `idle`, т.е. или выполняют вызов `wait` или уже закончили выполнять основной цикл.

Алгоритм `global-PAMIGO` прост в реализации. Его главным недостатком является наличие общего списка подзадач, обрабатываемого всеми потоками параллельного приложения, что приводит к существенным потерям производительности при большом их числе за счет частой синхронизации.

2.2. Local-PAMIGO. Основным недостатком алгоритма `global-PAMIGO` является наличие единого для всех потоков списка подзадач, что приводит к деградации производительности при большом числе потоков. В алгоритме `local-PAMIGO`, также предложенном в работе [11], данный недостаток преодолевается за счет использования локального списка каждым из потоков параллельного приложения. Действия, выполняемые каждым потоком, представлены на листинге 6.

Листинг 6. Алгоритм `local-PAMIGO`

```

1  Function local-PAMIGO ( $\mathcal{L}$ ):
2      while  $L \neq \emptyset$  do
3          if  $N = N_{\max}$  then
4              break
5          end
6          if  $nt < nt_{\max}$  then
7              critical
8                   $\mathcal{L}' = \text{odd elements of } \mathcal{L}$ 
9                   $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$ 
10                 launch local-PAMIGO( $\mathcal{L}'$ )
11                  $nt := nt + 1$ 
12             end
13         end
14         select  $\hat{X}$  from  $\mathcal{L}$ 
15          $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \hat{X}$ 
16         Process( $\hat{X}, \mathcal{L}$ )
17          $N := N + 1$ 
18     end
19 end

```

На каждой итерации основного цикла поток сравнивает текущее значение запущенных потоков nt с максимальным $nt_{\max}$. Если запущено меньше потоков, чем указано в $nt_{\max}$, то выполняется запуск еще одного потока, которому передается половина подзадач текущего (берутся подзадачи с нечетными номерами в списке). Максимальное число потоков выбирается большим или равным числу вычислительных ядер с тем, чтобы обеспечить максимальную загрузку ресурсов процессора.

2.3. BnB-Brf. Данный вариант распараллеливания ориентирован на выполнение в среде OpenMP [14]. Особенностью среды OpenMP является поддержка директивного распараллеливания циклов. Директива OpenMP `omp for` приводит к распределению итераций цикла `for`, которому она предшествует, между параллельными потоками приложения. Основной цикл метода ветвей и границ не может быть непосредственно распараллелен, так как на каждой итерации модифицируется общий список подзадач. В алгоритме BnB-Brf, представленном на листинге 7, указанная проблема преодолевается с помощью разделения списков, из которых происходит чтение подзадач и списков, в которые вновь сгенерированные подзадачи записываются.

Листинг 7. Алгоритм BnB-Brf

```

1  Function BnBBrf ( $\mathcal{L}$ ):
2       $i := 1$ 
3      while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  do
4          select  $\hat{X}$  from  $\mathcal{L}$ 
5           $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \hat{X}$ 
6           $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_i \cup \hat{X}$ 
7           $i = (i \bmod nt) + 1$ 
8      end
9      while  $\exists i \in \overline{1, nt} : \mathcal{L}_i \neq \emptyset$  do
10         parallel
11             for  $j = \overline{1, nt}$  do
12                 par forall  $\hat{X} \in \mathcal{L}_j$  do
13                      $cur := \text{GetThreadNumber}()$ 
14                      $\text{Process}(\hat{X}, \hat{\mathcal{L}}_{cur})$ 
15                 end
16             end
17         end
18         for  $j = \overline{1, nt}$  do
19              $\text{swap}(\mathcal{L}_j := \hat{\mathcal{L}}_j)$ 
20              $\hat{\mathcal{L}}_j := \emptyset$ 
21         end
22     end
23 end

```

Рассмотрим детально работу алгоритма, представленного на листинге 7. Предполагается, что число параллельных потоков, одновременно выполняемых на параллельных участках, составляет nt . В цикле в строках 3–8 производится инициализация списков $\mathcal{L}_i$ таким образом, чтобы обеспечить равномерное распределение подзадач по спискам. Списки $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1, nt}$, содержат подзадачи, предназначенные для считывания и последующей обработки.

Основной цикл в строках 9–22 выполняет итерации метода ветвей и границ до тех пор, пока совокупность списков $\{\mathcal{L}_i\}$ содержит хотя бы одну подзадачу. В теле цикла параллельный участок в строках 10–17 приводит к созданию nt потоков. Далее в цикле в строках 11–16 производится обход всех списков совокупности $\{\mathcal{L}_i\}$. Параллельный цикл в строках 12–15 производит стандартную операцию МВГ, изымая из списка очередную подзадачу, выполняя ветвление и помещая результат в список $\hat{\mathcal{L}}_{cur}$, соответствующий номеру потока. Таким образом, потоки не конфликтуют, поскольку запись идет в различные списки. Они отличаются от тех, из которых производится чтение. После завершения параллельного участка, перед началом очередной итерации цикла,

выполняется копирование списков $\{\hat{\mathcal{L}}_i\}$ в $\{\mathcal{L}_i\}$ с помощью цикла в строках 18–21. Фактическое копирование заменяется обменом указателей на соответствующие адреса памяти.

2.4. BnB-Atomic. В алгоритме BnB-Atomic, представленном на листинге 2.4, каждый поток либо запускает два новых потока, распределяя между ними подзадачи, либо выполняет шаги последовательного алгоритма.

Функция **BnBAtomic** имеет три параметра: L – список подзадач, $procs$ – выделяемый ресурс по числу потоков, $steps$ – максимальный ресурс по числу шагов. Предполагается, что число потоков, созданных при выполнении функции **BnBAtomic**, не превысит значения $procs$, а число шагов – значения $steps$.

Листинг 8. Алгоритм BnB-Atomic

```

1  Function BnBAtomic( $\mathcal{L}$ ,  $procs$ ,  $steps$ ):
2      if  $procs = 1$  then
3          |   BnB( $\mathcal{L}$ ,  $steps$ )
4      else
5          while  $steps > 0$  do
6              if  $steps \leq steps\_limit$  then
7                  |   BnB( $\mathcal{L}$ ,  $steps$ )
8              else
9                  |    $steps_1 = \lfloor steps/2 \rfloor$ 
10                 |    $steps_2 = steps - steps_1$ 
11                 |    $\mathcal{L}_1 = \text{odd elements of } \mathcal{L}$ 
12                 |    $\mathcal{L}_2 = \text{even elements of } \mathcal{L}$ 
13                 |   launch BnBAtomic( $\mathcal{L}_1$ ,  $procs_1$ ,  $steps_1$ )
14                 |   launch BnBAtomic( $\mathcal{L}_2$ ,  $procs_2$ ,  $steps_2$ )
15                 |    $steps = steps - steps_1 - steps_2$ 
16                 |    $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 
17             end
18         end
19     end
20 end

```

Последовательный вариант алгоритма используется в двух случаях: когда число выделенных потоков составляет в точности 1 (проверка в строках 2–4) и когда количество выделенного ресурса шагов не превосходит пороговой величины $steps_limit$ (проверка в строках 6–8). Значение $steps_limit$ выбирается таким образом, чтобы суммарное время выполнения соответствующего числа шагов было существенно больше времени создания потока и тем самым делало целесообразным его создание.

Создание потоков выполняется в строках 9–16. Ресурс максимального числа потоков, шагов и множество подзадач текущего потока делятся в равных долях между создаваемыми в строках 13, 14 потоками. После завершения их работы выделенный ресурс числа шагов $steps$ уменьшается на сумму количеств шагов $steps_1 + steps_2$, выполненных каждым потоком. Множества подзадач, полученные в результате выполнения потоков, объединяются в строке 16.

3. Методика сравнения эффективности алгоритмов. При сравнении эффективности параллельных алгоритмов ветвей и границ необходимо учитывать, что число итераций алгоритмов может варьироваться в широких пределах из-за так называемых *поисковых аномалий*. Причина поисковых аномалий заключается в том, что скорость обновления рекорда может оказывать очень существенное влияние на эффективность отсева подзадач и, как следствие, число итераций алгоритма. Из-за разницы в относительной скорости работы потоков параллельного приложения число итераций может очень существенно варьироваться от запуска к запуску. Поэтому для обеспечения качества сравнения параллельных вариантов МВГ необходимо проведение достаточно большого числа экспериментов. Ниже приводится методика определения достаточного

числа экспериментов исходя из статистического анализа их результатов. Для полноценного сравнения эксперименты производятся на разных задачах глобальной оптимизации, так как разные задачи приводят к разным деревьям ветвлений, обуславливающих различное поведение параллельных алгоритмов ветвей и границ. При этом задачи должны обладать достаточной вычислительной сложностью, в противном случае распараллеливание нецелесообразно.

Для сравнения разработанных алгоритмов использовался набор из 150 задач глобальной оптимизации [12]. Тестовые задачи отбирались следующим образом:

- 1) каждая m -я задача решалась K раз с помощью a -го алгоритма, $a = \overline{1, 4}$, с неизвестным значением минимума и максимальным количеством вычислительных ядер процессора;
- 2) вычислялось среднее количество шагов для каждой задачи:

$$N_{\bar{m}} = \frac{1}{4K} \sum_{a=1}^4 \sum_{k=1}^K N_{mak},$$

где N_{mak} — количество шагов для m -й задачи, a -го алгоритма и k -го запуска;

- 3) задачи отбирались так, чтобы значение $N_{\bar{m}}$ удовлетворяло ограничениям:

$$N_{\min} \leq N_{\bar{m}} \leq N_{\max}.$$

Эффективность работы алгоритмов сравнивалась по следующим метрикам: T — время решения задачи, N — количество шагов алгоритма, $tps = T/N$ — среднее время решения одного шага (time per subproblem).

Критерии сравнения: среднее значение метрик, масштабируемость — способность алгоритма увеличивать свою производительность при добавлении аппаратных ресурсов, стабильность работы алгоритма.

Среднее значение метрик рассчитывалось как сумма всех чисел деленная на их количество:

$$\begin{aligned} T_{\overline{man}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K T_{makn}, \\ N_{\overline{man}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_{makn}, \\ tps_{\overline{man}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K tps_{makn}, \end{aligned}$$

где T_{makn} , N_{makn} , tps_{makn} — соответствующая метрика для m -й задачи, a -го алгоритма, k -го запуска на n ядрах процессора. Как и упоминалось ранее, при усреднении каких-либо величин необходимо учитывать относительную погрешность [15] оценки среднего в процентах:

$$inAccuracy = 100\% \frac{b-a}{b+a},$$

где a и b — нижняя и верхняя границы доверительного интервала [16], рассчитанного с использованием технологии bootstrap [17, 18], реализованной в пакете `scipy — scipy.stats.bootstrap` [19].

Масштабируемость алгоритмов оценивалась через ускорение:

$$Acceleration = \frac{T_{\overline{mal}}}{T_{\overline{man}}},$$

где $T_{\overline{mal}}$ — среднее время решения задачи в последовательном режиме (на одном ядре процессора), $T_{\overline{man}}$ — в параллельном режиме (на n ядрах процессора).

Стабильность работы алгоритма сравнивалась с помощью статистических характеристик, указываемых на диаграмме данных (`matplotlib.pyplot.boxplot`). Элементы диаграммы показаны на рис. 1. На диаграмме отображается медиана, 95%-ный доверительный интервал, вычисленный с использованием техники bootstrap, 25%-ный и 75%-ный перцентили, усы (whiskers), показывающие максимум или минимум данных и возможные выбросы.

4. Численный эксперимент. Работа выполнялась с помощью инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (Москва) [20]. Эксперименты проводились на двухпроцессорном

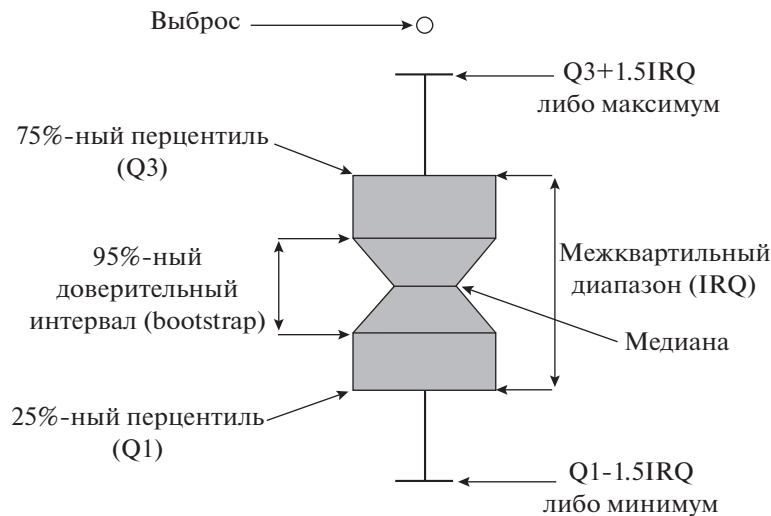


Рис. 1. Диаграмма данных

сервере Kunpeng 920, 64 ядра, 2.6 ГГц, 256 Гб RAM. В первой серии экспериментов каждый из четырех методов был запущен 10 раз для набора из 150 функций [12] с неизвестным значением минимума на 128 ядрах сервера. Кроме этого, были заданы следующие параметры запуска алгоритмов для всех серий экспериментов:

- 1) $\epsilon = 10^{-2}$,
- 2) $N_{\max} = 10^8$ – максимальное количество подзадач,
- 3) $procs = \begin{cases} 1 & ncores = 1, \\ 32ncores & ncores > 1 \end{cases}$

– выделяемый ресурс по числу потоков для алгоритма BnB-Atomic, где *ncores* – количество ядер, на которых запускается алгоритм,

4. *steps_limit* = 1000 – пороговое значение перехода к последовательному варианту для алгоритма BnB-Atomic.

Для дальнейших экспериментов были выбраны задачи, для которых среднее количество подзадач лежало в пределах от $N_{\min} = 10^7$ до $N_{\max} = 10^8$. Данный критерий отбора позволил нам исключить из тестирования задачи, не решаемые ни одним алгоритмом (*Trid10* и *Trid6*) и задачи, решаемые за небольшое количество шагов. Список выбранных задач приведен в табл. 1. Необходимо отметить и в дальнейшем это будет показано, что в этот список попали задачи, которые решались менее чем за 10^7 шагов одним алгоритмом и не решались за 10^8 шагов другим алгоритмом.

Таблица 1. Список задач, выбранных для тестирования

Задача	Количество шагов
Biggs EXP6	64610645
Colville	13016908
Deckkers-Aarts	37967225
Langerman-5	10057600
Mishra 8	12516309
Powell Singular 2 8s	30053649
Schwefel 2.36	16995852

Таблица 2. Минимум и максимум количества шагов для различных задач

Задача	Количество шагов	
	минимальное	максимальное
Biggs EXP6	1	1
Colville	224561	224561
Deckkers-Aarts	36893793	36893793
Langerman-5	2871	2871
Mishra 8	1	1
Powell Singular 2 8s	1	1
Schwefel 2.36	15599251	15599251

Таблица 3. Время решения задачи и относительная погрешность оценки

Задача	Алгоритм	Время, с	Относительная погрешность оценки, %
Deckkers-Aarts	BnB Aatomic	4.5	1.0
Deckkers-Aarts	BnB-Brf	12.2	2.3
Deckkers-Aarts	Global-PAMIGO	113.2	1.2
Deckkers-Aarts	Local-PAMICO	14.6	2.1
Schwefel 2.36	BnB-Aatomic	2.1	1.2
Schwefel 2.36	BnB-Brf	5.0	1.3
Schwefel 2.36	Global-PAMIGO	46.8	1.6
Schwefel 2.36	Local-PAMICO	6.1	1.1

Во второй серии экспериментов для выбранных функций было задано известное значение минимума. Количество ядер, как и в первой серии экспериментов, равно 128. В табл. 2 приведены минимальное и максимальное количество решенных подзадач для каждой функции.

Как мы и ожидали, для известного значения глобального минимума при каждом запуске любой из четырех алгоритмов порождает одинаковое количество подзадач. Сравнивая табл. 1 и 2, можно увидеть, что для тестовых функций *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36* знание значения глобального минимума не приводит к существенному ускорению решения задачи. В табл. 3 приведено среднее время решения задач *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36* и относительная погрешность его оценки.

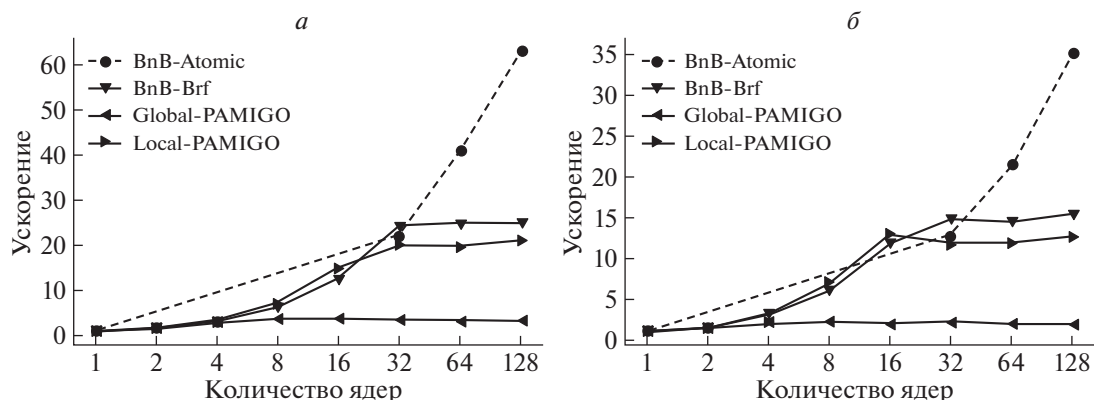
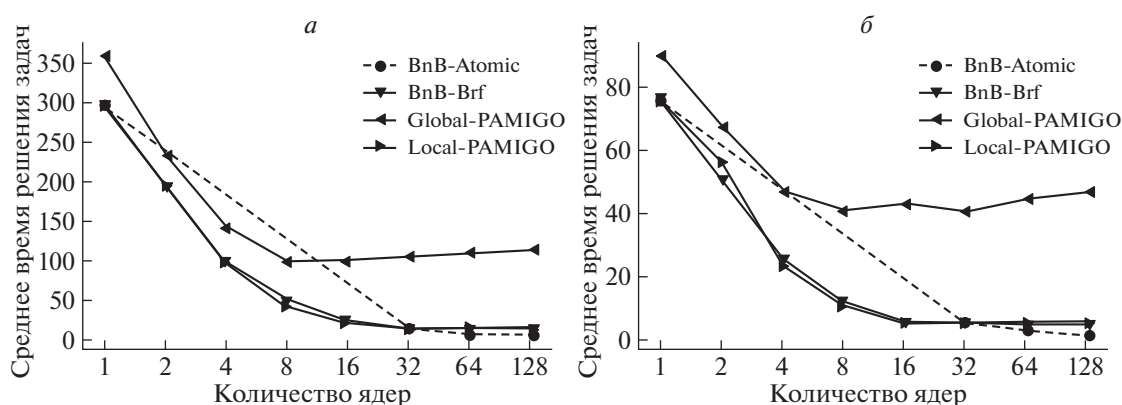
Алгоритмы BnB-Brf и local-PAMIGO имеют примерно равную эффективность, алгоритм BnB-Atomic работает более чем в 2 раза быстрее, а global-PAMIGO показывает результаты, худшие на порядок.

В третьей серии экспериментов мы запустили решение двух задач: *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36* для различного количества ядер с известным значением минимума. Алгоритмы BnB-Brf, global-PAMIGO и local-PAMIGO запускались для [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128] ядер, а BnB-Atomic – [1, 32, 64, 128] ядер. Так как алгоритм BnB-Atomic может быть запущен либо в однопоточном режиме, либо с использованием всех ядер процессора, для запуска на [32, 64] ядрах мы использовали технологию отключения отдельных ядер. Отключение ядра производилось с помощью команд:

```
$ echo 0 | sudo tee /sys/devices/system/cpu/cpu<N>/online,
$ dmesg,
```

где N – номер ядра. Для 64 ядер включенными оставались четные ядра, для 32 – каждое четвертое.

Результаты запусков представлены на рис. 2. Как можно увидеть, ускорение зависит от задачи и для трех алгоритмов при достижении определенного количества ядер стабилизируется. Для алгоритмов BnB-Brf и local-PAMIGO стабилизация наступает при количестве ядер 32,

Рис. 2. Ускорение алгоритмов для задач *Deckkers-Aarts* (а) и *Schwefel2.36* (б)Рис. 3. Среднее время решения задач *Deckkers-Aarts* (а) и *Schwefel2.36* (б)

а алгоритм *global-PAMIGO* стабилизируется уже на 8 ядрах. На рис. 3 приведено среднее время решения задач *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36* в этой же серии экспериментов.

Как видно из графика, алгоритм *global-PAMIGO* в однопоточном режиме работает немного медленнее остальных. Но тем не менее, для задачи *Deckkers-Aarts* до 4–8 ядер его производительность существенно не ухудшается по сравнению с остальными алгоритмами. Поэтому если тестировать его на “персональных” компьютерах, то эффект стабилизации заметить будет невозможно.

В четвертой серии экспериментов запуск алгоритмов осуществлялся при неизвестном значении минимума на 128 ядрах, при этом каждая задача запускалась 40 раз (табл. 4).

Таблица 4. Количество решенных задач

Задача/Алгоритм	BnB-Atomic	BnB-Brf	Global-PAMIGO	Local-PAMIGO
Biggs EXP6	40	40	0	18
Colville	40	40	25	40
Deckkers-Aarts	40	40	40	40
Langerman-5	40	40	28	40
Mishra 8	40	40	22	40
Powell Singular 2 8s	40	40	1	40
Schwefel 2.36	40	40	40	40

Таблица 5. Среднее количество шагов в успешных запусках

Задача/Алгоритм	BnB-Atomic	BnB-Brf	Global-PAMIGO	Local-PAMIGO
Biggs EXP6	55060988	21054960		49661882
Colville	1282078	235925	20620662	740605
Deckkers-Aarts	37333173	36894781	40356543	37165043
Langerman-5	58965	8688	13743657	40966
Mishra 8	1.130	578	5359005	17137
Powell Singular 2 8s	9747155	746139	13114293	12740698
Schwefel 2.36	16235180	15599421	19957545	16013319

Таблица 6. Среднее время шага в успешных запусках (микросекунды)

Задача/Алгоритм	BnB-Atomic	BnB-Brf	Global-PAMIGO	Local-PAMIGO
Biggs EXP6	0.72	0.89		0.68
Colville	1.23	0.96	3.12	0.69
Deckkers-Aarts	0.12	0.32	3.01	0.38
Langerman-5	5.55	11.31	3.09	6.70
Mishra 8	85.54	33.48	16.51	16.35
Powell Singular 2 8s	0.74	0.76	3.34	0.70
Schwefel 2.36	0.13	0.32	3.03	0.38

Из таблицы видно, что BnB-Atomic и BnB-Brf решают все выбранные нами задачи, local-PAMIGO решает 6 задач, а для задачи *BiggsEXP6* терпит неудачу в 22 запусках из 40. Global-PAMIGO решает только 2 ранее рассмотренные задачи. Исключив неудачные запуски, посмотрим на количество шагов сделанных во время решения задачи при каждом запуске. В табл. 5 приведено среднее количество шагов.

Согласно таблице, алгоритм global-PAMIGO на всех задачах проигрывает остальным алгоритмам, причем на задачах, кроме *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36*, этот проигрыш составляет несколько порядков. Учитывая стабилизацию ускорения данного алгоритма на 8 процессах, применение данного алгоритма для решения задач нецелесообразно. Лучшим алгоритмом по критерию количества шагов является BnB-Brf, но более высокое время одного шага (табл. 6), связанное со стабилизацией ускорения на 32 процессах, не позволяют ему доминировать над алгоритмом BnB-Atomic. Кроме средних значений, приводим также характеристики распределения количества шагов для первых четырех задач (рис. 4). Распределения для остальных задач имеют аналогичный характер. Можно увидеть, что алгоритм BnB-Brf не только эффективен по среднему количеству шагов, но и более стабилен.

Далее посмотрим итоговый критерий — среднее время решения задач. В табл. 7 указана величина неточности измерений среднего времени решения задачи для каждого алгоритма. Первое, что мы можем увидеть — точность измерения времени решения подзадач позволяет нам сравнивать алгоритмы друг с другом. Второе, алгоритм BnB-Atomic становится более стабилен по времени решения задач, чем алгоритм BnB-Brf.

В табл. 8 приводится среднее время решения задач в успешных запусках. За счет результативного распараллеливания алгоритм BnB-Atomic работает лучше всех на задачах *Deckkers-Aarts* и *Schwefel2.36*. Для задач *BiggsEXP6*, *Colville*, *Langerman-5* и *PowellSingular28s* эффективней оказывается алгоритм BnB-Brf из-за более рациональной стратегии поиска. И только для задачи *Mishra8* алгоритмы BnB-Brf и local-PAMIGO оказываются сравнимы по производительности. Алгоритм global-PAMIGO, стабилизируясь на 8 ядрах, показывает худшие результаты.

Заключение. Сравнительный анализ алгоритмов показал, что наиболее эффективными по времени решения задач являются алгоритмы BnB-Brf и BnB-Atomic. Исследование масштабируемости продемонстрировало, что при увеличении аппаратных ресурсов (в диапазоне от 1 до 128 ядер) только алгоритм BnB-Atomic увеличивает свою производительность. Для остальных алгоритмов обнаружено, что, начиная с некоторого количества ядер, происходит стабилизация

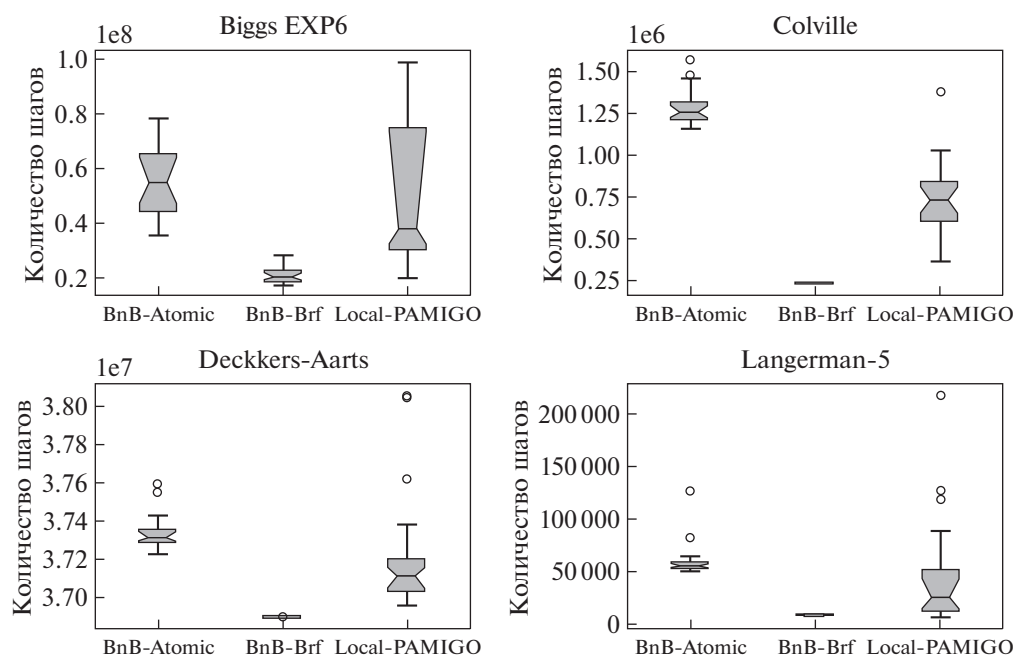


Рис. 4. Распределение количества шагов алгоритмов

ускорения, т.е. добавление аппаратных ресурсов не приводит к ускорению решения задач. У *global-PAMIGO* порог стабилизации ускорения равен 8 ядрам, у *BnB-Brf* и *local-PAMIGO* порог равен 32 ядрам. Рассматривая данный эффект, необходимо отметить, что для работы алгоритмов аппаратными ресурсами являются не только ядра процессора, но и компоненты процессора, отвечающие за конкурентный доступ к оперативной памяти. Архитектура использованного сервера Kunpeng 920, состоящего из двух процессоров, в каждом из которых содержится по два суперкластера из 8 четырехъядерных кластеров, позволила нам показать это.

Кроме среднего времени решения задач и масштабируемости, мы исследовали стабильность работы алгоритмов по количеству шагов, среднему времени шага и времени решения задач. Стабильность работы алгоритмов по количеству шагов обеспечивается устойчивостью алгоритма к аномалиям поиска, а стабильность по среднему времени шага — устойчивым конкурентным доступом к общей памяти. Пример алгоритма *BnB-Brf* стабильного и эффективного по количеству шагов, но менее стабильного по среднему времени шага показывает нам, что рациональная поисковая стратегия, не учитывающая в полной мере архитектуру процессора, в результате может привести к замедлению работы параллельного алгоритма.

Одним из важнейших параметров рассматриваемых алгоритмов является степень ветвления подзадач. В работе не исследовали влияние этого параметра на масштабируемость алгоритмов и время решения задач. Также было бы интересно посмотреть на зависимость эффективности

Таблица 7. Неточность измерения среднего времени шага в успешных запусках (проценты)

Задача/Алгоритм	BnB-Atomic	BnB-Brf	Global-PAMIGO	Local-PAMIGO
Biggs EXP6	0.24	5.51		0.77
Colville	2.04	3.66	0.96	3.43
Deckkers-Aarts	0.51	0.51	0.50	0.46
Langerman-5	3.47	18.41	1.66	16.73
Mishra 8	6.73	7.85	56.99	29.47
Powell Singular 2 8s	1.07	2.95		0.56
Schwefel 2.36	1.30	0.42	0.80	0.46

Таблица 8. Среднее время решения задачи в успешных запусках (секунды)

Задача/Алгоритм	BnB-Atomic	BnB-Brf	Global-PAMIGO	Local-PAMIGO
Biggs EXP6	39.53	18.89		33.69
Colville	1.57	0.23	64.33	0.50
Deckkers-Aarts	4.60	11.72	121.32	14.05
Langerman-5	0.32	0.10	41.98	0.16
Mishra 8	0.07	0.02	16.67	0.03
Powell Singular 2 8s	7.114	0.57	43.86	8.92
Schwefel 2.36	2.07	4.98	60.50	6.16

алгоритмов от архитектуры используемых серверов. Результаты данных исследований будут проведены в последующей публикации авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушенко Ю.Г.* Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11. № 6. С. 1390–1403.
2. *Lawler E.L., Wood D.E.* Branch-and-Bound Methods: A survey // Operations research. 1966. V. 14. № 4. P. 699–719.
3. *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А.* Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1376–1389.
4. *Karnopp D.C.* Random Search Techniques for Optimization Problems // Automatica. 1963. V. 1. № 2–3. P. 111–121.
5. *Solis F.J., Wets R.J.B.* Minimization by Random Search Techniques // Mathematics of Operations Research. 1981. V. 6. № 1. P. 19–30.
6. *Marte R., Lozano J.A., Mendiburu A. et al.* Multi-start Methods // Handbook of Heuristics. Cham: Springer, 2018. P. 155–175.
7. *Marte R., Aceves R., LeFin M. T. et al.* Intelligent Multi-start Methods // Handbook of Heuristics. Cham: Springer, 2019. P. 221–243.
8. *Амирханова Г.А., Горчаков А.Ю., Дуйсенбаева А.Ж., Посыпкин М.А.* Метод мультистарта с детерминированным механизмом рестарта // Вестн. С.-Петербургского ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 2. С. 100–111.
9. *Зайцев А.А., Курейчик В.В., Полупанов А.А.* Обзор эволюционных методов оптимизации на основе роевого интеллекта // Изв. Южного федерального ун-та. Технические науки. 2010. Т. 113. № 12. С. 7–12.
10. *Crainic T.G., Le Cun B., Roucairol C.* Parallel Branch-and-bound Algorithms // Parallel Combinatorial Optimization. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006. P. 1–28.
11. *Casado L.G., Martinez J.A., Garcia I. et al.* Branch-and-bound Interval Global Optimization on Shared Memory Multiprocessors // Optimization Methods & Software. 2008. V. 23. № 5. P. 689–701.
12. *Posypkin M., Usov A.* Implementation and Verification of Global Optimization Benchmark Problems // Open Engineering. 2017. V 7. № 1. P. 470–478.
13. *Land A.H., Doig A.G.* An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. V. 28. № 3. С. 497–520.
14. *Van Der Pas R., Stotzer E., Terboven C.* Using OpenMP-The Next Step: Affinity, Accelerators, Tasking, and SIMD. London: MIT Press, 2017.
15. *Rabinovich S.G., Rabinovich M.* Evaluating Measurement Accuracy. N.Y.: Springer, 2010.
16. *Dekking F.M., Kraaikamp C., Lopuhaä H.P. et al.* A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding why and how. London: Springer, 2005.
17. *Efron B., Tibshirani R. J.* A An Introduction to the Bootstrap. Boca Raton: CRC press, 1994.
18. *Helwig N.E.* Bootstrap Confidence Intervals // Twin:University of Minnesota, 2017.
19. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature methods. 2020. V. 17. № 3. С. 261–272.
20. Положение о ЦКП “Информатика”. 2020. URL: <http://www.frccsc.ru/ckp> (onlineHs accessed: 2020-07-23).

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 62-501.2

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПАРОГЕНЕРАТОРОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. С. И. Гулюкина^{а,*}, В. А. Уткин^{а,**}

^аИПУ РАН, Россия, Москва

*e-mail: gulyukina.s.i@mail.ru

**e-mail: vicutkin@ipu.ru

Поступила в редакцию 08.09.2022 г.

После доработки 17.09.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается задача управления парогенератором с учетом ограничений на фазовые переменные и управление при воздействии внешних неконтролируемых возмущений. Для синтеза закона управления применяется блочный подход с формированием линейных локальных связей с насыщением, что позволяет учесть ограничения на фазовые переменные и управление при выборе параметров обратной связи. В условиях неполной информации о векторе состояния и при воздействии внешних возмущений синтезирован наблюдатель состояний и возмущений, позволяющий получить оценки неизвестных сигналов с заданной точностью. Эффективность предложенных алгоритмов подтверждена результатами численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0002338823020105, EDN: JEBMEQ

Введение. На крупных современных теплоэнергетических объектах распространена схема выработки электроэнергии и тепла, основанная на генерации водяного пара при сжигании угля или природного газа и последующей его подачи на паротурбинные установки. В данной схеме достигаются лучшие по сравнению с другими установками технологические характеристики, в том числе энергоэффективность, особенно для энергетических объектов большой мощности. Математические модели, описывающие теплоэнергетические объекты, являются многомерными и многосвязными, с большим количеством физических параметров, не подлежащих прямому измерению [1–3]. Необходимость учета в подобных моделях нелинейностей обусловливается тепловыми, механическими и электрическими ограничениями при наличии общего ограничения на суммарную мощность протекающих процессов. Учет данных ограничений становится обязательным в связи с всеобщим требованием минимизации потерь энергетических ресурсов при одновременной интенсификации технологических процессов энергетических объектов.

Известные алгоритмы управления энергетическими объектами часто основаны на методах линеаризации исходной нелинейной системы [4, 5]. Следует отметить, что применительно к линеаризованным моделям удается обеспечить работоспособность системы управления только в окрестности рабочей точки. В отличие от линеаризованных моделей, методы линеаризации нелинейных моделей по обратной связи, разработанные в рамках блочного подхода [6, 7] и алгоритмов обратного обхода интеграторов (back-stepping control) [8, 9], обеспечивают глобальную сходимость замкнутой системы. Часто в задачах управления применяются также методы робастного управления [10–12], в частности, робастность и инвариантность к внешним возмущениям обеспечиваются при использовании методов скользящих режимов [13–16]. Для получения оценок, недоступных для измерения компонент вектора состояния, а также модельных неопределенностей и внешних возмущений, весьма эффективными являются наблюдатели состояний с разрывными управлениями и глубокими обратными связями [17–19].

В настоящее время вопросы, связанные с учетом ограничений на фазовые переменные и управления, недостаточно изучены в теории управления. В последнее время появился ряд исследований по учету ограничений на фазовые переменные и управления [20–22], в которых с использованием блочного подхода синтезируются локальные обратные связи и собственно

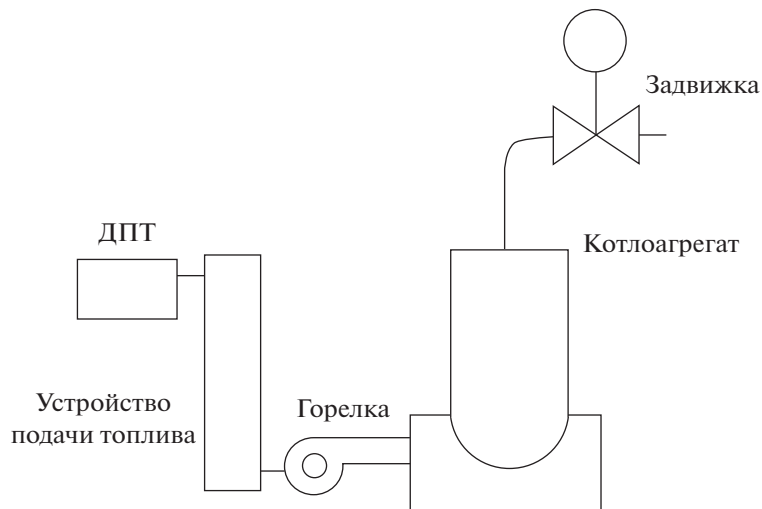


Рис. 1. Схема котла-парогенератора

управления в виде функций с насыщением, что позволяет уже на стадии синтеза обратной связи учитывать указанные ограничения.

В работе ставится задача синтеза робастной системы управления парогенератором при действии на объект управления внешних несогласованных ограниченных по модулю возмущений. Цель управления в форме обратной связи состоит в поддержании давления перед задвижкой, регулирующей подачу пара в турбину, на заданном уровне с учетом ограничений на фазовые переменные и управление. Для решения поставленной задачи предлагается применить блочный подход с использованием в качестве локальных обратных связей линейных функций с насыщением (sat-функций).

Работа организована следующим образом. В разд. 1 приводится математическая модель объекта управления и формализуется постановка задачи. Раздел 2 посвящен синтезу обратной связи с учетом ограничений на фазовые переменные и управление в предположении, что вектор состояния модели объекта управления и внешние возмущения доступны для измерения. Для информационного обеспечения предложенных алгоритмов управления при неполном комплекте датчиков в разд. 3 разрабатывается наблюдатель состояний и возмущений. В разд. 4 приводятся результаты численного моделирования в среде MATLAB–Simulink, демонстрирующие работоспособность предложенных алгоритмов.

1. Математическая модель объекта управления. Постановка задачи. Рассматриваемая система представлена котлом-парогенератором, используемым в паровых турбинах. Данный вид парогенератора широко применяется в технологических операциях различных производств. Принципиальная схема котла приведена на рис. 1.

Промышленный парогенератор состоит из металлического бойлера с водой. Посредством теплового потока $D_Q(t)$ нагревательный прибор внутри устройства доводит воду до кипения, которая затем переходит в состояние пара. Перегретый пар поднимается к задвижке, находящейся в положении $q(t)$, перед которой создается высокое давление $P_T(t)$. Управляющим воздействием в системе является подача топлива в топку печи, пропорциональная расходу топлива $u_1(t)$.

Модель процессов в котле описывается системой из трех дифференциальных уравнений [1–3]:

$$\begin{aligned} C_n \dot{P}_T(t) &= k_s \sqrt{P_D(t) - P_T(t)} - k_\mu P_T(t) q(t), \\ C_b \dot{P}_D(t) &= k_m D_Q(t) - k_s \sqrt{P_D(t) - P_T(t)}, \\ T_b \dot{D}_Q(t) &= -D_Q(t) + u_1(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $P_T(t)$ — давление пара перед задвижкой, регулирующей подачу пара непосредственно в турбину, C_n — термическая постоянная для трубопроводов высокого давления, $P_D(t)$ — давление пара на выходе из котла — парогенератора, k_s — коэффициент пропорциональности падения давления между котлом и задвижкой, k_μ — коэффициент пропорциональности положения задвижки, D_Q —

тепловой поток печи, C_b — термическая постоянная котла, k_m — коэффициент пропорциональности, T_b — постоянная времени, $u_1(t)$ — расход топлива в топке печи.

Предполагается, что подача топлива в печь обеспечивается устройством подачи топлива с двигателем постоянного тока (ДПТ). Поведение ДПТ описывается системой уравнений второго порядка [23]:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= a_{21}(a_{22}I_{\text{я}}(t) - m_L(t)), \\ \dot{I}_{\text{я}}(t) &= a_{32}(u_2(t) - a_{22}\omega(t) - a_{31}I_{\text{я}}(t)),\end{aligned}\quad (1.2)$$

где $\omega(t) \in R$ — частота вращения вала двигателя, $I_{\text{я}}(t) \in R$ — ток якоря, $u_2(t) \in R$ — напряжение якоря, $m_L(t)$ — момент нагрузки, $a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ — положительные константы.

Полагая, что скорость подачи топлива в печь пропорциональна частоте вращения ДПТ $u_1(t) = m\omega(t)$, $m = \text{const} > 0$, запишем системы (1.1) и (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= -a_1q(t)e_1(t) + a_2x_2(t) - \eta_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{2x_2(t)}[a_1q(t)e_1(t) + a_3x_3(t) + \eta_1] - \eta_2,\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= -bx_3(t) + bmx_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= a_{21}[a_{22}x_5(t) - m_L], \\ \dot{x}_5(t) &= a_{32}[u_2(t) - a_{22}x_4(t) - a_{31}x_5(t)].\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь $e_1(t) = P_T(t) - P_{Td}(t)$, $P_{Td}(t)$ — желаемое давление перед задвижкой, $x_2(t) = \sqrt{P_D(t) - P_T(t)}$, $x_3 = D_Q(t)$, $x_4 = \omega(t)$, $x_5 = I_{\text{я}}(t)$, $\eta_1(t) = a_1q(t)P_{Td}$, $\eta_2(t) = k_s(C_b + C_n)/(2C_bC_n) = \text{const}$, $a_1 = k_{\mu}/C_n$, $a_2 = k_s/C_n$, $a_3 = k_m/C_b$, $b = 1/T_b$ и $a_{ij} = \text{const} > 0$ — параметры ДПТ.

Ставится задача слежения за заданным значением давления перед задвижкой $P_{Td} = \text{const}$ с заданной точностью

$$|e_1(t)| = |P_T(t) - P_{Td}| \leq \Delta_1 = \text{const} \quad (1.5)$$

в следующих предположениях относительно систем (1.3) и (1.4):

1) для измерения доступны давление перед задвижкой $P_T(t)$ и, следовательно, $e_1(t) = P_T(t) - P_{Td}$, давление в парогенераторе $P_D(t)$ и, следовательно, $x_2(t) = \sqrt{P_D(t) - P_T(t)}$, а также ток якоря ДПТ $x_5(t)$;

2) возмущения $\eta_1(t), \eta_2$ и положение задвижки $q(t)$ полагаются неизвестными и удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned}q(t) \in [q_{\min}, 1], \quad |q^{(i)}(t)| \leq Q_i, \quad i = \overline{1, 4} \Rightarrow \eta_1(t) \in [N_{11}, N_{12}], \quad \eta_2 \leq N_2; \\ Q_i, q_{\min}, N_{11}, N_{12}, \bar{N}_1, N_2 = \text{const} > 0.\end{aligned}\quad (1.6)$$

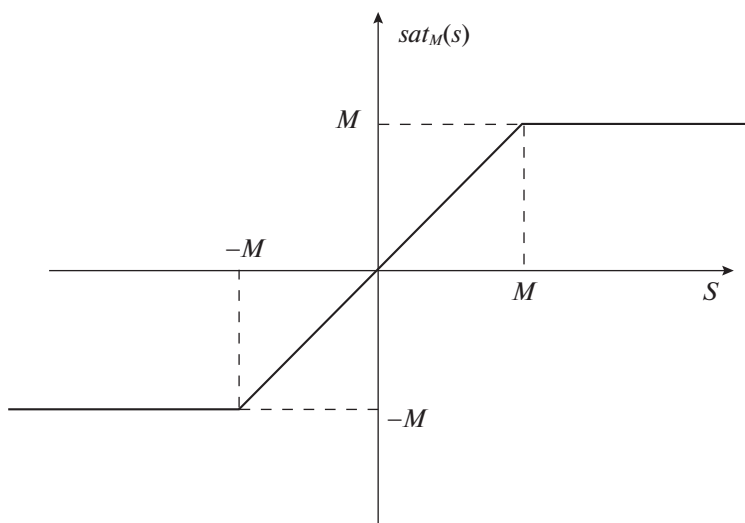
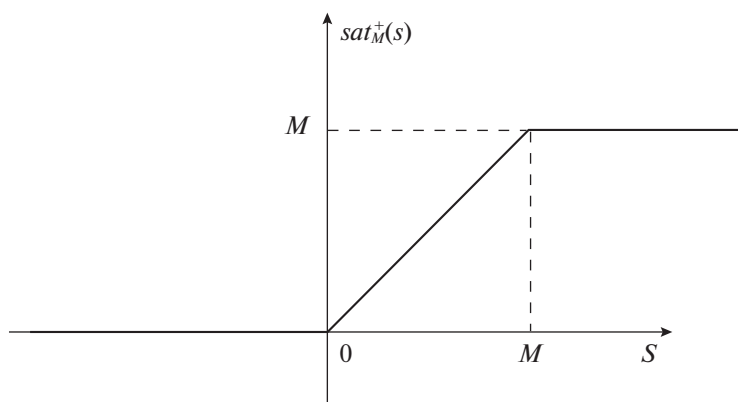
Тот факт, что положение выпускной задвижки полагается неизвестным и рассматривается в качестве внешнего возмущения, означает автономный режим работы парогенератора. Такая ситуация часто встречается при групповом использовании парогенераторов, работающих на общий паропровод;

3) на переменные системы наложены физические ограничения

$$\begin{aligned}|e_1| \in E_1, \quad x_2(t) \in (X_{21}, X_{22}], \quad x_i(t) \in [0, X_i], \quad i = \overline{3, 4}; \\ |x_5(t)| \leq X_5, \quad u_1(t) \in [0, U_1], \quad |u_2(t)| \leq U_2; \\ E_1, X_{21}, X_{22}, X_i, X_5, U_1, U_2 = \text{const} > 0.\end{aligned}\quad (1.7)$$

В разд. 2 решается задача синтеза обратной связи в задаче регулирования относительно выходной переменной (1.5) в условиях полной параметрической и сигнальной определенности с учетом ограничений (1.6)–(1.7).

2. Синтез обратной связи. Представим решение в общем виде в рамках блочного подхода в условиях полной информации о компонентах вектора состояния и возмущениях. Далее используется следующее определение.

Рис. 2. График линейной функции с насыщением $sat_M(s)$ Рис. 3. График линейной односторонней функции с насыщением $sat_M^+(s)$

О п р е д е л е н и е. Для $M = \text{const} > 0$ и аргумента функции s имеем

$$sat_M(s) = \min(|s|, M)\text{sign}(s), \quad sat_M^+(s) = 0.5sat_M(s)[1 + \text{sign}(s)],$$

которые для наглядности изображены на рис. 2, 3.

Ниже приведена поэтапная процедура синтеза обратной связи в решении задачи регулирования (1.5) в предположениях (1.6)–(1.7).

Э т а п 1.

1. В первом уравнении системы (1.3) в качестве фиктивного управляющего воздействия рассматривается разность давлений на выходе из котла и перед задвижкой x_2 .

2. Введем невырожденную замену переменных, учитывающую ограничения (1.7):

$$e_2(t) = a_2x_2(t) - sat_{M_2}^+(s_2(t)), \quad (2.1)$$

где $s_2(t) = -k_1e_1(t) + \eta_1(t)$. Как видим, решение задачи стабилизации переменной $e_2(t) \rightarrow 0$ при выборе амплитуды $0 < M_2 \leq a_2X_2$ обеспечивает заданные ограничения $x_2 \in [0, X_2]$ (1.7). После подстановки (2.1) первое уравнение системы (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{e}_1(t) = -a_1q(t)e_1(t) + e_2(t) + sat_{M_2}^+(s_2(t)) - \eta_1(t). \quad (2.2)$$

3. При попадании переменной $s_2(t)$ в линейную зону $0 < s_2(t) < M_2$ первая система (1.3) описывается уравнением

$$\dot{e}_1(t) = -[a_1 q(t) + k_1]e_1(t) + e_2(t), \quad (2.3)$$

где выбор параметра $k_1 = \text{const} \geq 0$ определяет сходимость состояния данной подсистемы в некоторую окрестность нуля, определяемую выражением $|e_1(t)| \leq \Delta_2 / (a_1 q_{\min} + k_1)$ в предположении, что выполнено неравенство $|e_2(t)| \leq \Delta_2 = \text{const}$, обеспечиваемое на втором этапе процедуры.

4. Условия попадания в линейную зону определяются выбором амплитуды M_2 и коэффициента усиления k_1 , исходя из обеспечения соотношения $s_2(t)\dot{s}_2(t) < 0$ в нелинейной зоне $s_2(t) \in (-\infty, 0) \cup (M_2, \infty)$.

Запишем дифференциальное уравнение относительно переменной $s_2(t)$:

$$\dot{s}_2(t) = f_1(t) - k_1[\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t)) + \varphi_1(t)], \quad (2.4)$$

где $f_1(t) = \dot{\eta}_1$, $\varphi_1(t) = -a_1 q_1(t)e_1 + e_2(t) - \eta_1(t)$.

5. Ставится задача выбора коэффициента k_1 и амплитуды M_2 функции с насыщением $\text{sat}_{M_2}^+(s_2)$.

Положим далее $|f_1(t)| \leq F_1 = \bar{N}_1$, $-\varphi_1(t) \in [\Phi_{11}, \Phi_{12}]$, $F_1, \Phi_{11}, \Phi_{12} = \text{const} > 0$.

При $s_2(t) \in (M_2, \infty)$ и, следовательно, $\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t)) = M_2$ должно выполняться неравенство $\dot{s}_2(t) = f_1(t) - k_1[M_2 + \varphi_1(t)] < 0$, откуда следует неравенство на выбор амплитуды $M_2 > \Phi_{12} + F_1/k_1$.

При $s_2(t) \in (-\infty, 0)$ и, следовательно, $\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t)) = 0$ должно выполняться неравенство $\dot{s}_2(t) = f_1(t) - k_1\varphi_1(t) > 0$. В силу $\varphi_1(t) < 0$ найдется такой коэффициент $k_1 > 0$, что условие $\dot{s}_2(t) < 0$ справедливо: $k_1 > F_1/\Phi_{11}$.

Этап 2.

1. Обеспечим попадание переменной $e_2(t)$ из (2.1) в заданную окрестность нуля $|e_2(t)| \leq \Delta_2$. Другими словами, решим задачу стабилизации с заданной точностью системы вида

$$\dot{e}_2(t) = \frac{a_2}{2x_2(t)}[a_1 q(t)e_1(t) + a_3 x_3(t) + \eta_1(t)] - a_2 \eta_2 - \frac{d}{dt}[\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t))], \quad (2.5)$$

где

$$\frac{d}{dt}[\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t))] = \begin{cases} 0, & s_2(t) \in (-\infty, 0) \cup (M_2, \infty), \\ \dot{s}_2(t), & s_2(t) \in (0, M_2). \end{cases}$$

2. Рассматривая переменную $x_3(t)$ в системе (2.5) в качестве фиктивного управления, введем замену переменной:

$$e_3(t) = a_3 x_3(t) - \text{sat}_{M_3}^+(s_3(t)), \quad (2.6)$$

где

$$s_3(t) = -a_1 q(t)e_1(t) - \eta_1(t) - k_2 e_2(t) + \frac{2x_2}{a_2} \left\{ \frac{d}{dt}[\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t))] + a_2 \eta_2 \right\}.$$

Выбор амплитуды из соотношения $0 < M_3 \leq a_3 X_3$ в результате решения задачи стабилизации переменной $e_3(t)$ обеспечивает ограничение $x_3(t) \in [0, X_3]$.

3. После подстановки (2.6) в (2.5) имеем

$$\dot{e}_2(t) = \frac{a_2}{2x_2(t)}[a_1 q(t)e_1(t) + e_3(t) + \text{sat}_{M_3}^+(s_3(t)) + \eta_1(t)] - a_2 \eta_2 - \frac{d}{dt}[\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t))]. \quad (2.7)$$

4. При попадании в линейную зону система (2.7) описывается уравнением вида

$$\dot{e}_2(t) = \frac{a_2}{2x_2(t)}(-k_2 e_2(t) + e_3(t)). \quad (2.8)$$

Таким образом, решена задача стабилизации переменной $e_2(t)$ в окрестности нуля $|e_2(t)| \leq \Delta_2 = \Delta_3/k_2$ в предположении, что на следующем этапе будет обеспечено соотношение $|e_3(t)| \leq \Delta_3$.

5. Выбор амплитуды и коэффициента усиления функции $sat_{M_3}^+(s_3(t))$ с целью обеспечения попадания переменной $s_3(t)$ в линейную зону определяется аналогично первому этапу.

Запишем уравнение, описывающее поведение переменной $s_3(t)$:

$$\dot{s}_3(t) = f_2(t) - \frac{k_2 a_2}{2x_2(t)} [sat_{M_3}^+(s_3(t)) + \varphi_2(t)], \quad (2.9)$$

где

$$f_2(t) = -a_1(\dot{q}e_1(t) + q\dot{e}_1(t)) - \dot{\eta}_1(t) + \frac{2\dot{x}_2(t)}{a_2} \frac{d}{dt} [sat_{M_2}^+(s_2(t)) + a_2\eta_2] + \frac{2x_2(t)}{a_2} \frac{d^2}{dt^2} [sat_{M_2}^+(s_2(t))],$$

$$\varphi_2(t) = a_1 q e_1(t) + e_3(t) + \eta_1(t) - \frac{2x_2(t)}{a_2} \frac{d}{dt} [sat_{M_2}^+(s_2(t)) + a_2\eta_2].$$

Положим далее $|f_2(t)| \leq F_2$, $-\varphi_2(t) \in [\Phi_{21}, \Phi_{22}]$, $F_2, \Phi_{21}, \Phi_{22} = \text{const} > 0$.

По аналогии с первым этапом выбор $M_3 > \Phi_{22} + 2X_{22}F_2/(k_2 a_2)$ и $k_2 > 2X_{22}F_2/(a_2 \Phi_{21})$ гарантирует попадание переменной $s_3(t)$ в линейную зону $s_3(t) \in [0, M_3]$.

Э т а п 3.

1. Обеспечим попадание переменной $e_3(t)$ из (2.6) в заданную окрестность нуля $|e_3(t)| \leq \Delta_3$, т.е. решим задачу стабилизации с заданной точностью системы вида

$$\dot{e}_3(t) = a_3 b (-x_3(t) + m x_4(t)) - \frac{d}{dt} [sat_{M_3}^+(s_3(t))]. \quad (2.10)$$

2. Рассматриваем переменную $x_4(t)$ в системе (2.10) в качестве фиктивного управления, введем замену переменной

$$e_4(t) = m x_4(t) - sat_{M_4}^+(s_4(t)), \quad (2.11)$$

где

$$s_4(t) = x_3(t) - k_3 e_3(t) + \frac{1}{a_3 b} \frac{d}{dt} [sat_{M_3}^+(s_3(t))].$$

Выбор амплитуды из соотношения $0 < M_4 \leq m X_4$ в результате решения задачи стабилизации переменной $e_4(t)$ обеспечивает ограничение $x_4(t) \in [0, X_4]$.

3. После подстановки (2.11) в (2.10) имеем

$$\dot{e}_3(t) = a_3 b [-x_3(t) + e_4(t) + sat_{M_4}^+(s_4(t))] - \frac{d}{dt} [sat_{M_3}^+(s_3(t))]. \quad (2.12)$$

4. При функционировании в линейной зоне система (2.12) стабилизируется с заданной точностью

$$\dot{e}_3(t) = a_3 b (-k_3 e_3(t) + e_4(t)). \quad (2.13)$$

Действительно, $|e_3(t)| \leq \Delta_3 = \Delta_4/k_3$ в предположении, что $|e_4(t)| \leq \Delta_4 = \text{const}$ будет обеспечено на следующем этапе.

5. Выбор амплитуды и коэффициента усиления функции $sat_{M_4}^+(s_4(t))$ с целью попадания переменной $s_4(t)$ в линейную зону определяется аналогично первому этапу.

Запишем уравнение, описывающее поведение переменной $s_4(t)$

$$\dot{s}_4(t) = f_3(t) - k_3 a_3 b sat_{M_4}^+(s_4(t)) + \varphi_3(t), \quad (2.14)$$

где

$$f_3(t) = \dot{x}_3(t) + \frac{1}{a_3 b} \frac{d^2}{dt^2} [\text{sat}_{M_2}^+(s_2(t))], \quad \varphi_3(t) = -x_3(t) + e_4(t) - \frac{1}{a_3 b} \frac{d}{dt} [\text{sat}_{M_3}^+(s_3(t))].$$

Положим далее $|f_3(t)| \leq F_3$, $-\varphi_3(t) \in [\Phi_{31}, \Phi_{32}]$, $F_3, \Phi_{31}, \Phi_{32} = \text{const} > 0$.

Выбор $M_4 > \Phi_{32} + F_3/(k_3 a_3 b)$ и $k_3 > F_3/(a_3 b \Phi_{31})$ по аналогии с первым этапом гарантирует попадание переменной $s_4(t)$ в линейную зону $s_4(t) \in [0, M_4]$.

Э т а п 4.

1. Рассматривается динамическое уравнение относительно переменной системы $e_4(t)$ из (2.11) вида

$$\dot{e}_4(t) = m a_{21}(a_{22}x_5(t) - m_L) - \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t)). \quad (2.15)$$

2. В выражении (2.15) в качестве фиктивного управления выступает ток якоря $x_5(t)$, положим его равным

$$e_5(t) = a_{22}x_5(t) - \text{sat}_{M_5}(s_5(t)), \quad (2.16)$$

где

$$s_5(t) = m_L - k_4 e_4(t) + \frac{1}{m a_{21}} \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t)).$$

Выбор амплитуды из соотношения $|M_5| \leq a_{22}X_5$ в результате решения задачи стабилизации переменной $e_5(t)$ обеспечивает ограничение $|x_5| \leq X_5$.

3. После подстановки (2.16) в (2.15) имеем

$$\dot{e}_4(t) = m a_{21}[e_5(t) + \text{sat}_{M_5}(s_5(t)) - m_L] - \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t)). \quad (2.17)$$

4. При функционировании в линейной зоне система (2.17) стабилизируется с заданной точностью

$$\dot{e}_4(t) = m a_{21}(-k_4 e_4(t) + e_5(t)), \quad (2.18)$$

где выбор параметра $k_4 > 0$ определяет сходимость переменной данной подсистемы в заданную окрестность нуля, определяемую выражением $|e_4(t)| \leq \Delta_5/k_4$ в предположении, что выполняется условие $|e_5(t)| \leq \Delta_5 = \text{const}$, обеспечивающееся на последнем этапе процедуры.

5. Выбор амплитуды $M_5 > 0$ из (2.16), обеспечивающей попадание переменной e_4 в окрестность нуля, определяется на основе второго метода Ляпунова: $V = 0.5s_5^2(t)$.

Запишем производную функции $s_5(t)$ в виде

$$\dot{s}_5(t) = f_4(t) - k_4 m a_{21}(\text{sat}_{M_5}(s_5(t)) + \varphi_4(t)), \quad (2.19)$$

где

$$f_4(t) = \dot{m}_L + \frac{1}{m a_{21}} \frac{d^2}{dt^2} \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t)), \quad \varphi_4(t) = e_5(t) - m_L - \frac{1}{m a_{21}} \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t)).$$

Требование $\dot{V} = s_5(t)[f_4(t) - k_4 m a_{21}(\text{sat}_{M_5}(s_5(t)) + \varphi_4(t))] < 0$ вне линейной зоны $|s_5(t)| \geq M_5$ дает производную функции Ляпунова вида $\dot{V} = s_5(t)[f_4(t) - k_4 m a_{21} \text{sign}_{M_5}(s_5(t)) + \varphi_4(t)] < 0$, откуда следует выражение для выбора амплитуды $M_5 > \Phi_4 + F_4/(k_4 m a_{21})$, где $|f_4(t)| \leq F_4 = \text{const}$, $|\varphi_4(t)| \leq \Phi_4 = \text{const}$.

Э т а п 5.

Решается задача стабилизации переменной (2.16), описываемой уравнением

$$\dot{e}_5(t) = a_{22}a_{32}[u_2(t) - a_{22}x_4(t) - a_{31}x_5(t)] - \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_5}(s_5(t))$$

или с учетом (2.11) и (2.16)

$$\dot{e}_5(t) = a_{22}a_{32} \left\{ u_2(t) - \frac{a_{22}}{m} [e_4(t) + \text{sat}_{M_4}^+(s_4(t))] - \frac{a_{31}}{a_{22}} [e_5(t) + \text{sat}_{M_5}(s_5(t))] \right\} - \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_5}(s_5(t)). \quad (2.20)$$

Выберем управление в виде разрывной функции ввиду физических соображений:

$$u_2 = -M_6 \text{sign}(s_6(t)), \quad s_6(t) = e_5(t). \quad (2.21)$$

При условии выполнения условия существования скользящего режима

$$M_6 > -a_{22}x_4(t) - a_{31}x_5(t) - \frac{1}{a_{22}a_{32}} \frac{d}{dt} \text{sat}_{M_5}(s_5(t))$$

в системе (2.20) за конечное время возникает скользящий режим по плоскости $e_5(t) = 0$.

Для наглядности выпишем уравнения движения замкнутой системы (1.3), (1.4) в новых переменных $e_i(t) = 0$, $i = \overline{1, 5}$, задаваемых уравнениями (1.5), (2.1), (2.6), (2.11), (2.16) при попадании компонент вектора в новые переменные в линейные зоны соответствующих sat-функций и возникновения скользящего режима по плоскости $e_5(t) = 0$, согласно уравнениям (2.3), (2.8), (2.13), (2.18):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= -(a_1q(t) + k_1)e_1(t) + e_2(t), & \dot{e}_2(t) &= \frac{a_2}{2x_2(t)} (-k_2e_2(t) + e_3(t)), \\ \dot{e}_3(t) &= a_3b(-k_3e_3(t) + e_4(t)), & \dot{e}_4(t) &= ma_{21}(-k_4e_4(t) + e_5(t)), & e_5(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В системе (2.22) осуществляется декомпозиция снизу вверх общего движения на последовательно сходящиеся в ноль подсистемы первого порядка: $e_5(t) = 0 \Rightarrow e_4(t) \rightarrow 0 \Rightarrow e_3(t) \rightarrow 0 \Rightarrow e_2(t) \rightarrow 0 \Rightarrow e_1(t) \rightarrow 0$, что и решает поставленную задачу регулирования выходной переменной.

В следующем разделе решается задача оценивания компонент вектора состояния и возмущений в системе (1.3), (1.4) с использованием каскадного метода синтеза наблюдателя в рамках методов систем с глубокими обратными связями и скользящими режимами.

3. Наблюдатель вектора состояния и внешних возмущений. 3.1. Наблюдатель вектора состояния и возмущений. Относительно модели объекта управления (1.3), (1.4) предполагается, что для измерения доступны переменные $e_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_5(t)$, построим наблюдатель вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= a_2z_2(t) + \varepsilon_1(t)l_1, \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{1}{2x_2(t)} a_3z_3(t) + \varepsilon_2(t)l_2, \\ \dot{z}_3(t) &= -bz_3(t) + bmz_4(t) + v_3(t), \\ \dot{z}_4(t) &= a_{21}a_{22}x_5(t) + v_4(t), \\ \dot{z}_5(t) &= a_{32}(u_2(t) - a_{22}z_4(t) - a_{31}x_5(t)) + v_5(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_1(t) = x_1(t) - z_1(t)$, $\varepsilon_2(t) = x_2(t) - z_2(t)$, параметры $l_1, l_2 = \text{const} > 0$ и корректирующие воздействия v_3, v_4, v_5 определяются далее.

Запишем систему в невязках $\varepsilon_i(t) = x_i(t) - z_i(t)$, $i = \overline{1, 5}$, с учетом (1.3)–(1.4) и (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1(t) &= a_2\varepsilon_2(t) - \eta_1^*(t) - l_1\varepsilon_1(t), \\ \dot{\varepsilon}_2(t) &= \frac{1}{2x_2(t)} [a_3\varepsilon_3(t) + \eta_1^*(t)] - \eta_2(t) - l_2\varepsilon_2(t), \\ \dot{\varepsilon}_3(t) &= -b\varepsilon_3(t) + bm\varepsilon_4(t) - v_3(t), \\ \dot{\varepsilon}_4(t) &= -a_{21}m_L - v_4(t), \\ \dot{\varepsilon}_5(t) &= -a_{32}a_{22}\varepsilon_4(t) - v_5(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\eta_1^*(t) = a_1q(t)[e_1(t) + P_{Td}] = a_1q(t)x_1(t)$.

Дальнейший анализ и синтез наблюдателя вектора состояния и возмущений (3.1) основывается на следующем результате.

Л е м м а [21]. Пусть дана система $\dot{\epsilon}(t) = -l\epsilon(t) + \eta(t)$, $l, N, \bar{N} = \text{const} > 0$, $|\eta(t)| \leq N$, $|\dot{\eta}(t)| \leq \bar{N}$. Тогда через конечный промежуток времени $t_1 \geq 0$ справедливы оценки:

$$|\epsilon(t)| \leq \Delta = \frac{N}{l}, \quad |\dot{\epsilon}(t)| \leq \bar{\Delta} = \frac{\bar{N}}{l}, \quad \Delta, \bar{\Delta} = \text{const}, \quad -l\epsilon(t) + \eta(t) = \bar{\delta}(t) \leq \bar{\Delta}.$$

Ниже представлена поэтапная процедура каскадного синтеза наблюдателя состояния и возмущений применительно к системе (1.3) и (1.4) на основе теории скользящих режимов и глубоких обратных связей.

1. Выбором корректирующего воздействия в последней подсистеме (3.2) в виде $v_5(t) = M \text{sign}(\epsilon_5(t))$ ($M = \text{const} > |a_{32}a_{22}\epsilon_4(t)|$) обеспечивается скользящий режим по прямой $\epsilon_5(t) = 0$. При этом среднее значение разрывного сигнала равно $v_{5eq}(t) = -a_{32}a_{22}\epsilon_4(t)$.

2. Из последнего выражения имеем $\epsilon_4(t) = -v_{5eq}(t)/(a_{32}a_{22})$, с учетом которой построим корректирующее воздействие для четвертой подсистемы (3.2) в виде $v_4 = l_4(-v_{5eq}(t)/(a_{32}a_{22})) = l_4\epsilon_4$, $l_4 = \text{const} > 0$. После подстановки корректирующего воздействия четвертая подсистема примет вид $\dot{\epsilon}_4(t) = -l_4\epsilon_4(t) - a_{21}m_L$. В предположении $|m_L| \leq M_L$, $|\dot{m}_L| \leq \bar{M}_L$, $M_L, \bar{M}_L = \text{const}$, согласно лемме, обеспечивается стабилизация переменной ϵ_4 с заданной точностью $|\epsilon_4(t)| \leq a_{21}M_L/l_4 = \Delta_4$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_4 = 0$ при $l_4 \rightarrow \infty$, т.е. получаем оценку переменной $x_4(t)$: $\epsilon_4(t) \rightarrow 0 \Rightarrow z_4(t) \approx x_4(t)$. Кроме того, из соотношения леммы $|-l_4\epsilon_4(t) - a_{21}m_L| \leq a_{21}\bar{M}_L/l_4 = \bar{\Delta}_4$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_4 = 0$ при $l_4 \rightarrow \infty$ получаем оценку момента сопротивления с заданной точностью:

$$l_4\epsilon_4(t) = -a_{21}m_L + \bar{\delta}_4(t), \quad \bar{\delta}_4(t) \leq \bar{\Delta}_4 \Rightarrow m_L \approx -\frac{v_4}{a_{21}}.$$

Отметим что, согласно лемме, при $m_L = \text{const}$, $\dot{m}_L = 0 \Rightarrow \bar{\Delta}_4 \rightarrow 0$ оценка момента нагрузки сходится к истинному значению асимптотически:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l_4\epsilon_4(t) = -a_{21}m_L.$$

3. Используя исходную модель объекта управления (1.1), синтезируем вспомогательный автономный наблюдатель первого порядка состояния:

$$C_b \dot{\bar{z}}_2(t) = k_m z_3(t) - k_s \sqrt{P_D(t) - P_T(t)} + \bar{v}_2$$

и запишем уравнение относительно невязки $\bar{\epsilon}_2 = P_D - \bar{z}_2$ с учетом обозначения $x_3 = D_Q$ из (1.3): $C_b \dot{\bar{\epsilon}}_2 = k_m \epsilon_3 - \bar{v}_2$. Выбор корректирующего воздействия $\bar{v}_2 = \bar{M}_2 \text{sign}(\bar{\epsilon}_2(t))$, $\bar{M}_2 = \text{const} > |k_m \bar{\epsilon}_2(t)|$ обеспечивает скользящий режим по плоскости скольжения $\bar{\epsilon}_2 = 0$, а среднее значения разрывного управления в скользящем режиме равно $\bar{v}_{2eq} = k_m \epsilon_3$. Формируя корректирующее воздействие в третьей подсистеме (3.2) в виде $v_3 = l_3 \bar{v}_{2eq} = l_3 k_m \bar{\epsilon}_3$, имеем подсистему вида $\dot{\epsilon}_3(t) = -b[\epsilon_3(t) + m\epsilon_4] - l_3 k_m \epsilon_3$. С учетом $|\epsilon_4(t)| \leq \Delta_4$ выбором коэффициента $l_3 > 0$ можно обеспечить заданную точность стабилизации переменной $\epsilon_3(t)$:

$$|\epsilon_3(t)| \leq \frac{bm\Delta_4}{b + l_3 k_m} = \Delta_3.$$

4. Рассмотрим вторую подсистему (3.2), которая при $\epsilon_3(t) = 0$ примет вид

$$\dot{\epsilon}_2(t) = \frac{1}{2x_2(t)} \eta_1^*(t) - \eta_2(t) - l_2 \epsilon_2(t). \quad (3.3)$$

Система (3.3) в обозначениях леммы записывается как

$$\dot{\epsilon}_2(t) = \eta^* - l_2 \epsilon_2(t), \quad \eta^* = \frac{1}{2x_2(t)} \eta_1^*(t) - \eta_2(t).$$

В предположении $|\eta^*(t)| \leq N^*$, $|\dot{\eta}^*(t)| \leq \bar{N}^*$; $N^*, \bar{N}^* = \text{const} > 0$ справедливы соотношения из леммы: существует такой коэффициент $l_2 > 0$, что $|\epsilon_2(t)| \leq \Delta_2 = N^*/l_2$, $|\dot{\epsilon}_2(t)| \leq \bar{\Delta}_2 = \bar{N}^*/l_2$, $\Delta_2, \bar{\Delta}_2 \rightarrow 0$ при $l_2 \rightarrow \infty$.

наперед заданные числа, $-l_2\varepsilon_2(t) + \eta^*(t) = \bar{\delta}_2(t) \leq \bar{\Delta}_2$ и, следовательно, переменная $l_2\varepsilon_2(t) = \eta^*(t) + \bar{\delta}_2(t)$ служит оценкой возмущения с наперед заданной точностью.

5. С учетом $\varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ первое уравнение системы (3.2) примет вид $\dot{e}_1(t) = -\eta_1^*(t) - l_1\varepsilon_1(t)$, где в предположении $|\eta_1^*(t)| \leq N_1^*$, $|\dot{\eta}_1^*(t)| \leq \bar{N}_1^*$; $N_1^*, \bar{N}_1^* = \text{const} > 0$ выбором коэффициента $l_1 > 0$ обеспечивается стабилизация $|\varepsilon_1(t)| \leq N_1^*/l_1 = \Delta_1$, при $l_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta_1 \rightarrow 0 \Rightarrow z_1(t) \rightarrow e_1(t)$. Согласно лемме, с учетом $|\dot{e}_1(t)| \leq \bar{N}_1^*/l_1 = \bar{\Delta}_1$ также может быть получена оценка внешнего возмущения с заданной точностью $l_1\varepsilon_1(t) = -\eta_1^*(t) + \bar{\delta}_1(t)$, $\bar{\delta}_1(t) \leq \bar{\Delta}_1$.

В результате синтеза наблюдателя вектора состояния и возмущений (3.1) имеются оценки с заданной точностью переменных вектора состояния системы (1.3), (1.4) $z_i(t) \rightarrow x_i(t)$, $i = 1, 5$, причем вместо оценок переменных $z_1(t) \approx e_1(t)$ и $z_2(t) \approx x_2(t)$ можно использовать доступные для измерения переменные $e_1(t)$ и $x_2(t)$.

Кроме того, имеем оценки внешних возмущений с заданной точностью:

момента сопротивления на валу ДПТ на втором этапе: $m_L \approx -v_4/a_{21}$;

на четвертом этапе процедуры получена оценка возмущения: $\eta^*(t)$: $l_2\varepsilon_2(t) = -\eta^*(t) + \bar{\delta}_2(t)$, $l_2\varepsilon_2(t) \approx \eta^*(t)$;

на пятом этапе процедуры найдена оценка возмущения $\eta_1^*(t)$: $l_1\varepsilon_1(t) = -\eta_1^*(t) + \bar{\delta}_1(t)$, $l_1\varepsilon_1(t) \approx -\eta_1^*(t)$;

из выражения $\eta^* = \eta_1^*(t)/(2x_2(t)) - \eta_2(t)$ четвертого этапа находится возмущение

$$\eta_2(t) = \frac{1}{2x_2(t)} \eta_1^*(t) - \eta^*(t) = \frac{1}{2x_2(t)} [-l_1\varepsilon_1(t) + \bar{\delta}_2(t)] - l_2\varepsilon_2 - \bar{\delta}_2\eta^*(t),$$

$$\eta_2(t) \approx -l_2\varepsilon_2(t) - \frac{1}{2x_2(t)} l_1\varepsilon_1(t);$$

из выражения $\eta_1^*(t) = a_1q(t)[e_1(t) + P_{Td}] = a_1q(t)x_1(t)$ из (3.2) определяется оценка положения задвижки: $q(t) \approx \eta_1^*(t)/a_1x_1(t)$.

3.2. Синтез наблюдателя-дифференциатора. Как следует из разд. 2, для формирования управления (2.21) требуется информация о положении задвижки $q(t)$ и ее четырех первых производных. Оценка положения задвижки найдена выше. Для получения оценок ее первых четырех производных построим дополнительный наблюдатель-дифференциатор.

Изложим кратко процедуру синтеза наблюдателя-дифференциатора.

1. Построим фильтр с устойчивой собственной динамикой:

$$\dot{\xi}_i(t) = \xi_{i+1}(t) + q(t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad \dot{\xi}_5(t) = c^T \xi(t) + q(t), \quad (3.4)$$

где $\xi^T(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_5(t)) \in R^5$, $c \in R^5$ – вектор коэффициентов гурвицевого полинома.

2. Представим систему (3.4) в каноническом виде

$$\dot{\bar{\xi}}_i(t) = \bar{\xi}_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad \dot{\bar{\xi}}_5(t) = c^T \xi(t) + \bar{\xi}_6(t), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1(t) &= \xi_1(t), \\ \bar{\xi}_2(t) &= \xi_2(t) + q(t), \\ \bar{\xi}_3(t) &= \xi_3(t) + q(t) + \dot{q}(t), \\ \bar{\xi}_4(t) &= \xi_4(t) + q(t) + \dot{q}(t) + \ddot{q}(t), \\ \bar{\xi}_5(t) &= \xi_5(t) + q(t) + \dot{q}(t) + \ddot{q}(t) + \ddot{\ddot{q}}(t), \\ \bar{\xi}_6(t) &= c^T \xi + q(t) + \dot{q}(t) + \ddot{q}(t) + \ddot{\ddot{q}}(t) + q^{(4)}(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. Построим наблюдатель вектора состояния $\bar{\xi}^T(t) = (\bar{\xi}_1(t), \dots, \bar{\xi}_5(t))$ и сигнала $\bar{\xi}_6(t)$ применительно к системе (3.5):

$$\dot{\bar{\xi}}_i(t) = \hat{\xi}_{i+1}(t) + v_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad \dot{\bar{\xi}}_5(t) = c^T \hat{\xi}(t) + v_5, \quad \hat{\xi}^T(t) = (\hat{\xi}_1(t), \dots, \hat{\xi}_5(t)). \quad (3.7)$$

4. Запишем уравнения (3.6) и (3.7) в невязках $\bar{e}_i(t) = \bar{\xi}_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$:

$$\dot{\bar{e}}_i(t) = \bar{e}_{i+1}(t) - v_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad \dot{\bar{e}}_5(t) = c^T \bar{e}(t) + \bar{\xi}_6(t) - v_5, \quad \bar{e}^T(t) = (\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_5(t)). \quad (3.8)$$

5. В работах [24, 25] показано, что выбор корректирующих воздействий в наблюдателе (3.7) в классе линейных функций с насыщением по иерархическому принципу

$$v_1 = L_1 \text{sat}(l_1 \bar{e}_1(t)), \quad v_i = L_i \text{sat}(l_i v_{i-1}), \quad i = \overline{2,5}, \quad L_1, L_i, l_i = \text{const}$$

позволяет решить задачу стабилизации системы (3.8) с заданной точностью.

Действительно, в предположениях $|\bar{e}_i(t)| \leq E_i$, $|\dot{\bar{e}}_i(t)| \leq E_i$, $\bar{E}_i = \text{const}$ и $|\bar{\xi}_6(t)| \leq E_6 = \text{const}$ опишем схематично процедуру стабилизации системы (3.8).

1. В первой подсистеме $\dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{e}_2(t) - L_1 \text{sat}(l_1 \bar{e}_1(t))$ при выборе амплитуды $L_1 > |\bar{e}_2(t)|$ переменная $\bar{e}_1(t)$ за конечное время оказывается в линейной зоне и имеет место: $\dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{e}_2(t) - l_1 \bar{e}_1(t)$. Согласно лемме, выполняются соотношения $|\bar{e}_1(t)| \leq E_2/l_1$, $|\bar{e}_2(t) - l_1 \bar{e}_1(t)| \leq \bar{E}_2/l_1$ и с ростом коэффициента усиления стабилизируется с заданной точностью переменная $\bar{e}_1(t) \approx 0$. В итоге имеем оценку с заданной точностью переменной $\bar{e}_2(t) \approx l_1 \bar{e}_1(t)$.

Опишем первый пункт логической схемой:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{e}_2(t) - L_1 \text{sat}(l_1 \bar{e}_1(t)), \quad L_1 > |\bar{e}_2(t)| \Rightarrow \dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{e}_2(t) - l_1 \bar{e}_1(t) \Rightarrow |\bar{e}_1(t)| \leq \frac{E_2}{l_1}, \\ |\bar{e}_2(t) - l_1 \bar{e}_1(t)| \leq \frac{\bar{E}_2}{l_1} \Rightarrow l_1 \rightarrow \infty : \bar{e}_1(t) \approx 0, \quad \bar{e}_{i+1}(t) \approx l_i \bar{e}_i(t). \end{aligned}$$

2. В дальнейшем на последующих этапах $i = \overline{2,4}$ синтезируем корректирующие воздействия по следующей логической схеме:

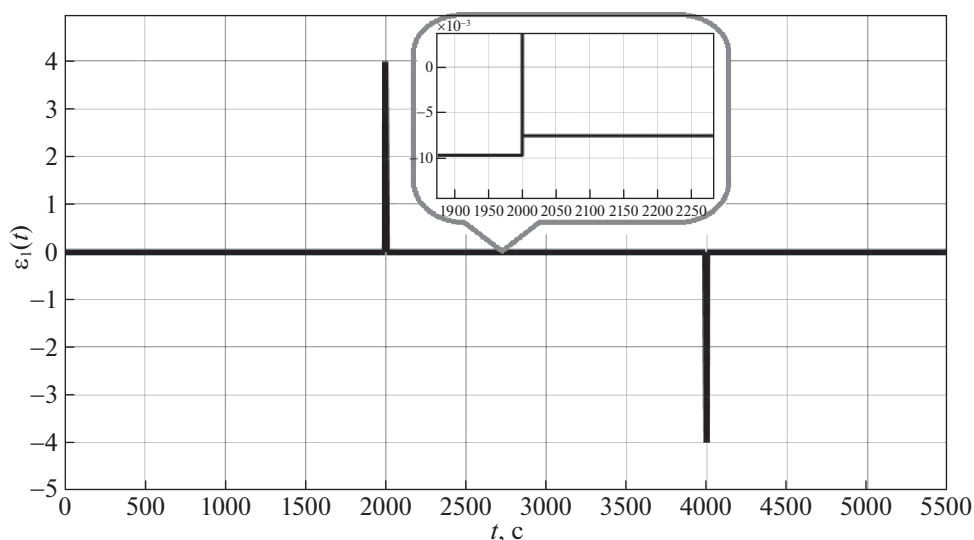
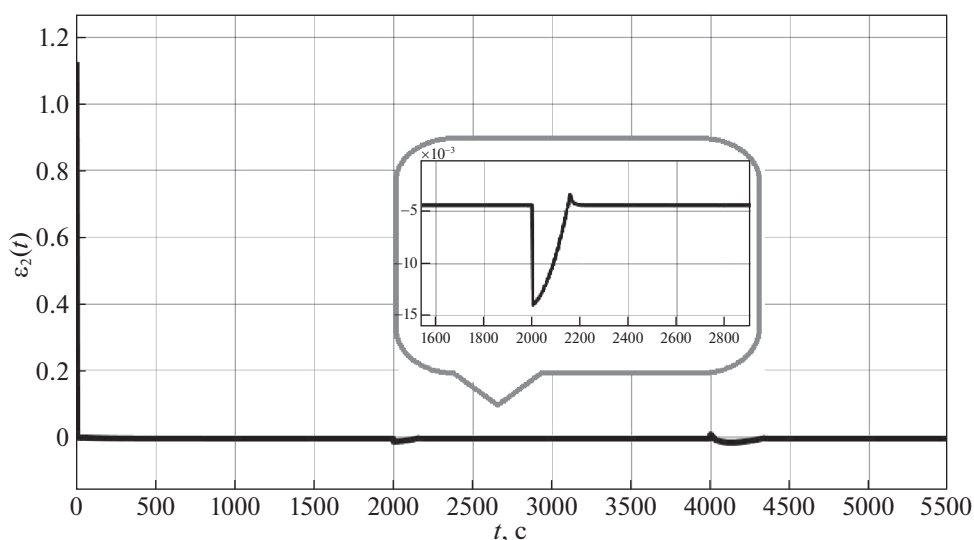
$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i(t) = \bar{e}_{i+1}(t) - L_i \text{sat}(l_i \bar{e}_i(t)), \quad L_i > |\bar{e}_{i+1}(t)| \Rightarrow \dot{\bar{e}}_i(t) = \bar{e}_{i+1}(t) - l_i \bar{e}_i(t) \Rightarrow |\bar{e}_i(t)| \leq \frac{E_{i+1}}{l_i}, \\ |\bar{e}_{i+1}(t) - l_i \bar{e}_i(t)| \leq \frac{\bar{E}_{i+1}}{l_i} \Rightarrow l_i \rightarrow \infty : \bar{e}_i(t) \approx 0, \quad \bar{e}_{i+1}(t) \approx l_i \bar{e}_i(t). \end{aligned}$$

3. Рассматривается система $\dot{\bar{\xi}}_5(t) = c^T \bar{e}(t) + \bar{\xi}_6(t) - L_5 \text{sat}(l_5 \bar{e}_5(t))$ и с учетом $\bar{e}_i(t) \approx 0$ выбором $L_6 > |\bar{\xi}_6(t)|$ обеспечивается соотношение $\bar{\xi}_6(t) \approx l_5 \bar{e}_5(t)$.

С использованием полученных оценок вектора состояния $\bar{\xi}(t)$ и сигнала $\bar{\xi}_6(t)$ находим первые четыре производные сигнала $q(t)$, решая последовательно сверху вниз систему уравнений (3.6).

Таблица 1. Параметры модели объекта управления и обратной связи

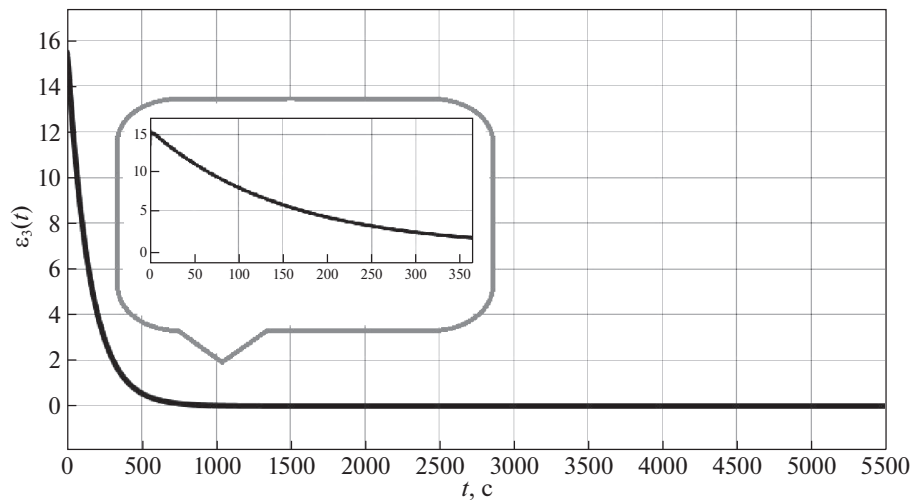
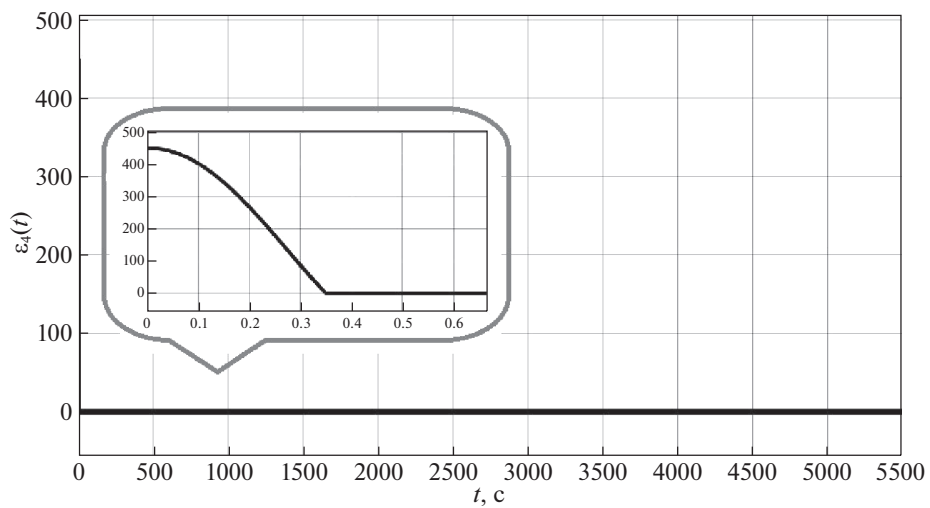
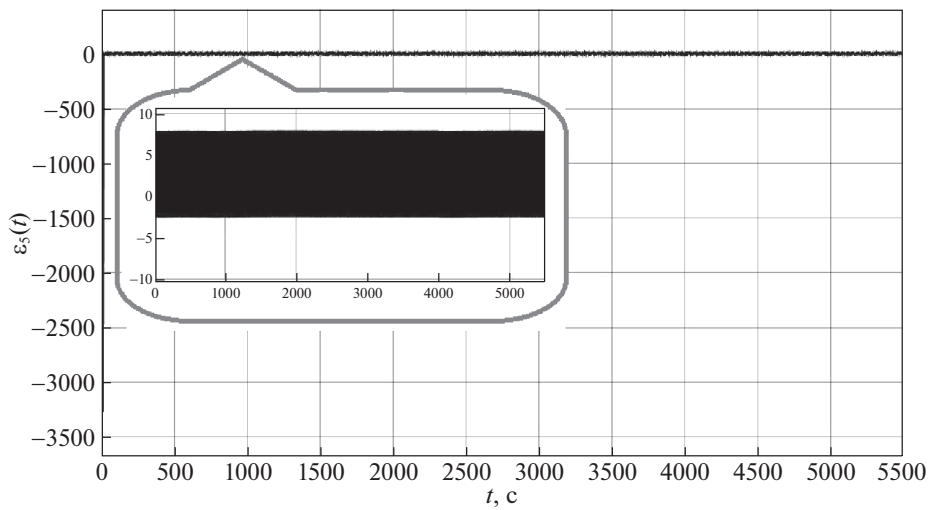
Модель парогенератора: $k_s = 2.41, k_\mu = 0.25, C_n = 2.78, C_b = 27.767, k_m = 0.2, T_b = 150, m = 3, q = 0.6$
Модель ДПТ: $a_{21} = 0.5, a_{22} = 1.8, a_{31} = 0.02, a_{32} = 20, m_L = 10$
Начальные условия ОУ: $P_T(0) = 18, P_D(0) = 19.27, D_Q(0) = 13.5, \omega(0) = 450, I_\gamma = 0.05$
Сценарий моделирования: $P_{Td}(t) = 18$ при $t \in [0, t_1) \cup [t_2, \infty]$, $P_{Td}(t) = 14$ при $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 = 2000, t_2 = 4000$
Параметры наблюдателя: $z_i(0) = 0, i = \overline{1,4}, l_1 = 100, l_2 = 10, l_3 = 0.1, l_4 = 1, M = 1000$
Параметры контроллера: $k_1 = 0.1, k_2 = 1, k_3 = 50, k_4 = 1000, M_2 = 10, M_3 = 30, M_4 = 1000, M_5 = 30, M_6 = 220$
Физические ограничения на фазовые переменные: $P_D \in [0, 30], D_Q \in [0, 150], \omega \in [0, 9000], I_\gamma < 20, u_2 \leq 220$

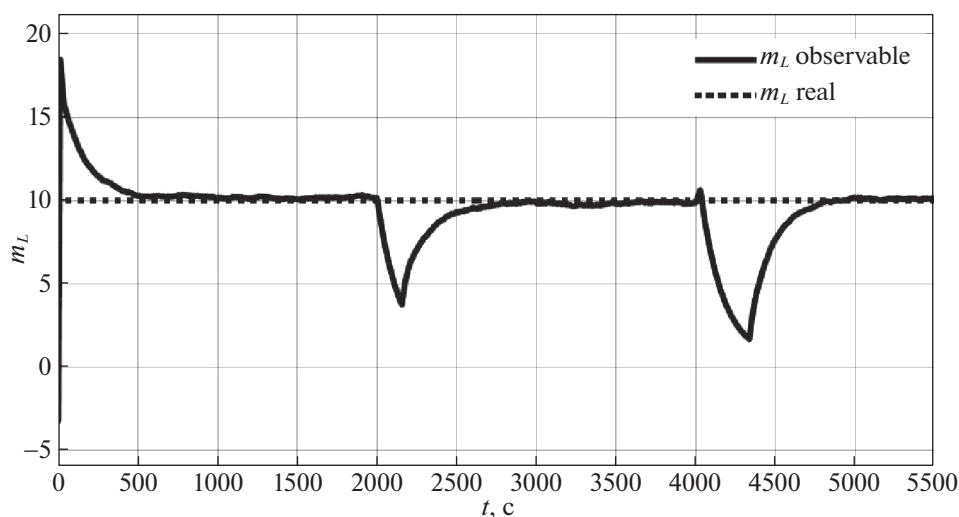
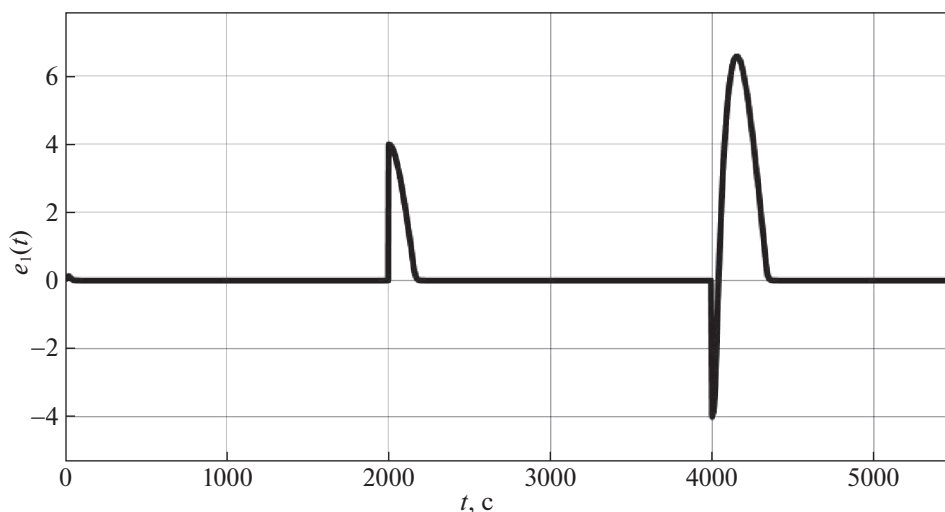
Рис. 4. Ошибка наблюдения $\varepsilon_1(t)$ Рис. 5. Ошибка наблюдения $\varepsilon_2(t)$

Таким образом, для формирования управления (2.21) вместо недоступных для измерения компонент вектора состояния и возмущений в системе (1.3), (1.4) следует использовать полученные в данном разделе оценки.

4. Численное моделирование. Результаты численного моделирования проводились в системе MATLAB–Simulink. При моделировании системы (1.4)–(1.5), наблюдателя (3.1) и управления (2.21) были выбраны параметры из табл. 1.

Предполагается, что в объекте для измерения доступны давление пара перед задвижкой $P_T(t)$, давление пара на выходе из котла – парогенератора P_D и ток якоря $I_{\text{я}}$. Для получения полной информации о фазовых переменных объекта управления и о действующих на него внешних возмущениях был построен наблюдатель состояния (3.1), дающий оценки неизвестных сигналов с заданной точностью.

Рис. 6. Ошибка наблюдения $\varepsilon_3(t)$ Рис. 7. Ошибка наблюдения $\varepsilon_4(t)$ Рис. 8. Ошибка наблюдения $\varepsilon_5(t)$

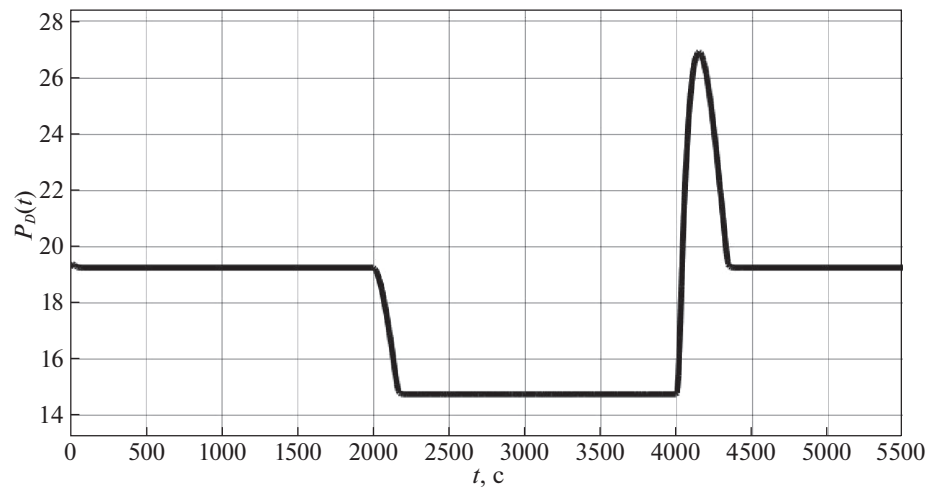
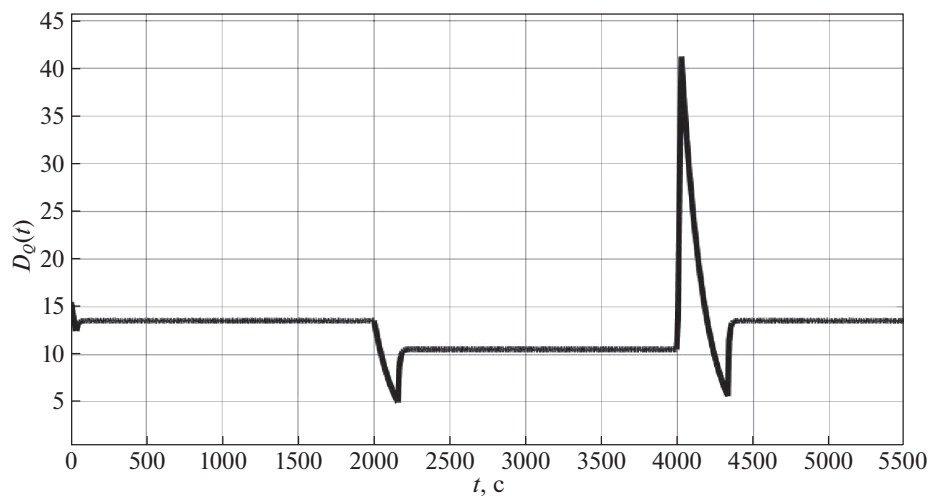
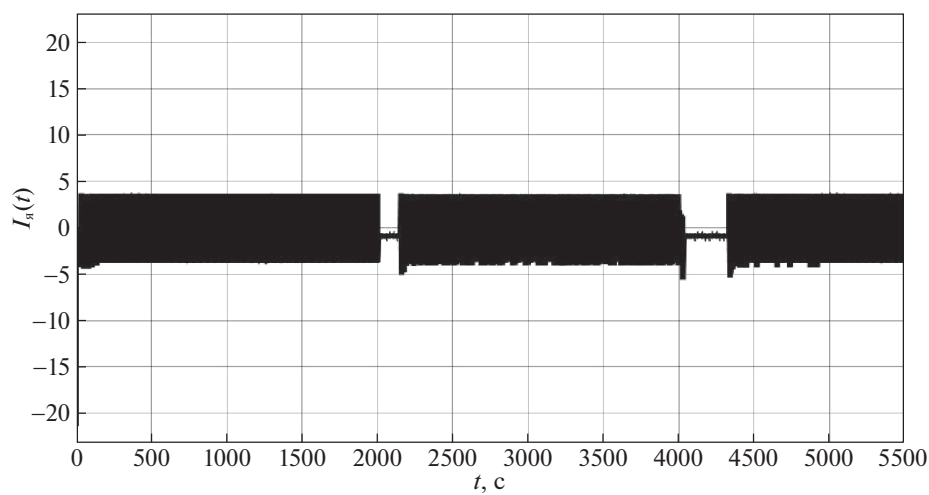
Рис. 9. Момент нагрузки $m_L(t)$ Рис. 10. Отклонение реального давления перед задвижкой от желаемого $e_1(t)$

На рис. 4–8 представлены ошибки наблюдения $\varepsilon_i = x_i - z_i$, $i = \overline{1,5}$. На рис. 9 приведен график зависимости момента нагрузки $m_L(t)$ на валу ДПТ от времени, пунктирной линией обозначено истинное значение момента нагрузки из таблицы, непрерывной линией – значение, полученное с помощью наблюдателя (3.1).

На рис. 10 изображен график отклонения давления пара перед задвижкой от желаемого значения, а на рис. 11 – график давления пара на выходе из котла – парогенератора в зависимости от времени.

На рис. 12–15 представлены графики теплового потока печи $D_Q(t)$, угловой частоты вращения вала двигателя $\omega(t)$, тока якоря $I_a(t)$ и напряжения якоря $u_2(t)$ в зависимости от времени соответственно.

Заключение. Предложены алгоритмы синтеза обратной связи применительно к решению поддержанию заданного давления перед выпускной задвижкой в парогенераторе в условиях действия внешних возмущений и неполной информации о векторе состояния модели объекта управления. Существенным отличием данной работы от известных результатов решения

**Рис. 11.** Давление пара на выходе котла $P_D(t)$ **Рис. 12.** Тепловой поток печи $D_Q(t)$ **Рис. 13.** Ток якоря $I_a(t)$

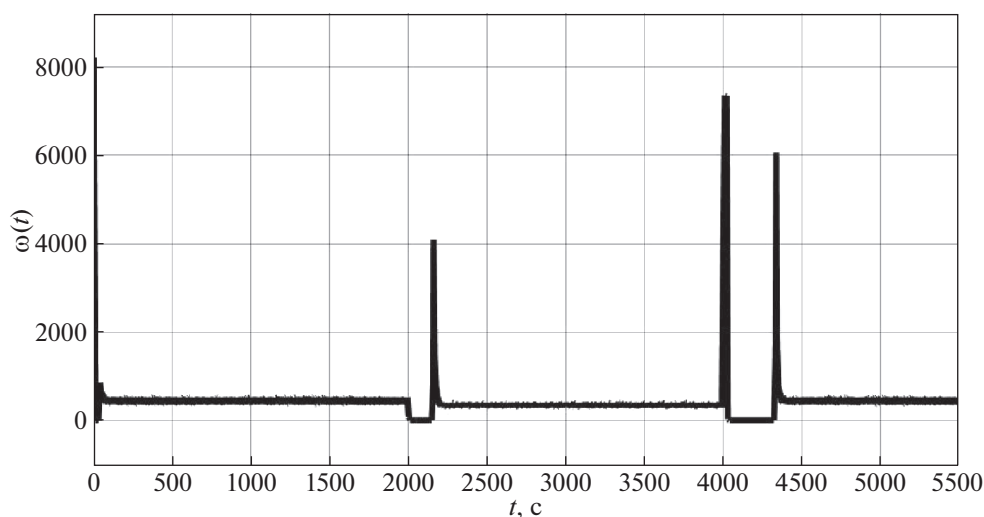


Рис. 14. Угловая частота вращения вала двигателя $\omega(t)$

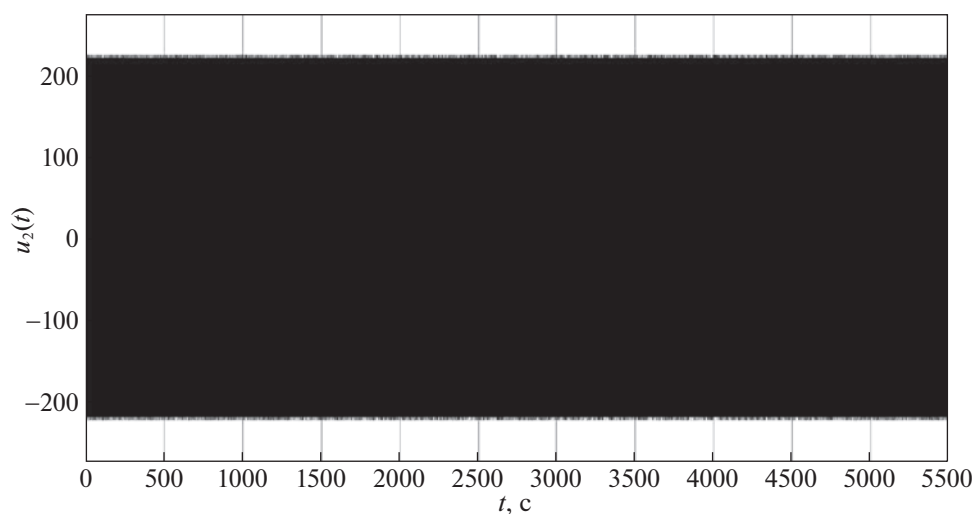


Рис. 15. Напряжение якоря $u_2(t)$

аналогичной задачи [4, 7, 9, 11] является учет технологических ограничений на компоненты вектора состояния и управления на стадии разработки алгоритмов управления.

Использование блочного подхода позволило, с одной стороны, осуществить линеаризацию по обратной связи нелинейной модели парогенератора, а с другой стороны, обеспечить заданные ограничения на фазовые переменные и управление за счет использования в качестве локальных обратных связей линейных функций с насыщением. Для информационного обеспечения предложенных алгоритмов управления разработан комбинированный наблюдатель состояний и возмущений на основе методов систем с глубокими обратными связями и скользящими режимами, позволяющий получить оценки компонент вектора состояний и возмущений с заданной точностью.

Работоспособность предложенного алгоритма подтверждена как аналитически, так и с помощью моделирования в среде MATLAB–Simulink.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Mello F.P.* Boiler Models for System Performance Studies // IEEE Transaction on Power Systems. 1991. № 1. V. 6. P. 66–74.

2. *De Mello F.P.* Dynamic Models for Fossil Fueled Steam Units in Power System Studies // IEEE Transaction on Power Systems. 1991. № 2. V. 6. P. 753–761.
3. *Johan Astrom K., D Bell R.* Drum Boiler Dynamics // Automatica. 2000. № 36. P. 363–378.
4. *Labibi B., Marquez H.J., Chen T.* Decentralized Robust PI Controller Design for an Industrial Utility Boiler // Process Control. 2009. V. 19. P. 216–230.
5. *Utkin A.V., Utkin V.A., Krasnov S.A.* Synthesis of a Control System for a Waste Heat Boiler with Forced Circulation under Restrictions on Control Actions. Mathematics. 2022. V. 10. P. 1–24.
<https://doi.org/10.3390/math10142397>
6. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // АиТ. 2001. № 11. С. 73–94.
7. *Utkin A.V.* Synthesis of a Control System for a Steam Turbine // Automation and Remote Control. 2018. V. 79. № 12. P. 2185–2201.
8. *Krstic M., Kokotovic P.V., Kanellakopoulos I.* Nonlinear and Adaptive Control Design, 1st Edition. USA: John Wiley Sons, Inc, 1995.
9. *Bolek W., Sasiadek J., Wisniewski T.* Adaptive Backstepping Control of a Power Plant Station Model // IFAC 15-th Triennial World Congress. Barselona, Spain, 2002. P. 1650–1655.
10. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // АиТ. 2011. № 8. С. 65–95.
11. *Zheng K., Bentsman J., Taft C. W.* Full Operating Range Robust Hybrid Control of a Coal-Fired Boiler/Turbine Unit // Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2008. № 4. V. 130. P. 1–14.
12. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // АиТ. 2014. № 9. С. 62–81.
13. *Loukianov A.G., Dominguez J. Rivera, Sastillo-Toledo B.* Robust Sliding Mode Regulation of Nonlinear Systems // Automatica. 2018. V. 89. P. 241–246.
14. *Loukianov A.G.* Robust Block Decomposition Sliding Mode Control Design // Mathematical Problems in Engineering. 2002. V. 74. P. 349–365.
15. *Loukianov A.G., Dominguez J.R., Sastillo-Toledo B.* Robust Sliding Mode Regulation of Nonlinear Systems // Automatica. 2018. V. 89. P. 241–246.
16. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // АиТ. 2017. № 12. С. 26–53.
17. *Уткин В.А.* Метод разделения движений в задачах наблюдения // АиТ. 1990. № 3. С. 27–37.
18. *Khalil H.K., Praly L.* High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2014. V. 24. № 6. P. 993–1015.
19. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // АиТ. 2018. № 3. С. 21–43.
20. *Campo E., Monroy J., Abundis H., Chemori A., Creuze V., Torres J.* A Nonlinear Controller Based on Saturation Functions with Variable Parameters to Stabilize an AUV // Int. J. Nav. 2019. V. 11. P. 211–224.
21. *Гулюкина С.И., Уткин В.А.* Управление реактором с непрерывным перемешиванием в условиях неопределенности и с учетом ограничений на фазовые переменные и управления // Проблемы управления. 2021. № 5. С. 48–59.
22. *Antipov A., Krasnova S, Utkin V.* Methods of Ensuring Invariance with Respect to External Disturbances: Overview and New Advances. Mathematics. 2021. V. 9. P. 1–20.
<https://doi.org/10.3390/math9233140>
23. *Кочетов С.А., Уткин В.А.* Вихревые алгоритмы в задаче управления двигателем постоянного тока // Проблемы управления. 2014. № 5. С. 20–27.
24. *Краснов Д.В., Уткин А.В.* Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // УБС. 2017. Вып. 69. С. 29–49.
25. *Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // АиТ. 2021. № 7. С. 37–68.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 531.36

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ МНОГОЗВЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА¹

© 2023 г. А. П. Голуб^а, Л. А. Климина^а, Б. Я. Локшин^а, Ю. Д. Селюцкий^{а,*}

^аНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 09.11.2022 г.

После доработки 23.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается многозвенный маятник, находящийся в потоке среды. На последнем звене маятника установлено крыло, на котором сосредоточено взаимодействие с потоком. Изучается динамика этой системы как потенциального рабочего элемента ветроэнергетической установки колебательного типа. Для разных скоростей потока численно исследуются периодические режимы, возникающие при разном количестве звеньев и различных значениях внешней нагрузки. Показано, в частности, что максимальная мощность, которая может быть получена с помощью 2-звенного маятника, в широком диапазоне скоростей потока больше, чем с помощью маятников с числом звеньев больше двух. В то же время маятники с большим количеством звеньев позволяют получать заметную мощность в более широком интервале значений нагрузки, чем двухзвенный.

DOI: 10.31857/S0002338823020087, EDN: JEFVCC

Введение. Маятники, состоящие из нескольких звеньев, могут рассматриваться как модели элементов различных технических систем (например, шагающих роботов, систем гашения колебаний, ветроэнергетических установок и т.п.). Это обуславливает интерес к ним как с точки зрения управления и стабилизации, так и с точки зрения анализа периодических движений, возникающих в таких системах.

Значительное количество исследований посвящено вопросам оценки частот собственных колебаний и количества периодических решений многозвенных маятников. Например, в работе [1] показано, что сумма обратных квадратов собственных частот многозвенного маятника с точечными массами не зависит от распределения масс между звеньями. Некоторые оценки собственных частот многозвенных маятников с точечными и с распределенными массами даны в [2].

В [3] получены условия, при которых для маятника с n звеньями, находящегося под действием периодической возбуждающей силы с нулевым средним, существует не менее 2^n периодических решений, период которых равен периоду возбуждающей силы. В [4, 5] найдены аналогичные условия для ситуации, когда возбуждение имеет ненулевое среднее. Вопросы устойчивости этих решений не обсуждаются.

Достаточно большое число исследований посвящено управлению движением многозвенных маятников и их стабилизации в перевернутом положении. Так, в [6] получены необходимые и достаточные условия возможности стабилизации перевернутого положения многозвенного маятника (с точечными массами) периодической силой, приложенной в точке подвеса. В [7] предложен метод управления многозвенным маятником с распределенными массами, обеспечивающий приведение системы в любое заданное положение (в предположении, что управляющие моменты приложены во всех шарнирах и ограничения на их величину отсутствуют). В [8–10] рассмотрено ограниченное управление в виде обратной связи, позволяющее привести многозвенный маятник в любое положение равновесия за конечное время с помощью только момента, приложенного в точке подвеса (или к последнему звену) из начальных условий, которые находятся вблизи этого равновесия.

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФ (грант № 22-29-00472).

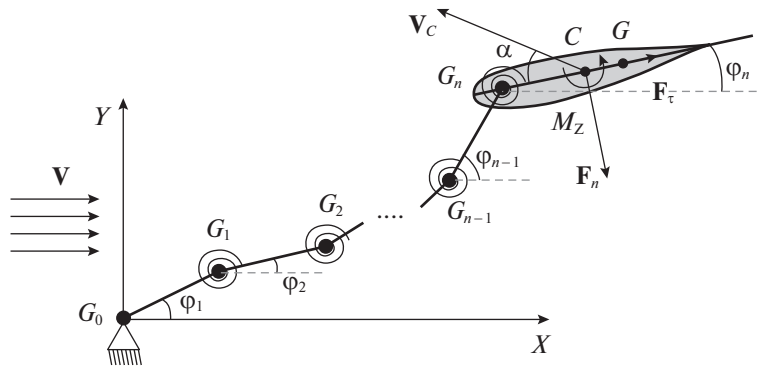


Рис. 1. Схема многозвенного аэродинамического маятника (вид сверху)

Все перечисленные выше исследования посвящены маятниковым системам, движущимся в поле силы тяжести (в том числе, при наличии управления). В то же время представляет интерес изучить динамику многозвенных маятников, находящихся под действием сил другой природы. В [11] изучаются регулярные и хаотические движения двойного маятника в поле силы тяжести и магнитных сил. В [12] анализируется динамика многозвенного маятника, последнее звено которого может соударяться с опорой. При этом в ходе соударения выделяется упругая фаза, упруго-пластическая фаза и фаза восстановления. В [13, 14] изучается динамика 2-звенного маятника под действием следящей силы. Ряд работ (например, [15–17]) посвящен исследованию динамики 1- и 2-звенных маятников, взаимодействующих с потоком среды.

Автоколебания многозвенных маятников, возникающие под действием внешних сил, обуславливают интерес к таким маятникам как к возможным виброгасителям. Так, в работе [18] рассматриваются вопросы гашения колебаний зданий и сооружений (например, во время землетрясений) с помощью многозвенных точечных маятников. В частности, показано, что наиболее эффективно гашение колебаний осуществляется в случае, когда число звеньев маятника больше 10.

Кроме того, многозвенные маятники изучаются и как потенциальные рабочие элементы энергетических установок колебательного типа. В частности, в [19] в качестве портативного источника энергии рассматривается 2-звенный маятник, закрепленный на человеке. В [20] изучается возможность выработки энергии с помощью двойного маятника, связанного с вертикально-осевой ветротурбиной и взаимодействующего с постоянным магнитом. Следует отметить, что в этой конфигурации маятник непосредственно с потоком не взаимодействует. В [21] обсуждается применение 2-звенного аэродинамического маятника с пружиной в первом шарнире для преобразования энергии потока. Отметим, что в [15] показано, что для 1-звенных маятников периодические режимы возникают в достаточно узком диапазоне параметров (причем в отсутствие демпфирования, т.е. внешней нагрузки). Поэтому, по-видимому, использовать такие маятники для преобразования энергии потока нецелесообразно.

В работе исследуется динамика аэродинамического маятника, состоящего из нескольких (не менее двух) упругосоединенных звеньев, на последнем из которых закреплено крыло с симметричным профилем. Проводится численное исследование периодических режимов, возникающих в этой системе при разном количестве звеньев и разных значениях параметров системы. Даются оценки выходной мощности, которая может быть получена с помощью таких колебаний.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многозвенный аэродинамический маятник, состоящий из n звеньев (рис. 1), причем $n \geq 2$. Все звенья, кроме последнего, одинаковы, и звено с номером i ($i < n$) представляет собой невесомый стержень $G_{i-1}G_i$ длиной l_0 , в конце G_i которого находится материальная точка массы m_0 . Последнее звено — стержень, на котором жестко закреплено крыло с симметричным профилем (таким образом, что хорда крыла лежит на этом стержне). Будем считать, что центр масс G этого звена также лежит на указанном стержне.

Первое звено шарнирно закреплено в точке G_0 таким образом, что оно может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси G_0Z . Соседние звенья маятника соединены друг с другом шарнирами (их оси также будем считать вертикальными). Таким образом, маятник может совершать колебания в горизонтальной плоскости.

Во всех шарнирах (кроме первого) установлены одинаковые спиральные пружины. Будем считать, что каждая такая пружина находится в недеформированном состоянии, когда звенья, смежные с соответствующим шарниром, образуют друг с другом развернутый угол.

Пусть система помещена в горизонтальный поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна и равна V . Введем в горизонтальной плоскости неподвижную систему координат G_0XY , ось абсцисс которой направим вдоль скорости набегающего потока.

В работах [17, 21] рассматривались 2-звенные маятники с пружиной в первом шарнире. Такому маятнику, вообще говоря, требуется дополнительное устройство, обеспечивающее поворот всей конструкции в случае изменения направления скорости ветра. Отсутствие пружины в первом шарнире в многозвенном маятнике, рассматриваемом в настоящей статье, по-видимому, позволяет обойтись без такого устройства.

В качестве обобщенных координат будем использовать углы φ_i , $i = \overline{1, n}$, между соответствующими звеньями и осью абсцисс.

Запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m v_G^2}{2} + \frac{m r_0^2 \dot{\varphi}_n^2}{2}.$$

Здесь введены следующие обозначения: m — масса последнего звена; r_0 — радиус инерции этого звена относительно его центра масс; v_G — величина скорости центра масс последнего звена; v_i — величины скоростей центров масс соответствующих звеньев, которые определяются следующими формулами:

$$v_s^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s l_i l_j \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad v_G^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

Здесь $l_i = l_0$ при $1 \leq i \leq n-1$ и $l_n = l$, где l — расстояние от последнего шарнира до центра масс G последнего звена.

Предположим, что поток действует только на крыло, и аэродинамическое воздействие сводится к нормальной силе F_n и тангенциальной силе F_τ , приложенным в середине C хорды крыла, а также к моменту M_z относительно этой точки. Нормальная сила направлена перпендикулярно хорде, а тангенциальная — вдоль хорды (рис. 1). Для описания этих сил воспользуемся квазистатическим подходом, в рамках которого их модули определяются по формулам

$$F_n = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_n(\alpha), \quad F_\tau = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_\tau(\alpha), \quad M_z = \frac{\rho S}{2} b V_C^2 C_m(\alpha). \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность воздуха, S — площадь крыла, b — длина хорды крыла, V_C — воздушная скорость точки C , т.е. скорость этой точки относительно набегающего потока, α — угол атаки, т.е. угол между вектором V_C и хордой, C_n , C_τ , C_m — безразмерные коэффициенты нормальной силы, тангенциальной силы и момента соответственно. Эти коэффициенты предполагаются зависящими только от угла атаки.

Нетрудно видеть, что величины воздушной скорости и угла атаки определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} V_C \cos \alpha &= V \cos \varphi_n + \sum_{i=1}^n r_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i - \varphi_n), \\ V_C \sin \alpha &= V \sin \varphi_n + \sum_{i=1}^n r_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_n). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $r_i = l_i = l_0$ при $1 \leq i \leq n-1$ и $r_n = r$, где r — расстояние от последнего шарнира до середины хорды крыла.

Для того чтобы промоделировать полезную нагрузку, прикладываемую к маятнику как к элементу ветроэнергетической установки, введем в первом шарнире демпфирование с коэффициентом χ . Такой способ описания полезной нагрузки использовался, в частности, в [22, 23]. В дальнейшем при анализе динамики маятников с разным числом звеньев будем считать, что увеличение количества звеньев не влияет на изменение полной массы и длины маятника.

Чтобы несколько упростить обозначения, выберем единицы измерения таким образом, чтобы сделать равными единице следующие величины: суммарную массу всех звеньев, кроме последнего, суммарную длину этих звеньев, а также коэффициенты жесткости спиральных пружин, т.е.

$$m_0(n-1) = 1, \quad l_0(n-1) = 1, \quad k = 1. \quad (1.3)$$

Эта процедура фактически означает переход к безразмерным переменным.

С учетом вышесказанного уравнения движения системы можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{\phi}_j + \sum_{j=1}^n u_{ij} \dot{\phi}_j^2 = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

где

$$a_{ij} = l_i l_j (m + m_0(n - \max(i, j))) \cos(\varphi_j - \varphi_i) + m r_0^2 \delta_{in} \delta_{jn}, \\ u_{ij} = -l_i l_j (m + m_0(n - \max(i, j))) \sin(\varphi_j - \varphi_i).$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

Обобщенные силы определяются следующими соотношениями:

$$Q_i = -(\varphi_i - \varphi_{i-1})(1 - \delta_{li}) - (\varphi_i - \varphi_{i+1})(1 - \delta_{ni}) - \chi \dot{\phi}_i \delta_{li} - h(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{i-1})(1 - \delta_{li}) - \\ - h(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{i+1})(1 - \delta_{ni}) - \mu V_C^2 (r_i C_n \cos(\varphi_i - \varphi_n) + r_i C_\tau \sin(\varphi_i - \varphi_n) - C_m b \delta_{ni}),$$

где $\mu = \rho S l_0 / 2m_0$, h – коэффициенты демпфирования пружин между звеньями. Уравнения (1.4) вместе с соотношениями (1.1) и (1.2) образуют замкнутую систему.

2. Положения равновесия. Для симметричного профиля $C_n(0) = C_n(\pi) = 0$ и $C_m(0) = C_m(\pi) = 0$. Поэтому ясно, что система (1.4) имеет по крайней мере два положения равновесия: $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = 0$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \pi$. Вообще говоря, при соответствующих значениях параметров могут существовать и другие положения равновесия. Нетрудно показать, что положение, в котором все звенья маятника ориентированы навстречу потоку, всегда неустойчиво.

Проанализируем устойчивость первого равновесия – положения “по потоку”. При этом нужно заметить, что с точки зрения использования энергии потока асимптотическая устойчивость является нежелательной.

Характеристический полином системы, линеаризованной вблизи этого положения равновесия, можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}_0 \lambda^2 + \mathbf{B}_0 \lambda + \mathbf{C}_0 = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{A}_0 = \{a_{ij}^0\}$, $\mathbf{B}_0 = \{b_{ij}^0\}$, $\mathbf{C}_0 = \{c_{ij}^0\}$, причем

$$a_{ij}^0 = l_i l_j (m + m_0(n - \max(i, j))) + m r_0^2 \delta_{in} \delta_{jn}, \\ b_{ij}^0 = \chi \delta_{li} \delta_{lj} + h(2 - \delta_{li} - \delta_{ni}) \delta_{ij} - h(1 - \delta_{li}) \delta_{i-1j} - h(1 - \delta_{ni}) \delta_{i+1j} + \mu V r_j (r_i C_n^\alpha - C_m^\alpha b \delta_{ni}), \\ c_{ij}^0 = (2 - \delta_{li} - \delta_{ni}) \delta_{ij} - (1 - \delta_{li}) \delta_{i-1j} - (1 - \delta_{ni}) \delta_{i+1j} + \mu V^2 r_i C_{\tau 0} (\delta_{ij} - \delta_{nj}) + \mu V^2 (r_i C_n^\alpha - C_m^\alpha b \delta_{ni}) \delta_{nj}.$$

Здесь

$$C_n^\alpha = \left. \frac{dC_n(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad C_m^\alpha = \left. \frac{dC_m(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad C_{\tau 0} = C_\tau(0).$$

Миноры Гурвица для характеристического полинома (2.1), очевидно, представляют собой полиномы некоторой степени относительно параметров (в частности, r и r_0). Для 2- и 3-звенных маятников нетрудно показать прямым вычислением, что в минорах Гурвица порядка $2n-1$ коэффициенты при старшей степени r_0 отрицательны, если скорость потока достаточно велика и выполнено условие $C_m^\alpha b - (r+1)C_n^\alpha < 0$. Нужно отметить, что, как показывают статические эксперименты, для тонких профилей это неравенство заведомо выполняется для всех $b \leq 1$. Таким образом, увеличение радиуса инерции последнего звена приводит к дестабилизации положения равновесия. С другой стороны, коэффициенты при старших степенях r во всех минорах Гурвица для указанных маятников оказываются положительными при всех физически осмысленных зна-

чениях прочих параметров. Следовательно, если расстояние от последнего шарнира до середины хорды крыла достаточно велико, то имеет место асимптотическая устойчивость.

На рис. 2 изображены границы областей неустойчивости равновесия “по потоку” на плоскости параметров (r_0, r) для маятников с разным числом звеньев n при разных значениях скорости V потока ($V = 1.5, 2.0, 2.5, 5, 10, 15$). Области неустойчивости расположены ниже и правее соответствующих кривых. Расчеты проводились при следующих значениях параметров (в принятых безразмерных единицах (1.3)):

$$m = 3, \quad l = 0.3, \quad b = 0.5, \quad \mu = 0.1. \quad (2.2)$$

Кроме того, предполагалось, что демпфирование в шарнирах отсутствует, т.е. $\chi = 0$.

Для аэродинамических характеристик были приняты зависимости из экспериментов [24], проведенных для профиля NACA0012. При этом

$$C_n^\alpha = 6.58, \quad C_m^\alpha = 1.69, \quad C_{\tau 0} = 0.01.$$

Из рис. 2 видно, что увеличение V приводит к расширению области неустойчивости равновесия “по потоку”, как и следовало ожидать. В частности, при достаточно большой скорости потока в случае, когда крыло расположено достаточно близко к шарниру (параметр r мал), неустойчивость имеет место при любых значениях радиуса инерции последнего звена.

Кроме того, область неустойчивости расширяется с увеличением числа звеньев. В частности, с ростом n уменьшается величина скорости потока, при которой равновесие становится неустойчивым. Тем не менее, в области сравнительно больших значений r и r_0 границы области устойчивости для разных n оказываются достаточно близкими.

Интересно, что в области малых значений r_0 значение r , при котором происходит потеря устойчивости, увеличивается с ростом V , а при относительно больших r_0 (в расчетах — близких к 1) — несколько убывает. Учитывая, что на практике увеличение радиуса инерции последнего звена может оказаться достаточно затруднительным, для расширения рабочего диапазона скоростей (т.е. уменьшения критической скорости V_{cr} , при которой положение “по потоку” теряет устойчивость) представляется целесообразным увеличивать число звеньев.

3. Периодические режимы. Исследуем периодические режимы, возникающие в системе при различных значениях параметров. При расчетах будем использовать значения параметров (2.2), а для радиуса инерции последнего звена примем $r_0 = 0.25$. Будем варьировать величину скорости потока, значение параметра χ , характеризующего нагрузку, а также количество звеньев.

В [17] уже для 2-звенного аэродинамического маятника с пружиной в первом шарнире было показано, что в достаточно широком диапазоне параметров существуют два притягивающих периодических решения. Можно ожидать, что и для рассматриваемых конфигураций маятниковых систем будет наблюдаться неединственность притягивающих периодических решений.

На рис. 3 изображены проекции периодических траекторий на плоскость $(\phi_1, \dot{\phi}_1)$ для 3- и 4-звенного маятника при нагрузке $\chi = 0.2$ и значениях безразмерной скорости потока 5 и 10. Видно, что при некоторых значениях параметров в системе существуют три притягивающих периодических решения. Для 4-звенного маятника в случае, когда скорость $V = 10$, наблюдается решение, несимметричное относительно начала координат. В силу симметрии системы существует и другое решение, расположенное симметрично ему (оно не изображено на рис. 3). Таким образом, в системе в этом случае имеется, по крайней мере, четыре притягивающие периодические траектории. Вообще, при малых нагрузках несимметричные решения существуют для всех рассмотренных маятников.

С точки зрения выработки энергии основной характеристикой периодических решений является мощность P , развиваемая системой на соответствующих режимах. Эта величина определяется следующей формулой:

$$P = \frac{1}{\tau_*} \int_0^{\tau_*} \chi \dot{\phi}_1^2 d\tau, \quad (3.1)$$

где τ_* — период колебаний.

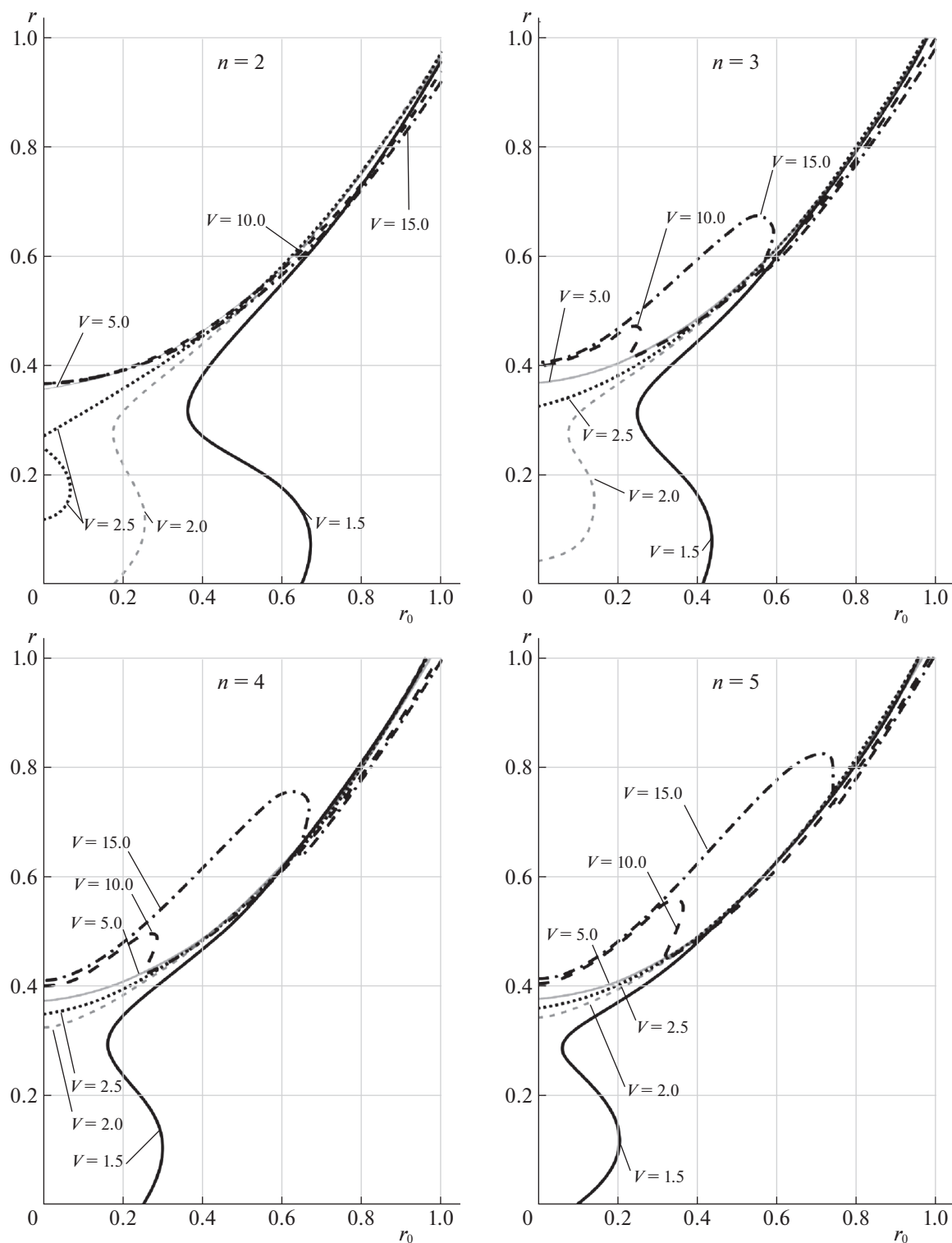


Рис. 2. Границы областей неустойчивости равновесия “по потоку” для маятников при разных значениях параметров n и V

Очевидно, что мощность $P = 0$ при $\chi = 0$. Из физических соображений ясно, что при $\chi \rightarrow \infty$ развиваемая мощность также будет стремиться к нулю. Таким образом, для маятника с заданным количеством звеньев при любой фиксированной скорости потока существует некоторое значение

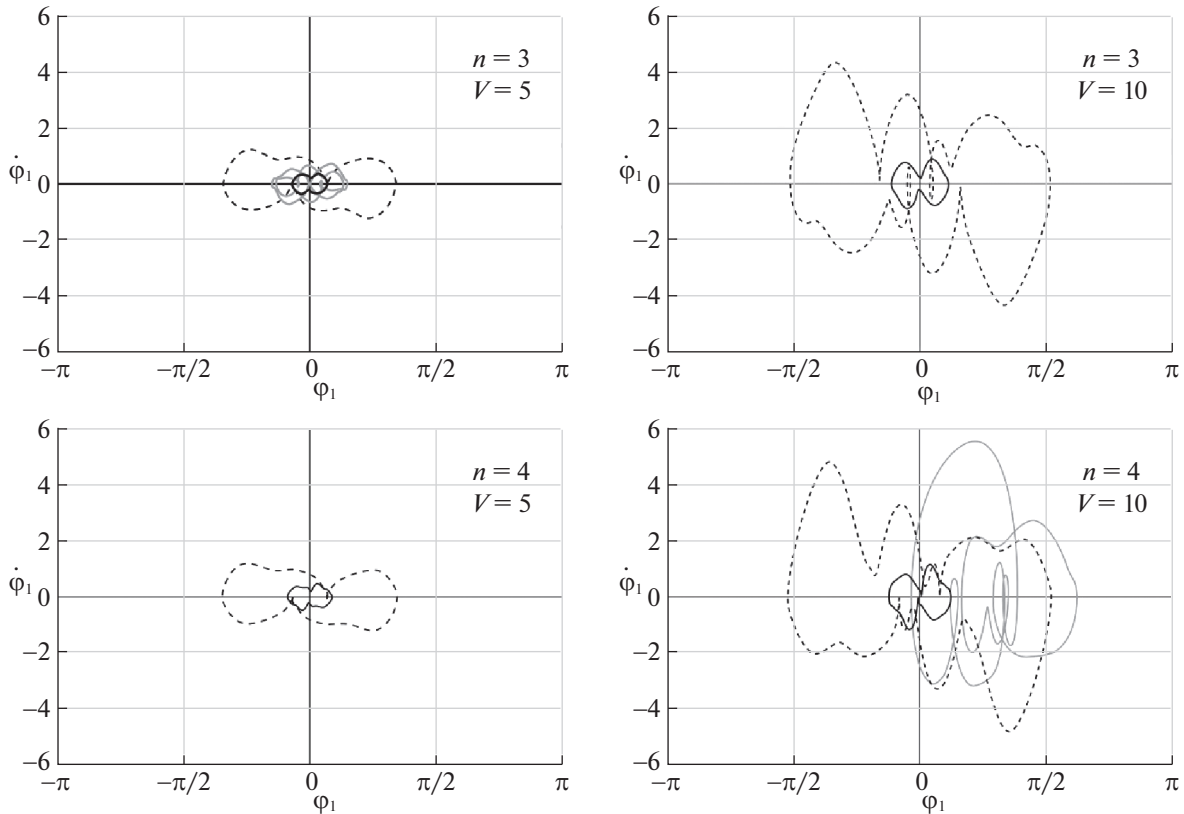


Рис. 3. Примеры периодических решений в проекции на плоскость $(\phi_1, \dot{\phi}_1)$ при $\chi = 0.2$

$\chi = \chi_m$, при котором достигается максимальная мощность. Эту мощность будем обозначать через $P_{\max}$.

На рис. 4 приведены рассчитанные по формуле (3.1) зависимости мощности от коэффициента нагрузки для маятников с разным числом звеньев и при различных значениях скорости потока. Крестиками обозначены данные расчетов, отвечающие 2-звенному маятнику, ромбиками — 3-звенному, косыми крестиками — 4-звенному, и квадратами — 5-звенному.

Видно, что ситуация, когда в системе одновременно существуют несколько притягивающих периодических решений с достаточно большой областью притяжения (позволяющей обнаружить такие решения при численном интегрировании), реализуется для всех рассмотренных маятников и в весьма широком диапазоне параметров.

Для 2-звенного маятника периодическое решение, на котором достигается максимальная мощность, существует при нагрузках, не превышающих некоторого критического значения χ_{c1} . При $\chi > \chi_{c1}$ это решение исчезает, и остается только решение, на котором развиваемая мощность мала (следует отметить, что оно существует при всех рассмотренных значениях χ). При этом величина χ_{c1} оказывается достаточно близкой к значению χ_m , при котором достигается максимум мощности. Такая ситуация имеет место при всех исследованных скоростях потока. Она представляется нежелательной с практической точки зрения, поскольку незначительное увеличение нагрузки (или снижение скорости потока) может привести к существенному падению мощности.

Для 3-звенного маятника при небольших значениях V имеет место аналогичная ситуация. Однако с ростом скорости потока в области нагрузок, превышающих некоторое критическое значение χ_{c2} , появляется еще одно периодическое решение, на котором мощность достигает относительно больших значений. При скоростях $V \leq 7.5$ существует некоторый интервал $\chi_{c1} < \chi < \chi_{c2}$, на котором наблюдается только решение с малой мощностью. При скорости $V = 10$ этот интервал отсутствует, и то семейство решений, на котором реализуется значение $P_{\max}$,

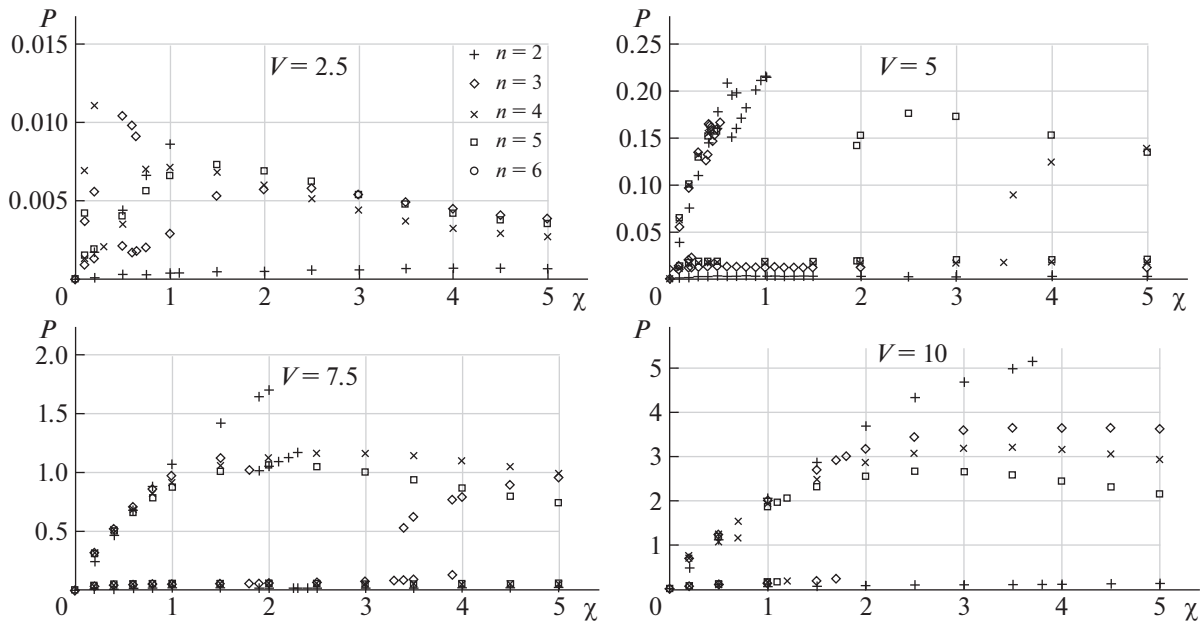


Рис. 4. Мощность, развиваемая на различных периодических режимах, в зависимости от нагрузки, количества звеньев и скорости потока

соответствующее данной скорости потока, имеется при всех рассмотренных значениях χ . В то же время решение с малой мощностью наблюдается только при сравнительно малых величинах χ и исчезает с ростом нагрузки.

Для 4- и 5-звенных маятников ситуация оказывается сходной, но интервал значений χ , в котором наблюдается только решение с малой мощностью, исчезает уже при скорости $V = 7.5$.

Отметим, что величины χ_{c1} и χ_{c2} уменьшаются с ростом числа n звеньев. При достаточно больших скоростях 4-звенный маятник выходит на режим с большей мощностью из окрестности неустойчивого положения равновесия “по потоку”. В то же время 2-звенный маятник не выходит на такой режим из окрестности данного равновесия (для выхода требуется, чтобы начальный угол отклонения звена с крылом был достаточно велик).

4. Регулирование выходной мощности. В рамках использования аэродинамического маятника в качестве рабочего элемента ветроэнергетической установки представляется целесообразным, чтобы, с одной стороны, развиваемая мощность была максимальной, а с другой стороны, чтобы небольшие изменения параметров (скорости потока или нагрузки) не приводили к резкому падению мощности.

Для достижения первой из этих целей необходимо соответствующим образом регулировать нагрузку. Вообще, управление нагрузкой является одним из наиболее естественных способов выхода на целевой режим функционирования ветроэнергетической установки (см. [25]). В то же время достичь второй цели только путем регулирования параметра χ , разумеется, невозможно.

Проанализируем влияние числа звеньев, скорости потока и нагрузки на выходную мощность. На рис. 5,а представлена зависимость величины $P_{\max}$ от скорости потока для маятников с разным числом звеньев, а на рис. 5,б — зависимость величины χ_m от значения V для этих маятников.

С ростом скорости величина $P_{\max}$, как и следовало ожидать, монотонно растет. В то же время ее зависимость от числа звеньев более сложная. Так, при относительно больших скоростях потока ($V \geq 5$) максимальная мощность монотонно убывает с ростом числа звеньев. А при значениях V , близких к V_{cr} , эта монотонность нарушается. В частности, при скорости $V = 2.5$ максимальная мощность (при рассмотренных значениях n) наблюдается для 5-звенного маятника, при $V = 3$ — для 3-звенного, а при $V = 4$ — для 4-звенного. Для 6-звенного маятника максимальная мощность меньше, чем для маятников с меньшим числом звеньев (за исключением довольно узкого интервала скоростей вблизи значения $V = 5$).

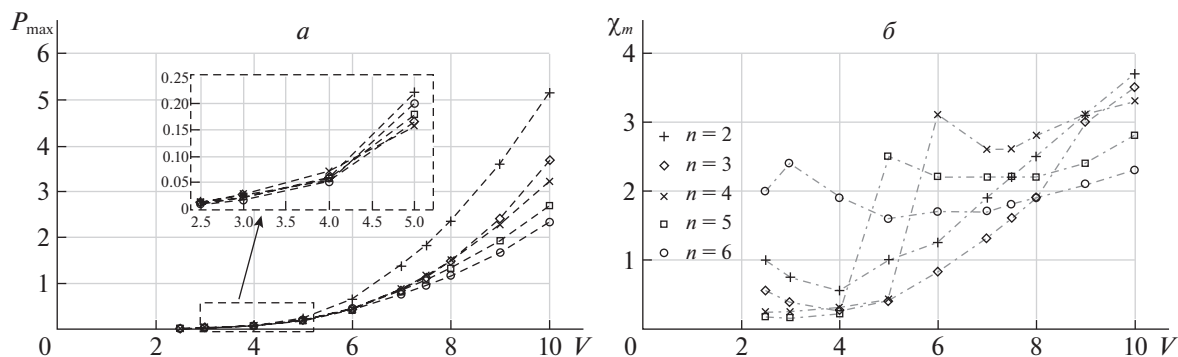


Рис. 5. Зависимость максимальной мощности $P_{\max}$ и соответствующей нагрузки χ_m от скорости потока для маятников с разным числом звеньев

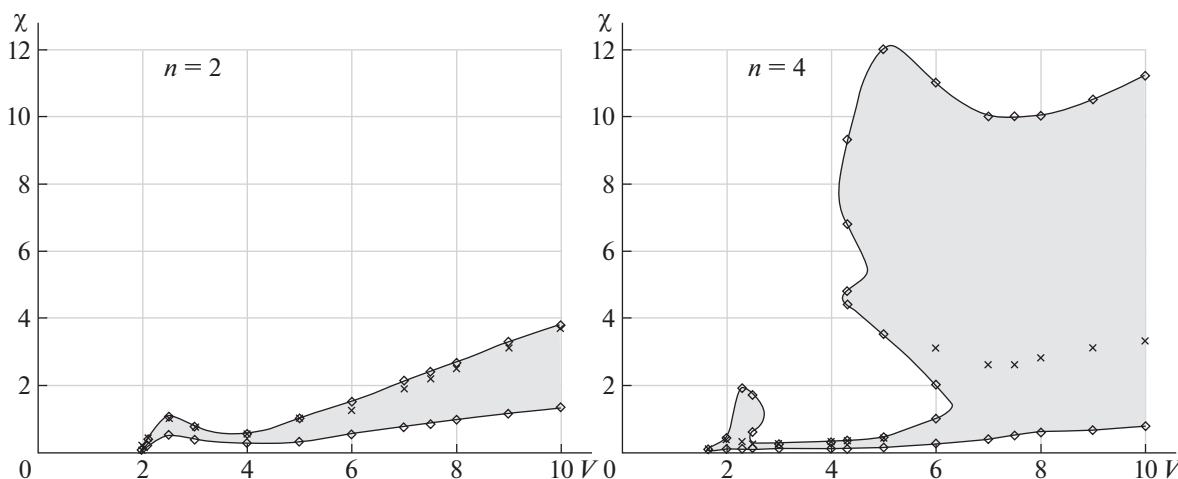


Рис. 6. Области, в которых мощность отличается от максимальной не более чем в 2 раза (крестики — нагрузка, отвечающая максимуму мощности)

Нагрузка χ_m , при которой достигается максимальная мощность, также немонотонно зависит от V . Тем не менее, при достаточно больших значениях V величина χ_m возрастает с ростом скорости потока.

Чтобы оценить влияние “скачков” нагрузки и скорости на мощность, построим для разных скоростей потока интервалы значений χ , на которых существует такой периодический режим, что $P/P_{\max} \geq 0.5$. На рис. 6 представлены эти интервалы для 2-звенного и 4-звенного маятников. Крестиками обозначены значения χ_m для соответствующих скоростей потока. Видно, при сравнительно больших скоростях потока для 4-звенного маятника диапазон нагрузки, в котором мощность менее чем в 2 раза отличается от максимальной, значительно шире, чем для 2-звенного.

Следует отметить, что для 2-звенного маятника максимальная мощность достигается почти на верхней границе этого диапазона. Это означает, что даже небольшое увеличение нагрузки или уменьшение скорости приведут к серьезному падению мощности по сравнению с максимальной. Более того, выход за верхнюю границу диапазона по χ сопровождается исчезновением соответствующего периодического режима, так что развиваемая мощность падает сразу в несколько раз. Этот эффект сохраняется во всем рассмотренном интервале скоростей.

Для 4-звенного маятника при небольших значениях V имеет место аналогичная ситуация. Однако при $V \geq 6$ максимум мощности достигается вдали от границ диапазона по χ , так что чувствительность к изменению нагрузки заметно снижается. Кроме того, как видно из рисунка, при таких V уменьшается и чувствительность к падению скорости потока. Иными словами,

величины V и/или χ могут довольно сильно измениться, но при этом в системе будет существовать периодическое решение с достаточно большой (для новой скорости потока) мощностью.

Таким образом, 2-звенный маятник позволяет (при надлежащем выборе нагрузки и, вообще говоря, начальных условий) обеспечить максимальную мощность при фиксированной скорости потока. Однако это требует достаточно точного регулирования нагрузки с учетом текущей скорости потока. И если необходимо обеспечить возможность варьировать нагрузку в сравнительно широких пределах в процессе эксплуатации установки, то предпочтительно использовать маятник с числом звеньев $n > 2$.

Заключение. Проведено исследование динамики многозвенного аэродинамического маятника как рабочего элемента ветроэнергетической установки колебательного типа. Проанализировано влияние числа звеньев, скорости потока и нагрузки на выходную мощность. Показано, что увеличение числа звеньев позволяет снизить критическую скорость потока, при которой в системе возникают автоколебания. Кроме того, установлено, что максимальная мощность в широком диапазоне скоростей достигается для 2-звенного маятника. В то же время увеличение числа звеньев дает возможность существенно расширить диапазон нагрузок, при которых маятник может развивать достаточно большую мощность, и, в частности, обеспечивает эффективную работу при больших значениях нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Braun M.* On Some Properties of the Multiple Pendulum // *Archive of Applied Mechanics*. 2003. V. 72. P. 899–910.
<https://doi.org/10.1007/s00419-002-0263-4>
2. *Gupta M.K., Sinha N., Bansal K., Singh A.K.* Natural Frequencies of Multiple Pendulum Systems Under Free Condition // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. P. 1049–1061.
<https://doi.org/10.1007/s00419-015-1078-4>
3. *Felmer P.L.* Multiple Periodic Solutions for Lagrangian Systems in T^n // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1990. V. 15. Iss. 9. P. 815–831.
[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90095-X](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90095-X)
4. *Tarantello G.* Multiple Forced Oscillations for the N-Pendulum Equation // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 132. P. 499–517.
5. *Roselli P.* A Multiplicity Result for the Periodically Forced N-Pendulum with Nonzero-Mean Valued Forcings // *Nonlinear Anal. T.M.A.* 2001. V. 43. P. 1019–1041.
[https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00239-4](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00239-4)
6. *Розенблат Г.М.* О параметрической стабилизации многозвенного обращенного маятника // *АиТ*. 1985. № 3. С. 162–165.
7. *Udwadia F.E., Koganti P.B.* Dynamics and Control of a Multi-Body Planar Pendulum // *Nonlinear Dynamics*. 2015. V. 81. P. 845–866.
<https://doi.org/10.1007/s11071-015-2362-0>
8. *Анохин Н.В.* Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2013. № 5. С. 44–53.
9. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В.* Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 755–765.
10. *Ананьевский И.М.* Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // *ПММ*. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 149–155.
11. *Wojna M., Wijata A., Wasilewski G., Awrejcewicz J.* Numerical and Experimental Study of a Double Physical Pendulum with Magnetic Interaction // *J. Sound and Vibration*. 2018. V. 430. P. 214–230.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.05.032>
12. *Marghitu D.B., Zhao J.* Impact of a Multiple Pendulum with a Non-Linear Contact Force // *Mathematics*. 2020. V. 8. P. 1202.
<https://doi.org/10.3390/math8081202>
13. *Lobas L.G.* Generalized Mathematical Model of an Inverted Multilink Pendulum with Follower Force // *Int. Appl. Mech.* 2005. V. 41. P. 566–572.
<https://doi.org/10.1007/s10778-005-0125-1>
14. *Puzrov V., Awrejcewicz J., Losyeva N., Savchenko N.* On the Stability of the Equilibrium of the Double Pendulum with Follower Force: Some New Results // *J. Sound and Vibration*. 2022. V. 523. P. 116699.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116699>
15. *Локишин Б.Я., Самсонов В.А.* Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 501–513.

16. Локишин Б.Я., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Маятниковые системы с динамической симметрией // Современная математика и ее приложения. 2016. Т. 100. С. 76–133.
17. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // Int. J. Structural Stability and Dynamics. 2019. V. 19. № 5. P. 1941007. <https://doi.org/10.1142/S0219455419410074>
18. Egger P., Caracoglia L. Analytical and Experimental Investigation on a Multiple-Mass-Element Pendulum Impact Damper for Vibration Mitigation // J. Sound and Vibration. 2015. V. 353. P. 38–57. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.003>
19. Izadgoshasb I., Lim Y.Y., Tang L., Padilla R.V., Tang Z.S., Sedighi M. Improving Efficiency of Piezoelectric Based Energy Harvesting from Human Motions Using Double Pendulum System // Energy Conversion and Management. 2019. V. 184. P. 559–570. Doi: . <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.02.001>
20. Chen J., Bao B., Liu J., Wu Y., Wang Q. Piezoelectric Energy Harvester Featuring a Magnetic Chaotic Pendulum // Energy Conversion and Management. 2022. V. 269. P. 116155. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116155>
21. Selyutskiy Y., Dosaev M., Holub A., Ceccarelli M. Wind Power Harvester Based on an Aerodynamic Double Pendulum // Proc. Institution of Mechanical Engineers, P. C: J. Mechanical Engineering Science. 2022. V. 236. № 18. P. 10025–10032. <https://doi.org/10.1177/09544062221085>
22. Dosaev M., Klimina L., Selyutskiy Y. Wind Turbine Based on Antiparallel Link Mechanism // New Trends in Mechanism and Machine Science, Mechanisms and Machine Science. V. 43. Springer International Publishing Switzerland, 2017. P. 543–550.
23. Pigolotti L., Mannini C., Bartoli G., Thiele K. Critical and Post-Critical Behaviour of Two-Degree-of-Freedom Flutter-Based Generators // J. Sound and Vibration. 2017. V. 404. P. 116–140. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.024>
24. Sheldahl R.E., Klimas P.C. Aerodynamic Characteristics of Seven Symmetrical Airfoil Sections Through 180-Degree Angle of Attack for Use in Aerodynamic Analysis of Vertical Axis Wind Turbines // Technical Report SAND-80-2114. Sandia National Labs. (USA), 1981. <https://doi.org/10.2172/6548367>
25. Климина Л.А. Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 6. С. 3–14.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 621.357

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛИКА АСУ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ НАНЕСЕНИЯ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2023 г. А. А. Банников^{а,*}, Ю. В. Литовка^{а,*}, В. А. Нестеров^{б,**}, К. И. Сыпало^{с,***}

^а ГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия

^б ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт», Москва, Россия

^с ФГУП «ЦАГИ» имени Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: polychem@list.ru

**e-mail: nesterov_46@inbox.ru

***e-mail: ksypalo@tsagi.ru

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.

После доработки 09.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассмотрена автоматизированная система управления технологическим процессом нанесения гальванических покрытий на множество деталей-катодов различной формы и размеров на основе решения задачи поиска оптимального расположения деталей в гальванической ванне для получения покрытий с минимальным значением критерия R — отношения количества отбракованных деталей N_0 к общему числу N деталей, размещенных на подвесочном устройстве. Для решения поставленной задачи разработана расчетно-логическая система, в которой используются метод полного перебора, модифицированный авторами алгоритм Гомори и метод ветвей и границ. При решении задачи было выявлено, что алгоритм Гомори — наилучший среди трех методов по показателю быстродействия. Разработана двухуровневая система управления гальваническим процессом в ванне с подвесочным устройством.

DOI: 10.31857/S000233882302004X, EDN: JEKDVZ

Введение. При нанесении гальванических покрытий используется несколько устройств для размещения деталей в электрохимической ванне, основными из которых являются барабаны и подвесочные рамы [1]. С точки зрения получения равномерного покрытия по поверхности деталей, применение перфорированных барабанов обеспечивает хорошие значения данного показателя за счет вращения барабана и, как следствие, перемешивания деталей. При этом различные фрагменты поверхностей деталей регулярно оказываются напротив отверстий в барабане, через которые проходит ток. Данный способ востребован при нанесении гальванических покрытий на мелкие детали (в основном метизы).

Совсем иная картина наблюдается при использовании подвесочных устройств, применяемых для обработки средних и крупных деталей [1].

В зависимости от размеров электрохимической ванны на подвеске может размещаться до нескольких десятков деталей разной формы и размеров. Как известно [2], электрическое поле в гальванической ванне имеет сложную структуру, в связи с чем покрытие на поверхности деталей будет иметь различную толщину в разных точках. В то же время наиболее качественным с точки зрения критерия неравномерности будет покрытие, имеющее одинаковую (заданную технологическим регламентом) толщину во всех точках покрываемой поверхности. Такого идеального результата добиться, как правило, не удастся. Поэтому технологическим регламентом задаются предельные значения толщины покрытия. Если покрытие в некоторых местах поверхности будет меньше значения $\delta_{\min}$, определяемого техническим заданием, деталь отбраковывается. В ряде случаев превышение толщины покрытия максимального значения $\delta_{\max}$ также недопустимо, так как приведет к невозможности сочленения деталей на этапе сборки.

Изучению проблемы снижения неравномерности гальванического покрытия посвящено значительное количество исследований (например, [3–5]). Нами предлагается снизить суммарную неравномерность наносимого гальванического покрытия на множество деталей, меняя расположение деталей на подвесочном устройстве (естественно, речь идет о ситуации, когда детали имеют различную форму и размеры).

При большом количестве разнообразных деталей, поступающих на гальваническую обработку, правильно разместить детали на подвесочном устройстве, чтобы исключить брак, без расчетов невозможно, даже в случае работы квалифицированного персонала. Целью работы является снижение брака при гальванической обработке партии деталей за счет создания автоматизированной системы управления технологическим процессом нанесения гальванических покрытий, которая будет решать задачу оптимального размещения деталей на подвесочном устройстве.

Таким образом, необходимо решить две взаимосвязанные задачи: оптимизации размещения деталей на подвесочном устройстве и создания АСУТП нанесения гальванических покрытий, причем разработанная автоматизированная система должна решать оптимизационную задачу в режиме онлайн.

1. Постановка задачи оптимального размещения деталей на подвесочном устройстве. Введем критерий R — отношение количества отбракованных деталей N_o к общему числу N деталей, размещенных на подвеске:

$$R = N_o/N. \quad (1.1)$$

Покрытие будет считаться качественным, если для всех m точек на поверхности детали, где производилось измерение толщины покрытия δ_i , выполняется условие

$$\delta_{\min} \leq \delta_i \leq \delta_{\max}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.2)$$

Математическая постановка задачи имеет следующий вид. Пусть задан массив $A[k, j]$, где k — номер строки, j — номер позиции в строке (под строками понимаются перекладины подвеса, под номером позиции — кронштейны для фиксирования деталей), A — номер размещенной на k -й, j -й позициях детали.

Найти значение $A[k, j]$, $k = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, h}$, при которых $R \rightarrow \min$. Здесь p — количество перекладин подвесочного устройства; h — количество кронштейнов для крепления деталей на каждой перекладине (их количество одинаково для всех перекладин).

Для связи критерия R с варьируемыми переменными применяется математическая модель, включающая следующие уравнения:

для расчета толщины $\delta_{A[k, j]}$ покрытия детали $A[k, j]$ в точке с координатами x, y, z используется уравнение, полученное из закона Фарадея:

$$\delta_{A[k, j]}(x, y, z, T) = \frac{\Theta}{\rho} \int_0^T \eta(x, y, z, \tau) i_k(x, y, z, \tau) d\tau, \quad (1.3)$$

где T — время нанесения покрытия; Θ — электрохимический эквивалент металла покрытия; ρ — плотность металла покрытия; η — выход по току; τ — текущее время; i_k — катодная плотность тока;

катодная плотность тока определяется с помощью закона Ома в дифференциальной форме:

$$i_k(x, y, z, t) = -\chi \text{grad} \varphi(x, y, z, t), \quad (1.4)$$

где χ — электропроводность электролита, φ — потенциал электрического поля в любой точке гальванической ванны с координатами (x, y, z) ;

для нахождения распределения потенциала φ в объеме электролита используется дифференциальное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.5)$$

В этом случае применяются следующие краевые условия:

а) на границе с изолятором (стенки электрохимической ванны и граница электролит–воздух):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_n} = 0, \quad (1.6)$$

где S_n — площадь поверхности изолятора; n — нормаль к поверхности изолятора;

б) на поверхности S анода:

$$\varphi + F_1(i_a)/S = U, \quad (1.7)$$

где U — напряжение между анодом и катодом; F_1 — функция анодной плотности тока i_a , учитывающая поляризацию анода;

в) на поверхности детали — катода $A[k, j]$:

$$\varphi - F_2(i_k)/A[k, j] = 0, \quad (1.8)$$

где F_2 — функция катодной плотности тока i_k , учитывающая поляризацию катода.

Таблица 1. Матрица размещения деталей, полученная генератором случайных чисел

k	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	11	3	9
2	5	4	7
3	12	10	8
4	2	6	1

Таблица 2. Оптимальная матрица размещения деталей

k	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	3	11	2
2	5	12	4
3	1	9	8
4	10	6	7

Задавая различные значения варьируемых переменных $A[k, j]$ в (1.8), будем получать каждый раз новые краевые условия для уравнения Лапласа (1.5). Как следствие, будет изменяться распределение потенциала ϕ в объеме гальванической ванны, что повлечет изменение плотности тока, рассчитываемого по уравнению (1.4). Соответственно изменится распределение толщины покрытия, вычисляемого по уравнению (1.3). Следующим этапом будет проверка условия (1.2) для всех рассчитанных значений толщины покрытия для всех деталей. Количество деталей, для которых хотя бы в одной точке условие (1.2) не выполняется, запоминаются в N_o , что позволяет рассчитать значение критерия по формуле (1.1).

Решение системы уравнений (1.3)–(1.8) осуществлялось итерационными методами; уравнение Лапласа решалось методами расщепления и релаксации с прогонкой по строке [6].

2. Алгоритм решения задачи оптимизации. Исходными данными является набор деталей, поступивших на обработку. Необходимо найти такую матрицу $A[k, j]$, характеризующую размещение деталей на подвесочном устройстве, при которой критерий (1.1) имеет минимальное значение (в идеале $R = 0$ при отсутствии брака, когда для всех деталей выполнено условие (1.2)). Поставленная задача относится к классу целочисленных. Для решения поставленной задачи разработана расчетно-логическая система, в которой используются метод полного перебора, модифицированный авторами алгоритм Гомори и метод ветвей и границ. Метод полного перебора [7] дает гарантированное оптимальное решение, но требует существенных затрат времени при большой размерности задачи. Модификация алгоритма Гомори [8] заключается в использовании метода пузырька при ранжировании свободных членов симплекс-таблицы для нахождения среди свободных членов переменной с максимальным дробным числом. Алгоритм Гомори существенно более эффективен метода полного перебора.

Возникает задача выбора наиболее подходящего метода решения задачи размещения деталей на подвесочном устройстве. Исходными данными для выбора одного из трех методов является количество, тип и форма деталей, на которые необходимо нанести гальваническое покрытие. После этого производится решение задачи оптимального размещения деталей-катодов на подвесочном устройстве с точки зрения критерия (1.1) тремя методами и выявляется наилучший среди них по показателю быстройдействия.

3. Пример решения задачи оптимального размещения деталей на подвесочном устройстве. Работу системы проиллюстрируем на примере поиска оптимального размещения 12 различных деталей на подвесочном устройстве ванны никелирования, имеющем четыре перекладины с тремя кронштейнами для закрепления деталей на каждой перекладине.

В качестве имитации работы персонала, обслуживающего гальваническую линию, использовался генератор случайных чисел, который сформировал следующую матрицу размещения деталей на подвесочном устройстве (табл. 1).

Для данного размещения критерий $R = 0.33$ – для четырех деталей не выполнилось условие (1.2). Расчеты по трем алгоритмам (полный перебор, метод Гомори и алгоритм ветвей и границ) дали одинаковый оптимальный результат (табл. 2).

Для данного размещения критерий $R = 0.0833$ – всего для одной детали не выполнилось условие (1.2). Поиск оптимального решения осуществлялся с помощью процессора Intel Core i5-3337U.



Рис. 1. Функциональная схема системы управления

Анализ времени, затраченного на поиск оптимального решения, показал, что расчет методом полного перебора продолжался 7.5 ч; методом Гомори – 5.2 ч; методом ветвей и границ – 5.9 ч. Наиболее эффективным с точки зрения быстродействия оказался метод Гомори.

4. Задача формирования облика автоматизированной системы управления технологическим процессом нанесения гальванических покрытий. Как указывалось выше, разработанная автоматизированная система должна решать задачу снижения брака при гальванической обработке партии деталей (деталь считается бракованной при невыполнении условия (1.2)) путем поиска оптимального размещения деталей на подвеске в режиме онлайн.

Для решения оптимизационной задачи нужны существенные вычислительные мощности (выявленные при решении тестовых оптимизационных задач): базовая тактовая частота процессора не менее 1.8 ГГц; объем оперативной памяти не менее 8 Гб. Для решения задач стабилизации технологических параметров достаточно использование микроконтроллеров.

5. Архитектура автоматизированной системы управления. Исходя из требований к автоматизированному процессу нанесения гальванических покрытий, для управления технологическими процессами электрохимической ванны предложена двухуровневая архитектура системы управления (рисунок). На нижнем уровне осуществляется управление технологическими параметрами электрохимических ванн. Для стабилизации температуры сигнал с термодатчика обрабатывается микропроцессорным регулятором-регистратором, сигнал с которого поступает на магнитный пускатель, включающий (выключающий) нагревательные элементы, расположенные в гальванической ванне. Стабилизация электрического тока, проходящего через детали, осуществляется встроенной системой управления выпрямительным агрегатом. Стабилизация уровня электроли-

та происходит с помощью добавления электролита из буферной емкости в электрохимическую ванну в ситуации, когда датчик показал уменьшение уровня электролита (вследствие испарения и уноса с деталями) ниже предельного значения.

На верхнем уровне используется вычислительное устройство большой мощности. Оператор вводит из базы данных набор деталей, на которые необходимо нанести гальваническое покрытие. Система анализирует исходную информацию и осуществляет поиск в базе данных решения оптимизационной задачи, полученного ранее. Если решение найдено, оно выдается оператору. В противном случае оператор вводит начальное приближение расположения деталей на подвеске и запускает программу оптимизации. После этого в режиме онлайн решается задача оптимального размещения деталей на подвеске методом Гомори и результат сообщается оператору. Задержка, связанная с решением задачи оптимизации, не должна превышать значение времени, заданного технологическим регламентом. Таким образом, на верхнем уровне реализуется классическая схема управления по возмущению (возмущением является набор деталей, поступающих на обработку). Управление электрохимическими процессами по отклонению с обратной связью не используется в связи с тем, что контролировать изменение толщины покрытия (тем более, неравномерность толщины покрытия) в течение всего периода нанесения гальванического покрытия невозможно.

Получив информацию от системы автоматизированного управления о результатах решения задачи оптимизации, оператор вручную осуществляет оптимальное размещение деталей на подвеске и запускает технологический процесс нанесения гальванического покрытия.

Разработанная автоматизированная система управления гальваническими процессами принята к использованию на гальваническом участке ООО “КомплектЭнерго”, г. Моршанск.

Заключение. Предложен новый критерий для сравнения вариантов размещений деталей различной формы и размера на подвесочном устройстве гальванической ванны: отношения количества отбракованных деталей N_0 к общему числу N деталей, размещенных на подвесочном устройстве.

Сформулирована математическая постановка задачи поиска оптимального размещения деталей различной формы и размера на подвесочном устройстве гальванической ванны с точки зрения предложенного критерия. Разработана расчетно-логическая система, в которой используются метод полного перебора, модифицированный авторами, алгоритм Гомори и метод ветвей и границ. Выявлено, что наиболее эффективным по критерию быстродействия является модифицированный метод Гомори.

Сформирован облик двухуровневой системы управления гальваническим процессом в ванне с подвесочным устройством, принятой к использованию на гальваническом участке ООО “КомплектЭнерго”, г. Моршанск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Антонов Б.В., Гендлер Б.И. и др. Оборудование цехов электрохимических покрытий: Справочник. Л.: Машиностроение, 1987. 309 с.
2. Гнусин Н.П., Поддубный Н.П., Маслий А.И. Основы теории расчета и моделирования электрических полей в электролитах. Новосибирск: Наука, 1972. 276 с.
3. Литовка Ю.В., Као В.З., Соловьев Д.С. Оптимальное управление технологическим процессом нанесения гальванического покрытия в ванне с дополнительными катодами и биполярными электродами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 8. С. 547–552.
4. Дутов А.В., Литовка Ю.В., Нестеров В.А., Соловьев Д.С., Соловьева И.А., Сыпало К.И. Поиск оптимального управления токовыми режимами в гальванических процессах со многими анодами при разнообразии номенклатуры обрабатываемых изделий // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 78–88.
5. Литовка Ю.В., Соловьев Д.С., Мукина И.А. Особенности оптимального управления гальваническими процессами в многоанодной ванне с различными значениями силы тока // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 9. С. 631–636.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
7. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. М.: Химия, 1975. 576 с.
8. Банников А.А., Литовка Ю.В. Расчетно-логическая интеллектуальная система управления многокатодной гальванической ванной // Тр. МАИ. 2022. № 122. С. 1–17.
<https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-18>

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В ЗАДАЧЕ ГАЗЛИФТИНГА

© 2023 г. Ф. А. Алиев^{a,b}, И. А. Магеррамов^a, М. М. Муталлимов^{a,b}, В. И. Цурков^{c,*}

^aИнститут прикладной математики, БГУ, Баку, Азербайджан

^bИнститут информационных технологий, НАНА, Баку, Азербайджан

^cФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: v.tsurkov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.

После доработки 16.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается частично периодическая задача управления, где управляющий параметр входит в начальное условие. Изучается формализация, которая относится к вариационному исчислению. Выписываются необходимые условия в виде уравнений Эйлера–Лагранжа, с помощью которых разрабатывается алгоритм нахождения оптимальных программных траекторий. Результаты иллюстрируются примером, когда движение описывается осредненным по времени гиперболическим уравнением при достаточно большой глубине скважины в процессе газлифтинга.

DOI: 10.31857/S0002338823020026, EDN: JEMPPF

Введение. Вариационное исчисление (см., например, [1]) возникло из классических постановок экстремальных задач. Однако соответствующий математический аппарат имеет применение в современных моделях. Так, для нахождения оптимального решения при газлифтной эксплуатации нефтяных скважин в [2, 3] построена математическая модель газлифтного процесса, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для упрощения уравнение в частных производных с помощью усреднения по времени t [4] или по глубине скважины x [5] сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которых ставится задача оптимизации. Отметим, что в работе [4] полученное нелинейное дифференциальное уравнение используется для разработки алгоритма вычисления гидравлического сопротивления насосно-компрессорных труб.

В [6] на основе усредненных уравнений рассматривается задача оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах. В этой задаче управление входит в граничные начальные условия. Условие периодичности связывает решения не на концах отрезка, а в средней и конечной точках. Поэтому рассматривается так называемая задача с частично периодическим краевым условием.

В настоящей работе исследуется задача оптимизации, где движение объекта на отрезке $[0, 2l]$ описывается различными дифференциальными уравнениями на интервалах $[0, l]$ и $(l, 2l]$ соответственно, а в точке l решение удовлетворяет конечно-разностным уравнениям. Кроме того, средняя (l) и конечная ($2l$) точки связаны периодическим условием.

Изучается полученная вариационная задача и предлагается алгоритм ее решения. На конкретном примере оптимизации газлифтинга иллюстрируется данный подход.

1. Постановка задачи. При моделировании газлифтинга возникают задачи [2, 3], где динамическая модель газлифта описывается системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Известно, что после прекращения фонтанирования происходит переход на газлифт — механизированный способ эксплуатации скважин, при котором вводят дополнительную энергию в виде сжатого газа. Этот способ используется после прекращения фонтанирования из-за нехватки пластовой энергии. По колонне труб газ с поверхности ($y(x)$ при $0 < x < l - 0$) земли подается к башмаку скважины, где смешивается с жидкостью $y_p(l - 0)$ на

дне скважины, образуя газожидкостную смесь (ГЖС), которая (($y(x)$ при $(l+0 < x < 2l)$)) поднимается на поверхность по подъемным трубам. Как показано в [4], после осреднения уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y'(x) = f_1(y(x), x), \quad y(0) = u, \quad 0 < x < l, \quad (1.1)$$

$$y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \quad x = l, \quad (1.2)$$

$$y'(x) = f_2(y(x), x), \quad l < x < 2l, \quad (1.3)$$

где y — n -мерный фазовый вектор, u — n -мерный постоянный вектор, играющий роль управляющего воздействия, F_δ и Γ — постоянные матрицы размерности $n \times n$, V — постоянный вектор размерности n , а f_1, f_2 — вектор-функции размерности n , являющиеся кусочно-непрерывными функциями, x — аргумент. Отметим, что здесь (1.1) соответствует движению газа в колонне труб, а (1.3) — движению ГЖС по подъемным трубам. Соотношение (1.2) отвечает смешиванию газа с жидкостью, в результате которого образуется ГЖС. Параметр u , используемый в начальном условии, соответствует подаваемому газу. Требуется найти u таким образом, чтобы следующий функционал

$$J = u^T R u + y^T(l-0) Q y(l-0) + \int_0^{2l} L(y(x), x) dx, \quad (1.4)$$

получил бы минимальное значение при условии частичной периодичности по фазовому вектору:

$$y(l+0) = y(2l), \quad (1.5)$$

где $R = R^T > 0$, $Q = Q^T \geq 0$ являются $n \times n$ -мерными постоянными матрицами, $L(y(x), x)$ — заданная функция, T — транспонирование. Минимизация функционала (1.4) означает минимизацию подаваемого газа в газлифтную скважину. Особенно хочется отметить физический смысл условия (1.5) частичной периодичности. Это условие требует поднятие всей ГЖС, образующейся на дне скважины, на поверхность. Если это невозможно, то выражение (1.5) следует заменить условием $Q(2l) = \alpha Q(l-0)$, $0 < \alpha < 1$.

Для решения задачи (1.1)–(1.5) используем метод Эйлера–Лагранжа из вариационного исчисления, подробные преобразования приводятся в следующем разделе.

2. Метод Эйлера–Лагранжа. Составим расширенный функционал для задачи оптимизации (1)–(5) следующего вида, используя [7]:

$$\begin{aligned} \bar{J} = J + \int_0^l \lambda^T(x) (y'(x) - f_1(y(x), x)) dx + \int_l^{2l} \lambda^T(x) (y'(x) - f_2(y(x), x)) dx + \lambda^T(l+0) \times \\ \times (y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) - V) + \mu (y(l+0) - y(2l)) + \lambda^T(0) (y(0) - u), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где вектор-функция $\lambda(x)$ и постоянный вектор μ размерности n суть лагранжевые множители [8]. Согласно результатам [7, 8], при вычислении вариации расширенного функционала (2.1) по $y(x)$, а также производных соответственно на интервалах $(0, l-0)$ и $(l+0, 2l)$ от терминальных функций этого функционала по $u, y(l-0), y(l+0)$ и приравнянии их к нулю можно получить уравнение Эйлера–Лагранжа. Для этого сначала обозначим

$$H_1(y(x), x) = L(y(x), x) - \lambda^T(x) f_1(y(x), x),$$

$$H_2(y(x), x) = L(y(x), x) - \lambda^T(x) f_2(y(x), x).$$

Далее, интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^l \lambda^T(x) y'(x) dx &= \int_0^l \lambda^T(x) dy(x) = \lambda^T(l-0) y(l-0) - \lambda^T(0) y(0) - \int_0^l \frac{d\lambda^T(x)}{dx} y(x) dx, \\ \int_l^{2l} \lambda^T(x) y'(x) dx &= \int_l^{2l} \lambda^T(x) dy(x) = \lambda^T(2l) y(2l) - \lambda^T(l+0) y(l+0) - \int_l^{2l} \frac{d\lambda^T(x)}{dx} y(x) dx. \end{aligned}$$

Учитывая это, расширенный функционал имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{J} = & u^T R u + y^T(l-0) Q y(l-0) + \int_0^l \left\{ H_1(y(x), x) - \frac{d\lambda^T(x)}{dx} y(x) \right\} dx + \\ & + \int_l^{2l} \left\{ H_2(y(x), x) - \frac{d\lambda^T(x)}{dx} y(x) \right\} dx + \lambda^T(l-0) y(l-0) - \lambda^T(0) y(0) + \lambda^T(2l) y(2l) - \\ & - \lambda^T(l+0) y(l+0) + \lambda^T(l+0) (y(l+0) - F_\delta y(l-0) - \Gamma y_p(l-0) - V) + \\ & + \mu (y(l+0) - y(2l)) + \lambda^T(0) (y(0) - u).\end{aligned}$$

Вычислим вариацию (как в формулах (2.3.1)–(2.3.15) из [7]) этого функционала по $y(x)$, а также производные соответственно на интервалах $(0, l-0)$ и $(l+0, 2l)$ от терминальных функций этого функционала по $u, y(l-0), y(l+0)$ и приравняем их к нулю:

$$\delta_y \bar{J} = \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial H_1}{\partial y} - \lambda'(x) \right] \delta y \right\} dx + \int_l^{2l} \left\{ \left[\frac{\partial H_2}{\partial y} - \lambda'(x) \right] \delta y \right\} dx = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u} = 2Ru - \lambda(0) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial y(l-0)} = 2Qy(l-0) - \lambda(l-0) - F_\delta^T \lambda(l+0) = 0.$$

С учетом (1.5)

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial y(2l)} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial y(l+0)} = \lambda(l+0) - \lambda(2l) = 0.$$

Из этих соотношений получим

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u} = 2Ru - \lambda(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$-\lambda^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^T(x) \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < (l-0), \quad (2.3)$$

$$-\lambda^{(x)} + \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^T(x) \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad (l+0) < x < 2l, \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \lambda(l-0) = -2Qy(l-0) - F_\delta^T \lambda(l+0), \\ y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\lambda(l+0) = \lambda(2l). \quad (2.6)$$

Отметим, что эти уравнения можно найти из монографии [8]. На самом деле, первая формула (2.5) получается как формула (3.5.15) из монографии [8, с. 296], а формула (2.6)—как частный случай формул (3.1.18а) и (3.1.18в) из [8, с. 233]. Таким образом, решив уравнения (1.1)–(1.3), (2.3)–(2.4) с краевыми условиями (1.5), (2.2), (2.5) и (2.6), определим экстремальное решение исходной задачи.

3. Нахождение оптимальных программных траекторий. Из (2.2) находим управление в виде

$$u = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \quad (3.1)$$

подставляя его в (1.1), (1.3) и (2.3), (2.4), получим следующие системы $2n$ -дифференциальных уравнений в интервале $(0, l)$:

$$\begin{aligned}y'(x) &= f_1(y(x), x), \quad y(0) = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \\ \lambda'(x) &= \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^T \frac{\partial f_1}{\partial y},\end{aligned} \quad (3.2)$$

и в $(l, 2l)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f_2(y(x), x), \\ \lambda'(x) &= \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda^T \frac{\partial f_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь в точке l имеем разрыв в виду соотношения (2.5) и граничного условия (2.6).

Таким образом, для решения исходной задачи (1.1)–(1.5) имеем системы дифференциальных и конечно-разностных уравнений (2.5), (3.2), (3.3) с неразделенными краевыми условиями (1.5), (2.6), (3.1), где, решив их, мы получим оптимальную программную траекторию $y_{\text{пр}}$ и управление $u_{\text{пр}}$.

Одним из известных методов решения вышеприведенной задачи является метод квазилинеаризации [7, 9]. По сути он представляет собой итеративный процесс и при разумном выборе начальных приближений сходится к исходному решению. Далее рассмотрим линейно-квадратичную (ЛК) задачу как частный случай.

4. ЛК-задача. Пусть система (1.1)–(1.3) описывается линейными уравнениями

$$y^{(x)} = F_1(x)y(x) + V_1(x), \quad y(0) = u, \quad 0 < x < l, \quad (4.1)$$

$$y(l+0) = F_\delta y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V_2, \quad (4.2)$$

$$y^{(x)} = F_2(x)y(x) + V_3(x), \quad l < x < 2l, \quad (4.3)$$

где матрицы F_1 , F_2 и векторы V_1 , V_3 получаются в результате линеаризации соотношений (1.1), (1.3) и имеют согласованные размерности. Если в (1.4) взять $L(y(x), x) = y^T(x)Q_1(x)y(x)$, то квадратичный функционал (1.4) будет иметь вид

$$J = u^T R u + y^T(l-0)Qy(l-0) + \int_0^{2l} y^T(x)Q_1(x)y(x)dx, \quad (4.4)$$

где $Q_1(x) = Q_1^T(x) \geq 0$, а условие частичной периодичности (1.5) остается неизменным.

Тогда, согласно [7, 8], аналогично (3.2), (3.3) уравнения Эйлера-Лагранжа из-за квадратичности функционала (1.4) в виде (4.4) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y^{(x)} &= F_1(x)y(x) + V_1(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}R^{-1}\lambda(0), \\ \lambda'(x) &= Q_1(x)y(x) - F_1^T(x)\lambda(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l-0, \quad (4.5)$$

и

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= F_2(x)y(x) + V_3(x), \\ \lambda'(x) &= Q_1(x)y(x) - F_2^T(x)\lambda(x), \end{aligned} \right\} \quad l+0 < x < 2l, \quad (4.6)$$

с разностным уравнением (2.5) и краевыми условиями (2.6). Здесь также отметим, что вторые формулы из (4.5) и (4.6) таким же образом получаются, как формула (3.1.17) из [8, с. 233].

Теперь остановимся на решении начально-краевой задачи (2.6), (4.5), (4.6).

5. Нахождение оптимальных программных траекторий в ЛК-задаче. Представим уравнения (4.5), (4.6) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ \lambda'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 \\ Q_1(x) & -F_1^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < x < l-1, \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ \lambda'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2(x) & 0 \\ Q_1(x) & -F_2^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_3(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l+0 < x < 2l. \quad (5.2)$$

Пусть W_1 и W_2 — фундаментальные матрицы систем дифференциальных уравнений (5.1) и (5.2) соответственно. Тогда их решения можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = W_1(x, x_0) \begin{bmatrix} y(x_0) \\ \lambda(x_0) \end{bmatrix} + K_1(x, x_0), \quad 0 < x < l - 0, \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = W_2(x, x_0) \begin{bmatrix} y(x_0) \\ \lambda(x_0) \end{bmatrix} + K_2(x, x_0), \quad l + 0 < x < 2l, \quad (5.4)$$

где

$$K_1(x, x_0) = \int_{x_0}^x W_1(x, t) \begin{bmatrix} V_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt, \quad (5.5)$$

$$K_2(x, x_0) = \int_{x_0}^x W_2(x, t) \begin{bmatrix} V_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt. \quad (5.6)$$

Из (5.3) и (5.4) получим

$$\begin{bmatrix} y(l - 0) \\ \lambda(l - 0) \end{bmatrix} = W_1(l - 0, 0) \begin{bmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + K_1(l - 0, 0), \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} y(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = W_2(2l, l + 0) \begin{bmatrix} y(l + 0) \\ \lambda(l + 0) \end{bmatrix} + K_2(2l, l + 0). \quad (5.8)$$

Добавляя к (5.7), (5.8) уравнение (1.5), первое уравнение (2.5), а также (2.6) и (4.2), получим систему $9n$ уравнений с $9n$ неизвестными $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l - 0)$, $y_p(l - 0)$, $\lambda(l - 0)$, $y(l + 0)$, $\lambda(l + 0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$. Используем обозначения

$$\begin{aligned} W_1(l - 0, 0) &= \begin{bmatrix} W_{11}^1 W_{12}^1 \\ W_{21}^1 W_{22}^1 \end{bmatrix}, & W_2(2l, l + 0) &= \begin{bmatrix} W_{11}^2 W_{12}^2 \\ W_{21}^2 W_{22}^2 \end{bmatrix}, \\ K_1(l - 0, 0) &= \begin{bmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{bmatrix}, & K_2(2l, l + 0) &= \begin{bmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

И, объединяя все вышеназванные уравнения, имеем

$$\begin{cases} 2Ry(0) - \lambda(0) = 0, \\ y(l + 0) - y(2l) = 0, \\ \lambda(l - 0) = -2Qy(l - 0) - F_8^T \lambda(l + 0) = 0, \\ \lambda(l + 0) - \lambda(2l) = 0, \\ y(l + 0) - F_8 y(l - 0) - \Gamma y_p(l - 0) = V_2, \\ y(l - 0) - W_{11}^1 y(0) - W_{12}^1 \lambda(0) = K_1^1, \\ \lambda(l - 0) - W_{21}^1 y(0) - W_{22}^1 \lambda(0) = K_2^1, \\ y(2l) - W_{11}^2 y(l + 0) - W_{12}^2 \lambda(l + 0) = K_1^2, \\ \lambda(2l) - W_{21}^2 y(l + 0) - W_{22}^2 \lambda(l + 0) = K_2^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Отсюда получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l - 0)$, $y_p(l - 0)$, $\lambda(l - 0)$, $y(l + 0)$, $\lambda(l + 0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$:

$$\begin{bmatrix}
2R & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & -E & 0 \\
0 & 0 & -Q & 0 & E & 0 & F_8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & -E \\
0 & 0 & -F_8 & -\Gamma & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
-W_{11}^{-1} & -W_{12}^{-1} & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-W_{21}^{-1} & -W_{22}^{-2} & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_{11}^{-2} & -W_{12}^{-2} & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_{21}^{-2} & -W_{22}^{-2} & 0 & E
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y(0) \\
\lambda(0) \\
y(l-0) \\
y_p(l-0) \\
\lambda(l-0) \\
y(l+0) \\
\lambda(l+0) \\
y(2l) \\
\lambda(2l)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
V_2 \\
K_1^1 \\
K_2^1 \\
K_1^2 \\
K_2^2
\end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Если главный определитель этой системы отличен от нуля, то для неизвестных величин получим единственные значения. Таким образом, найдем $y(0)$ и $\lambda(0)$. Тогда из (3.1) следует управление, которое будем считать программным. Далее, решая уравнение (3.2) с начальными данными $y(0)$ и $\lambda(0)$, получим значения функции $y(x)$ и $\lambda(x)$ на интервале $(0, l-0)$, затем, используя соотношения (2.5), найдем $y(l+0)$ и $\lambda(l+0)$. Применяя эти значения в качестве начальных данных из уравнения (3.3), получим значения функции $y(x)$ и $\lambda(x)$ уже на интервале $(l+0, 2l)$.

Таким образом, решая поставленную задачу, определяем программные траектории и управление $y_{np}(x)$ и u_{np} .

6. Пример. Пусть задано уравнение [4, 10, 11] модели газлифтинга

$$Q'(x) = \frac{2a\rho FQ^2}{c^2\rho^2 F^2\mu - Q^2} = f(\mu), \quad (6.1)$$

где μ — малый параметр. Здесь $Q = \rho\omega_c F$ — массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, c — скорость звука в газе и в ГЖС, ρ — плотность газа и ГЖС соответственно, F — площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб, являющаяся постоянной по осям,

$$2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c}{2D},$$

g — ускорение свободного падения, λ — гидравлическое сопротивление в газе и в ГЖС; ω_c — усредненная по сечению скорость движения смеси и газа в кольцевом пространстве и в подъемнике, D — внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства. Разложим $f(\mu)$ в ряд Маклорена. Тогда имеем

$$f(\mu) = f(0) + \mu f'(0) + \dots, \quad (6.2)$$

где

$$f(0) = -2a\rho F, \quad f'(0) = -\frac{2ac^2\rho^3 F^3}{Q^2}.$$

Учитывая в (6.1) вместо $f(\mu)$ нулевое приближение $f(0)$ и обозначая $y(x) = Q(x)$ задачу (1.1)–(1.5) можно представить в следующем виде:

$$y'(x) = -2a_1\rho_1 F_1, \quad y(0) = u, \quad 0 < x < l-0, \quad (6.3)$$

$$y(l+0) = F_8 y(l-0) + \Gamma y_p(l-0) + V, \quad (6.4)$$

$$y'^{(x)} = -2a_2\rho_2 F_2, \quad l+0 < x < 2l, \quad (6.5)$$

$$\alpha y(l+0) = y(2l), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6.6)$$

Здесь вместо функционала (1.4) возьмем функционал

$$J = u^2 + y^2(l-0) + \int_0^{2l} y^2(x) dx, \quad (6.7)$$

который нужно минимизировать. Нетрудно видеть, что на интервале $0 < x < l - 0$ решение уравнения (6.3) имеет следующий вид:

$$y(x) = y(0) - 2a_1\rho_1 F_1 x = u - 2a_1\rho_1 F_1 x, \quad 0 < x < l - 0. \quad (6.8)$$

Аналогично

$$y(x) = y(l + 0) - 2a_2\rho_2 F_2 x, \quad l + 0 < x < 2l.$$

С другой стороны, подобно (2.1) или (4.4) расширенный функционал для этой задачи (6.3)–(6.7) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{J} = J + \int_0^l \lambda^T(y^{(x)} + 2a_1\rho_1 F_1)dx + \int_l^{2l} \lambda^T(y^{(x)} + 2a_2\rho_2 F_2)dx + \lambda(l + 0) \times \\ \times (y(l + 0) - F_\delta y(l - 0) - \Gamma y_p(l - 0) - V) + \mu(y(l + 0) - y(2l)) + \lambda(0)(y(0) - u). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отсюда, используя методику [7, 8], получим для функционала (5.20) следующую систему уравнений Эйлера–Лагранжа аналогично (2.2)–(2.6):

$$\left. \begin{aligned} 2y(0) - \lambda(0) &= 0, \\ y'(x) &= -2a_1\rho_1 F_1, \quad 0 < x < l - 0, \\ y(l + 0) &= F_\delta y(l - 0) + \Gamma y_p(l - 0) + V, \\ y^{(x)} &= -2a_2\rho_2 F_2, \quad l + 0 < x < 2l, \\ \lambda(l - 0) &= -2y(l - 0) + F_\delta \lambda(l + 0), \\ \alpha y(l + 0) &= y(2l), \\ \lambda(l + 0) &= \alpha \lambda(2l), \\ \lambda'(x) &= y(x), \quad 0 < x < l - 0, \\ \lambda^{(x)} &= y(x), \quad l + 0 < x < 2l. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Тогда, решая систему (6.10), имеем

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2} \lambda(0), \\ y(x) &= y(0) - 2a_1\rho_1 F_1 x, \quad 0 < x < l - 0, \\ y(x) &= y(l + 0) - 2a_2\rho_2 F_2 (x - l), \quad l + 0 < x < 2l, \\ \lambda(x) &= \lambda(0) + y(0)x - a_1\rho_1 F_1 x^2, \quad 0 < x < l - 0, \\ \lambda(x) &= \lambda(l + 0) + y(l + 0)(x - l) - a_2\rho_2 F_2 (x - l)^2, \quad l + 0 < x < 2l. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Используя решение (6.11), а также уравнения Эйлера–Лагранжа (6.10), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y(0)$, $\lambda(0)$, $y(l - 0)$, $y_p(l - 0)$, $\lambda(l - 0)$, $y(l + 0)$, $\lambda(l + 0)$, $y(2l)$, $\lambda(2l)$:

$$\left. \begin{aligned} 2y(0) - \lambda(0) &= 0, \\ \alpha y(l + 0) - y(2l) &= 0, \\ \lambda(l - 0) + 2y(l - 0) - F_\delta \lambda(l + 0) &= 0, \\ \lambda(l + 0) - \alpha \lambda(2l) &= 0, \\ y(l + 0) - F_\delta y(l - 0) - \Gamma y_p(l - 0) &= V, \\ y(l - 0) - y(0) &= -2a_1\rho_1 F_1 l, \\ \lambda(l - 0) - \lambda(0) - y(0)l &= -a_1\rho_1 F_1 l^2, \\ y(2l) - y(l + 0) &= -2a_2\rho_2 F_2 l, \\ \lambda(2l) - \lambda(l + 0) - y(l + 0)l &= -a_2\rho_2 F_2 l^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Система уравнений (6.12) в матрично-векторной форме будут иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -F_\delta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha \\
 0 & 0 & -F_\delta & -\Gamma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -l & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l & -1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 y(0) \\
 \lambda(0) \\
 y(l-0) \\
 y_p(l-0) \\
 \lambda(l-0) \\
 y(l+0) \\
 \lambda(l+0) \\
 y(2l) \\
 \lambda(2l)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V \\
 -2a_1\rho_1 F_1 l \\
 -a_1\rho_1 F_1 l^2 \\
 -2a_2\rho_2 F_2 l \\
 -a_2\rho_2 F_2 l^2
 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Решая линейно алгебраическую систему (6.13), можно найти корни этого уравнения.

Заключение. Таким образом, задача оптимального управления начальным условием в задаче газлифтинга (1.1)–(1.5) сводится к системе дифференциальных и конечно-разностных уравнений (2.5), (3.2), (3.3) с неразделенными краевыми условиями (1.5), (2.6), (3.1). Решая их, получим оптимальную программную траекторию $y_{пр}$ и управление $u_{пр}$. В случае ЛК-задачи оптимального управления (4.1)–(4.4) решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (5.10). Предложенный способ проиллюстрирован на простом одномерном примере.

В дальнейшем интересно расширить полученные результаты для случая, когда имеются ограничения на управляющий параметр и траектории системы. Здесь вместо уравнений Эйлера–Лагранжа из вариационного исчисления следует применять методы Понтрягина, Беллмана и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАН Азербайджана. 2008. № 4. С. 30–41.
3. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикладная механика. 2010. Т. 46. № 6. С. 113–122.
4. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе // Proceedings of IAM. 2013. V. 2. № 1. P. 3–10.
5. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом // Докл. НАН Азербайджана. 2009. Т. LXV. № 5. С. 9–18.
6. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах // Нелинейные колебания. 2014. Т. 17. № 2. С. 151–160.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
8. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989.
9. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
10. Hajiyeva N.S. An Asymptotical Method for Determining the Coefficient of Hydraulic Resistance in Gas-lift Process by the Lines Method // Proc. IAM. 2019. V. 8. № 2. P. 187–195.
11. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing // J. Inverse and Ill-posed Problems. 2015. V. 23. № 5. P. 511–518.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ
ПОТОКАМИ В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ**

© 2023 г. Ю. Е. Малашенко^а, И. А. Назарова^{а,*}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^{*}*e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.10.2022 г.

После доработки 30.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

В рамках многопродуктовой сетевой модели рассматриваются стратегии управления распределением потоков по различным маршрутам передачи. Оценки допустимых загрузок сети формируются на основе вектора совместно допустимых межузловых потоков. Изучаются две стратегии управления. При реализации первой передаваемые межузловые потоки равны друг другу. Вторая стратегия предполагает поиск недискриминирующего распределения потоков, при передаче которых достигаются равные нагрузки. Под нагрузкой, создаваемой некоторой парой узлов, понимается суммарная величина пропускных способностей, необходимая для обеспечения связи данного вида. Для оценки минимальных удельных затрат на передачу потока определенного вида строятся все кратчайшие пути между соответствующей парой узлов. Для получения верхней оценки затрат ресурсов при соединении корреспондентов для каждой пары узлов вычисляется максимальный однопродуктовый поток по всем ребрам сети. Вычислительные эксперименты проводились для сетей с различной структурой и позволили провести сравнительный анализ уравнивающих стратегий управления при расщеплении межузловых потоков для передачи по различным маршрутам.

DOI: 10.31857/S0002338823020130, EDN: JEVYNL

Введение. Данная работа продолжает исследование проблемы управления потоками в телекоммуникационных территориально-распределенных системах связи [1, 2]. В рамках вычислительных экспериментов на многопродуктовой сетевой модели анализируются результирующие загрузки ребер для двух стратегий управления потоками. Под межузловой нагрузкой понимается суммарная величина пропускных способностей, выделяемых в сети для обеспечения передачи информационного потока определенного вида. Сумма всех дуговых потоков разных видов, проходящих по некоторому ребру, трактуется как *реберная загрузка*. Общая допустимая загрузка ребер сети, возникающая при одновременной передаче межузловых информационных потоков для всех пар-корреспондентов, считается заданной.

Анализируются две стратегии управления и диспетчерские правила маршрутизации. При реализации первой стратегии осуществляется распределение межузловых потоков, равных друг другу. Вторая стратегия управления предполагает распределение потоков, при котором межузловые нагрузки оказываются одинаковыми по величине для всех корреспондентов. Для поиска допустимых интервалов управления для каждой пары узлов в монопольном режиме [3] вычисляется максимальный однопродуктовый поток. Маршруты передачи потока каждого вида прокладываются по ребрам соответствующих минимальных разрезов. Для всех пар-корреспондентов подсчитываются межузловые нагрузки. На основе найденных значений и с учетом ограничений определяются результирующие *реберные загрузки*, допустимые при одновременной передаче межузловых потоков.

При использовании каждой стратегии управления сравниваются правила маршрутизации. При передаче каждого вида потока по всем кратчайшим маршрутам производится оценка удельных затрат. Решение стандартной задачи о максимальном потоке и минимальном разрезе применяется для построения дополнительных путей передачи при формировании маршрутно-адресных таблиц в случае возможных повреждений и/или перегрузки сети. Анализ результатов

экспериментов позволяет оценить распределение *реберных нагрузок* для описанных стратегий управления в многопользовательских сетях с различными структурными особенностями.

При создании, развитии и эксплуатации телекоммуникационных систем в настоящее время используются потоковые модели [4]. В частности, указанные модели применяются для поиска стратегий управления и построения диспетчерских правил распределения потоков, нагрузок и ресурсов в многопользовательских сетях [5–7]. Методы анализа сетевых систем с учетом вектора требований всех равноправных и невзаимозаменяемых пользователей создаются на основе формализма многокритериальной оптимизации [8, 9]. В русле исследований по разработке SPLIT-методов [10–12] лежат представленные в разд. 2–4 алгоритмические схемы выравнивания нагрузок и получения уравнильных распределений межузловых потоков по различным маршрутам. Для решения оптимизационных многопродуктовых сетевых задач разработаны специальные алгоритмы [13, 14]. В данной работе используются процедуры поиска всех кратчайших путей и максимального однопродуктового потока с полиномиальными оценками вычислительных затрат [15, 16].

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет *смежные* вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направления передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} .

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Обозначим через z_m величину *межузлового* потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ — поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n , и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , — *входящей* для v_n , и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей*, и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида, проходящему от источника к приемнику пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k , определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ — наперед за-

данные положительные числа $d_k > 0$. Вектор $\mathbf{d}$ задает следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент вектора межзловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}.$$

В рамках данной модели пропускная способность ребер сети измеряется в условных единицах потока и трактуется как ресурсное ограничение. Обозначим через $D(0)$ суммарную величину пропускной способности сети. Значение $D(0)$ считается заданным:

$$D(0) = \sum_{k=1}^E d_k.$$

Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для некоторого допустимого межзлового потока $\tilde{z}_m$ и соответствующих дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$, $k = \overline{1, 2E}$, величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{2E} \tilde{x}_{mi}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межзловую *нагрузку* (МР-нагрузку) на сеть при передаче межзлового потока величины $\tilde{z}_m$ из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина $\tilde{y}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$. В рамках модели отношение МР-нагрузки и межзлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные *затраты* ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках $\tilde{x}_{mi}$. Величины

$$\bar{z}_m = \frac{\tilde{z}_m}{\tilde{y}_m}, \quad \bar{x}_{mi} = \frac{\tilde{x}_{mi}}{\tilde{y}_m}, \quad m = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, E},$$

отвечают межзловому потоку при единичной МР-нагрузке для p_m .

Вводится величина

$$\Delta_k^0 = \sum_{m=1}^M (\bar{x}_{mk}^0 + \bar{x}_{m(k+E)}^0), \quad k = \overline{1, E},$$

характеризующая реберную суммарную *загрузку* (РС-загрузку) k -го ребра при одновременной передаче всех межзловых потоков $\tilde{z}_m$ и дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}^0$, $k = \overline{1, 2E}$.

2. Уравнительное распределение МР-нагрузки. В рамках модели проводились вычислительные эксперименты для оценки распределения РС-загрузки сети при равных МР-нагрузках для всех пар-корреспондентов. При подготовке данных формировался вектор исходных пропускных способностей $\mathbf{d}(0)$ для сети $G(0)$. В сети $G(0)$ при заданных $d_k(0)$ для каждой пары узлов p_m , $m = \overline{1, M}$, последовательно решалась задача поиска максимального независимого однопродуктового потока [15], передаваемого в монопольном режиме управления [3].

З а д а ч а 1. Для некоторой пары узлов p_a найти

$$z_a^0(0) = \max\{z_a \mid (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbf{d}(0))\}$$

при дополнительных условиях $z_m = 0$, $m \neq a$, $m = \overline{1, M}$.

При последовательном решении задачи 1 для каждой пары $p_a \in P$ вычисляются максимальный межузловой поток $z_a^0(0)$ и дуговые потоки $(x_{ak}^0(0), x_{a(k+E)}^0(0))$, $k = \overline{1, E}$. Далее подсчитываются: МР-нагрузка

$$y_a^0(0) = \sum_{k=1}^{2E} x_{ak}^0(0),$$

для найденных $y_a^0(0)$ нормирующий коэффициент

$$\theta_a^0(0) = \frac{1}{y_a^0(0)}, \quad y_a^0(0) \neq 0,$$

и дуговые потоки:

$$x_{ak}^0 = \theta_a^0(0) x_{ak}^0(0), \quad k = \overline{1, 2E}.$$

При передаче дуговых потоков x_{ak}^0 соответствующая МР-нагрузка y_a^0 равна единице для межузлового потока $z_a^0 = \theta_a^0(0) z_a^0(0)$.

Задача 1 решается последовательно для всех $p_m \in P$, и для дуговых потоков x_{mk}^0 определяется РС-загрузка ребер сети при передаче межузловых потоков z_m^0 :

$$\Delta_k^0 = \sum_{m=1}^M (x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0), \quad k = \overline{1, E}.$$

Для заданного значения $D(0)$ подсчитывается допустимое перераспределение РС-загрузок:

$$\beta(0) \left[\sum_{m=1}^M \theta_m^0(0) (x_{mk}^0(0) + x_{m(k+E)}^0(0)) \right] = \Delta_k^0(0), \quad k = \overline{1, E}. \quad (2.1)$$

В рамках модели суммарная величина РС-загрузки численно равна суммарной пропускной способности $D(0)$:

$$\sum_{k=1}^E \Delta_k^0(0) = D(0). \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1), (2.2) находится значение $\beta(0)$:

$$\beta(0) \sum_{k=1}^E \left[\sum_{m=1}^M \theta_m^0(0) (x_{mk}^0(0) + x_{m(k+E)}^0(0)) \right] = D(0)$$

и вычисляются значения $\Delta_k^0(0)$, $k = \overline{1, E}$.

На основе найденных значений формируется сеть $G(1)$, в которой

$$d_k^*(1) := \Delta_k^0(0), \quad k = \overline{1, E}.$$

В сети $G(1)$ для всех пар узлов $p_a \in P$, $a = \overline{1, M}$, определяется максимальный однопродуктовый поток.

Задача 2. Найти $z_a^0(1) = \max\{z_a | (z, x) \in \mathcal{L}(d^*(1))\}$

при дополнительных условиях $z_m = 0$, $m \neq a$, $m = \overline{1, M}$.

На основе последовательного решения задачи 2 задаются коэффициенты нормировки

$$\theta_m^0(1) = \frac{1}{y_m^0(1)} \quad \text{для всех} \quad z_m^0(1) > 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и решается система уравнений для поиска распределения РС-загрузок:

$$\beta^*(1) \sum_{m=1}^M \theta_m^0(1) (x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)) = \Delta_k^0(1), \quad k = \overline{1, E},$$

$$\sum_{k=1}^E \Delta_k^0(1) = D(0).$$

Вычисляются $\beta^*(1)$, $\Delta_k^0(1)$, $k = \overline{1, E}$, и формируется “новая” сеть $G(2)$, в ней пропускные способности $d_k^*(2)$ полагаются равными РС-загрузкам $\Delta_k^0(1)$, т. е.

$$d_k^*(2) := \Delta_k^0(1), \quad k = \overline{1, E}.$$

Для полученных решений находим $z_m^*(1)$ – распределение межузловых потоков при равных значениях МР-нагрузок $y_m^0(1)$:

$$z_m^*(1) = \beta^*(1) \theta_m^0(1) z_m^0(1), \quad p_m \in P.$$

3. Уравнительное распределение межузловых потоков. В рамках модели проводились вычислительные эксперименты для оценки РС-загрузки сети при равных межузловых потоках. В сети $G(0)$ при заданных $d_k(0)$ последовательно для каждой пары узлов $p_m \in P$, $m = \overline{1, M}$, решалась задача 1 поиска максимального независимого однопродуктового потока, передаваемого в монопольном режиме управления [3].

При последовательном решении задачи 1 для каждой пары $p_a \in P$ вычисляются максимальный межузловой поток $z_a^0(0)$ и соответствующие дуговые потоки $(x_{ak}^0(0), x_{a(k+E)}^0(0))$, $k = \overline{1, E}$. Определяются нормирующий коэффициент

$$\xi_a^0(0) = \frac{1}{z_a^0(0)}, \quad z_a^0(0) \neq 0,$$

и дуговые потоки:

$$x_{ak}^0 = \xi_a^0(0) x_{ak}^0(0), \quad k = \overline{1, E}.$$

При передаче дуговых потоков x_{ak}^0 межузловой поток z_a^0 равен единице:

$$z_a^0 = \xi_a^0(0) z_a^0(0) = 1.$$

Задача 1 решается последовательно для всех $p_m \in P$, и для дуговых потоков $x_{mk}^0(0)$ определяется РС-загрузка ребер сети при передаче единичных потоков для всех корреспондентов:

$$\alpha(0) \left[\sum_{m=1}^M \xi_m^0(0) (x_{mk}^0(0) + x_{m(k+E)}^0(0)) \right] = \Delta_k^0(0). \quad (3.1)$$

Величина РС-загрузки численно равна требуемой суммарной пропускной способности $D(0)$, которая считается заданной:

$$\sum_{k=1}^E \Delta_k^0(0) = D(0). \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) находится значение $\alpha(0)$:

$$\alpha(0) \sum_{k=1}^E \left[\sum_{m=1}^M \xi_m^0(0) (x_{mk}^0(0) + x_{m(k+E)}^0(0)) \right] = D(0),$$

вычисляются значения $\Delta_k^0(0)$, $k = \overline{1, E}$.

На основе найденных значений формируется сеть $G(1)$, в ней

$$d_k^*(1) := \Delta_k^0(0), \quad k = \overline{1, E}.$$

В сети $G(1)$ для всех пар узлов $p_a \in P$, $a = \overline{1, M}$, определяется максимальный однопродуктовый поток.

Задача 3. Найти $z_a^0(1) = \max\{z_a \mid (z, x) \in \mathcal{L}(\mathbf{d}^*(\mathbf{1}))\}$

при дополнительных условиях $z_m = 0, \quad m \neq a, \quad m = \overline{1, M}$.

На основе решения задачи 3 последовательно задаются коэффициенты нормировки

$$\xi_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)} \quad \text{для всех} \quad z_m^0(1) > 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и решается система уравнений для поиска распределения РС-загрузок:

$$\alpha^*(1) \sum_{m=1}^M \xi_m^0(1) (x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)) = y^1(k), \quad k = \overline{1, E},$$

$$\sum_{k=1}^E \Delta_k^0(1) = D(0).$$

Вычисляются $\alpha^*(1)$, $y^1(k)$, $k = \overline{1, E}$, и формируется “новая” сеть $G(2)$, в которой пропускные способности $d_k^*(2)$ полагаются равными $\Delta_k^0(1)$, т. е.

$$d_k^*(2) := \Delta_k^0(1), \quad k = \overline{1, E}.$$

Для полученных решений подсчитываются межузловые потоки $z_m^*(1) = \alpha^*(1)$ для всех пар $p_m \in P$. Таким образом, все межузловые потоки равны $\alpha^*(1)$, а суммарный поток

$$\sum_{m=1}^M z_m^*(k) = M \alpha^*(1).$$

Алгоритмическая схема, изложенная в разд. 2, 3, далее называется SFMC-процедурой (от английского split flow minimum cut — расщепление потока по ребрам минимального разреза). При проведении вычислительных экспериментов SFMC-процедура позволяет получать оценки РС-загрузок при расщеплении межузловых потоков по ребрам *минимального разреза*.

4. Распределение межузловых потоков по кратчайшим маршрутам. Для оценки минимальных удельных затрат различных *уравнительных* стратегий управления использовалась SFSR-процедура (от английского split flow shortest route — расщепление потока по всем кратчайшим маршрутам). SFSP-процедура позволяет распределять межузловые потоки по маршрутам, состоящим из минимального числа ребер.

При проведении эксперимента на первом этапе для каждой пары узлов $p_m = (s_m, t_m)$ в сети $G(0)$ определяется множество всех кратчайших путей [17], которые далее используются как маршруты передачи m -го вида потока

$$H^0(m) = \{h^1(m), h^2(m), \dots, h^j(m), \dots, h^{J(m)}(m)\},$$

где $h^j(m) = \{k_1^j(m), k_2^j(m), \dots, k_{\mu(m)}^j(m)\}$ — список номеров ребер в j -м кратчайшем пути между узлами s_m и t_m , $\mu(m)$ — число ребер в кратчайшем маршруте $h^j(m)$, а $J(m)$ — число кратчайших маршрутов для m -й пары.

Для оценки возможности “расщепления” потока по различным маршрутам на втором этапе для каждой пары $p_m \in P$ по каждому маршруту из $H^0(m)$ передается единичный межузловой поток z_m и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } r_k \in R, k \in h^j(m), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычисляются дуговые потоки для пары p_m :

$$x_{mk}^0(0) = \sum_{j=1}^{J(m)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, E}. \quad (4.1)$$

Величина межузлового потока $z_m^0(0)$ между узлами s_m и t_m определяются по формулам (1.1) и (4.1). Рассчитывается нормирующий коэффициент

$$\xi_m^0 = \frac{1}{z_m^0(0)}, \quad z_m^0(0) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}.$$

Находятся дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \xi_m^0 x_{mk}^0(0), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, E},$$

при передаче которых по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице.

Для заданного значения $D(0)$ подсчитываются допустимые РС-загрузки ребер сети:

$$\alpha^{**}(0) \sum_{m=1}^M \xi_m^0 x_{mk}^0(0) = \Delta_k^{**}(0), \quad \sum_{k=1}^E \Delta_k^{**}(0) = D(0).$$

РС-загрузки $\Delta_k^{**}(0)$ возникают в сети при одновременной передаче межузловых потоков:

$$z_m^{**} = \alpha^{**}(0) \quad \text{для всех пар} \quad p_m \in P.$$

Подсчитываются суммарный межузловой поток

$$\sum_{m=1}^M z_m^{**} = M \alpha^{**}(0)$$

и норма РС-загрузки:

$$\|\Delta_k^{**}(0)\| = \left[\sum_{k=1}^E \Delta_k^{**}(0)^2 \right]^{1/2}.$$

Для оценки РС-загрузок при *уравнительном* распределении МР-нагрузок для всех пар узлов $p_m \in P$ также использовалась SPSR-процедура. На первых двух этапах, согласно (4.1), определяются реберные потоки $x_{mk}^0(0)$ для $m = \overline{1, M}$ и $k = \overline{1, E}$ при передаче единичных потоков по всем кратчайшим маршрутам из $H^0(m)$, $m = \overline{1, M}$. Для каждой пары $p_m \in P$ вычисляются МР-нагрузки:

$$y_m^0(0) = \sum_{j=1}^E x_{mj}^0(0), \quad m = \overline{1, M},$$

нормирующие коэффициенты:

$$\theta_m^0 = \frac{1}{y_m^0(0)} \quad \text{для всех} \quad y_m^0(0) \neq 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и потоки:

$$x_{mk}^0 = \theta_m^0 x_{mk}^0(0), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, E},$$

при передаче которых по всем маршрутам $H^0(m)$, $m = \overline{1, M}$, МР-нагрузки $y_m^0(0)$ будут равны единице. Определяются РС-загрузки:

$$\beta^{**} \sum_{j=1}^M \theta_m^0 x_{mj}^0(0) = \Delta_k^{**}(0), \quad \sum_{k=1}^E \Delta_k^{**}(0) = D(0),$$

и, согласно (1.1), (4.1), межузловые потоки:

$$z_m(y^{**}) = \beta^{**} \theta_m^0 z_m^0(0), \quad m = \overline{1, M}.$$

5. Вычислительный эксперимент. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2 (базовая и кольцевая сети соответственно). В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер d_k выбираются случайным образом из отрезка [900, 999] и совпадают для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети

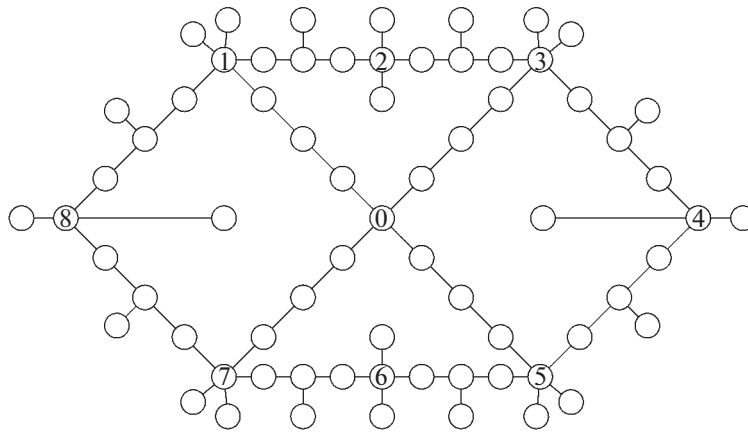


Рис. 1. Базовая сеть

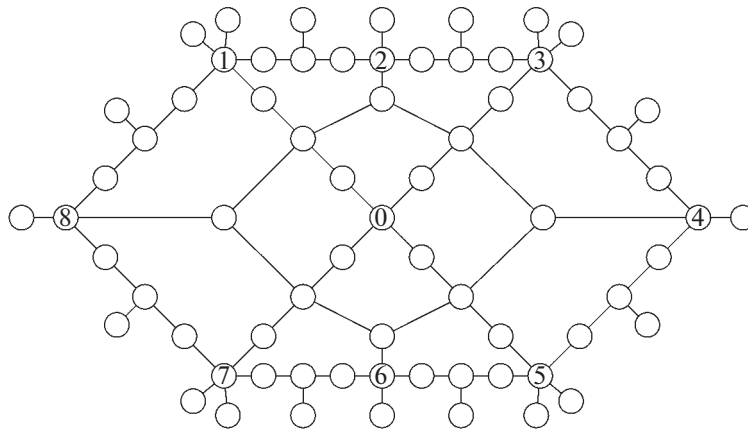


Рис. 2. Кольцевая сеть

пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900. В ходе эксперимента проводилась нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68\,256.$$

Результаты вычислительных экспериментов с использованием SFMC-процедуры для оценки реберных загрузок при равных межузловых нагрузках для всех пар корреспондентов представлены на рис. 3–6. Толщина ребер на рисунках пропорциональна результирующей РС-загрузке. В состав внутреннего кольца на рис. 2, 4 вошли четыре *висячих* узла из базовой сети, и соответствующие ребра образовали *мостики* для транзитных потоков.

В базовой сети основная РС-загрузка — 1400 единиц — приходится на радиальные ребра, исходящие из центрального узла, а на ребрах внешнего кольца не превышает 1250 единиц. При формировании кольцевой сети в состав внутреннего кольца включаются четыре узла, которые в базовой являются *висячими*. Соответствующие ребра образуют *мостики* для передачи транзитных потоков между внутренним и внешним кольцом. РС-загрузка ребер внутреннего кольца составляет 2050 единиц, на внешнем не превышает 800, а на ребрах-*мостиках* — 1500. В обеих сетях минимальная загрузка достигается на *висячих* ребрах: 300 единиц для базовой и 400 для кольцевой. Указанные значения определяются собственными информационными потоками, передающимися из каждого узла. При этом транзитные нагрузки, например, на ребрах внутреннего кольца на порядок превышают собственные потоки инцидентных узлов.

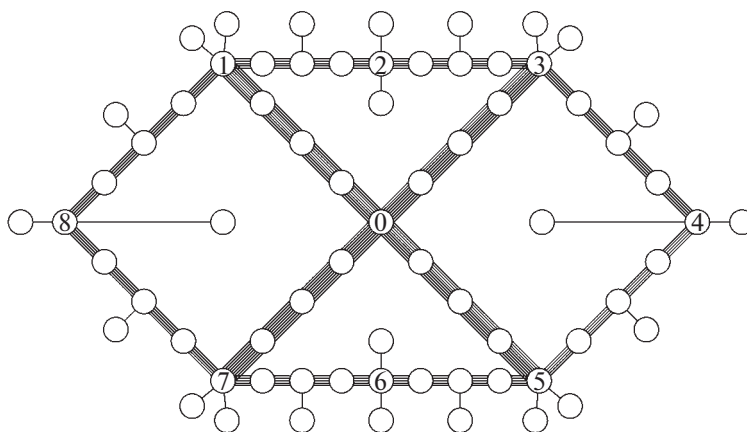


Рис. 3. Результирующие реберные загрузки в базовой сети

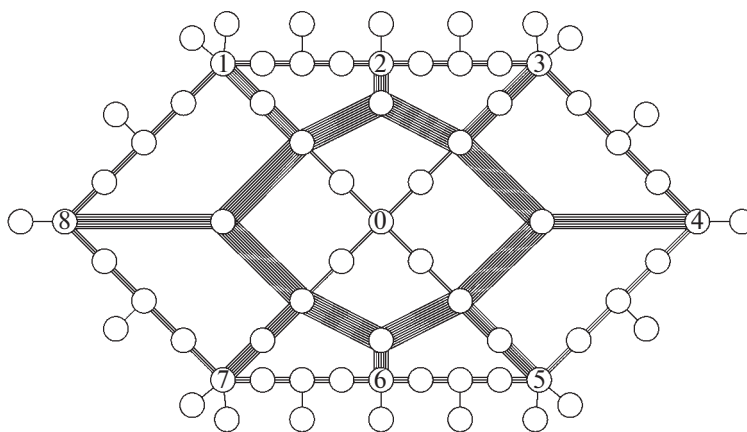


Рис. 4. Результирующие реберные загрузки в кольцевой сети

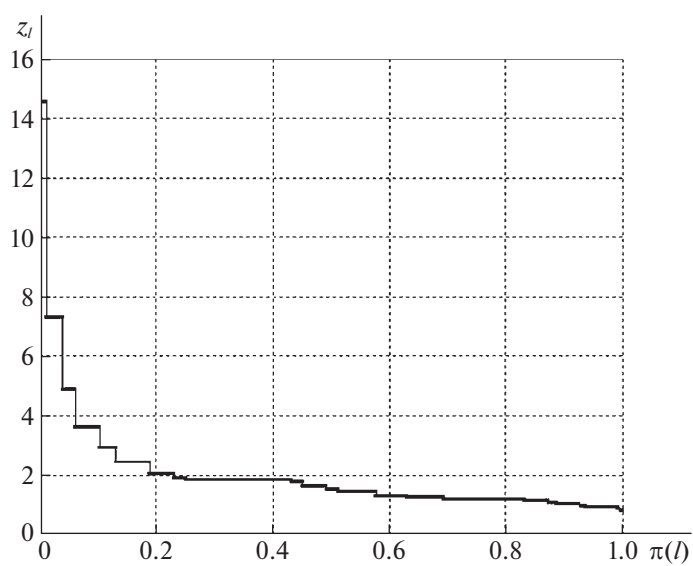


Рис. 5. Распределение межзловых потоков в базовой сети

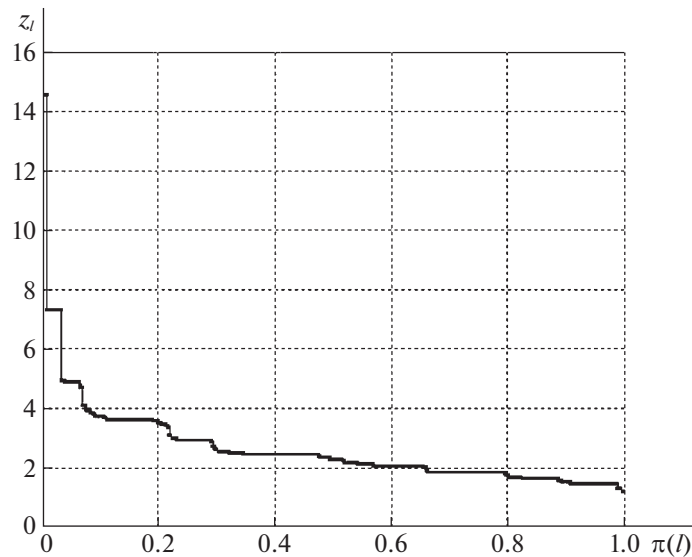


Рис. 6. Распределение межузловых потоков в кольцевой сети

Для полученных значений МР-нагрузок вычисляются межузловые потоки $z_m^*(1)$. Результирующие диаграммы представлены на рис. 5, 6. На них приведены значения z_l , $l = \overline{1, m}$, упорядоченные по величине от большего к меньшему. На вертикальной оси по невозрастанию откладываются z_l , а по горизонтальной указываются порядковые номера в данной упорядоченной последовательности:

$$\pi(l) = \frac{l}{m} \quad \text{для} \quad l = \overline{1, M},$$

где M — общее число элементов в множестве пар-корреспондентов P . Полученные результаты, представленные на рис. 5, 6 в виде диаграмм, свидетельствуют, что как суммарный, так и медианное значения межузлового потока на 50% больше в кольцевой сети при равных пропускных способностях в обеих сетях. Дело в том, что при вычислении максимального потока, а в дальнейшем при поиске равных нагрузок используются все пути, проходящие через минимальные сечения. В кольцевой сети маршруты соединения оказываются короче, чем в базовой для большого числа пар узлов, что уменьшает межузловые нагрузки и удельные затраты ресурсов. В базовой сети только 46 ребер пригодны для транзитной передачи, а в кольцевой — 58, что только на 25% больше, однако позволяет на 30% увеличить суммарный межузловой поток и более чем на 50% медианное значение. Величина суммы межузловых потоков в базовой и кольцевой сетях соответственно равны:

$$\sum_{m=1}^M z_m^*(1) = 9400, \quad \sum_{m=1}^M z_m^*(1) = 12400.$$

Значение медианы в базовой сети $z^- = 1.5$, в кольцевой $z^- = 2.3$.

Результаты расчетов на рис. 5, 6 показывают, что для 80% пар межузловые потоки близки к медианному значению, а для 20% — в несколько раз превышают его. Для пар узлов, кратчайший путь между которыми состоит из одного или двух ребер, межузловые потоки превышают медианное значение. Следует отметить, что при использовании *последовательного максимального* правила распределения потоков и нагрузок близко расположенные корреспонденты также оказываются в привилегированном положении и получают преимущество при *уравнительных* способах дележа [1, 3].

Результаты вычислительных экспериментов с использованием SFMC-процедуры для оценки РС-загрузок при равных межузловых потоках для всех пар корреспондентов представлены на рис. 7, 8 и в табл. 1. РС-загрузка ребер-«мостиков» составляет 1630 единиц, наибольшие значения достигаются на ребрах внутреннего кольца — 2230 единиц, а на внешнем не превышает 830.

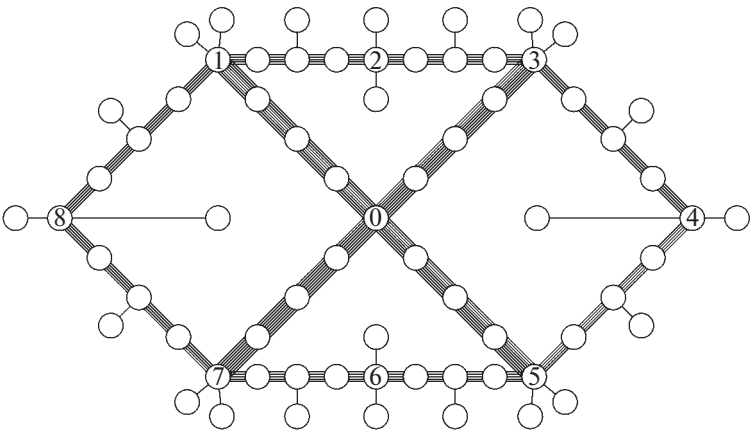


Рис. 7. Результирующие реберные загрузки в базовой сети

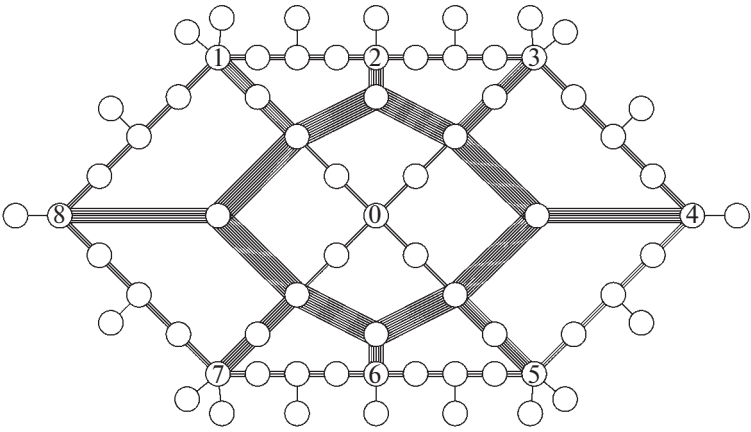


Рис. 8. Результирующие реберные загрузки в кольцевой сети

Напротив, в базовой сети основная РС-нагрузка – 1600 единиц – приходится на радиальные ребра, исходящие из центра, а на ребрах внешнего кольца не превышает 1270 единиц. В обеих сетях минимальная реберная нагрузка достигается на висячих ребрах: 210 единиц для базовой и 310 единиц для кольцевой. Указанные значения отвечают собственным информационным потокам, передаваемым из каждого узла без учета транзитных. Загрузки на ребрах внутреннего кольца на порядок превышают собственные потоки инцидентных узлов.

Результаты, представленные в таблице, свидетельствуют, что как суммарный, так и каждый отдельно взятый межузловой поток на 50% больше в кольцевой сети при равной суммарной пропускной способности обеих. Дело в том, что при поиске и передаче максимального потока

Таблица 1

Сеть	Базовая				Кольцевая			
	Значения		SFMC-стратегия	SFSR-стратегия	Значения		SFMC-стратегия	SFSR-стратегия
Медиана потоков	z^*	$z(y^*)$	z^{**}	$z(y^{**})$	z^*	$z(y^*)$	z^{**}	$z(y^{**})$
	1.54	1.5	1.85	1.82	2.26	2.3	2.5	2.4
Сумма межузловых потоков	7220	9390	8670	12810	10600	12400	11750	15650
Удельные затраты	9.5	7.3	7.9	5.3	6.4	5.5	5.8	4.4
Норма вектора РС-загрузок	9270	8940	9210	9000	9430	9380	9520	9160

используются все пути, проходящие через минимальные сечения. В кольцевой сети маршруты соединения короче (не длиннее) для многих пар узлов, что уменьшает транзитную загрузку и удельные затраты ресурсов. В базовой сети 46 ребер пригодны для транзитной передачи, а в кольцевой — 58, что только на 25% больше, однако при той же пропускной способности это позволяет увеличивать потоки на 50%.

Полученные значения медиан распределений потоков можно интерпретировать как представительные оценки функциональных возможностей сети в условиях неопределенности и равноправности корреспондентов. Все межузловые потоки, не превышающие медианных значений, можно передать в сети одновременно. Для последних наблюдается разброс для различных стратегий управления и правилах маршрутизации. Финальные потоки при предельных распределениях для 80% пар практически равны медианным, хотя средние показатели отличаются при равных нагрузках. Для 20% пар финальные значения при равных нагрузках значительно превышают медианные и средние показатели, что позволяет оценивать эффективность использования ресурсов при передаче однородных межузловых потоков в стационарном режиме. В рамках модели медианы можно трактовать как нормативные характеристики управления при работе сети в стационарном режиме при однородных нагрузках в заданном диапазоне.

Заключение. В работе изучались распределения межузловых потоков разных видов. Предполагалось, что для всех пар корреспондентов соответствующие потоки невзаимозаменяемы. Проводилась оценка допустимых межузловых потоков в сети при различных стратегиях управления. Анализировались достижимые значения потоков и нагрузок при уравнительном предельном распределении ресурсов.

Предложенный метод позволяет оценивать допустимые распределения межузловых потоков при изменении структуры сети. Построение нескольких путей соединения дает возможность анализировать нагрузку на сеть с учетом обходов для транзитных потоков. Полученные агрегированные показатели для потоков, проходящих через узлы сети, могут быть использованы при построении маршрутно-адресных таблиц, подготовке графиков обходов и замен (ГОЗ) для работы в аварийных режимах и в критически опасных повреждениях. Кроме того, описанная вычислительная схема позволяет производить оценку и сравнивать различные способы формирования сети, построенной на основе арендованных каналов связи при сохранении их общего числа. Изменение структуры при переходе от базовой к кольцевой значительно увеличивает межузловые потоки, хотя общее число арендуемых каналов совпадает в обеих сетях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения ресурсов в многопользовательской сети при равных межузловых нагрузках // Информатика и ее применения. 2023. Т. 33. № 1. С. 21–26.
2. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения потоков при предельной загрузке многопользовательской сети // Системы и средства информатики. 2022. Т. 32. № 3. С. 71–80.
3. Малащенко Ю.Е. Максимальные межузловые потоки при предельной загрузке многопользовательской сети // Информатика и ее применения, 2021. Т. 15. № 3. С. 24–28.
4. Salimifard K., Bigharaz S. The Multicommodity Network Flow Problem: State of the Art Classification, Applications, and Solution Methods // J. Oper. Res. Int. 2020. V. 22. Iss. 2. P. 1–47.
5. Ogryczak W., Luss H., Pioro M. et al. Fair Optimization and Networks: A Survey // J. Appl. Math. 2014. V. 3. P. 1–25.
6. Luss H. Equitable Resource Allocation: Models, Algorithms, and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
7. Balakrishnan A., Li G., Mirchandani P. Optimal Network Design with End-to-End Service Requirements // Oper. Res. 2017. V. 65. Iss. 3. P. 729–750.
8. Radunovic B., Le Boudec J.-Y. A Unified Framework for Max-Min and Min-Max Fairness With Applications // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2007. V. 15. Iss. 5. P. 1073–1083.
9. Nace D., Doan L.N., Klopfenstein O. et al. Max-min Fairness in Multicommodity Flows // Comput. Oper. Res. 2008. V. 35. Iss. 2. P. 557–573.
10. Baier G., Kohler E., Skutella M. The k-Splittable Flow Problem // Algorithmica. 2005. V. 42. Iss. 3–4. P. 231–248.

11. *Kabadurmus O., Smith A.E.* Multicommodity k-Splittable Survivable Network Design Problems with Relays // Telecommun. Syst. 2016. V. 62. Iss. 1. P. 123–133.
12. *Bialon P.* A Randomized Rounding Approach to a k-Splittable Multicommodity Flow Problem with Lower Path Flow Bounds Affording Solution Quality Guarantees // Telecommun. Syst. 2017. V. 64. Iss. 3. P. 525–542.
13. *Ramaswamy R., Orlin J.B., Chakravarti N.* Sensitivity Analysis for Shortest Path Problems and Maximum Capacity Path Problems in Undirected Graphs // Math. Prog. 2005. V. 102. Iss. 2. P. 355–369.
14. *Hajjem M., Bouziri H., Talbi E.-G.* A Metaheuristic Framework for Dynamic Network Flow Problems // Recent Developments in Metaheuristics. Operations Research/Computer Science Interfaces Series. V. 62. Cham: Springer, 2018. P. 285–304.
15. *Йенсен П., Барнес Д.* Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
16. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.
17. *Берж К.* Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.