

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 1, 2024

УСТОЙЧИВОСТЬ

- О частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических функционально-дифференциальных систем с последствием (запаздыванием)
В.И. Воротников, Ю.Г. Мартышенко 3

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

- Агрегирование многомерных консервативных систем с колебаниями
И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай 17

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

- Стохастические модели трудоемкости вычислительных задач. I. Принципы формирования, сбор статистических данных, задачи идентификации
А.В. Борисов, А.В. Иванов 22

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

- Оптимальный конечномерный регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. II. Стохастические измерения и теорема разделения
Е.А. Руденко 35

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Управление амплитудой колебаний систем с трением
Ю.Ф. Голубев 52
- Быстродействие гибридной модели машины Дубинса с однократным разделением объектов управления
А.С. Бортаковский, И.В. Урюпин 74

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

- Минимизация интегральной квадратичной оценки управляемой величины в системах с распределенными параметрами
Ю.Э. Плешивцева, Э.Я. Рапопорт 91

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

- Интерпретируемость обучения в системе обработки сигналов
А.А. Докукин, А.В. Кузнецова, Н.В. Окулов, О.В. Сенько, В.Я. Чучупал 107
- Планирование вычислений многопроцессорной системы в режиме реального времени
М.Г. Фуругян 122

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Моделирование динамики катамарана, приводимого в движение с помощью ротора Савониуса и гребного винта
М.А. Гарбуз, Л.А. Климина, В. А. Самсонов 131

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Интервальное оценивание в дискретных линейных системах с параметрическими неопределенностями
А.Н. Жирабок, А.В. Зувев, Ким Чхун Ир 139

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

- Объяснительный искусственный интеллект в анализе цифровых изображений на основе нейронных сетей глубокого обучения
А.Н. Аверкин, Е.Н. Волков, С.А. Ярушев 150

CONTENTS

Number 1, 2024

STABILITY

On partial stability in probability for nonlinear stochastic functional differential systems with aftereffect (delay)

V.I. Vorotnikov, Yu.G. Martyshenko

3

CONTROL IN DETERMINISTIC SYSTEMS

Aggregation of multidimensional conservative systems with oscillations

I.N. Barabanov, V.N. Tkhai

17

INFORMATION PROCESSING AND IDENTIFICATION

Stochastic models for time complexity of computing tasks: I. Development principles, statistical data mining, identification problems

Andrey V. Borisov, Alexey V. Ivanov

22

CONTROL IN STOCHASTIC SYSTEMS AND UNDER UNCERTAINTY

Optimal finite-dimensional controller of the stochastic differential object's state by its output.

II. Stochastic measurements and separation theorem

E.A. Rudenko

35

OPTIMAL CONTROL

Amplitude control of systems oscillations with friction

Yu.F. Golubev

52

Reserching performance of the dubins machine hybrid model with single separation of control objects

A.S. Bortakovskii, I.V. Uryupin

74

CONTROL OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Minimization of integral quadratic estimate of controlled variable in systems with distributed parameters

Yu.E. Pleshivtseva, E.Ya. Rapoport

91

COMPUTER METHODS

Interpretability of learning in a signal processing system

A. A. Dokukin, A. V. Kuznetsova, N.V. Okulov, O.V.Sen'ko, V. Ya. Chuchupal

107

Scheduling calculations for a multiprocessor system in real time

Furugyan M. G.

122

MATHEMATICAL MODELING

Modeling of the dynamics of a catamaran driven by a savonius rotor and a propeller

M.A. Garbuz, L.A. Klimina, V.A. Samsonov

131

SYSTEM ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

Interval estimation in discrete-time linear systems with parametric uncertainties

A. Zhirabok, A. Zuev, C. Kim

139

ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Explainable artificial intelligence in deep learning neural nets-based digital images analysis

A.N. Averkin, E.N. Volkov, S.A. Yarushev

150

УДК 62-50

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЗАПАЗДЫВАНИЕМ)

© 2024 г. В.И. Воротников^{a, *}, Ю.Г. Мартышенко^{b, **}

^aСочинский институт РУДН, Сочи, Россия

^bРоссийский государственный университет нефти и газа, Москва, Россия

*e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

**e-mail: j-mart@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

После доработки 07.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается система нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием), подверженных воздействию случайных процессов “белого” шума. Предполагается, что система допускает “частичное” (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача анализа устойчивости по вероятности данного положения равновесия, причем устойчивость рассматривается не по всем, а только по отношению к части определяющих это положение равновесия переменных. Для решения применяется стохастический вариант метода функционалов Ляпунова—Красовского при соответствующей конкретизации требований к функционалам. В целях расширения возможностей используемого метода также предлагается проводить корректировку области функционального пространства, в которой строятся вспомогательные функционалы Ляпунова—Красовского. Получены условия частичной устойчивости указанного вида. Приводятся примеры, показывающие особенности предложенного подхода.

Ключевые слова: система нелинейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в форме Ито, частичная устойчивость по вероятности, метод функционалов Ляпунова — Красовского

DOI: 10.31857/S0002338824010011, EDN: JBZAPQ

ON PARTIAL STABILITY IN PROBABILITY FOR NONLINEAR STOCHASTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (DELAY)

© 2024 V.I. Vorotnikov^{a, *}, Yu.G. Martyshenko^{b, **}

^aRUDN University, Sochi Institute, Sochi, Russia

^bGubkin University Oil and Gas, Moscow, Russia

* e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

** e-mail: j-mart@mail.ru

A system of nonlinear functional-differential equations with aftereffect (delay) subjected to random processes of “white” noise is considered. It is assumed that the system admits a “partial” (with respect to some part of the state variables) zero equilibrium position. The problem of stability in probability of a given equilibrium position is posed, and stability is considered not in all, but with respect to a part of the variables that determine this equilibrium position. For the solution of this problem, a stochastic version of the method of Lyapunov—Krasovskii functionals is used with the appropriated specification of the requirements for the functionals. In order to expend the capabilities of the method used, it is also proposed to correct the domain of the functional space in which auxiliary Lyapunov—Krasovskii functionals are constructed. Conditions for partial stability of this type are obtained. Examples are given that show the features of the proposed approach.

Keywords: stochastic functional differential system in Ito form, partial stability in probability, method of Lyapunov—Krasovskii functionals

Введение. Интерес к системам стохастических функционально-дифференциальных уравнений с последствием (запаздыванием) возникает тогда, когда в процессе математического моделирования необходимо учитывать одновременно эффекты эрeditарности (наследственности) и воздействия различных случайных факторов. В управляемых стохастических системах такая ситуация возникает, в частности, в случае фактически имеющего место или преднамеренного введения запаздывания в цепи обратной связи.

Задачи устойчивости относятся к практически важным задачам качественного анализа указанного класса систем. При этом в отечественной и зарубежной литературе главным образом анализируется задача устойчивости по отношению ко всем переменным нулевого положения равновесия; заменой переменных к такой задаче сводится задача устойчивости по всем переменным любого решения исходной системы. Основным методом исследования является прямой метод Ляпунова. Один из конструктивных вариантов этого метода разработан в [1—4]: стохастический вариант метода функционалов Ляпунова—Красовского. Анализируется два основных вида устойчивости: по вероятности (стохастическая устойчивость) и устойчивость в среднеквадратическом. В основе указанного метода лежат функциональная трактовка решений рассматриваемого класса систем, а также возможность представления используемых функционалов Ляпунова—Красовского в виде функции конечного числа переменных, для которой допустимо применение классической формулы Ито. Дальнейшее развитие метода возможно [5—8] с помощью функционалов более общего вида и разработки функционального аналога формулы Ито [9].

Для многих современных исследований наряду с задачами устойчивости по всем переменным важную роль также играют более общие задачи *частичной устойчивости*, изучение которых в значительной степени инициировала статья В.В. Румянцева [10] (см., например, обзор [11]). В рамках этих задач анализируются: устойчивость не по всем, а только по отношению к части переменных нулевого положения равновесия, и устойчивость по всем и по части переменных “частичного” (нулевого) положения равновесия как детерминированных, так и стохастических систем различной формы описания. Как и при изучении устойчивости по всем переменным, основным методом решения является прямой метод Ляпунова в соответствующей модификации. Применительно к классу систем стохастических функционально-дифференциальных уравнений для анализа задачи устойчивости по части переменных, наряду с методом функций Ляпунова [12, 13], используется подход, разработанный в научной школе Н.В. Азбелева [14, 15].

Предлагаемая в данной статье постановка задачи частичной устойчивости по вероятности и подход к ее решению на основе метода функционалов Ляпунова—Красовского дополняет круг указанных исследований. Далее рассматривается система нелинейных нестационарных функционально-дифференциальных уравнений с последствием (запаздыванием) общего вида, подверженных воздействию взаимно независимых случайных процессов “белого” шума. Предполагается, что система допускает “частичное” (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача устойчивости по вероятности этого положения равновесия; устойчивость рассматривается не по всем, а только по отношению к части определяющих его переменных. Для расширения возможностей используемого метода исследования также предлагается проводить корректировку области функционального пространства, в которой строятся вспомогательные функционалы. Допускаются выполненными квазилокальное условие Коши—Липшица и условие “линейного роста”, гарантирующие существование и единственность сильных “глобальных” решений изучаемой системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Получены условия частичной устойчивости указанного вида.

1. Постановка задачи. Пусть $\tau > 0$ — заданное число, R^n — линейное пространство n -мерных векторов x с евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (x_i — i -я компонента вектора x), $R_+ = [0, +\infty)$. Сделаем разбиение $x = (y^T, z^T)^T$ (T — знак транспонирования) вектора x на две части, где $y \in R^m$, $z \in R^{n-m}$ ($1 \leq m < n$). Если $t_0, \beta \in R_+$ и $\beta > t_0$, то для вектор-функции $x(t): [t_0 - \tau, \beta) \rightarrow R^n$ определим вектор-функцию $x_t = x(t + \theta)$ при $\theta \in [-\tau, 0]$ (отображение $\theta \mapsto x(t + \theta)$ при каждом фиксированном значении t) и сделаем разбиение $x_t = (y_t^T, z_t^T)^T$.

Допустим, что $w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_r(t)]^T$ — r -мерный случайный процесс, компоненты которого являются независимыми между собой одномерными стандартными винеровскими процессами, определенные при $t \in R_+$ на вероятностном пространстве (Ω, F, P) ; Ω — пространство элементарных событий $\{\omega\}$ с заданными на нем σ -алгеброй F измеримых множеств с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и вероятностной мерой $P: F \rightarrow [0, 1]$.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему стохастических функционально-дифференциальных уравнений в форме Ито [1–4, 16, 17]:

$$dx(t) = X(t, x_t)dt + \sum_{k=1}^r \sigma_k(t, x_t)dw_k(t),$$

которую с учетом указанного разбиения фазового вектора представим в виде

$$\begin{aligned} dy(t) &= Y(t, y_t, z_t)dt + \sum_{k=1}^r \sigma_{ky}(t, y_t, z_t)dw_k(t), \\ dz(t) &= Z(t, y_t, z_t)dt + \sum_{k=1}^r \sigma_{kz}(t, y_t, z_t)dw_k(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Система (1.1) относится к классу систем функционально-дифференциальных уравнений с последствием (запаздыванием): вектор-функции y_t, z_t в правой части задают компоненты y, z вектора состояния x как функции запаздывающего аргумента $t + \theta, \theta \in [-\tau, 0]$; число $\tau > 0$ определяет величину запаздывания.

Рассмотрим пространство C непрерывных вектор-функций $\varphi(\theta): [-\tau, 0] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max |\varphi(\theta)|, \theta \in [-\tau, 0]$ и допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) операторы сноса $X = X(t, \varphi): R_+ \times C \rightarrow R^n$ и диффузии $\sigma_k = \sigma_k(t, \varphi): R_+ \times C \rightarrow R^n$ непрерывны в области $R_+ \times C$;
- 2) для каждого $I = 1, 2, \dots$ существуют постоянные $K_I > 0$, такие, что для всех $t \geq 0, \varphi_1, \varphi_2 \in C$, для которых $\max (\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|) \leq I$, имеют место неравенства (локальное условие Коши–Липшица в форме [17], называемое также квазилокальным условием [18])

$$|X(t, \varphi_2) - X(t, \varphi_1)| \leq K_I \|\varphi_2 - \varphi_1\|, \quad |\sigma_k(t, \varphi_2) - \sigma_k(t, \varphi_1)| \leq K_I \|\varphi_2 - \varphi_1\|;$$

- 3) в области $R_+ \times C$ существует постоянная $M > 0$, такая, что (условие “линейного роста”)

$$|X(t, \varphi)| \leq M(1 + \|\varphi\|), \quad |\sigma_k(t, \varphi)| \leq M(1 + \|\varphi\|).$$

Пусть H_0 — пространство F_0 -измеримых вектор-функций $\xi = \xi(\theta): [-\tau, 0] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\xi\| = \sup |\xi(\theta)|, \theta \in [-\tau, 0]$, траектории которых с вероятностью 1 ограничены и непрерывны.

При сделанных предположениях для всех $t_0 \geq 0, x_0 = \xi \in H_0$ существует [17] единственный непрерывный почти наверное случайный многомерный процесс $x(t_0, \xi)$, согласованный с потоком σ -алгебр $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и являющийся сильным решением системы (1.1); при этом система (1.1) понимается как запись соответствующей системы Ито в интегральной форме. Более того, $E[\sup |x(r, \xi)|^2] < \infty$ при $r \in [-\tau, t], t \geq 0$, где E — оператор математического ожидания по отношению к вероятностной мере \mathbf{P} . Обозначим через $x(t) = x(t; t_0, \xi)$ значения случайной вектор-функции $x(t_0, \xi)$ в момент времени t .

Проводя в пространстве C разбиение $\varphi = (\varphi_y^T, \varphi_z^T)^T$, соответствующее разбиению $x = (y^T, z^T)^T$ фазового вектора x , рассмотрим множество $M = \{\varphi \in C: \varphi_y = \mathbf{0}\}$. Если $Y(t, \varphi) \equiv \mathbf{0}$ при $\varphi \in M$, то решение $x(t_0, \xi)$ системы (1.1) с вероятностью 1 удовлетворяет условию $\|y_t(t_0, \xi)\| \equiv 0$. Другими словами, множество $y_t = \mathbf{0}$ есть “частичное” положение равновесия системы (1.1), являющееся (при сделанном предположении о единственности решений) инвариантным множеством этой системы.

Следуя подходу теории частичной устойчивости, будем анализировать устойчивость “частичного” положения равновесия $y_t = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед заданной части. Для этого предположим, что $y = (y_1^T, y_2^T)^T$, причем вектор y_1 включает те компоненты вектора y , устойчивость по отношению к которым изучается. Для расширения функциональных возможностей рассматриваемых далее понятий y_1 -устойчивости “частичного” положения равновесия $y_t = \mathbf{0}$ введем также произвольным образом разбиение $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ вектора z “неконтролируемых” переменных

на две группы переменных. Указанным разбиениям векторов \mathbf{y} и \mathbf{z} поставим в соответствие разбиения на две части компонент $\xi_{\mathbf{y}}$ и $\xi_{\mathbf{z}}$ начальной вектор-функции: $\xi_{\mathbf{y}} = (\xi_{y1}^T, \xi_{y2}^T)^T$ и $\xi_{\mathbf{z}} = (\xi_{z1}^T, \xi_{z2}^T)^T$. Обозначим через S_{δ} область в H_0 , такую, что $\{\xi \in H_0: \|\xi_{\mathbf{y}}\| < \delta, \|\xi_{z1}\| \leq L, \|\xi_{z2}\| < \infty\}$, где δ — достаточно малое, а L — любое наперед заданное положительные числа; $\|\xi_{\mathbf{y}}\| = \sup |\xi_{y_i}(\theta)|$, $\|\xi_{z_i}\| = \sup |\xi_{z_i}(\theta)|$ ($i = 1, 2$), $\theta \in [-\tau, 0]$.

Рассматриваемые далее понятия устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) основаны на допущении, что для любой начальной вектор-функции $\mathbf{x}_0 = \xi \in H_0$ с вероятностью 1 имеет место включение $\xi \in S_{\delta}$. Поэтому по аналогии с детерминированным случаем [19—21] в данном случае можно говорить об устойчивости при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} (for a large values of ξ_{z1} and on the whole with respect to ξ_{z2}).

Определение 1. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} , если для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, t_0, L) > 0$, такое, что для любой начальной вектор-функции $\mathbf{x}_0 = \xi \in H_0$, удовлетворяющей условию $\mathbf{P}\{\xi \in S_{\delta}\} = 1$, при всех $t \geq t_0$ следует неравенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \geq t_0} |\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)| > \varepsilon\} < \gamma. \quad (1.2)$$

Определение 2. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} , если в определении \mathbf{y}_1 -устойчивости $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.

Ставится задача нахождения условий \mathbf{y}_1 -устойчивости по вероятности (при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) в контексте метода функционалов Ляпунова—Красовского.

Сформулированная задача представляет интерес как задача анализа системы (1.1), но может использоваться и для решения соответствующей задачи частичной стабилизации этой системы посредством приложения управляющих воздействий. Кроме того, указанная задача может рассматриваться также как вспомогательная при анализе устойчивости по отношению ко всем переменным “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) при соответствующем обобщении и развитии задачи частичной детектируемости. Подобный подход использовался для детерминированных функционально-дифференциальных систем с последствием [21]. Отметим, что задачи частичной стабилизации и частичной детектируемости динамических систем различной формы описания относятся к актуальным задачам современной нелинейной теории управления [22—24].

Замечание 1. В отличие от локального условия Коши—Липшица, условие “линейного роста” применительно к правой части системы (1.1) является ограничительным во многих случаях. Однако это условие можно заменить более слабыми условиями, которые формулируются в виде требований к вспомогательным функциям Ляпунова или функционалам Ляпунова—Красовского [2, 16, 17].

Замечание 2. Введенные понятия частичной устойчивости опираются на соответствующие понятия стохастической устойчивости по отношению ко всем переменным, предложенные в [1, 2]. Наиболее близкими являются понятия частичной устойчивости: по отношению ко всем [25, 26] и по части переменных [27] “частичного” положения равновесия систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, детерминированных систем обыкновенных дифференциальных [28, 29] и функционально-дифференциальных уравнений с последствием [20, 21], а также систем дискретных (конечно-разностных) уравнений [30, 31]. Предположения “в целом по $\xi_{\mathbf{z}}$ ” или “при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}}$ ” характерны для определений устойчивости (по всем и по части переменных) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1), но приводят к различным требованиям к функционалам Ляпунова—Красовского. За счет разделения $\xi_{\mathbf{z}} = (\xi_{z1}^T, \xi_{z2}^T)^T$ вектор-функции $\xi_{\mathbf{z}}$ на две части возникают “промежуточные” понятия \mathbf{y}_1 -устойчивости в смысле введенных определений 1, 2. При этом надлежащий выбор указанного разделения определяется конкретной структурой рассматриваемой системы (1.1) и является результатом поиска компромисса между содержательным смыслом используемого понятия \mathbf{y}_1 -устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ и требованиями к функционалам Ляпунова—Красовского.

2. Условия частичной устойчивости по вероятности. В контексте метода функционалов Ляпунова—Красовского рассмотрим однозначные, непрерывные функционалы $V = V(t, \psi): R_+ \times C \rightarrow R_+$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные на любой вектор-функции $\psi \in H_0$ в области

$$t \geq 0, \|\psi_{y_1}\| < h, \|\psi_{y_2}\| + \|\psi_z\| < \infty. \quad (2.1)$$

Разбиение $\psi = (\psi_{y_1}^T, \psi_{y_2}^T, \psi_z^T)^T$ соответствует сделанному разбиению $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \mathbf{z}^T)^T$ фазового вектора \mathbf{x} ; $\|\psi_{y_i}\| = \sup |\psi_{y_i}(\theta)|$ ($i = 1, 2$), $\|\psi_z\| = \sup |\psi_z(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Подставим в функционал $V(t, \psi)$ вектор-функцию $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(t_0, \xi)$, определяющую элемент траектории системы (1.1) в текущий момент времени $t \geq t_0$. Аналогом производной функционала в силу исследуемой системы (1.1) стохастических функционально-дифференциальных уравнений является ассоциированный с этой системой дифференциальный производящий оператор (усредненная производная)

$$\mathbf{L}V(t, \psi) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \{ \mathbf{E}_{t, \psi} [V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta}(t_0, \xi))] - V(t, \psi) \},$$

где оператор $\mathbf{E}_{t, \psi} [V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta})]$ определяет условное математическое ожидание при $\mathbf{x}_{t+\delta} = \psi$ случайной величины $V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta})$, порожденной набором реализаций $\{\mathbf{x}(t_0, \xi, \omega), \mathbf{w}(t, \omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(t_0, \xi), \mathbf{w}(t)\}$, являющегося решением системы (1.1).

Можно выделить класс функционалов, для которых указанный оператор конструктивно вычисляется. Для этого представим произвольный функционал $V = V(t, \psi)$ в виде $V = V(t, \psi(0), \psi(\theta))$, $\theta < 0$, и положим [2—4]:

$$V_\psi(t, \mathbf{x}) = V(t, \psi) = V(t, \mathbf{x}_t) = V(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t + \theta)),$$

$$\psi = \mathbf{x}_r, \theta < 0, \mathbf{x} = \psi(0) = \mathbf{x}(t).$$

Предположим, что функция $V_\psi(t, \mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема по \mathbf{x} и имеет ограниченную производную по t при почти всех $t \in R_+$. Тогда для выделенного класса функционалов имеет место функциональный аналог классической формулы Ито [2—4]:

$$\mathbf{E}[V(t, \mathbf{x}_t) - V(s, \mathbf{x}_s)] = \int_s^t \mathbf{E}[\mathbf{L}V(r, \mathbf{x}_r)] dr,$$

$$\mathbf{L}V(t, \psi) = \frac{\partial V_\psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_\psi(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(t, \mathbf{x}) + 0.5 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V_\psi(t, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T = (\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T)^T, \boldsymbol{\sigma}_k = (\boldsymbol{\sigma}_{yk}^T, \boldsymbol{\sigma}_{zk}^T)^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_r), \{a_{ij}(t, \mathbf{x})\} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T.$$

Для формулировки условий частичной устойчивости введем разбиение $\psi_z = (\psi_{z_1}^T, \psi_{z_2}^T)^T$ вектор-функции ψ_z , отвечающее сделанному разбиению $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)^T$ компоненты \mathbf{z} фазового вектора \mathbf{x} . Дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функционалы и функции.

1. Непрерывные в области (2.1) функционалы $V^*(t, \psi_y, \psi_{z_1}), V^*(\psi_y, \psi_{z_1})$, необходимые для конкретизации (в соответствии с постановкой задачи) требований к основному V -функционалу Ляпунова—Красовского, и непрерывная в области (2.1) вспомогательная векторная, вообще говоря, функция $\boldsymbol{\mu}(t, \psi): R_+ \times H_0 \rightarrow R^l$ ($l \geq 1$), $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой корректируется область функционального пространства, где строится основной V -функционал. Определим $\|\boldsymbol{\mu}(t, \psi)\| = \sup |\boldsymbol{\mu}(t, \psi(\theta))|$ ($\theta \in [-\tau, 0], t \in R_+$).

2. Непрерывная монотонно возрастающая по $r > 0$ скалярная функция $a(r): R_+ \rightarrow R_+$, $a(0) = 0$ (функция типа Хана [32]), определяющая стандартные требования к V -функционалу.

Введение наряду с V -функционалом Ляпунова—Красовского вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(t, \psi)$ -функции мотивируется следующим обстоятельством. При исследовании \mathbf{y}_1 -устойчивости

по вероятности “частичного” положения равновесия $y_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) в общем случае имеет место зависимость V -функционала Ляпунова—Красовского не только от t , Ψ_{y_1} , но и от Ψ_{y_2} , Ψ_z . Ситуация аналогична той, что имеет место для функций Ляпунова в задаче устойчивости по части переменных для систем обыкновенных дифференциальных, стохастических, а также дискретных уравнений (см. например, работы [19, 31, 32]).

В результате анализ y_1 -устойчивости в обычно рассматриваемой области

$$\|\Psi_{y_1}\| < h_1 < h, \quad \|\Psi_{y_2}\| + \|\Psi_z\| < \infty \quad (2.2)$$

функционального пространства не всегда дает возможность выявить желаемые свойства V -функционала или наделять его этими свойствами. Целесообразно перейти к описанию V -функционала в более узкой области:

$$\|\Psi_{y_1}\| + \|\mu(t, \Psi)\| < h_1 < h, \quad \|\Psi_{y_2}\| + \|\Psi_z\| < \infty, \quad (2.3)$$

если иметь в виду, что фактически y_1 -устойчивость “частичного” положения равновесия $y_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) означает выполнение требуемых вероятностных оценок вида (1.2) не только для компонент вектора y_1 , но и для компонент некоторой $\mu(t, x)$ -функции фазовых переменных системы (1.1). Указанную $\mu(t, x)$ -функцию не всегда возможно указать заранее. Поэтому соответствующую ей $\mu(t, \Psi)$ -функцию в функциональном пространстве $R_+ \times H_0$ естественно трактовать как дополнительную векторную функцию, которая (как и сам подходящий функционал Ляпунова—Красовского) определяется в процессе решения исходной задачи y_1 -устойчивости.

Таким образом, выбор подходящего V -функционала Ляпунова—Красовского не только возможен, но и его целесообразно согласовывать с выбором области функционального пространства, в которой функционал строится. Этого можно добиться введением наряду с V -функционалом *дополнительной* вспомогательной $\mu(t, \Psi)$ -функции для соответствующей корректировки области функционального пространства.

Теорема 1. Допустим, что для системы (1.1) наряду с V -функционалом Ляпунова—Красовского $V = V(t, \Psi)$ можно указать векторную функцию $\mu(t, \Psi)$, $\mu(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при всех $t \geq 0$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) выполняются следующие условия:

$$V(t, \Psi) \geq a(|\Psi_{y_1}(0)| + |\mu(t, \Psi(0))|), \quad (2.4)$$

$$V(t, \Psi) \leq V^*(t, \Psi_y, \Psi_{z1}), \quad V^*(t, \mathbf{0}, \Psi_{z1}) \equiv 0, \quad (2.5)$$

$$LV(t, \Psi) \leq 0. \quad (2.6)$$

Тогда “частичное” положение равновесия $y_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} .

Теорема 2. Если условия (2.5) заменить условиями

$$V(t, \Psi) \leq V^*(\Psi_y, \Psi_{z1}), \quad V^*(\mathbf{0}, \Psi_{z1}) \equiv 0, \quad (2.7)$$

то “частичное” положение равновесия $y_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} .

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в Приложении.

Замечание 3. В теоремах 1 и 2 рассматриваемый V -функционал Ляпунова—Красовского и ассоциированный с системой (1.1) дифференциальный производящий оператор $LV(t, \Psi)$ являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области (2.2). Наряду с V -функционалом вспомогательная μ -функция вводится для наиболее рациональной замены области (2.2) областью (2.3). Условия (2.5) и (2.7) позволяют выделить *допустимую структуру* используемого V -функционала, которая определяется спецификой (при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}) поставленной задачи частичной устойчивости; в этих условиях допускается

произвольный непрерывный V^* -функционал, удовлетворяющий соответственно условию $V^*(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{z1}) \equiv 0$ или $V^*(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{z1}) \equiv 0$, ограничивающий V -функционал сверху. Условия (2.5) являются “промежуточными” между менее ограничительным условием $V(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_z) \equiv 0$ и более ограничительными условиями $V(t, \boldsymbol{\psi}) \leq V^*(t, \boldsymbol{\psi}_y)$, $V^*(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, при выполнении которых “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) соответственно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_z или \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности в целом по ξ_z ; аналогичное утверждение касается также и условий (2.7).

Замечание 4. В рамках предложенного подхода нелинейные V -функционалы Ляпунова—Красовского могут быть построены как знакоопределенные *квадратичные* функционалы (или функционалы более высокого порядка) $V(t, \boldsymbol{\psi}) \equiv V^*(t, \boldsymbol{\psi}_{y1}, \boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}))$, определенные на вектор-функциях $\boldsymbol{\psi}_{y1}$ и $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$. При этом выбор $\boldsymbol{\mu}$ -функций должен быть согласован с условиями (2.5) и (2.7): допустимы, например, $\boldsymbol{\mu}$ -функции вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\psi}_{y2}, \boldsymbol{\psi}_{z1})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{z1}) \equiv \mathbf{0}$.

Замечание 5. При отсутствии последействия в системе (1.1) теоремы 1 и 2 переходят в соответствующие результаты для систем стохастических уравнений с непрерывной [27] и дискретной [31] динамикой, а в случае $w_k(t) \equiv 0$ получаем соответствующие результаты для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных [28, 29], дискретных (конечно-разностных) [30] и функционально-дифференциальных [19, 21] уравнений. Если система (1.1) допускает “полное” положение равновесия $\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$, то в случае $w_k(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}) \equiv \mathbf{0}$, а также при предположении $\|\xi\| < \delta$, при выполнении условий (2.4), (2.6) имеем функционально-дифференциальный вариант (см. [19, 32]) классической теоремы В.В. Румянцева [10, 11] об устойчивости по отношению к части переменных.

Замечание 6. Возможности использования метода функций Ляпунова для анализа задач частичной устойчивости (стабилизации) систем стохастических дифференциальных уравнений Ито анализировались в ряде публикаций [33—43], в том числе с учетом случайной структуры таких систем [38—40].

3. Примеры. Рассмотрим примеры, показывающие особенности предложенного подхода к анализу частичной устойчивости системы (1.1).

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= [ay_1(t) + ly_2(t - \tau_1)z_1(t - \tau_1)]dt + \alpha y_1(t - \tau_2)dw_1(t), \\ dy_2(t) &= [b + dy_1(t)]y_2(t)dt, \\ dz_1(t) &= [c + ey_1(t)]z_1(t)dt, \quad dz_2(t) = Z_2(t, \mathbf{x}_t)dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ — постоянные, определяющие дискретно входящие запаздывания; a, b, c, d, e, l, α — постоянные параметры. Система (3.1) является частным случаем системы (1.1), в которой $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$; оператор Z_2 удовлетворяет общим требованиям к системе (1.1).

Система (3.1) допускает “частичное” положение равновесия

$$y_{1t} = y_{2t} = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим V -функционал Ляпунова—Красовского ($\beta = \text{const} > 0$)

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\psi}) &= 0.5[\boldsymbol{\psi}_{y1}^2(0) + \boldsymbol{\psi}_{y2}^2(0)\boldsymbol{\psi}_{z1}^2(0)] + \\ &+ \beta \int_{-\tau_1}^0 \boldsymbol{\psi}_{y2}^2(\theta)\boldsymbol{\psi}_{z1}^2(\theta)d\theta + 0.5\alpha^2 \int_{-\tau_2}^0 \boldsymbol{\psi}_{y1}^2(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

и вспомогательную скалярную μ_1 -функцию вида

$$\mu_1(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi}_{y2}\boldsymbol{\psi}_{z1}. \quad (3.4)$$

Имеют место соотношения

$$0.5[\boldsymbol{\psi}_{y1}^2(0) + \mu_1^2(0)] \leq V(\boldsymbol{\psi}) = V^*(\boldsymbol{\psi}_{y1}, \boldsymbol{\psi}_{y2}, \boldsymbol{\psi}_{z1}), \quad V^*(0, 0, \boldsymbol{\psi}_{z1}) \equiv 0.$$

Для V -функционала Ляпунова—Красовского (3.3) в области (2.3) выполняются условия (2.4) и (2.7), а ассоциированный с системой (3.1) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) &= \psi_{y_1}(0)[a\psi_{y_1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y_1}(0)\mu_1(0)] + \\ &+ 0.5\alpha^2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + \beta[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau_2)] = \\ &= (a + 0.5\alpha^2)\psi_{y_1}^2(0) + l\psi_{y_1}(0)\mu_1(-\tau_1) - \beta\mu_1^2(-\tau_1) + (b+c+\beta)\mu_1^2(0) + (d+e)\psi_{y_1}(0)\mu_1^2(0). \end{aligned}$$

В процессе вычислений использованы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) &= \mathbf{L}V^*(t, \boldsymbol{\psi}) = 0.5[\psi_{y_1}^2(0) + \mu_1^2(0)] + \beta \int_{t-\tau_1}^t \mu_1^2(\theta) d\theta + 0.5\alpha^2 \int_{t-\tau_2}^t \psi_{y_1}^2(\theta) d\theta, \\ \frac{\partial V_{\boldsymbol{\psi}}(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= \beta[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau_2)], \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{\boldsymbol{\psi}}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(t, \mathbf{x}) &= \psi_{y_1}(0)[a\psi_{y_1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1^2(0)[(b+c) + (d+e)\psi_{y_1}(0)], \\ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V_{\boldsymbol{\psi}}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, \mathbf{x}) &= \alpha^2\psi_{y_1}^2(-\tau_2), \\ \mu_1(0) &= \psi_{y_2}(0)\psi_{z_1}(0), \mu_1(-\tau_i) = \psi_{y_2}(-\tau_i)\psi_{z_1}(-\tau_i) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$ будет иметь место, если $2a + \alpha^2 \leq 0$, $2(2a + \alpha^2)\beta + l^2 \leq 0$, $b + c + \beta \leq 0$.

Пусть параметры системы (3.1) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0, \quad 2(2a + \alpha^2)(b + c) > l^2. \quad (3.5)$$

Полагая $\beta = -(b+c) - \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$) в V -функционале (3.3), заключаем, что в данном случае при достаточно малых ε и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров d , e и при любых постоянных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$. Значит, для V -функционала Ляпунова—Красовского (3.3) в области (2.3) помимо условий (2.4), (2.7) также верно условие (2.6).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (3.5) “частичное” положение равновесия (3.2) системы (3.1) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z_1} в целом по ξ_{z_2} .

Отметим, что ассоциированный с системой (3.1) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ в области (2.2) является *знакопеременным*.

Заменим первое уравнение системы (3.1) уравнением

$$dy_1(t) = [a + ly_2(t - \tau_1)z_1(t - \tau_1)]y_1(t)dt + \alpha y_1(t - \tau_2)dw_1(t),$$

а остальные уравнения этой системы оставим без изменения.

Для анализа устойчивости “частичного” положения равновесия (3.2) данной системы также рассмотрим V -функционал Ляпунова—Красовского (3.3) и вспомогательную μ_1 -функцию вида (3.4). В данном случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) &= \psi_{y_1}(0)[a + l\mu_1(-\tau_1)]\psi_{y_1}(0) + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y_1}(0)\mu_1(0)] + \\ &+ \beta[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + 0.5\alpha^2[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau_2)] = \\ &= (a + 0.5\alpha^2)\psi_{y_1}^2(0) + (b+c+\beta)\mu_1^2(0) - \beta\mu_1^2(-\tau_1) + l\psi_{y_1}^2(0)\mu_1(-\tau_1) + (d+e)\psi_{y_1}(0)\mu_1^2(0). \end{aligned}$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$ будет выполнено, если $2a + \alpha^2 \leq 0$, $b + c + \beta \leq 0$. Поэтому, полагая $\beta = \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$) в V -функционале (3.3), заключаем, что если параметры рассматриваемой системы удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 \leq 0, \quad b + c < 0, \quad (3.6)$$

то при достаточно малых ε и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров l, d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$. Таким образом, при выполнении условий (3.6) “частичное” положение равновесия (3.2) рассматриваемой системы равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z_1} в целом по ξ_{z_2} .

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dy_1(t) &= [a + ly_2(t - \tau_1)z_1(t - \tau_1)]y_1(t)dt + \alpha y_1(t - \tau_2)dw_1(t), \\ dy_2(t) &= [b + dy_1(t - \tau_2)]y_2(t)dt, \\ dz_1(t) &= [c + ey_1(t - \tau_2)]z_1(t)dt, \quad dz_2(t) = Z_2(t, \mathbf{x}_t)dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для анализа устойчивости “частичного” положения равновесия (3.2) используем V -функционал Ляпунова—Красовского ($\beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0$)

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\psi}) &= 0.5[\psi_{y_1}^2(0) + \psi_{y_2}^2(0)\psi_{z_1}^2(0)] + \\ &+ \beta_1 \int_{-\tau_1}^0 \psi_{y_2}^2(\theta)\psi_{z_1}^2(\theta)d\theta + (0.5\alpha^2 + \beta_2) \int_{-\tau_2}^0 \psi_{y_1}^2(\theta)d\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

и вспомогательную μ_1 -функцию вида (3.4).

Для V -функционала (3.8) в области (2.3) выполняются условия (2.4) и (2.7), а ассоциированный с системой (3.7) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) &= \psi_{y_1}(0)[a + l\mu_1(-\tau_1)]\psi_{y_1}(0) + \mu_1(0)[(b + c)\mu_1(0) + (d + e)\psi_{y_1}(-\tau_2)\mu_1(0)] + \\ &+ \beta_1[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + (0.5\alpha^2 + \beta_2)[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau_2)] = \\ &= (a + 0.5\alpha^2 + \beta_2)\psi_{y_1}^2(0) + (b + c + \beta_1)\mu_1^2(0) - \beta_1\mu_1^2(-\tau_1) - \beta_2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + \\ &+ l\psi_{y_1}^2(0)\mu_1(-\tau_1) + (d + e)\psi_{y_1}(-\tau_2)\mu_1^2(0). \end{aligned}$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$ будет иметь место в случае $a + 0.5\alpha^2 + \beta_2 \leq 0$, $b + c + \beta_1 \leq 0$. Поэтому, полагая $\beta_i = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \text{const} > 0, i = 1, 2$) в V -функционале (3.8), заключаем, что если параметры системы (3.7) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0, \quad b + c < 0, \quad (3.9)$$

то при достаточно малых ε_i и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров l, d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$. Значит при выполнении условий (3.9) “частичное” положение равновесия (3.2) системы (3.7) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z_1} в целом по ξ_{z_2} .

Заменим первое уравнение системы (3.7) уравнением

$$dy_1(t) = [ay_1(t) + ly_2(t - \tau_1)z_1(t - \tau_1)]dt + \alpha y_1(t - \tau_1)dw_1(t),$$

а остальные уравнения этой системы оставим без изменения.

Для V -функционала (3.8) в данном случае имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) &= \psi_{y_1}(0)[a\psi_{y_1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y_1}(-\tau_2)\mu_1(0)] + \\ &+ \beta_1[\mu_1^2(0) - \mu_1^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + (0.5\alpha^2 + \beta_2)[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau_2)] = \\ &= (a + 0.5\alpha^2 + \beta_2)\psi_{y_1}^2(0) + l\psi_{y_1}(0)\mu_1(-\tau_1) - \beta_1\mu_1^2(-\tau_1) + \\ &+ (b+c+\beta_1)\mu_1^2(0) - \beta_2\psi_{y_1}^2(-\tau_2) + (d+e)\psi_{y_1}(-\tau_2)\mu_1^2(0). \end{aligned}$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$ будет выполнено, если $a + 0.5\alpha^2 + \beta_2 \leq 0$, $2(2a + \alpha^2 + 2\beta_2)\beta_1 + l^2 \leq 0$, $b + c + \beta_1 \leq 0$. Поэтому, полагая $\beta_i = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$), заключаем, что если параметры системы (3.7) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0, \quad 2(2a + \alpha^2)(b + c) > l^2, \quad (3.10)$$

то при достаточно малых ε_i и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \leq 0$. Таким образом, при выполнении условий (3.10) “частичное” положение равновесия (3.2) рассматриваемой системы равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z_1} в целом по ξ_{z_2} .

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{y}_1(t) &= (B - C)y_2(t)z_1(t) + u_1 + v_1, \\ B\dot{y}_2(t) &= (C - A)y_1(t)z_1(t), \quad C\dot{z}_1(t) = (A - B)y_1(t)y_2(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$u_1 = [a + \alpha_1\dot{w}_1(t)]y_1(t) \quad (a = \text{const} < 0), \quad v_1 = [b(t) + \alpha_2\dot{w}_2(t)]y_1(t - \tau),$$

которые определяют вращательное (угловое) движение асимметричного твердого тела относительно центра масс под действием управляющего u_1 и возмущающего v_1 моментов сил. Преднамеренно создаваемый возмущающий момент v_1 формируется с запаздыванием τ . В системе (3.11) y_1, y_2, z_1 — проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; α_1, α_2 — постоянные, определяющие интенсивности независимых гауссовских “белых шумов” $\dot{w}_1(t)$ и $\dot{w}_2(t)$ в каналах управления; $b(t): [0, \infty] \rightarrow R^1$ — непрерывная и ограниченная функция.

Система (3.11) допускает “частичное” положение равновесия (3.2), которому при $C < A, B$ соответствует равномерное вращение тела вокруг большей из его главных центральных осей инерции. Если возмущающий момент v_1 отсутствует ($v_1 \equiv 0$), то имеют место следующие утверждения [32]: 1) в детерминированном случае $\alpha_1 = 0$ при $a = 0$ имеет место устойчивость (неасимптотическая) этого положения равновесия в целом по z_{10} , а при $a < 0$ — асимптотическая y_1 -устойчивость в целом по z_{10} ; 2) при $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$ асимптотическая y_1 -устойчивость по вероятности в целом по z_{10} имеет место при $a + \alpha_1^2/A < 0$, если системе (3.11) придать точный смысл и понимать ее как систему стохастических дифференциальных уравнений в форме Стратоновича с последующим переходом к системе в форме Ито.

В случае $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, имея в виду оценку влияния возмущающего момента v_1 на управляющий диссипативный момент u_1 , найдем условие, при котором “частичное” положение равновесия (3.2) системы (3.11) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности в целом по ξ_{z_1} . При этом система (3.11) понимается как система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито:

$$\begin{aligned} A dy_1(t) &= [ay_1(t) + b(t)y_1(t - \tau) + (B - C)y_2(t)z_1(t)] dt + \\ &+ \alpha_1 y_1(t) dw_1(t) + \alpha_2 y_1(t - \tau) dw_2(t), \\ A dy_2(t) &= [(C - A)y_1(t)z_1(t)] dt, \quad C dz_1(t) = [(A - B)y_1(t)y_2(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим V -функционал Ляпунова—Красовского ($\beta = \text{const} > 0$)

$$V(\psi) = 0.5 [A(A - C)\psi_{y_1}^2(0) + B(B - C)\psi_{y_2}^2(0)] + 0.5[(A - C)/A]\beta \int_{-\tau}^0 \psi_{y_1}^2(\theta) d\theta.$$

В области (2.2) при $C < A$, B выполнено условие

$$V(\psi) \geq 0.5A(A - C)\psi_{y_1}^2(0),$$

а ассоциированный с системой (3.12) дифференциальный производящий оператор $LV(\psi)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} LV(\psi) &= A(A - C)\psi_{y_1}(0)\{(B - C)/A\}\psi_{y_2}(0)\psi_{z_1}(0) + (a/A)\psi_{y_1}(0) + (b/A)\psi_{y_1}(-\tau)\} + \\ &+ B(B - C)\psi_{y_2}(0)\{(C - A)/B\}\psi_{y_1}(0)\psi_{z_1}(0) + 0.5[(A - C)/A][\alpha_1^2\psi_{y_1}^2(0) + \alpha_2^2\psi_{y_1}^2(-\tau)] + \\ &+ 0.5[(A - C)/A]\beta[\psi_{y_1}^2(0) - \psi_{y_1}^2(-\tau)] = \\ &= (A - C)\{[a + 0.5(\alpha_1^2/A) + 0.5\beta]\psi_{y_1}^2(0) + b\psi_{y_1}(0)\psi_{y_1}(-\tau) + 0.5[(\alpha_2^2/A) - \beta]\psi_{y_1}^2(-\tau)\}. \end{aligned}$$

При выполнении условий

$$r + 0.5\beta \leq 0, \quad (r + 0.5\beta)[(\alpha_2^2/A) - \beta] \geq 0.5b^2(t), \quad (3.13)$$

в которых $r = a + 0.5\alpha_1^2/A$, а также при $C < A$, B в области (2.2) для любого постоянного значения $\tau > 0$ имеет место оценка $LV(\psi) \leq 0$.

Условия (3.13) предполагают требование $\beta \geq \alpha_2^2/A$. Функция $f(\beta) = (r + 0.5\beta)[(\alpha_2^2/A) - \beta]$ выпукла вверх и ее максимум достигается при $\beta^* = -r + 0.5\alpha_2^2/A$; поскольку $r \geq 0$, то $\beta^* \geq \alpha_2^2/A$. Поэтому, учитывая, что $f(\beta^*) = 0.5[r + 0.5\alpha_2^2/A]^2$, условия (3.13) можно представить следующим образом:

$$a^* \leq 0, \quad b^2(t) \leq a^{*2} \quad (a^* = a + 0.5\alpha_1^2/A + 0.5\alpha_2^2/A); \quad (3.14)$$

второе из этих условий можно заменить эквивалентным условием $|b(t)| \leq -a^*$. Полагая $\beta = \beta^*$ в выбранном функционале $V(\psi)$, заключаем, что при выполнении условий (3.14) “частичное” положение равновесия (3.2) системы (3.12) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности в целом по ξ_{z_1} при любой постоянной величине запаздывания $\tau > 0$.

Заметим, что возможен и другой подход к рассмотрению системы (3.11), допускающий предельный переход от реальных физических шумов к “белому шуму”. Такой подход основан на трактовке стохастических систем с запаздыванием как уравнений в форме Стратоновича [44] и допускает последующий переход к соответствующей системе в форме Ито.

Заключение. Для нелинейной нестационарной системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений с последствием (запаздыванием), подверженной воздействию случайного процесса “белого” шума, дана поставка задачи устойчивости по отношению к части переменных по вероятности “частичного” нулевого положения равновесия. Значения супремум-нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим указанное “частичное” положение равновесия, с вероятностью 1 могут быть большими (ограниченными наперед заданным числом) по одной части и произвольными по отношению к их оставшейся части. Выбор такого разбиения определяется в результате поиска компромисса между содержательным смыслом рассматриваемого понятия частичной устойчивости и требованиями к используемым функционалам Ляпунова—Красовского.

Приводятся достаточные условия частичной устойчивости указанного вида в контексте стохастического варианта метода функционалов Ляпунова—Красовского в соответствующей модификации. Наряду с основным V -функционалом Ляпунова—Красовского рассматривается

дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная μ -функция для корректировки области функционального пространства, в которой строится V -функционал. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основной V -функционал, а также ассоциированный с изучаемой системой дифференциальный производящий оператор этого функционала могут быть знакопеременными. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие особенности предложенного подхода.

Полученные результаты дополняют на случай стохастических функционально-дифференциальных моделей ранее выполненные исследования по устойчивости инвариантных множеств динамических систем [45—47] на основе метода функций Ляпунова, а также исследования задач стабилизации связей динамических систем [48, 49].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольное число ε ($0 < \varepsilon < h_1$), произвольный момент времени t_0 и любую допустимую начальную функцию $\mathbf{x}_0 = \xi$, для которой $\mathbf{P}\{\xi \in S_\varepsilon\} = 1$, где $S_\varepsilon = \{\xi \in H_0: \|\xi_y\| < \varepsilon, \|\xi_{z_1}\| \leq L, \|\xi_{z_2}\| < \infty\}$. Обозначим через τ_ε момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t_0, \xi)$ поверхности $|\mathbf{y}_1| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $|\mathbf{y}_1| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞ . Положим $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$.

Поскольку для рассматриваемого класса функционалов Ляпунова—Красовского имеет место функциональный аналог формулы Ито, то справедливо соотношение

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)}) - V(t_0, \xi)] = \int_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \mathbf{E}[LV(s, \mathbf{x}_s)] ds. \quad (\text{П.1})$$

Поэтому из равенства (П.1) в силу условия (2.6) следует, что

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)})] \leq \mathbf{E}V(t_0, \xi). \quad (\text{П.2})$$

Если верно неравенство $t > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon(t); t_0, \xi)| = |\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon; t_0, \xi)| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева—Маркова и оценки (П.2) находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[|\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)| > \varepsilon] &\leq \frac{1}{a(\varepsilon)} \mathbf{E}[a(|\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)|)] \leq \\ &\leq \frac{1}{a(\varepsilon)} \mathbf{E}[a(|\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)| + |\mu(t, \mathbf{x}(t; t_0, \xi))|)] \leq \frac{1}{a(\varepsilon)} \mathbf{E}[V(t, \mathbf{x}(t_0, \xi))] = \\ &= \frac{1}{a(\varepsilon)} \mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)})] \leq \frac{1}{a(\varepsilon)} \mathbf{E}V(t_0, \xi). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Поскольку функционал $V(t, \psi)$ непрерывен, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (2.5), то в случае $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$ (при достаточно малом $\delta > 0$) для всех $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{\|\xi_y\| \rightarrow 0} \mathbf{E}V(t_0, \xi) = 0 \quad (\text{П.4})$$

верно при $\|\xi_{z_1}\| \leq L$ равномерно по $\|\xi_{z_2}\| < \infty$.

Поэтому в случае $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$ для всех $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.3), (П.4) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\|\xi_y\| \rightarrow 0} \mathbf{P}[\sup_{t > t_0} |\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)| > \varepsilon] = 0,$$

выполняющееся при $\|\xi_{z_1}\| \leq L$ равномерно по $\|\xi_{z_2}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, t_0, L) > 0$, такое, что неравенство (1.2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$. Следовательно, при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности.

Доказательство теоремы 2. При выполнении условий (2.7) в случае $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$ для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (П.4) верно при $\|\xi_{z1}\| \leq L$ равномерно не только по $\|\xi_{z2}\| < \infty$, но и по $t_0 \geq 0$. В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется не зависящее от t_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$, такое, что неравенство (1.2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$.

Следовательно, при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2} “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво по вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В. Б., Носов В. П. Устойчивость и периодические режимы систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Shaikhet L. Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2013. 342 p.
3. Fridman E., Shaikhet L. Simple LMIs for Stability of Stochastic Systems with Delay Term Given by Stieltjes Integral or with Stabilizing Delay // Systems & Control Letters. 2019. V. 124. No. 2. P. 83–91.
4. Shaikhet L. About One Method of Stability Investigation for Nonlinear Stochastic Delay Differential Equations // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 8. P. 2946–2959.
5. Zong X., Yin G., Li T., Zhang J. F. Stability of Stochastic Functional Differential Systems Using Degenerate Lyapunov Functionals and Applications // Automatica. 2018. V. 91. P. 197–207.
6. Nguyen D. H., Yin G. Stability of Stochastic Functional Differential Equations with Regime-Switching: Analysis Using Dupire’s Functional Ito Formula // Potential Analysis. 2020. V. 53. No. 1. P. 247–265.
7. Yang X., Zhu Q. Stabilization of Stochastic Functional Differential Systems by Steepest Descent Feedback Controls // IET Control Theory & Appl. 2021. V. 15. No. 6. P. 805–813.
8. Du N.H., Nguyen D. H., Nguyen N. N., Yin G. Stability of Stochastic Functional Differential Equations with Random Switching and Applications // Automatica. 2021. V. 125. Art. 109410.
9. Cont R., Fournié D. A. Functional Ito Calculus and Stochastic Integral Representation of Martingales // Annals of Probability. 2013. V. 41. No. 1. P. 109–133.
10. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия. 1957. № 4. С. 9–16.
11. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
12. Caraballo T., Mchiri L., Raima M. Partial Practical Exponential Stability of Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching // Mediterranean J. Mathematics. 2021. V. 18. No. 4. P. 1–26.
13. Li J., Ren Y. Practical Stability in Relation to a Part of Variables of Stochastic Pantograph Differential Equations // Intern. J. Control. 2022. V. 95. No. 12. P. 3196–3201.
14. Kadiev R. I., Ponomov A. Partial Stability of Linear Stochastic Functional Differential Equations and the W -Transform // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 2014. V. 21. No. 1. P. 1–35.
15. Кадиев Р. И. Устойчивость относительно начальных данных по части переменных решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 20–34.
16. Mohammed S. E.A. Stochastic Functional Differential Equations. (Research Notes in Mathematics, V. 99). Pitman Advanced Publishing Program: Boston, London, Melbourne, 1984. 250 p.
17. Mao X. R. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Oxford: Woodhead Publ., 2008. 440 p.
18. Xu D., Yang Z., Huang Y. Existence-Uniqueness and Continuation Theorems for Stochastic Functional Differential Equations // J. Diff. Equations. 2008. V. 245. No. 6. P. 1681–1703.
19. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
20. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. Об устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия систем с последействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496–503.
21. Воротников В. И. К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // АиТ. 2020. № 2. С. 3–17.
22. Shiriaev A. S. The Notion of V -Detectability and Stabilization of Invariant Sets of Nonlinear Systems // Systems & Control Letters. 2000. V. 39. No. 5. P. 327–338.

23. *Ingalls B. P., Sontag E. D., Wang Y.* Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, Nevada, 2002. P. 3946–3951.
24. *Дашковский С. Н., Ефимов Д. В., Сонтаг Э. Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // *АиТ.* 2011. № 8. С. 3–40.
25. *Rajpurohit T., Haddad W. M.* Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // *Math. Control, Signals, Syst.* 2017. V. 29. № 2. Art. 10.
26. *Rajpurohit T., Haddad W. M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // *J. Dynam. Syst., Measurement, and Control.* 2017. V. 139. No. 9. Art. DS-15-1602.
27. *Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // *АиТ.* 2019. № 5. С. 86–98.
28. *Воротников В. И.* Об устойчивости и устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия нелинейных динамических систем // *Докл. РАН.* 2003. Т. 389. № 3. С. 332–337.
29. *Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.
30. *Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.* Об одном подходе к анализу устойчивости “частичных” положений равновесия нелинейных дискретных систем // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 88–100.
31. *Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // *АиТ.* 2021. № 9. С. 116–132.
32. *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
33. *Шаров В. Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // *АиТ.* 1978. № 11. С. 63–71.
34. *Ignatyev O.* Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // *Statist. Probab. Lett.* 2009. V. 79. No. 5. P. 597–601.
35. *Zuyev A., Vasylieva I.* Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rota-ting Rigid Bodies // *IFAC-PapersOnLine.* 2019. V. 52. No. 16. P. 162–167.
36. *Sultanov O.* Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2019. V. 75. P. 14–21.
37. *Sultanov O. A.* Bifurcations of Autoresonant Modes in Oscillating Systems with Combined Excitation // *Studies in Applied Mathematics.* 2020. V. 144. No. 2. P. 213–241.
38. *Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.* Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Markovian Switching // *J. Franklin Institute.* 2014. V. 351. No. 1. P. 500–512.
39. *Socha L., Zhu Q. X.* Exponential Stability with Respect to Part of the Variables for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // *Math. Comp. Simul.* 2019. V. 155. P. 2–14.
40. *Socha L.* Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems // *Bull. Polish Acad. Sci.: Tech. Sci.* 2019. V. 67. No. 4. P. 769–775.
41. *Хрусталева М. М., Онегин Е. Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // *АиТ.* 2019. № 7. С. 89–104.
42. *Caraballo T., Ezzine F., Hammami M. A., Mchiri L.* Practical Stability with Respect to a Part of Variables of Stochastic Differential Equations // *Stochastics.* 2021. V. 93. No. 5. P. 647–664.
43. *Caraballo T., Ezzine F., Hammami M. A.* Partial Stability Analysis of Stochastic Differential Equations with a General Decay Rate // *J. Engineering Mathematics.* 2021. V. 130. No. 1. P. 1–17.
44. *Küchler U., Mensch B.* Langevins Stochastic Differential Equation Extended by a Time-Delayed Term // *Stochastics and Stochastics Reports.* 1992. V. 40. № 1-2. P. 23–42.
45. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 256 с.
46. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
47. *Ефимов Д. В.* Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005. 314 с.
48. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2015. Т. 56. Вып. 1. С. 15–28.
49. *Мухарлямов Р. Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2019. Т. 60. Вып. 4. С. 16–28.

УДК 681.5.037

АГРЕГИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С КОЛЕБАНИЯМИ

© 2024 г. И.Н. Барабанов^а, *, В.Н. Тхай^а, **

^аИПУ им. В.А. Трапезникова РАН,

Москва, Россия

*e-mail: ivbar@ipu.ru

**e-mail: tkhaivn@ipu.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается множество многомерных консервативных систем, которое, как единая механическая система, допускает семейство одночастотных колебаний. Решается задача агрегирования множества систем в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем. Применяются слабые универсальные связи-управления. Ранее задача решалась для идентичных обратимых систем с одной степенью свободы.

Ключевые слова: агрегирование, консервативные системы, цикл, семейство колебаний, связи-управления

DOI: 10.31857/S0002338824010027, EDN: IXUIBX

AGGREGATION OF MULTIDIMENSIONAL CONSERVATIVE SYSTEMS WITH OSCILLATIONS

© 2024 I.N. Barabanov^а, *, V.N. Tkhai^а, **

^аV.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,

Moscow, Russia

*e-mail: ivbar@ipu.ru

**e-mail: tkhaivn@ipu.ru

Submitted 31.05.2023 г.

Modified 14.08.2023 г.

Accepted 02.10.2023 г.

We consider the set of multidimensional conservative systems that admits a family of single-frequency oscillations when taken as a unified system. The problem of aggregation of a set of systems into a coupled system with an attractive cycle close to the oscillation of uncoupled systems is solved. Weak universal coupling controls are applied. Previously, the problem was solved for identical reversible one degree of freedom systems.

Keywords: aggregation, conservative systems, cycle, family of oscillations, coupling control

Введение. Агрегирование проводится для получения связанной системы с заданным свойством. Способы агрегирования сложных систем методом Ляпунова приводятся в [1]. В [2] для модели, содержащей слабо связанные подсистемы, предложено находить связи-управления, гарантирующие существование, устойчивость и стабилизацию колебания связанной системы. Тем самым задача агрегирования приводится к задаче управления. Идея [2] реализовывалась для механических систем в [3–6]. Агрегирование идентичных обратимых систем с одной степенью свободы, которые в частном случае являются консервативными, проводилось в [4]: в связанной системе конструировался притягивающий цикл. Предполагалось, что отдельная система обладает семейством невырожденных симметричных периодических движений

(СПД). Поэтому множество этих систем, рассматриваемое как единая механическая система, также допускает семейство невырожденных СПД. В данной статье результаты [4] распространяются на случай многомерных консервативных систем.

Связанные системы исследуются в различных областях знаний. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда. Некоторые другие примеры см. в [7–11].

1. Постановка задачи. Рассматривается система из m консервативных систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода: в i -й системе для вектора обобщенных координат применяется обозначение $q^i = (q_1^i, \dots, q_{n_i}^i)^T$. Предполагается, что отдельная система допускает одночастотное колебание.

Фазовое пространство отдельной консервативной системы симметрично относительно неподвижного множества системы $M^i = \{q^i, \dot{q}^i : \dot{q}^i = 0\}$. Скорость \dot{q}^i на M^i обращается в нуль, а само движение симметрично относительно M^i и представляет собой СПД, которые образуют семейства $\Sigma^i(h_i)$ по параметру h_i . СПД описывается четной по времени функцией. Параметр h_i является постоянной интеграла полной механической энергии в i -й консервативной системе. Для невырожденных СПД период монотонно зависит от h_i . задается семейство $\Sigma^i(h_i)$ невырожденных СПД.

Предполагается, что совокупность из m систем, рассматриваемая как одна система, допускает семейство $\Sigma(h)$ невырожденных СПД, параметром которого будет постоянная $h = h_1 + \dots + h_m$ интеграла энергии всей системы. Через $T(h)$ обозначим период СПД на $\Sigma(h)$, а через $T^i(h_i)$ — периоды на $\Sigma^i(h_i)$. Существование $\Sigma(h)$ означает, что верны равенства $h_i = h_i(h)$, $T^i(h_i(h)) = T(h)$. В частном случае идентичных подсистем приведенные равенства выполняются очевидным образом. В [4] проведено агрегирование идентичных консервативных системы с одной степенью свободы.

Отдельная управляемая механическая система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом, построена в [12, 13]. При этом система замыкалась управлением с ε -малым коэффициентом усиления и стабилизируемое колебание было ε -близко к колебанию механической системы. Для множества механических систем малая сила становится в [3–6] слабой связью-управлением.

Ставится задача агрегирования рассматриваемых m консервативных систем в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем. Находятся универсальные связи-управления между системами, которые пригодны для любой механической системы. При этом предполагается, что характеристические показатели семейств СПД $\Sigma^i(h_i)$ принадлежат мнимой оси.

2. Метод решения. Рассмотрим управляемую механическую систему, включающую m консервативных механических систем, и запишем ее в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^i}{\partial \dot{q}_s^i} - \frac{\partial L^i}{\partial q_s^i} = \varepsilon \sigma u_s^i(q, \dot{q}), \quad s = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

где L^i — Лагранжиан i -й системы, $u^i = (u_1^i, \dots, u_{n_i}^i)^T$ — вектор ее управления, при этом число σ равняется $+1$ или -1 . Поскольку в связанной системе (2.1) рабочим режимом предполагается иметь притягивающий цикл, то функции $u_s^i(q, \dot{q})$ выбираются не зависящими явно от времени t . Сам цикл, по определению, представляет собой изолированное периодическое решение автономной системы.

В развиваемом подходе к агрегированию множество из m несвязанных консервативных механических систем рассматривается как одна консервативная система, допускающая семейство СПД $\Sigma(h)$. При этом цикл рождается из СПД семейства $\Sigma(h)$ при энергии $h = h^*$. Поэтому для системы (2.1) выбираются связи-управления

$$u_s^i = \left[1 - K(h^*) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (q_s^i)^2 \right] \sum_{j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i, \quad (2.2)$$

$$r_{sj}^i = \text{const}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, n_i},$$

которые представляют собой обобщение связей-управлений в [4] и в случае отдельной консервативной системы превращаются просто в управление [12–14].

Зависимость $K(h)$ является характеристикой семейства Σ и определяется из тождества

$$\int_0^{T(h)} \left[1 - K(h) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (q_s^i)^2 \right] \sum_{i=1}^m \sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i q_j^i \psi_j^i dt \equiv 0, \quad (2.3)$$

где ψ_j^i — решения сопряженной системы для уравнений в вариациях. При этом для консервативной системы в силу симметричности матрицы уравнений в вариациях для СПД решения сопряженной системы удовлетворяют равенствам $\psi_j^i = -\dot{q}_j^i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n_i}$.

Изменение обобщенных координат q^i на семействе $\Sigma(h)$ дается функцией $q^i = \varphi^i(h, t)$. Поэтому из тождества (2.3) с учетом равенства нулю нечетной функции $\dot{\varphi}_j^i$ на концах интервала интегрирования получим:

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \theta(h, t) dt}{\int_0^{T(h)} \theta(h, t) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (\varphi_s^i)^2 dt}, \quad \theta = - \sum_{i=1}^m \sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i (\dot{\varphi}_j^i)^2.$$

С применением функции $K(h)$ из тождества (2.3) выводится амплитудное уравнение

$$I(h) \equiv \int_0^{T(h^*)} \left[1 - K(h^*) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (\varphi_s^i(h, t))^2 \right] \theta(h, t) dt = 0, \quad (2.4)$$

дающее необходимое условие в первом приближении по μ существования $T(h^*)$ -периодического решения системы (2.1), (2.2). Колебание рождается из СПД семейства $\Sigma(h)$ при $h = h^*$. Вычислим производную

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \chi v, \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad v = - \int_0^{T(h^*)} \theta(h^*, t) dt. \quad (2.5)$$

Тогда достаточное условие существования изолированного $T(h^*)$ -периодического решения дается неравенством $\chi \neq 0$. В этом случае из СПД рождается единственное колебание — цикл.

В [13] доказывается, что для отдельной системы выбором надлежащей матрицы $\|r_{sj}^i\|$ всегда реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл. При этом в управлении (2.2) в зависимости от знака производной χ используется множитель $\sigma = 1$ при $\chi < 0$ или $\sigma = -1$ при $\chi > 0$.

Заметим, что в связанной системе в (2.2) задается матрица $\|r_{sj}^i\|$ для каждой системы, а также реализуется связь между всеми системами (суммирование по индексу i). При этом как к отдельной консервативной системе, так и ко всей связанной системе применяется закон изменения полной механической энергии.

3. Законы изменения энергии. Полная механическая энергия в i -й системе меняется по закону

$$\frac{dE^i}{dt} = \varepsilon \sigma \left[1 - K(h^*) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (q_s^i)^2 \right] \sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i (q_j^i)^2, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Как следствие, из (3.1) выводится закон изменения энергии всего множества консервативных систем:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \sigma \left[1 - K(h^*) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{n_i} (q_s^i)^2 \right] \sum_{i=1}^m \sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i (q_j^i)^2. \quad (3.2)$$

Тогда при малых $h - h^*$ из формул (2.4), (2.5), (3.2) вычисляется приращение ΔE полной энергии E за период $T(h^*)$:

$$\Delta E = \varepsilon \sigma \chi \nu (h - h^*) + o(\varepsilon). \quad (3.3)$$

Выберем в связях-управлениях (2.2) положительно-определенные матрицы $\|r_{sj}^i\|$. Тогда функция $\theta(h, t)$ в (2.4) принимает только отрицательные значения. Поэтому интеграл от этой функции, т.е. число ν в (2.5), будет положительным. Соответственно в (3.3) выполняется $\nu > 0$. Согласно формуле (3.2), достаточным условием существования цикла является неравенство $\chi \neq 0$. Поэтому, выбирая знак числа σ так, чтобы выполнялось неравенство $\sigma \chi < 0$, получаем отрицательное приращение ΔE полной механической энергии на периоде $T(h^*)$.

Таким образом, положительно-определенные матрицы $\|r_{sj}^i\|$ и необходимый знак числа σ позволяют на траекториях системы (2.1), (2.2) все время уменьшать приращение энергии ΔE на отрезке $[0, T(h^*)]$. В соответствии с законами (3.1) формула вида (3.3) справедлива также для приращений ΔE^i энергий E^i .

Рассмотрим отображение $\tau : 0 \rightarrow T(h^*)$. В δ -окрестности цикла выполняется $|h - h^*| < \delta$, $|h_i - h_i^*| < \delta$, $i = \overline{1, m}$. Неравенства сохраняют справедливость при отображении. Поэтому $\Delta E \rightarrow 0$, $\Delta E^i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$. Значит, средние значения в пределе равняются нулю. Предельные функции получаются $T(h^*)$ -периодическими, их средние значения равны постоянным интегралам для цикла.

4. Стабилизация цикла. Согласно [14, лемма П1], в многомерной системе можно выделить многообразие $\hat{\Sigma}^i$, соответствующее консервативной механической системе с одной степенью свободы, на котором собственно и реализуется семейство $\Sigma^i(h_i)$. В окрестности $\hat{\Sigma}^i$ механическая система описывается в обобщенных координатах переменными (x^i, y^i) , где координатой x^i задается семейство $\Sigma^i(h_i)$: $y \equiv 0$ на $\hat{\Sigma}^i$. Поэтому $E^i = E_x^i + E_y^i$, где E_x^i — энергия консервативной системы.

При отображении τ приращения этих функций $\Delta E^i \rightarrow 0$, $\Delta E_x^i \rightarrow 0$, $\Delta E_y^i \rightarrow 0$, причем предельные функции E^i и E_x^i будут $T(h^*)$ -периодическими. В случае принадлежности характеристических показателей мнимой оси функция E_y^i в окрестности точки $(y, \dot{y}) = (0, 0)$ будет положительно-определенной. Поэтому из предельного перехода $\Delta E_y^i \rightarrow 0$ следует, что $E_y^i \rightarrow 0$. Следовательно, орбитально асимптотически устойчивый цикл связанной системы (2.1), (2.2) дается предельными замкнутыми кривыми на плоскостях (x^i, \dot{x}^i) , $i = \overline{1, m}$.

Таким образом, получается следующий основной результат. Пусть множество из m консервативных систем, рассматриваемое как одна система, допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений. Тогда задача агрегирования множества в связанную систему, допускающую притягивающий цикл, решается связями-управлениями (2.2) с положительно-определенными квадратичными формами, задаваемыми матрицами $\|r_{sj}^i\|$.

Замечание 1. При действии найденных связующих управлений осуществляется естественная стабилизация цикла связанной механической системы.

Замечание 2. В силу рождения цикла из СПД семейства $\Sigma(h)$ в связанной системе (2.1), (2.2) выполняется синхронизация колебаний консервативных систем по частоте и фазе.

Замечание 3. В частном случае консервативных систем с одной степенью свободы результат излагался в [3, 4].

Пример. Связанные уравнения Дюффинга. Нелинейные колебания точки упругого тела описываются уравнением Дюффинга. В дискретной модели получается система слабо связанных точек. Поэтому, согласно основному результату, при учете связи между точками упругое тело колеблется как одно целое в режиме притягивающего цикла.

Заключение. Множество многомерных консервативных систем, которое как одно целое допускает семейство одночастотных колебаний, агрегируется в связанную систему с притягивающим циклом. Используются универсальные связи-управления, пригодные для отдельной системы и множества систем, систем с одной и многими степенями свободы, консервативных и обратимых механических систем. При этом цикл связанной системы получается близким к колебанию множества несвязанных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Платонов А. В. Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. М.; Ижевск: URSS, 2012. 268 с.
2. Тхай В. Н. Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.
3. Barabanov I. N., Tkhai V. N. Oscillations and Stability in the Coupled Mechanical System // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1959. P. 0120031.
4. Barabanov I. N., Tkhai V. N. Aggregation of Identical Mechanical Systems with Oscillations // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. V. 1164. P. 012078.
5. Барabanov И. Н., Тхай В. Н. Стабилизация цикла в связанной механической системе // АиТ. 2022. № 1. С. 67–76.
6. Барabanov И. Н., Тхай В. Н. Стабилизация колебаний связанных консервативных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 22–28.
7. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Поперечные колебания стресса, вызванные кратковременным продольным ударом // Докл. РАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.
8. Kovaleva A., Manevitch L. I. Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320. P. 1–8.
9. Rompala K., Rand R., Howland H. Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
10. Yakushevich L. V., Gapa S., Awrejcewicz J. Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
11. Kawamura Y. Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270. P. 20–29.
12. Тхай В. Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
13. Тхай В. Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93–104.
14. Тхай В. Н. Режим цикла в связанной консервативной системе // АиТ. 2022. № 2. С. 90–106.

УДК 519.252

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРУДОЕМКОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ. I. ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ, СБОР СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ, ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ¹

© 2024 г. А.В. Борисов^{a,*}, А.В. Иванов^{a,**}

^a ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: ABorisoV@frccsc.ru

**e-mail: AIvanov@frccsc.ru

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.

После доработки 16.08.2023 г.

Принято к публикации 02.10.2023 г.

Изложены результаты первой части исследования, посвященного построению математической модели времени выполнения пользовательских заданий на виртуальных вычислительных узлах. Предполагается, что данное время является случайной величиной, среднее значение и дисперсия которой зависят от ресурсов узла, характеристик пользовательских заданий и значений переменных аппаратно-программной среды. Представлены общие свойства функций, характерные для среднего значения и дисперсии времени выполнения заданий, а также предложены некоторые их частные примеры. Функции средних значений и дисперсий зависят от неизвестных параметров, и построение стохастической модели времени выполнения задания заключается в идентификации этих параметров — построении обобщенных оценок максимального правдоподобия по разнородной статистической информации. Содержатся рекомендации по сбору и использованию этой информации: подготовке аппаратно-программной составляющей узла, планированию нагрузочного тестирования и обработке полученных в его процессе статистических данных. Конкретные прикладные примеры применения предложенной методологии будут представлены в следующих частях исследования.

Ключевые слова: стохастическая модель, параметрическое оценивание, М-оценка, задачи невыпуклой и негладкой оптимизации, нагрузочное тестирование

DOI: 10.31857/S0002338824010037, EDN: IXTIMV

STOCHASTIC MODELS FOR TIME COMPLEXITY OF COMPUTING TASKS: I. DEVELOPMENT PRINCIPLES, STATISTICAL DATA MINING, IDENTIFICATION PROBLEMS

© 2024 Andrey V. Borisov^{a,*}, Alexey V. Ivanov^{a,**}

^aFederal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences

*e-mail: ABorisoV@frccsc.ru

**e-mail: AIvanov@frccsc.ru

The paper contains the first part of an investigation devoted to the design of the mathematical models for the execution time of user tasks carried out on the virtual calculating nodes. We suppose that the execution time is a random value with the mean and variance depending on the node resources, task parameters, and the current characteristics of the node state. We discover the key features of the mean and variance functions and specify some of their particular cases. Both the mean and variance functions depend on the unknown parameters, and the design of the stochastic model for the time complexity leads to the parameter identification in the form of the generalized maximum likelihood estimates under the heterogeneous statistical information. The paper also contains recommendations concerning the gathering and subsequent usage of this information: the node testbed preparation, stress test planning, and the obtained data processing. The specific illustrating examples of the proposed mathematical model will be presented in the subsequent parts of the investigation.

Keywords: stochastic model, parameter estimation, M-estimate, nonconvex and nonsmooth optimization problems, stress testing

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования "Высокопроизводительные вычисления и большие данные" (ЦКП "Информатика") ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

Введение. Стремительное развитие средств вычислительной техники различной производительности в совокупности с повсеместным проникновением высокоскоростных сетей передачи данных привело к появлению таких новых отраслей услуг, как дополненная и виртуальная реальность [1], Индустриальный Интернет [2], Интернет вещей [3], Интернет военных вещей [4], Интернет транспортных средств [5] и пр. Широкое распространение в ближайшем будущем стандартов мобильной связи 5G/6G обеспечит пользователям возможность доступа к вычислительным мощностям любого уровня вне зависимости от их территориального расположения и без необходимости владения ими, с одной стороны, и даст владельцам компьютерных сетей возможность оперативного распределения нагрузки по территориально разнесенным вычислительным узлам — с другой. Подобные вычислительные сети функционируют в следующих условиях:

- высокая стоимость создания и эксплуатации,
- высокие требования пользователей сети к качеству предоставляемых услуг,
- высокая конкуренция между сетями — поставщиками услуг.

Эти жесткие требования приводят к необходимости оптимизации использования ресурсов компьютерных сетей.

Объектом выполненного исследования являются проблемы распределения вычислительной нагрузки по узлам различной производительности и выделения вычислительных ресурсов различным пользователям. Идеальный результат с точки зрения провайдера — предоставление каждому пользователю минимальных вычислительных ресурсов, достаточных для решения его задач, с учетом обязательного выполнения условий соглашения об уровне обслуживания (*service level agreement, SLA*). Однако достижению этой цели препятствует ряд фундаментальных проблем.

Во-первых, имеет место неопределенность запросов пользователей на выполнение вычислений. Несмотря на то что SLA, заключаемое между пользователем и провайдером, определяет перечень задач, решение которых обеспечивает вычислительная сеть, интенсивность поступления пользовательских заданий заранее неизвестна. Это означает, что количество выделенных ресурсов, необходимых для удовлетворения SLA, может варьироваться в сторону увеличения. Помимо этого трудоемкость отдельных заданий также содержит в себе неопределенность. Причинами этого являются не только различия в объемах заданий. Иногда время выполнения одного и того же задания на одной и той же аппаратно-программной платформе может отличаться в разы на различных входных данных. Примером этого служит численное решение оптимизационных задач [6, 7] при различных начальных условиях, использование алгоритмов машинного обучения [8], компиляция видеоландшафтов компьютерных игр [9] и пр.

Во-вторых, большинство используемого программного обеспечения (ПО) является проприетарным, что исключает возможность его детального алгоритмического анализа в целях определения трудоемкости выполнения той или иной задачи. Относительно процедуры выполнения заданий возможно делать только самые общие выводы, основываясь на знаниях функционирования аналогичных программ с открытым кодом, а также алгоритмов решения того или иного класса задач. В некоторых случаях о времени выполнения заданий существует прямая и косвенная статистическая информация в виде результатов нагрузочного тестирования.

В-третьих, между требованиями пользователей к качеству услуг, зафиксированными SLA, и объектами управления, доступными провайдерам, существует известный разрыв. Дело в том, что пользователи определяют качество своего обслуживания через максимальное время выполнения задач того или иного класса. В то же время для обеспечения выполнения пользовательских заданий провайдеры выделяют определенный объем вычислительных ресурсов: оперативной и дисковой памяти, процессорных ядер и пр. Количество выделенных ресурсов влияет на скорость выполнения заданий, однако не определяет время их выполнения из-за неизвестной трудоемкости.

Цель данной работы — предложить стохастические модели времени выполнения пользовательских заданий на вычислительных узлах, а также методики идентификации параметров этих моделей.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 содержит неформальное описание проблем оценивания вероятности нарушения SLA на определенном виртуальном вычислительном узле, заключающегося в превышении допустимого времени выполнения задания. При этом объем пользовательского задания либо известен, либо известен пользовательский профиль, т.е. вероятностное распределение заданий различного объема, характерное для данного пользователя.

В разд. 2 представлены основные принципы выбора моделей времени выполнения заданий. Приведена аргументация в пользу его вероятностного описания, а также предложены полезные свойства, которыми должны обладать выбранные модели. В разд. 3 время выполнения заданий предлагается описывать семейством случайных величин, чьи средние значения M и дисперсия D являются функциями ресурсов узла, характеристик выполняемого задания и переменных аппаратно-программной среды. Подобно производственным функциям [10], в разделе рассмотрены свойства функций M и D по разным переменным, а также предложены некоторые их частные случаи. Здесь же приведены математически корректные формулировки и решения задач оценивания вероятности нарушения SLA.

В разд. 4 предлагается использовать методологию взвешенного M -оценивания [11] для решения задачи идентификации параметров предложенной модели трудоемкости пользовательских заданий. При этом в качестве функции потерь предлагается применять одну из следующих выпуклых функций: квадратичную, модуль или выпуклую кусочно-линейную.

Решение задачи идентификации параметров предполагает наличие необходимой статистической информации. Раздел 5 содержит рекомендации по ее сбору и обработке. Накопление этой информации выполняется в процессе нагрузочного тестирования, проводимого именно на той аппаратно-программной платформе (аппаратное обеспечение плюс общесистемное программное обеспечение (ОПО)), на которой и будет впоследствии функционировать виртуальный вычислительный узел. В то же время реальное специальное программное обеспечение (СПО) может быть заменено некоторым тестовым, и его краткая классификация приведена в разделе. Помимо фиксируемого времени выполнения заданий с различными варьируемыми параметрами: предложен перечень регистрируемых данных, который может быть полезен для определения переменных аппаратно-программной среды. В Заключении содержатся краткие выводы по модели, а также перспективы дальнейших исследований.

1. Описание проблемы. Представлено неформальное описание проблемы характеристики времени выполнения пользовательских задач на вычислительных узлах. Предполагается, что узел является виртуальным и физически располагается на некотором средстве вычислительной техники (СВТ): рабочей станции, сервере, мейнфрейме и пр. Для обеспечения функционирования узла на СВТ выделено определенное количество процессорных ядер, оперативной памяти, дискового пространства и других ресурсов для монопольного использования. На узле развернуто ОПО и СПО. Именно СПО обеспечивает выполнение поступающих на узел пользовательских заданий.

Все задания, которые могут выполняться на исследуемом узле, подразделяются на типы. Задания относятся к одному типу, если они выполняются одним и тем же СПО с помощью одних и тех же алгоритмов. Например, к одному типу относятся задания по сжатию видеоданных, проводимому одной и той же программой-архиватором. Если тем же программным средством выполняется архивация текстовых данных, то это задание относится к другому типу, так как сжатие видео- и текстовой информации осуществляются с помощью разных алгоритмов. В то же время задания сжатия видеoinформации различными программными средствами так же относятся к разным типам, так как используют разное СПО.

Еще одним примером заданий различного типа являются задачи загрузки информации в некоторую базу данных (БД), с одной стороны, и выгрузки данных, полученных в результате некоторого запроса — с другой. В дальнейшем изложении предполагается, что изучаются задачи одного фиксированного типа.

Задания, принадлежащие одному типу, отличаются друг от друга. Эти отличия описываются некоторым вектором параметров. Самой простой характеристикой задания является объем данных, обрабатываемых в процессе его выполнения, например, объем видеофайлов, подлежащих сжатию, число снимков, подлежащих распознаванию, объем информации, подлежащих загрузке в БД, и пр. Тем не менее характеристики задания не исчерпываются объемом данных. Например, в задании обучения нейронной сети в качестве параметров могут выступать:

- число слоев в сети,
- максимальное число узлов в слое,
- объем обучающего банка,
- параметр, определяющий условие остановки процесса обучения.

Как уже было отмечено ранее, время выполнения индивидуальных заданий того или иного типа содержит в себе неопределенность, порожденную различными причинами. Первая из них — “закрытый” характер функционирования ПО. Неопределенность этого сорта проявляется в колебаниях времени даже при выполнении заданий с одинаковыми параметрами.

Вторая причина кроется в неопределенности выбора пользователем того или иного вектора параметров задания и входных данных. Эта неопределенность может быть частично сокращена с помощью формирования так называемого *пользовательского профиля* по исторической информации о запросах данного пользователя на выполнение заданий изучаемого типа. Например, задание на скачивание фильмов из некоторого хранилища в 80% случаев относится к полнометражным фильмам продолжительностью от 90 до 240 мин, в 15% случаев — к короткометражным фильмам продолжительностью от 10 до 30 мин, и в 5% случаев — к документальным фильмам продолжительностью от 40 до 90 мин. Таким образом, пользовательский профиль определяет условные доли задания с различными параметрами.

Для обеспечения оптимизации использования аппаратных ресурсов СВТ при наличии пользовательских SLA необходимо решить следующие практические проблемы.

Проблема 1. Для фиксированных аппаратных ресурсов узла, состояния ОПО и СПО, и пользовательского задания известного типа и объема оценить вероятность нарушения SLA — превышения максимального времени выполнения задания данного типа.

Проблема 2. Для известного пользовательского профиля при фиксированных аппаратных ресурсах узла, состояния ОПО и СПО оценить вероятность нарушения SLA — превышения максимального времени выполнения задания данного типа.

Формальное описание предлагаемых моделей, постановка задачи идентификации их параметров, а также математически корректная постановка и решение представленных выше проблем даны в следующих разделах.

2. Основные принципы выбора моделей. На выбор математических моделей времени выполнения заданий на вычислительных узлах фундаментальное влияние оказывает наличие неопределенности этого времени. Это означает, что повторяющееся выполнение одного и того же задания на одном и том же вычислительном узле будет требовать *разного* времени. В качестве математического аппарата, описывающего данное явление и позволяющего решать для него задачи системного анализа, можно использовать теорию нечетких множеств [12], игровой/гарантирующий подход [13, 14] и пр. Однако наиболее перспективным для этого представляется аппарат теории вероятностей. Таким образом, время выполнения задания будет считаться *случайной* величиной $\tau(\omega)$, а значит, модель, ее описывающая, относится к классу *стохастических*.

Стохастическую модель времени выполнения заданий следует выбирать, руководствуясь следующими принципами.

1. *Адекватность*: модель задает все те особенности действительного времени выполнения, которые необходимы для решения полного спектра последующих задач анализа, идентификации параметров модели и их оптимизации.

2. *Универсальность*: модель предоставляет возможность адекватно описывать время выполнения для широкого набора вычислительных узлов и пользовательских заданий.

3. *Простота*: число параметров модели должно быть, по возможности, минимальным при сохранении требуемой степени адекватности и универсальности.

4. *Гибкость по отношению к априорной информации*: модель настраивается в соответствии с дополнительной доступной информацией о характеристиках СВТ, ОПО, СПО, наличии новых или отсутствии каких-либо факторов, влияющих на время выполнения заданий того или иного типа.

5. *Развитость*: для выбранных моделей существует эффективный математический аппарат и алгоритмическое обеспечение решения всего спектра прикладных задач, связанных с анализом исследуемого времени, идентификацией параметров моделей, а также возможной последующей оптимизацией настройки виртуальных вычислительных узлов.

6. *Возможность применения имитаторов*: на предварительном этапе идентификации параметров модели при сборе статистических данных о времени выполнения заданий возможно использование тестового программного обеспечения (ТПО) (*benchmarks*) — имитаторов пользовательской нагрузки и имитаторов СПО.

3. Стохастические модели трудоемкости: формальное описание, постановка и решение задачи анализа. Согласно выбранному стохастическому подходу, время выполнения пользовательского задания некоторого фиксированного типа предлагается описывать случайной величиной $\tau(\omega)$, имеющей конечное математическое ожидание $M \triangleq E\{\tau\}$ и дисперсию $D \triangleq E\{(\tau(\omega) - M)^2\}$. Обе эти характеристики являются неизвестными функциями

$$M = M_z(x, y), \quad D = D_z(x, y),$$

где x — вектор ресурсов узла, y — вектор параметров задания, z — вектор параметров аппаратно-программной среды узла; развернутое описание данных векторов приведено ниже.

Вектор переменных $x = (x_1, \dots, x_N)$ задает аппаратно-программный состав виртуального вычислительного узла, например: x_1 — число процессорных ядер, x_2 — объем доступной оперативной памяти, x_3 — объем доступного дискового пространства.

Замечание 1. Предлагаемая модель позволяет варьировать набор x в зависимости от состава и возможности настроек виртуального узла, добавляя в него какие-то компоненты, или исключая неактуальные. Например, могут быть добавлены x_4 — объем дискового пространства, зарезервированного для подкачки страниц, x_5 — объем кэша и пр.

Вектор $y = (y_1, \dots, y_M)$ характеризует пользовательские задания фиксированного типа, поступающие на данный вычислительный узел. Компоненты y_m для разных видов заданий могут нести совершенно разный смысл, однако все они влияют на время выполнения. Например, если узел сконфигурирован для выполнения научных вычислений, скажем, для численного решения уравнений математической физики, то возможен следующий вариант: $M = 2$, y_1 — количество временных слоев в численном решении, y_2 — количество узлов пространственной сетки в численном решении.

Другой пример: на узле размещена база данных, и выполняемое на ней пользовательское задание предусматривает ввод/вывод данных и выполнение запросов на решение некоторой информационной задачи. В этом случае $M = 3$, y_1 — объем входных данных в задании, y_2 — объем выходных данных в задании, y_3 — число запросов к базе на выполнение информационных задач в задании.

Вектор $z = (z_1, \dots, z_K)$ содержит текущие параметры аппаратно-программной среды вычислительного узла. Например, если на данном вычислительном узле размещена база данных, то параметрами среды могут выступать следующие характеристики: z_1 — максимальный объем оперативной памяти, доступный на узле, z_2 — текущий объем “полезных” данных, хранящийся в базе, z_3 — общий текущий объем служебной информации, хранящейся в базе данных: журнал транзакций и пр., z_4 — средний объем оперативной памяти вычислительного узла, занимаемый ОПО, и т. д.

Замечание 2. Между векторами x , y и z существуют следующие смысловые различия. Вектор x представляет собой “управление”, доступное провайдеру. Вектор y — “управление”, доступное пользователю. И x , и y могут независимо друг от друга варьироваться в процессе нагрузочного тестирования и сбора статистической информации для последующей идентификации параметров модели. Следует также отметить, что из-за того, что на одном и том же узле могут выполняться задания различных типов, размерность вектора x и множество его возможных значений для данного узла остаются неизменными, в отличие от вектора y , характеристики которого для заданий разного типа различны.

В отличие от x и y параметры z аппаратно-программной среды не управляются напрямую ни провайдером, ни пользователем. Тем не менее его компоненты доступны прямому или косвенному наблюдению в процессе нагрузочного тестирования: информацию о нем можно получить либо путем выполнения служебных команд/запросов, либо путем анализа системных журналов.

Множество \mathcal{A} допустимых значений аргументов (x, y) является ограниченным и, более того, конечным: компоненты x_n , $n = 1, N$ и y_m , $m = 1, M$ могут принимать значения из некоторых конечных множеств. Без ограничения общности предполагается, что множество допустимых значений векторов (x, y) содержится в параллелепипеде $\mathcal{U} = [\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}]$, на котором функции $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$ обладают следующими свойствами.

1. *Неотрицательность*: для любого (x, y, z) верны неравенства

$$\mathcal{M}_z(x, y) > 0, \quad \mathcal{D}_z(x, y) > 0.$$

Данные неравенства очевидны: математическое ожидание и дисперсия любой положительной случайной величины с конечными первыми двумя моментами всегда положительны.

2. *Локальное невозрастание* $\mathcal{M}_z(\cdot)$ по x : для любого фиксированного z существует такое подмножество $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$, что для любых $(x', y^*), (x'', y^*) \in \mathcal{U}$ таких, что $x' \leq x''$ покомпонентно, выполняется

$$\mathcal{M}_z(x', y^*) \geq \mathcal{M}_z(x'', y^*).$$

Данное неравенство означает, что в некоторой подобласти \mathcal{U} рост используемых ресурсов ведет к снижению среднего времени выполнения заданий, т.е. наращивание ресурсов вычислительного узла имеет смысл.

3. *Неубывание $\mathcal{M}_z(\cdot)$ по y* : для любого фиксированного z компоненты вектора y могут быть определены так, что для любых $(x^*, y'), (x^*, y'') \in \mathcal{A}$ таких, что $y' \leq y''$ покомпонентно, верно неравенство

$$\mathcal{M}_z(x^*, y') \leq \mathcal{M}_z(x^*, y'').$$

Согласно данному свойству вектор y может быть определен таким образом, что все его компоненты будут нести смысл объема задания, и с ростом их значений время выполнения задания в среднем будет увеличиваться.

4. *Непрерывность по y* : для любых фиксированных x и z функции $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$ непрерывны по переменной y . Данное свойство означает, что при фиксированных ресурсах малые вариации объема пользовательского задания приводят к малым вариациям характеристик времени его выполнения.

5. *Выпуклость $\mathcal{M}_z(\cdot)$ по y* : для любого фиксированного z и для любых $(x^*, y'), (x^*, y'') \in \mathcal{U}$ и $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}_z(x^*, \lambda y' + (1 - \lambda)y'') \leq \lambda \mathcal{M}_z(x^*, y') + (1 - \lambda) \mathcal{M}_z(x^*, y'').$$

Согласно неравенству при фиксированных ресурсах среднее время выполнения задания как функция объема пользовательского задания растет как линейная, или быстрее.

Замечание 3. Локальность невозрастания среднего времени выполнения задач по ресурсным переменным (свойство 2) выглядит экзотично лишь на первый взгляд. Во-первых, подобный характер поведения среднего времени выполнения наблюдается при анализе функционирования реальных приложений, например баз данных. Конкретный пример данного явления будет приведен во второй части представляемого исследования. Во-вторых, неумножение времени выполнения задания с ростом объема предоставленных ресурсов может быть отчасти объяснено косвенными ограничениями и различиями в интенсивности использования ресурсов различного вида. Если представить работу всего приложения как совокупности некоторых конвейеров обработки данных разной интенсивности, эксплуатирующих единые ресурсы узла, то вполне возможна следующая ситуация. Среди упомянутых конвейеров существует один наименее производительный — “бутылочное горло”, определяющий в итоге интенсивность работы всего узла. Наращивание некоторых ресурсов выше определенного порога может вести к ситуации, когда “бутылочное горло” перестанет справляться с обработкой возросшего потока данных, и эти данные будут помещаться в очередь или попросту бесполезно теряться, требуя повторного их создания. Более того, из-за совместного использования конвейерами ресурсов часть их будет отнята у “бутылочного горла” более быстрыми конвейерами, дополнительно снижая его производительность.

Замечание 4. Для иллюстрации свойства 3 вновь рассмотрим пользовательское задание, заключающееся в численном решении некоторого уравнения математической физики. Упрощенно говоря, время выполнения задания является возрастающей функцией от числа узлов сетки, в которых требуется вычислить решение уравнения. Параметры задачи можно описать следующим образом: y_1 — шаг сетки по пространственной переменной, y_2 — шаг сетки по времени, y_3 — область интегрирования пространственной переменной, y_4 — область интегрирования по времени.

Однако такая параметризация не будет удовлетворять свойству 3: среднее время выполнения задания не будет расти с ростом шагов сетки (параметров y_1 и y_2). Параметризацию можно модифицировать подходящим образом так, чтобы свойство 3 выполнялось: корректный вариант приведен в данном разделе выше, сразу после Замечания 1.

Перечисленные свойства функций $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$ накладывают на них определенные ограничения. В работе предлагается использовать следующие зависимости.

Первая модель предполагает экспоненциальную зависимость \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z от пары (x, y) “ресурсы — объем задания” и независимость от параметров z аппаратно-программной среды:

$$f_{\rho}^1(x, y) = \alpha + \exp \left[\beta + \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n + \sum_{m=1}^M \varepsilon_m y_m \right], \quad (3.1)$$

где $\varrho \triangleq \text{vec}(\alpha, \beta, \{\gamma_n\}_1^N, \{\varepsilon_m\}_1^M)$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих последующей идентификации отдельно для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z . Свойства 1–5 функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z диктуют наличие следующих ограничений на векторы параметров:

1) $\min_{\{(x_n, y_m)\}} \left(\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n + \sum_{m=1}^M \varepsilon_m y_m \right) + \beta - \ln \alpha \geq 0$ для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z — условие неотрицательности,

2) $\frac{\gamma_n}{1, N} \leq 0$, $\overline{1, N}$ для функции \mathcal{M}_z — условие локального невозрастания по переменным x_n , $1, N$,

3) $\frac{\varepsilon_m}{1, M} \geq 0$, $\overline{1, M}$ для функции \mathcal{M}_z — условие локального неубывания по переменным y_m , $1, M$.

Экспоненциальная модель может быть использована для первоначального, так называемого разведочного статистического анализа [16], необходимого, например, для определения зоны эффективной работы виртуального узла.

Вторая модель предполагает степенную зависимость от компонентов (x, y) и независимость от параметров z аппаратно-программной среды. Таким образом, функции \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z второго типа имеют вид

$$f_{\varrho}^2(x, y) = \alpha + \beta \prod_{n=1}^N x_n^{-\gamma_n} \prod_{m=1}^M y_m^{\varepsilon_m}, \quad (3.2)$$

где $\varrho \triangleq \text{vec}(\alpha, \beta, \{\gamma_n\}_1^N, \{\varepsilon_m\}_1^M)$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих последующей идентификации отдельно для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z . Свойства 1–5 функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z диктуют наличие следующих ограничений на векторы параметров, часть из которых можно задать явно, а часть зависит от каждой конкретной задачи идентификации:

4) $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z — условие неотрицательности,

5) $\gamma_n \geq 0, n = 1, N$ для функции \mathcal{M}_z — условие невозрастания по переменной $x, n = \overline{1, N}$,

6) $\varepsilon_m \geq 0, m = 1, M$ для функции \mathcal{M}_z — условие неубывания по переменной $y, m = \overline{1, M}$.

Третья модель предполагает кусочно-линейную зависимость по переменной y . При этом подмножества $\{U_j\}_{j=\overline{1, J}}$ множества \mathcal{U} , на которых функции $\mathcal{M}_z(x, y)$ и $\mathcal{D}_z(x, y)$ являются линейными по переменным y , образуют разбиение $\mathcal{U}: U_i \cap U_j = \emptyset$ для $\forall i \neq j$ и $\bigcup_{j=1}^J U_j = \mathcal{U}$. Введем в рассмотрение индикаторные функции $\mathbf{I}_{U_j}(x, y)$ множеств $\{U_j\}_{j=\overline{1, J}}$:

$$\mathbf{I}_{U_j}(x, y) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in U_j, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin U_j. \end{cases}$$

Для выполнения заданий различного объема виртуальный вычислительный узел использует различное количество ресурсов. При достижении заданиями определенных объемов узел скачкообразно меняет процедуру их обработки, при этом эти изменения недоступны прямому наблюдению. О них можно судить только косвенно, анализируя информацию, хранящуюся в системных журналах. Данный скачок и является причиной смены параметров линейной зависимости времени обработки от объема задания. Наиболее “выпукло” подобное явление можно наблюдать при варьировании объема заданий и скачкообразной смене использования оперативной памяти. При малых объемах все задание умещается в кэше — наиболее быстродействующей области оперативной памяти. Затем с ростом объема задание начинает заполнять свободную часть оперативной памяти, и скорость обработки несколько снижается. Как только объема оперативной памяти не хватает для полного размещения задания, включается механизм подкачки страниц, что резко увеличивает время обработки.

Итак, функции \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z третьего типа имеют вид

$$f_{\varrho}^3(x, y) = \alpha + \prod_{n=1}^N x_n^{-\beta_n} \sum_{j=1}^J \mathbf{I}_{U_j}(x, y) \left(\sum_{m=1}^M \gamma_{jm} y_m + \varepsilon_j \right), \quad (3.3)$$

где $\varrho \triangleq \text{vec}(\alpha, \{\beta_n\}_1^N, \{\gamma_{jm}\}_{1,1}^{J,M}, \{\varepsilon_j\}_1^J)$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих последующей идентификации отдельно для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z . Следует уточнить, что γ_{jm} — это коэффициенты линейной зависимости по переменной $y_m, m = \overline{1, M}$ в области $U_j, j = \overline{1, J}$.

Свойства 1—5 функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z определяют следующие ограничения на оцениваемые параметры:

7) $\alpha \geq 0$ для функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z — условие неотрицательности,

8) $\beta_n \geq 0, n = \overline{1, N}$, для функций \mathcal{M}_z — локальное невозрастание по функции x ,

9) $\gamma_{jm}^M \geq 0, m = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$, — неубывание \mathcal{M}_z по переменной y ,

10) совместные ограничения на $\{\gamma_{jm}\}_{1,1}^{J,M}$ и $\{\varepsilon_j\}_1^J$, обеспечивающие непрерывность функций \mathcal{M}_z и \mathcal{D}_z по переменной y ,

11) совместные ограничения на $\{\gamma_{jm}\}_{1,1}^{J,M}$ и $\{\varepsilon_j\}_1^J$, обеспечивающие выпуклость \mathcal{M}_z по переменной y .

Замечание 5. Модели среднего времени выполнения заданий (3.2) и (3.3) допускают следующую экономическую интерпретацию. Предположим, что алгоритм, реализующий решение пользовательского задания, относится к классу сложности P . Это означает, что число операций, обеспечивающих выполнение задания, ограничено сверху некоторой степенной, в частном случае линейной функцией компонентов вектора Y . Из-за использования механизма подкачки страниц при недостатке оперативной памяти число операций может увеличиваться, что описывается с помощью степенной или выпуклой кусочно-линейной функции параметров задания. Интенсивность выполнения задания, определяющая число операций алгоритма, выполняемого на вычислительном узле в единицу времени, близка по смыслу к производственной функции [10], в которой в качестве ресурсов выступают компоненты вектора x . Одной из популярных является функция Кобба—Дугласа, представляющая собой произведение компонент x с некоторыми *положительными* показателями. Зная общее число операций и интенсивность их выполнения, время выполнения задания определяется их частным. Модели (3.2) и (3.3) как раз и представляют собой отношение оценок сверху числа потребных операций к интенсивности их выполнения, описываемой функцией Кобба—Дугласа.

Предложенные стохастические модели времени выполнения позволяют корректно сформулировать проблемы 1 и 2 из предыдущего раздела как задачи анализа и решить их.

Задача анализа 1. На виртуальном узле выполняются задания фиксированного типа, функции среднего $\mathcal{M}_z(x, y)$ и дисперсии $\mathcal{D}_z(x, y)$ времени $\tau(\omega)$ выполнения задания известны. Помимо этого тройка “конфигурация узла — параметры задания — параметры аппаратно-программной среды” (x, y, z) фиксированы и известны. Пусть \bar{T} — параметр SLA, определяющий максимально допустимое время выполнения пользовательского задания Y : оценить сверху вероятность превышения временем $\tau(\omega)$ порога \bar{T} .

Решение задачи может быть получено с помощью неравенства Чебышева [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau(\omega) > \bar{T}\} &= \mathbf{P}\{\tau(\omega) - \mathcal{M}_z(x, y) > \bar{T} - \mathcal{M}_z(x, y)\} \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{D}_z(x, y)}{\mathcal{D}_z(x, y) + (\bar{T} - \mathcal{M}_z(x, y))^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Задача анализа 2. Параметры конфигурации узла x фиксированы и известны, а параметры пользовательского задания $Y(\omega)$ являются случайными. Тем не менее пользовательский профиль задания известен и задан в форме вероятностного распределения $P(dy)$ вектора $Y(\omega)$. Помимо этого известна зависимость, связывающая значение параметра z от пары (x, y) : $z = z(x, y)$. Пусть \bar{T} — параметр SLA, определяющий максимальное время выполнения пользовательского задания с параметрами Y : оценить сверху вероятность превышения временем $\tau(\omega)$ порога \bar{T} .

Среднее время выполнения пользовательского задания \bar{M} вычисляется с помощью формулы полной вероятности [15]:

$$\bar{M} = \mathbf{E}\{\tau(\omega)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\tau(\omega) | Y\}\} = \mathbf{E}\{\mathcal{M}_{z(x,y)}(x, Y)\} = \int \mathcal{M}_{z(x,y)}(x, y) P(dy). \quad (3.5)$$

Аналогичным образом можно рассчитать и дисперсию \bar{D} :

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= \mathbb{E}\left\{\left(\tau(\omega) - \bar{M}\right)^2\right\} = \\
 &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left(\left(\tau(\omega) - \mathcal{M}_z(x, Y)\right) + \left(\mathcal{M}_z(x, Y) - \bar{M}\right)^2 \mid Y\right)\right\}\right\} = \\
 &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left(\tau(\omega) - \mathcal{M}_z(x, Y)\right)^2 \mid Y\right\}\right\} + \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left(\mathcal{M}_z(x, Y) - \bar{M}\right)^2 \mid Y\right\}\right\} + \\
 &\quad + 2\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left(\tau(\omega) - \mathcal{M}_z(x, Y)\right)\left(\mathcal{M}_z(x, Y) - \bar{M}\right) \mid Y\right\}\right\} = \\
 &= \int \mathcal{D}_z(x, y) P(dy) + \int \left(\mathcal{M}_z(x, y) - \bar{M}\right)^2 P(dy) = \\
 &= \int \mathcal{D}_z(x, y) P(dy) + \int \mathcal{M}_z^2(x, y) P(dy) - (\bar{M})^2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Решение задачи вновь может быть получено с помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\{\tau(\omega) > \bar{T}\} \leq \frac{\bar{D}}{\bar{D} + (\bar{T} - \bar{M})^2}. \tag{3.7}$$

Таким образом, предложенная стохастическая модель времени выполнения пользовательских заданий позволяет эффективно решать важную задачу анализа — оценивать сверху вероятность нарушения SLA.

Оценки (3.4) и (3.7), основанные на неравенствах Чебышева, являются очень консервативными. Если о распределении времени $\tau(\omega)$ имеется дополнительная информация, то предложенные оценки могут быть существенно уточнены (см. работы [17, 18] и ссылки внутри них). Отметим, что данные предположения не являются чрезмерно обременительными и почти всегда выполняются на практике.

Первое предположение заключается в том, что функция распределения $\tau(\omega)$ — вогнутая на положительной полуоси. В этом случае решение задачи анализа 1 может быть получено из неравенства Гаусса:

$$\mathbb{P}\{\tau(\omega) > \bar{T}\} \leq \begin{cases} 1 - \frac{\bar{T}}{\sqrt{3\left(\mathcal{M}_z^2(x, y) + \mathcal{D}_z(x, y)\right)}}, & \text{если } 0 \leq \bar{T} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\mathcal{M}_z^2(x, y) + \mathcal{D}_z(x, y)}, \\ \frac{4\left(\mathcal{M}_z^2(x, y) + \mathcal{D}_z(x, y)\right)}{9\bar{T}^2}, & \text{если } \frac{2\sqrt{\mathcal{M}_z^2(x, y) + \mathcal{D}_z(x, y)}}{\sqrt{3}} < \bar{T}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Второе предположение состоит в том, что у $\tau(\omega)$ имеется плотность распределения, являющаяся унимодальной функцией на положительной полуоси. В этом случае решение задачи анализа 1 может быть получено из неравенства Кантелли:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}\{\tau(\omega) > \bar{T}\} \leq \\
 &\leq \begin{cases} \frac{3\mathcal{D}_z(x, y) - (\bar{T} - \mathcal{M}_z(x, y))^2}{3\mathcal{D}_z(x, y) + 3(\bar{T} - \mathcal{M}_z(x, y))^2}, & \text{если } \mathcal{M}_z(x, y) \leq \bar{T} \leq \mathcal{M}_z(x, y) + \sqrt{\frac{5}{3}\mathcal{D}_z(x, y)}, \\ \frac{4}{9} \frac{\mathcal{D}_z(x, y)}{\mathcal{D}_z(x, y) + (\bar{T} - \mathcal{M}_z(x, y))^2}, & \text{если } \mathcal{M}_z(x, y) + \sqrt{\frac{5}{3}\mathcal{D}_z(x, y)} < \bar{T}. \end{cases} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Замечание 6. Вид функций $f_\varrho(\cdot)$, используемых для описания моментных характеристик времени $\tau(\omega)$ выполнения задания, не исчерпывается функциями (3.1) — (3.3). Причины выбора этих моделей в представляемом исследовании следующие. Экспоненциальная зависимость (3.1) может быть использована для разведочного анализа поведения описываемых моментных характеристик и определения области (x, y) , в которой узел эффективно выполняет задания указанного типа. Степенная модель (3.2) имеет удачную экономическую интерпретацию. Модель (3.3), представляющая собой степенную зависимость от ресурсных параметров и кусочно-линейную — от объема выполняемого задания, также имеет свои сильные стороны. Во-первых, она проста и экономична, так как включает небольшое число параметров. Во-вторых, эта модель позволяет описывать скачкообразную смену дисциплины обработки заданий в зависимости от их объема.

4. Задачи идентификации параметров. Пусть дан некоторый фиксированный набор $\{(x^r, y^r)\}_{r=1, \overline{R}}$ переменных (x, y) , для которых проведен комплекс нагрузочного тестирования исследуемого вычислительного узла. Результатом тестирования является набор векторов $\{\tilde{M}^r, \tilde{D}^r, \tilde{Z}^r\}_{r=1, \overline{R}}$, полученных при обработке статистической информации о работе узла при фиксированных значениях пар (x^r, y^r) . Первая компонента \tilde{M}^r представляет собой выборочное среднее времени $\tau(\omega)$, вторая — его дисперсию, а третья компонента, возможно блочная — некоторые известные выборочные характеристики аппаратно-программной среды, соответствующие паре (x^r, y^r) . Также задан набор положительных весов $\{w_r\}_{r=1, \overline{R}}$, определяющих индивидуальную значимость результат каждого эксперимента.

Выбор моделей, описывающих математическое ожидание и дисперсию времени выполнения задания среди возможных функций (3.1)—(3.3), а также идентификация их параметров, проводятся независимо. Поэтому подробно опишем постановку задачи идентификации только для функции математического ожидания: задача идентификации параметров функции дисперсии будет выглядеть абсолютно аналогично. Величина

$$\Delta_r^{M,i}(\varrho) \triangleq \tilde{M}_r - f_\varrho^i(X_r, Y_r), i = 1, 2, 3,$$

представляет собой ошибку оценки среднего значения времени выполнения задания при описании конфигурации (x^r, y^r) функцией $f_\varrho^i(\cdot)$, вычисленной со значениями параметров ϱ .

Для сравнения качества моделей с различными параметрами воспользуемся функцией потерь $\pi(u) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим свойствам [11]: $\pi(0) = 0$, $\pi(u) \geq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^2$, функция $\pi(u)$ является невозрастающей при $u < 0$ и неубывающей при $u > 0$.

Задача оптимальной идентификации модели среднего времени выполнения задания заключается в нахождении

$$(i^*, \varrho^*) \in \operatorname{Argmin}_{i, \varrho} \sum_{r=1}^R w_r \pi(\Delta_r^{M,i}(\varrho)). \tag{4.1}$$

Задача оптимальной идентификации модели дисперсии времени выполнения задания состоит в определении

$$(i^*, \varrho^*) \in \operatorname{Argmin}_{i, \varrho} \sum_{r=1}^R w_r \pi(\Delta_r^{D,i}(\varrho)). \tag{4.2}$$

Если в качестве функции потерь выступает квадратичная функция, т.е. $\pi(u) = u^2$, то (i^*, ϱ^*) называется оценкой наименьших квадратов, если используется абсолютное значение, т.е. $\pi(u) = |u|$, то (i^*, ϱ^*) — оценка наименьших модулей [19, 20]. В более общем случае, когда $\pi(u)$ является кусочно-линейной функцией, удовлетворяющей представленным выше свойствам, (i^*, ϱ^*) называется квантильной оценкой [21]. Очевидно, что (3.10) и (3.11) представляют собой взвешенный вариант задач построения М-оценок [19].

Замечание 7. Использование различных весов $\{w_r\}_{r=\overline{1,R}}$ имеет практический смысл. Во-первых, точность индивидуальных значений выборочных средних и дисперсий $(\tilde{M}^r, \tilde{D}^r)$ для разных параметров (x^r, y^r) может быть разной, и это необходимо учитывать при последующей идентификации. Такая ситуация может складываться в том случае, когда при некотором аппаратно-программном составе узла x^r время выполнения заданий y^r достаточно велико и нет возможности найти тестовую выборку достаточного размера для последующего осреднения и получения $(\tilde{M}^r, \tilde{D}^r)$ приемлемой точности. Во-вторых, на практике наблюдается следующее явление: в случае “скудных” ресурсов x наблюдается большой разброс времени $\tau(\omega)$, что ведет к низкой точности выборочных моментов \tilde{M}^r и \tilde{D}^r . Так как модели $M(\cdot)$ и $D(\cdot)$ строятся едиными как для всех значений x , то неравноточность наблюдений $(\tilde{M}_r, \tilde{D}_r)$ можно учитывать путем выбора соответствующих весов w_r . В-третьих, владелец вычислительного узла может иметь некоторую дополнительную априорную информацию о предпочтении пользователя выполнять задания с определенными параметрами чаще остальных. В связи с этим может возникнуть задача идентифицировать параметры таким образом, чтобы модель точнее описывала время выполнения именно предпочитаемых пользователем заданий, возможно, в ущерб описанию остальных.

5. Статистическая информация для идентификации моделей: принципы сбора и обработки. Задача идентификации параметров модели трудоемкости заданий при их выполнении на некотором виртуальном узле является абсолютно практической, и поэтому сбор статистических данных для ее решения должен проводиться на той же аппаратно-программной платформе, которая и будет затем использоваться в реальности. Затруднение может возникнуть только при оснащении узла планируемым СПО: по разным причинам оно может быть недоступно до момента реальной эксплуатации. В этом случае данное СПО следует заменить ТПО, близким по целевой направленности к планируемому СПО.

В настоящее время существует достаточно большой выбор доступного ТПО, отличающегося друг от друга:

- предметом тестирования (общая производительность компьютера, производительность процессора, графических сопроцессоров, дисковой системы и пр.),
- набором симулируемых приложений (офисные программы, базы данных, научные вычисления и пр.),
- уровнем кроссплатформенности и готовности к нагрузочному тестированию (готовность “из коробки” / необходимость предварительной компиляции кода для тестируемой аппаратно-программной платформы),
- уровнем сервиса сбора статистической информации в процессе нагрузочного тестирования (есть/нет встроенная возможность журналирования используемых ресурсов),
- видом лицензии (платная/бесплатная).

В исследуемой задаче идентификации первые два признака являются ключевыми при выборе того или иного ТПО. Следующие виды ТПО позволяют имитировать нагрузку, порождаемую:

- офисными приложениями [22, 23],
- компиляторами, интерпретаторами [24],
- сжатием данных, в том числе видео [24],
- научными вычислениями (гидродинамика, моделирование атмосферы, молекулярная динамика и пр.) [24],
- 3D-рендерингом [24],
- транзакциями баз данных [25].

Использование ТПО вместо СПО допустимо на начальном этапе идентификации, однако окончательное уточнение параметров модели возможно только на основе статистической информации, полученной при эксплуатации реального СПО. Далее, вне зависимости от применения СПО/ТПО следует учитывать, что для решения задач оптимальной идентификации среднего времени (3.10) и дисперсии (3.11) выполнения задания необходимо многократное повторение тестов с одними и теми же значениями пар (x^r, y^r) с последующим вычислением по ним соответствующих выборочных моментов $(\tilde{M}^r, \tilde{D}^r)$.

Помимо измерения времени τ во время нагрузочного тестирования следует с некоторой периодичностью регистрировать данные, относящиеся к состоянию аппаратно-программной

среды, т.е. ту информацию, обработка которой позволит определить компоненты вектора ζ . Обычно фиксируется следующая информация:

- процент использования процессорного времени,
- объем оперативной памяти,
- объем записанных данных,
- объем считанных данных,
- объем страничной памяти,
- объем данных, записанных во вторичное хранилище страничной памяти (своп),
- объем данных, считанных из свопа и пр.

Обычно периодичность фиксации данных составляет 1 с. Для дальнейшей обработки полученных “сырых” данных к ним обычно применяются стандартные операции осреднения, нахождения минимальных/максимальных/медианных значений и пр. Дополнительная информация в форме вектора ζ позволяет построить разбиение \mathcal{U} для последующего применения кусочно-линейной модели (3.3). Например, с помощью подобной обработки данных можно определить минимальный объем задания, с которого начинает использоваться механизм страничной подкачки памяти, кардинально замедляющий выполнение заданий.

В заключение следует отметить, что практическая реализация идентификации параметров описанных моделей связана с решением следующих проблем. Первая из них имеет более теоретический характер и связана с корректным планированием эксперимента по нагрузочному тестированию [26, 27], обеспечивающим идентифицируемость параметров [28], построением их состоятельных оценок, а также характеризацией их скорости сходимости к истинным значениям [29]. Вторая проблема является по большей части алгоритмической. Дело в том, что задачи идентификации (3.10) и (3.11) относятся к оптимизационным, критерий в которых может быть не только невыпуклым по оптимизируемым переменным, но и негладким. Набор строгих утверждений и теоретически обоснованных алгоритмов решения подобных оптимизационных проблем достаточно скуден, что ведет к необходимости использования эвристических и нейросетевых алгоритмов. Проблема заключается в рациональном выборе алгоритма оптимизации в соответствии со спецификой критерия и вида ограничений или разработке собственной версии алгоритма. Достаточно полный обзор и описание подобных алгоритмов оптимизации приведен в монографии [30].

Заключение. Первая часть исследования посвящена теоретическому аспекту построения математической модели времени выполнения пользовательских заданий на виртуальном вычислительном узле. Приведена аргументация в пользу использования вероятностного аппарата для описания фундаментального свойства вариативности, присущего этому времени. Исходя из необходимости последующей идентификации параметров модели вероятностного распределения времени, предложено ограничиться двумя его первыми моментами. Аргументы функций, описывающих выбранные моменты, включают в себя характеристики ресурсов, пользовательских заданий и аппаратно-программной среды. В работе представлены свойства этих функций, а также некоторые их варианты. Очевидно, что функции содержат неизвестные параметры, подлежащие идентификации для каждого вычислительного узла и вида заданий по статистическим данным, полученным в результате нагрузочных испытаний. Среди различных видов оценок параметров предлагается использовать взвешенные М-оценки. Представлены принципы сбора и обработки статистической информации по результатам нагрузочного тестирования, проводимого в целях идентификации параметров предложенной модели.

Исследования в данной области нельзя считать законченными. Перспективными предполагаются следующие направления. Во-первых, параметрическая идентификация модели является достаточно ресурсозатратной задачей, требующей продолжительного и разнообразного нагрузочного тестирования. В связи с этим вопросы оптимизации плана тестирования и адаптивного уточнения параметров модели в процессе эксплуатации узла представляются весьма актуальными. К этой же области следует отнести возможное расширение и уточнение класса функций, описывающих моментные характеристики времени выполнения заданий. Во-вторых, важной является детализация модели, позволяющая учитывать некоторые дополнительные особенности функционирования виртуальных узлов: совместное использование аппаратных ресурсов различными виртуальными узлами, одновременное обращение различных пользователей к одному виртуальному узлу и пр.

Однако первостепенное значение имеет проверка возможности применения предложенной методологии для построения моделей трудоемкости вычислительных заданий различного типа: реализации обработки информации в базах данных, научных вычислений, обработки изображений, сжатия данных и пр. Именно эту цель преследуют последующие части данного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sirohi P., Agarwal A., Maheshwari P.* A Survey on Augmented Virtual Reality: Applications and Future Directions // Seventh Intern. Conf. on Information Technology Trends (ITT). Abu Dhabi, United Arab Emirates, 2020, P. 99–106.
2. *Gupta P., Krishna C., Rajesh R.* et al. Industrial Internet of Things in Intelligent Manufacturing: a Review, Approaches, Opportunities, Open Challenges, and Future Directions // Int. J. Interact. Des. Manuf. 2022.
3. *Parveen I., C.A., Anjali, O., Sunder, R.* Internet of Things: A Review on Its Applications // Information and Communication Technology for Competitive Strategies (ICTCS 2021). Lecture Notes in Networks and Systems. 2021. V. 400. P. 123–134.
4. *Fraga-Lamas P., Fernández-Caramés T., Suárez-Albela M., Castedo L., González-López M.* A Review on Internet of Things for Defense and Public Safety // Sensors. 2016. V. 16. Iss. 10. P. 1644.
5. *Abu Talib M., Abbas S., Nasir Q., Mowakeh M.* Systematic literature review on Internet-of-Vehicles Communication Security // Intern. J. of Distributed Sensor Networks. 2018. V. 14. P. 12.
6. *Nocedal J., Wright S.* Numerical Optimization. N.Y.: Springer, 2006. 686 p.
7. *Bertsekas D.* Convex Optimization Algorithms. Belmont: Athena Scientific, 2015. 576 p.
8. *Kearns M.* The Computational Complexity of Machine Learning. Cambridge: MIT Press, 1990. 182 p.
9. *Teller S., Séquin C.* Visibility preprocessing for interactive walkthroughs // Proc. 18th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. 1991. P. 61–70.
10. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 600 с.
11. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
12. *Броневич А., Ленский А.* Нечеткие модели анализа данных и принятия решений. М.: ВШЭ, 2022. 264 с.
13. *Pankov A., Siemenikhin K.* Minimax Estimation for Singular Linear Multivariate Models with Mixed Uncertainty // J Multivariate Analysis. 2007. V. 98. Iss. 1. P. 145–176.
14. *Borisov A.* Minimax Estimation in Regression under Sample Conformity Constraints // Mathematics. 2021. V. 9. P. 1080.
15. *Ширяев А.* Вероятность. М.: Физматлит, 1989. 644 с.
16. *Tukey J.* Exploratory Data Analysis. Boston: Addison-Wesley, 1977. 712 p.
17. *Семенович К.* Двусторонняя вероятностная граница для симметричной унимодальной случайной величины // АИТ. 2019. № 3. С. 103–122.
18. *Ion R., Klaassen C., van der Heuvel E.* Sharp Inequalities of Bienaymé-Chebyshev and Gauß Type for Possibly Asymmetric Intervals Around the Mean // TEST. 2023. <https://doi.org/10.1007/s11749-022-00844-9>
19. *Демиденко Е.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
20. *Мудров В., Кушко В.* Метод наименьших модулей. М.: URSS, 2022. 64 с.
21. *Koenker R.* Quantile Regression. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 368 p.
22. <https://bapco.com/products/sysmark-25/>
23. <https://benchmarks.ul.com/pcmark10>
24. <https://www.spec.org/cpu2017/>
25. <https://www.tpc.org/tpce/>
26. *Ермаков С., Козлов В., Жигляевский А.* Математическая теория планирования эксперимента. М.: Наука, 1983. 392 с.
27. *Black R.* Managing the Testing Process, 3rd Edition: Practical Tools and Techniques for Managing Hardware and Software Testing. Indianapolis: Wiley, 2009. 672 p.
28. *Льюнг Л.* Идентификация систем: Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
29. *Ивченко Г., Медведев Ю.* Математическая статистика. М.: URSS, 2014. 608 с.
30. *Пантелеев А., Метлицкая Д., Алешина Е.* Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. 244 с.

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.977, 681.514.5

ОПТИМАЛЬНЫЙ КОНЕЧНОМЕРНЫЙ РЕГУЛЯТОР
СОСТОЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОБЪЕКТА ПО ЕГО ВЫХОДУ.

II. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ТЕОРЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ

© 2024 г. Е.А. Руденко

Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия
e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.07.2023 г.

После доработки 05.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Продолжается рассмотрение задачи синтеза инерционного закона управления по выходу непрерывным нелинейным стохастическим объектом, который оптимален в среднем и на конечном интервале времени, причем работает с желаемой быстротой. Приводится алгоритм синтеза оптимальной структуры динамического регулятора подбираемого конечного порядка, полученный в первой части статьи для случая точных измерений части переменных состояния объекта управления. Подробно демонстрируется его применение для случая, когда переменные состояния объекта измеряются со случайными погрешностями. На примере линейно-квадратично-гауссовской задачи показано, что известной теореме разделения удовлетворяет и предлагаемый регулятор соответствующего порядка.

Ключевые слова: оптимальность в среднем, уравнение состояния быстрого регулятора, функция его выхода, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, условная плотность вероятности, достаточные условия Лагранжа–Кротова, структура регулятора

DOI: 10.31857/S0002338824010041, EDN: IXARSQ

OPTIMAL FINITE-DIMENSIONAL CONTROLLER OF THE
STOCHASTIC DIFFERENTIAL OBJECT'S STATE BY ITS OUTPUT
II. STOCHASTIC MEASUREMENTS AND SEPARATION THEOREM

© 2024 E.A. Rudenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Consideration is continued of the problem of the inertial control law by the output synthesis of a continuous nonlinear stochastic plant, which is optimal on average and on a finite time interval, and works with the desired speed. An algorithm for synthesizing the optimal structure of a dynamic controller of a selected finite order, obtained in the first part of the article for the case of accurate measurements of a of the control object's state variables part, is presented. Its application is demonstrated in detail for the case when the state variables of an object are measured with random errors. Using the example of a linear-quadratic-Gaussian problem, it is shown that the proposed controller of the corresponding order also satisfies the well-known separation theorem.

Keywords: optimality on average, equation of a fast controller state, function its output, Fokker–Planck–Kolmogorov equation, conditional probability density, sufficient conditions for Lagrange–Krotov, structure of the controller

Введение. Приведем постановку общей задачи и основные результаты ее решения [1].

0.1. Постановка задачи при неполных измерениях. Если часть $Y_t \in \mathbb{R}^m$ случайного вектора состояния (X_t, Y_t) динамического объекта управления измеряется точно,

то он описывается системой из двух стохастических дифференциальных уравнений Ито (двойная марковская модель управляемой системы):

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t, Y_t, U_t)dt + B(t, X_t, Y_t, U_t)dW_t, & X_0 &\sim \rho_0(x | y), \\ dY_t &= c(t, X_t, Y_t, U_t)dt + D(t, X_t, Y_t, U_t)dW_t, & Y_0 &\sim q_0(y). \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь $t \in [0, T]$ — время работы объекта, $X_t \in \mathbb{R}^n$ — неизмеряемая часть вектора состояния объекта, $U_t \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ — вектор управления, $W_t \in \mathbb{R}^k$ — вектор стандартного винеровского процесса, закон распределения неизмеряемого вектора X_0 определяется условной плотностью вероятности $\rho_0(x | y)$, в то время как плотность вероятности $q_0(y)$ измеряемого вектора Y_0 может быть произвольной.

Требуется найти дифференциальное уравнение состояния динамического регулятора

$$dZ_t = f(t, Y_t, Z_t)dt + G(t, Y_t, Z_t)dY_t, \quad Z_0 = h(Y_0), \quad (0.2)$$

с вектором состояния $Z_t \in \mathbb{R}^p$ размерности $p = 1, 2, \dots$, выбираемой из условия компромисса между достижением приличного качества управления и обеспечением желаемого быстродействия этого регулятора на реализующем его вычислителе, и формулу его выхода

$$U_t = u(t, Y_t, Z_t). \quad (0.3)$$

При этом неизвестные структурные функции регулятора — смещения $f(t, y, z) \in \mathbb{R}^p$, усиления $G(t, y, z) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, начального состояния $h(y) \in \mathbb{R}^p$ и выхода $u(t, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ — определяются из условия минимума функционала качества всей замкнутой системы управления:

$$I[u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot)] = M \left[\int_0^T \mu(t, X_t, Y_t, U_t, Z_t)dt + v(X_T, Y_T, Z_T) \right] \rightarrow \min \quad \forall q_0(y). \quad (0.4)$$

Здесь M — оператор математического ожидания, конечный момент времени T является фиксированным, а функции потерь $\mu(t, x, y, u, z)$, $v(x, y, z)$ — неотрицательными $\mu(\cdot) \geq 0$, $v(\cdot) \geq 0$. Такая зависимость последних от переменной z позволяет накладывать ограничения и на желаемую эффективность регулятора.

Задача построения такого же конечномерного регулятора, но для зависящего от времени оперативного критерия качества рассмотрена в [2].

0.2. Сведение задачи к детерминированной. Подстановка формулы выхода регулятора (0.3) в функционал (0.4) позволяет записать последний через совместную плотность вероятности $r(t, x, y, z)$ всех элементов случайного вектора состояния $\Xi_t = (X_t^T, Y_t^T, Z_t^T)^T$ замкнутой системы управления (0.1)—(0.3):

$$I = \int_0^T \left\langle \mu^u(t, x, y, z), r(t, x, y, z) \right\rangle dt + \left\langle v(T, x, y, z), r(T, x, y, z) \right\rangle \rightarrow \min \quad \forall q_0(y). \quad (0.5)$$

Здесь и далее верхним индексом u отмечены сложные функции, содержащие функцию выхода регулятора $u(\cdot)$, например $\mu^u(t, x, y, z) = \mu(t, x, y, u(t, y, z), z)$, угловыми скобками обозначен интеграл усреднения функции с весом в виде совместной плотности $r(t, \cdot)$:

$$\langle \eta, r \rangle = M[\eta(t, X_t, Y_t, Z_t)] = \iiint \eta(t, x, y, z)r(t, x, y, z) dx dy dz,$$

а интегралы по переменным x, y, z берутся по всему евклидову пространству соответствующей размерности, в частности

$$\int \alpha(x) dx \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx.$$

Совместная плотность вероятности $r(\cdot)$ при определенных условиях гладкости функций дифференциальных уравнений объекта-измерителя (0.1) и регулятора (0.2) является решением уравнения *Фоккера—Планка—Колмогорова* (ФПК):

$$\frac{\partial r(t, x, y, z)}{\partial t} = K_{xyz}^{ufG} [r(t, x, y, z)], \quad t \in [0, T]. \quad (0.6)$$

Здесь K_{xyz}^{ufG} — прямой производящий оператор диффузионного марковского процесса Ξ_t :

$$K_{xyz}^{ufG} = -\nabla_x^T a^u - \nabla_y^T c^u - \nabla_z^T (f + Gc^u) + 0.5\text{tr}[\nabla_x \nabla_x^T Q^u] + \text{tr}[\nabla_x \nabla_y^T S^{uT} + 0.5\nabla_y \nabla_y^T R^u] + \\ + \text{tr}[\nabla_x \nabla_z^T GS^{uT} + \nabla_y \nabla_z^T GR^u + 0.5\nabla_z \nabla_z^T GR^u G^T],$$

где Q^u, R^u, S^u — коэффициенты диффузии исходного процесса $(X_t^T, Y_t^T)^T$:

$$Q^u = B^u B^{uT}, \quad R^u = D^u D^{uT}, \quad S^u = B^u D^{uT}.$$

Начальным для уравнения (0.6) является условие

$$r(0, x, y, z) = \rho_0(x | y) q_0(y) \delta[z - h(y)], \quad (0.7)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака.

При недифференцируемости коэффициентов уравнения (0.6) по переменным x, y, z его решение будем понимать в обобщенном смысле как удовлетворяющее справедливому для любой пробной функции $\eta(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}$ интегродифференциальному тождеству

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, r \rangle = \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG} [\eta], r \right\rangle \quad \forall \eta(\cdot) \quad (0.8)$$

с начальным условием

$$\langle \eta, r \rangle|_{t=0} = \iint \eta[0, x, y, h(y)] \rho_0(x | y) q_0(y) dx dy \quad (0.9)$$

и с сопряженным к оператору K_{xyz}^{ufG} обратным производящим оператором процесса Ξ_t :

$$K_{xyz}^{*ufG} [\eta] = a^{uT} \eta_x + c^{uT} \eta_y + (f + Gc^u)^T \eta_z + 0.5\text{tr}[Q^u \eta_{xx}] + \text{tr}[S^{uT} \eta_{xy} + 0.5R^u \eta_{yy}] + \\ + \text{tr}[GS^{uT} \eta_{xz} + GR^u \eta_{yz} + 0.5GR^u G^T \eta_{zz}]. \quad (0.10)$$

Здесь нижними индексами обозначены столбцы первых и матрицы вторых частных производных скалярной функции $\eta(\cdot)$ соответственно.

Однако неопределенность в начальных условиях (0.7) или (0.9) функций $q_0(y), h(y)$ не позволяет пользоваться уравнениями (0.6) или (0.8). В этих условиях совместную плотность $r(\cdot)$ удастся заменить [3] на соответствующую ей *условную плотность вероятности* (УПВ) случайной величины X_t :

$$\rho(t, x | y, z) = r(t, x, y, z) / \int r(t, x, y, z) dx.$$

Далее операцию *условного усреднения* функции только по переменной x с весом $\rho(\cdot)$ будем обозначать *чертой сверху*:

$$\bar{\eta}(t, y, z) = \int \eta(t, x, y, z) \rho(t, x | y, z) dx. \quad (0.11)$$

В [3] показано, что УПВ в общем случае полностью определяется своим известным начальным значением $\rho(0, x | y, z) = \rho_0(x | y)$ и нелинейным интегродифференциальным тождеством:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \eta \rho dx = \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xyz}^{*ufG}[\eta] \right) \rho dx - L_{yz}^{*ufG} \left[\int \eta \rho dx \right] \quad \forall \eta(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}, \quad (0.12)$$

в котором новый оператор L_{yz}^{*ufG} имеет вид

$$L_{yz}^{*ufG}[\xi] = \xi_y^T \bar{c}^u + \xi_z^T (f + G \bar{c}^u) + 0.5 \operatorname{tr} \left[\bar{R}^u \xi_{yy} \right] + \operatorname{tr} \left[G \bar{R}^u \xi_{yz} + 0.5 G \bar{R}^u G^T \xi_{zz} \right], \quad (0.13)$$

а его коэффициенты $\bar{c}^u(\cdot)$, $\bar{R}^u(\cdot)$ зависят от плотности $\rho(\cdot)$ как функции условного среднего (0.11).

Если функции $a(\cdot)$, $B(\cdot)$ из (0.1) непрерывно дифференцируемы по x один и два раза соответственно, то из (0.12) следует, что плотность $\rho(\cdot)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = K_x^u[\rho] - L_{yz}^{*ufG}[\rho], \quad K_x^u[\rho] = -\nabla_x^T (a^u \rho) + 0.5 \operatorname{tr} \left[\nabla_x \nabla_x^T (Q^u \rho) \right]. \quad (0.14)$$

В результате исходная стохастическая задача (0.1)–(0.4) сведена к задаче управления детерминированным объектом (0.14) с распределенными параметрами в виде функций его состояния $\rho(\cdot)$ и управления $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$, $u(\cdot)$, оптимизируемых по критерию (0.5).

0.3. Достаточные условия оптимальности структуры регулятора. Пусть $\varphi(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2,2}$ — функция Лагранжа—Кротова, тогда как H_{yz}^{ufG} — “стохастический” гамильтониан

$$H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = \int \left(K_{xyz}^{*ufG}[\varphi] - \mu^u \right) \rho dx, \quad (0.15)$$

который является линейным относительно функций $\varphi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ функционалом с шестью параметрами t, y, z, u, f, G . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. Достаточным условием оптимальности в смысле (0.4) всех структурных функций $f(\cdot)$, $G(\cdot)$, $h(\cdot)$, $u(\cdot)$ регулятора (0.2), (0.3) является наличие такой дифференцируемой функции $\varphi(t, x, y, z)$, что экстремумы

$$\alpha(y, z) = \min_{\rho(\cdot)} \int (\varphi + v) \rho dx \Big|_{t=T} = 0 \quad \forall y, z, \quad (0.16)$$

$$\beta(y) = \max_h \int \varphi(0, x, y, h) \rho_0(x | y) dx \quad \forall y, \quad (0.17)$$

$$\gamma(t, y, z) = \max_{\rho(\cdot)} \left\{ \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho dx + \max_{u, f, G} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \right\} = 0 \quad \forall t \in (0, T), y, z \quad (0.18)$$

существуют и достигаются на множестве допустимых функций $\mathbf{D}_\rho = \{u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h(\cdot), \rho(\cdot)\}$, связанных тождеством для УПВ (0.12) или ее уравнением (0.14). При этом минимальное значение критерия (0.4) находится по функции (0.17) и плотности $q_0(y)$ начального измерения Y_0 :

$$\min_{\mathbf{D}_\rho} I = - \int \beta(y) q_0(y) dy.$$

Из соотношения (0.18) следует, что оптимальные функции $f^o(\cdot)$, $G^o(\cdot)$ уравнения состояния регулятора и оптимальная функция его выхода $u^o(\cdot)$ находятся в результате максимизации гамильтониана (0.15) по трем его параметрам u, f, G из шести:

$$\left\{ u^o(t, y, z), f^o(t, y, z), G^o(t, y, z) \right\} = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, f \in \mathbb{R}^p, G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \quad \forall t, y, z. \quad (0.19)$$

Функцию же начального состояния $h(y)$ регулятора получим из (0.17) подобной максимизацией условного среднего начального значения функции $\varphi(\cdot)$:

$$h^0(y) = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^p} \int \varphi(0, x, y, h) \rho_0(x | y) dx \quad \forall y. \quad (0.20)$$

0.4. Соотношения для экстремалей. Используя в (0.16), (0.18) необходимое условие экстремума оптимизируемых там функционалов, получим для рассматриваемой задачи управления детерминированным объектом с распределенными параметрами следующий аналог принципа максимума Понтрягина. Для наиболее простого случая дифференцируемости функций имеем следующий результат.

Теорема 2 [1]. Экстремали уравнений регулятора $\tilde{u}(\cdot), \tilde{f}(\cdot), \tilde{G}(\cdot)$, порождаемая ими плотность вероятности $\tilde{\rho}(\cdot)$ и соответствующая им сопряженная функция $\tilde{\varphi}(\cdot)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t, x | y, z)}{\partial t} &= K_x^{\tilde{u}}[\tilde{\rho}] - L_{yz}^{*\tilde{u}\tilde{f}\tilde{G}}[\tilde{\rho}], \quad \tilde{\rho}|_{t=0} = \rho_0(x | y), \\ -\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x, y, z)}{\partial t} &= K_{xyz}^{*\tilde{u}\tilde{f}\tilde{G}}[\tilde{\varphi}] - \mu^{\tilde{u}}, \quad \tilde{\varphi}|_{t=T} = -v(x, y, z), \\ (\tilde{u}(t, y, z), \tilde{f}(t, y, z), \tilde{G}(t, y, z)) &= \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, f \in \mathbb{R}^p, G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{ufG}[\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}] \quad \forall t, y, z. \end{aligned}$$

Эти уравнения образуют на интервале времени $t \in [0, T]$ двухточечную краевую задачу, решая которую можно найти все пять экстремалей. После этого экстремаль начального условия регулятора $h(y)$ находится из (0.17):

$$\tilde{h}(y) = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^p} \int \tilde{\varphi}(0, x, y, h) \rho_0(x | y) dx \quad \forall y.$$

0.5. Оптимальная структура динамического регулятора. Решая задачу (0.19) нахождения частного максимума гамильтониана H с помощью известного принципа сечений последовательно, от простого к сложному:

$$\max_{u, f, G} H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] = \max_u \left[\max_G \left(\max_f H_{yz}^{ufG}[\varphi, \rho] \Big|_{\forall u, G} \right) \Big|_{\forall u} \right], \quad (0.21)$$

можно найти следующие соотношения для нахождения структурных функций регулятора.

0.5.1. Функция смещения. Вычисляя в (0.21) первый, внутренний, частный максимум функции H по параметру f , получим следующий результат.

Теорема 3 [1]. Частный максимум гамильтониана H по линейно входящему в него параметру f существует при условии инвариантности (независимости) H от f :

$$\overline{\varphi_z} = \int \varphi_z(t, x, y, z) \rho(t, x | y, z) dx = 0,$$

а соответствующая оптимальная функция смещения регулятора определяется по формуле

$$f(t, y, z) = -\left(\overline{\varphi_{zz}}\right)^{-1} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_z + K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_z] \right) \rho dx.$$

Здесь действие оператора K_{xyz}^{*u0G} на вектор-функцию φ_z осуществляется поэлементно:

$$K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_z] = \left[K_{xyz}^{*u0G}[\varphi_{z_i}] \right]_{i=1, p}.$$

0.5.2. Функция усиления. Согласно (0.21), сначала находится зависящая от переменной управления u частично-оптимальная функция усиления

$$G^u(t, y, z) = G_*(t, y, z; u) = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] \quad \forall t, y, z, u \quad (0.22)$$

и соответствующее ей значение второго частного максимума гамильтониана

$$H_{yz}^u[\varphi, \rho] = \max_G H_{yz}^{u0G}[\varphi, \rho] \Big|_{\forall u} \quad (0.23)$$

для его последующей максимизации по переменной u .

Теорема 4 [1]. Если шум измерителя не вырожден $R^u(\cdot) > 0$, а матрица вторых производных функции Лагранжа—Кротова отрицательно определена $\varphi_{zz}(\cdot) < 0$, то частично-оптимальная функция усиления $G^u(\cdot)$ находится из алгебраического уравнения

$$\int \varphi_{zz}(t, x, y, z) G^u(t, y, z) R^u(t, x, y, z) \rho dx = - \int \left[c^u \varphi_z^T + S^{uT} \varphi_{xz} + R^u \varphi_{yz} \right]^T \rho dx,$$

а гамильтониан (0.23) имеет вид

$$H_{yz}^u[\varphi, \rho] = \int \left(\begin{array}{l} -\mu^u + a^{uT} \varphi_x + c^{uT} \varphi_y + 0.5 \text{tr}[Q^u \varphi_{xx}] + \\ + \text{tr}[S^{uT} \varphi_{xy} + 0.5 R^u \varphi_{yy}] + \text{tr}[G^u \Delta_{xyz}^u[\varphi] + 0.5 G^u R^u G^{uT} \varphi_{zz}] \end{array} \right) \rho dx.$$

Здесь уже верхний индекс u у функций просто подчеркивает их зависимость от этой переменной, например $a^u = a(t, x, y, u)$.

0.5.3. Функция выхода. Осталось максимизировать функцию (6.9) по переменной управления.

Теорема 5 [1]. Если функция (6.9) выпукла по переменной управления u , то оптимальная функция выхода регулятора $u(\cdot)$ определяется как единственное решение задачи параметрического нелинейного программирования:

$$u(t, y, z) = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l} H_{yz}^u[\varphi, \rho], \quad \forall t, y, z.$$

Оптимальная же функция усиления регулятора $G(\cdot)$ находится подстановкой этого результата в частично-оптимальную функцию усиления (0.22):

$$G(t, y, z) = G^{u(t, y, z)}(t, y, z) = G_*(t, y, z; u(t, y, z)).$$

0.5.4. Функция начального состояния. Наконец, из (0.20) легко получим такое утверждение.

Теорема 6 [1]. Оптимальная функция $h(y)$ определяется из условий

$$\int \varphi_z(0, x, y, h) \rho_0(x | y) dx = 0 \quad \forall y, \quad \int \varphi_{zz}(0, x, y, h) \rho_0(x | y) dx < 0 \quad \forall y, h,$$

первое из которых есть алгебраическое уравнение относительно переменной h , а второе гарантирует наличие соответствующего максимума.

1. Стохастические измерения состояния объекта. Рассмотрим теперь более простую *скрытую* марковскую модель управляемой системы, когда система уравнений (0.1) распадается на независимое от измерения Y_t уравнение состояния объекта управления

$$dX_t = a(t, X_t, U_t) dt + B(t, X_t, U_t) dW_t, \quad X_0 \sim p_0(x), \quad (1.1)$$

и на уравнение управляемого, в общем случае, измерителя

$$dY_t = c(t, X_t, U_t) dt + D(t, X_t, U_t) dW_t, \quad Y_0 = 0. \quad (1.2)$$

Нулевое начальное условие в (1.2) общности измерений не ограничивает, так как это уравнение является дифференциальной формой записи формулы неточных измерений:

$$Y_t = \int_0^t c(\tau, X_\tau, U_\tau) d\tau + \int_0^t D(\tau, X_\tau, U_\tau) dW_\tau.$$

Отметим, что объект (1.1) и измеритель (1.2) возмущаются одним и тем же гауссовским белым шумом $V_t = dW_t/dt$. Чтобы обеспечить независимость отдельных возмущений для объекта и для измерителя, достаточно потребовать выполнения условия $B(\cdot)D^T(\cdot) \equiv 0$ [2]. Кроме того, если $B(\cdot) \equiv 0$, то уравнение $dX_t/dt = a(t, X_t, U_t)$ задает поведение пучка траекторий объекта, порождаемых случайным начальным условием X_0 . Если же $D(\cdot) \equiv 0$, то измерение $\bar{Y}_t = dY_t/dt = c(t, X_t, U_t)$ является точным, но может быть неполным, а если еще и $c(t, x, u) = x$, что возможно только при равенстве размерностей $m = n$, то $\bar{Y}_t = X_t$ и вектор состояния объекта измеряется точно и полностью.

Для управляемой системы (1.1), (1.2) уравнения регулятора (0.2), (0.3) тоже будем искать в более простом виде:

$$U_t = u(t, Z_t), \quad dZ_t = f(t, Z_t)dt + G(t, Z_t)dY_t, \quad Z_0 = h, \quad Z_t \in \mathbb{R}^p, \quad (1.3)$$

а его структурные функции найдем из условия минимума частного вида критерия (0.4):

$$I[u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), h] = \mathbb{M} \left[\int_0^T \mu(t, X_t, U_t, Z_t) dt + v(X_T, Z_T) \right] \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Формально соотношения (1.1)—(1.4) отличаются от (0.1)—(0.4) лишь независимостью всех своих функций $a(\cdot), \dots, v(\cdot)$ от переменной выхода y . Поэтому ее следует исключить и из приведенного выше алгоритма синтеза структуры регулятора. Например, теперь полное (совместное) усреднение функции $\eta(t, X_t, Z_t)$ производится по формуле

$$\langle \eta(t, x, z), r(t, x, z) \rangle = \iint \eta(t, x, z) r(t, x, z) dx dz.$$

В результате получим следующие результаты.

2. Плотности вероятности. Согласно (0.6)—(0.10), совместная плотность вероятности $r(\cdot)$ состояний объекта (1.1) и регулятора (1.3) в случае выполнения известных условий гладкости является решением прямой задачи Коши для линейного уравнения ФПК:

$$\frac{\partial r(t, x, z)}{\partial t} = K_{xz}^{ufG} [r], \quad r|_{t=0} = p_0(x) \delta(z - h)$$

с прямым оператором

$$K_{xz}^{ufG} = -\nabla_x^T a^u - \nabla_z^T (f + Gc^u) + 0.5 \text{tr}[\nabla_x \nabla_x^T Q^u] + \text{tr}[\nabla_x \nabla_z^T G S^u] + 0.5 \nabla_z \nabla_z^T G R^u G^T.$$

Иначе она удовлетворяет линейному интегродифференциальному тождеству

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, r \rangle = \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xz}^{*ufG} [\eta], r \right\rangle, \quad \forall \eta(t, x, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2}$$

с сопряженным оператором

$$K_{xz}^{*ufG} [\eta] = a^{uT} \eta_x + (f + Gc^u)^T \eta_z + 0.5 \text{tr}[Q^u \eta_{xx}] + \text{tr}[G S^u \eta_{xz}] + 0.5 G R^u G^T \eta_{zz} \quad (2.1)$$

и с начальным условием $\langle \eta, r \rangle|_{t=0} = \int \eta(0, x, h) p_0(x) dx$. Отметим, что начальные условия этих уравнения и тождества содержат неизвестный параметр h , так что и в этом случае уравнение ФПК и соответствующее ему тождество для решения задачи синтеза неприменимы.

Поэтому вместо совместной плотности $r(\cdot)$ тоже будем использовать условную плотность

$$\rho(t, x | z) = r(t, x, z) / \int r(t, x, z) dx.$$

Она в соответствии с (0.12)—(0.14) либо является гладким решением задачи Коши

$$\frac{\partial \rho(t, x | z)}{\partial t} = K_x^u[\rho] - L_z^{*ufG}[\rho], \quad \rho(0, x | z) = p_0(x) \quad (2.2)$$

с операторами

$$K_x^u[\rho] = -\nabla_x^T (a^u \rho) + 0.5 \operatorname{tr} \left[\nabla_x \nabla_x^T (Q^u \rho) \right], \quad L_z^{*ufG}[\rho] = \rho_z^T (f + G \bar{c}^u) + 0.5 \operatorname{tr} \left[G \bar{R}^u G^T \rho_{zz} \right],$$

где чертой над функцией обозначено ее *условное среднее*:

$$\bar{\eta}(t, z) = \int \eta(t, x, z) \rho(t, x | z) dx,$$

либо определяется из своего нелинейного интегродифференциального тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \eta \rho dx = \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + K_{xz}^{*ufG}[\eta] \right) \rho dx - L_z^{*ufG} \left[\int \eta \rho dx \right] \quad \forall \eta(t, x, z) \in \mathbb{C}^{1,2,2}. \quad (2.3)$$

3. Достаточные условия оптимальности. Аналогично из разд. 0.3 получаем, что достаточным условием оптимальности функций регулятора (1.3) является наличие такой дифференцируемой функции $\varphi(t, x, z)$ Лагранжа—Кротова, что экстремумы

$$\alpha(z) = \min_{\rho(\cdot)} \int (\varphi + v) \rho dx |_{t=T} = 0 \quad \forall z, \quad (3.1)$$

$$\beta = \max_h \int \varphi(0, x, h) \rho_0(x | y) dx, \quad (3.2)$$

$$\gamma(t, z) = \max_{\rho(\cdot)} \left\{ \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho dx + \max_{u, f, G} H_z^{*ufG}[\varphi, \rho] \right\} = 0 \quad \forall t, z \quad (3.3)$$

существуют и достигаются на функциях $u(t, z)$, $f(t, z)$, $G(t, z)$, $\rho(t, x | z)$, связанных уравнением (2.2) или тождеством (2.3). Здесь гамильтониан имеет вид

$$H_z^{*ufG}[\varphi, \rho] = \int \left(K_{xz}^{*ufG}[\varphi] - \mu^u \right) \rho dx,$$

а минимальное значение критерия (1.4) определяется как $\min I = -\beta$.

4. Уравнения для экстремалей. В свою очередь из разд. 0.4 имеем следующую систему уравнений для экстремалей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t, x | z)}{\partial t} &= K_x^{\tilde{u}}[\tilde{\rho}] - L_z^{*\tilde{u}\tilde{f}\tilde{G}}[\tilde{\rho}], \quad \tilde{\rho}|_{t=0} = p_0(x), \\ -\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x, z)}{\partial t} &= K_{xz}^{*\tilde{u}\tilde{f}\tilde{G}}[\tilde{\varphi}] - \mu^{\tilde{u}}(t, x, z), \quad \tilde{\varphi}|_{t=T} = -v(x, z), \\ (\tilde{u}(t, z), \tilde{f}(t, z), \tilde{G}(t, z)) &= \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, f \in \mathbb{R}^p, G \in \mathbb{R}^{p \times m}} H_z^{*ufG}[\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}] \quad \forall t, z, \end{aligned}$$

а после решения этой двухточечной краевой задачи вычисляется и экстремальное начальное состояние регулятора:

$$\tilde{h} = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^p} \int \tilde{\varphi}(0, x, h) p_0(x) dx.$$

5. Оптимальная структура регулятора. Наконец, аналогичной модификацией утверждений теорем 1—6 из Введения получаем, что функция смещения $f(\cdot)$ регулятора (1.3) находится из условия инвариантности

$$\overline{\varphi_z} = \int \varphi_z(t, x, z) \rho(t, x | z) dx = 0 \tag{5.1}$$

и определяется по формуле

$$f(t, z) = -\left(\overline{\varphi_{zz}}\right)^{-1} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_z + K_{xz}^{*u0G} [\varphi_z] \right) \rho dx. \tag{5.2}$$

Частично-оптимальная функция усиления $G^u(\cdot)$ при выполнении условия $\varphi_{zz}(\cdot) < 0$ находится при любых допустимых значениях переменной u из линейного матричного уравнения:

$$\int \varphi_{zz} G^u R^u \rho dx = - \int [c^u \varphi_z^T + S^{uT} \varphi_{xz}]^T \rho dx, \tag{5.3}$$

после чего функция $u(\cdot)$ выхода регулятора по-прежнему определяется частной максимизацией гамильтониана:

$$u(t, z) = \arg \max_{u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l} H_z^u[\varphi, \rho] \quad \forall t, z,$$

который теперь имеет вид

$$H_z^u[\varphi, \rho] = \int \left(-\mu^u + a^{uT} \varphi_x + 0.5 \text{tr}[Q^u \varphi_{xx}] + \text{tr}[G^u (c^u \varphi_z^T + S^{uT} \varphi_{xz}) + 0.5 G^u R^u G^{uT} \varphi_{zz}] \right) \rho dx. \tag{5.4}$$

После этого сама оптимальная функция усиления регулятора находится подстановкой этой функции выхода в полученную из (5.3) частично-оптимальную функцию усиления:

$$G(t, z) = G^{u(t, z)}(t, z). \tag{5.5}$$

Наконец, вектор h начального состояния регулятора определяется из условий

$$\int \varphi_z(0, x, h) p_0(x) dx = 0, \quad \int \varphi_{zz}(0, x, h) p_0(x) dx < 0. \tag{5.6}$$

6. Пример теоремы разделения. Для проверки правильности приведенных в разд. 3, 5 достаточных условий оптимальности конечномерного регулятора (1.3) и процедур синтеза его структуры рассмотрим известную *линейно-квадратично-гауссовскую* (ЛКГ) задачу управления по неточным измерениям. Пусть возмущаемые стандартным винеровским процессом W_t уравнения объекта (1.1) и измерителя (1.2) линейные, а начальная плотность вероятности $p_0(x)$ гауссовская с параметрами m_0^x, D_0^x :

$$dX_t = [A(t)X_t + K(t)U_t]dt + B(t)dW_t, \quad X_0 \sim N(x \parallel m_0^x, D_0^x), \tag{6.1}$$

$$dY_t = [C(t)X_t + M(t)U_t]dt + D(t)dW_t, \quad Y_0 = 0. \tag{6.2}$$

Пусть также управление неограниченное $U_t \in \Omega = \mathbb{R}^l$, а критерий оптимальности (1.4) не зависит от состояния регулятора и является квадратичным:

$$I = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^T [X_\tau^T X(\tau) X_\tau + U_\tau^T \Phi(\tau) U_\tau] d\tau + X_T^T \Pi X_T \right\} \rightarrow \min \tag{6.3}$$

с весовыми матрицами $X(t) \geq 0, \Phi(t) > 0, \Pi \geq 0$. Далее очевидные зависимости параметров системы и критерия от времени t будем опускать.

Исходные соотношения (6.1)—(6.3) этой задачи отличаются от общих выражений (1.1), (1.2), (1.4) линейностью функций сноса объекта и измерителя, зависимостью интенсивностей Q, R, S гауссовских белых шумов $B(t)dW_t/dt, D(t)dW_t/dt$ только от времени, гауссовостью начального состояния X_0 , а также квадратичностью интегранта и терминанта критерия (6.3) при их независимости от переменной z состояния регулятора:

$$\begin{aligned} a^u &= Ax + Ku, \quad c^u = Cx + Mu, \quad Q^u = Q, \quad R^u = R, \quad S^u = S, \\ p_0(x) &= N(x \parallel m_0^x, D_0^x), \quad \mu^u = 0.5(x^T X x + u^T \Phi u), \quad v = 0.5x^T \Pi x. \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.1. Классический регулятор. Известно, что в случае (6.1), (6.2) апостериорная плотность вероятности гауссовская, а потому для критерия (6.3) справедлива *теорема разделения* [4, 5], согласно которой оптимальный нелинейный бесконечномерный регулятор Стратоновича—Мортенсена становится линейным конечномерным и распадается на два независимо синтезируемых блока.

Сначала по всей предыстории измерений Y_0^t инерционно вырабатывается оценка \hat{X}_t состояния X_t управляемым линейным фильтром Калмана—Бьюси:

$$d\hat{X}_t = (A\hat{X}_t + KU_t)dt + G[dY_t - (C\hat{X}_t + MU_t)dt], \quad \hat{X}_0 = m_0^x, \quad (6.5)$$

который, однако, оптимален в не связанном с критерием (6.3) среднеквадратическом смысле $M|X_t - \hat{X}_t|^2 \rightarrow \min$. Его $(n \times m)$ -матрица усиления G обновляющего процесса по формуле

$$G = (PC^T + S)R^{-1} \quad (6.6)$$

выражается через симметрическую матрицу ковариаций ошибки оценивания $P(t) = \text{cov}(X_t - \hat{X}_t)$, которая определяется с помощью не зависящего от управления U_t прямого уравнения Риккати:

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - [PC^T + S]R^{-1}[CP + S^T], \quad P(0) = D_0^x. \quad (6.7)$$

Затем найденная оценка \hat{X}_t используется для получения управления U_t с помощью безынерционного линейного регулятора

$$U_t = u(t, \hat{X}_t) = \Phi^{-1}K^T L \hat{X}_t. \quad (6.8)$$

Последний синтезируется независимо от фильтра (6.5), так как подобная зависимость $u_t = u(t, x_t)$ оптимальна в детерминированной задаче с полными измерениями вектора состояния:

$$\dot{x}_t = Ax_t + Ku_t, \quad x_0 = m_0^x, \quad J = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T [x_t^T X(t)x_t + u_t^T \Phi(t)u_t] dt + x_T^T \Pi x_T \right\} \rightarrow \min.$$

Поэтому симметрическая $(n \times n)$ -матрица $L < 0$ находится из соответствующего детерминированному регулятору обратного уравнения Риккати:

$$-\dot{L} = A^T L + LA - X + LK\Phi^{-1}K^T L, \quad L(T) = -\Pi. \quad (6.9)$$

Преимуществом такого линейного инерционного регулятора по сравнению с более общими нелинейными является наличие двух решаемых заранее независимых уравнений Риккати и быстрота обработки измерений фильтром (6.5), так как он имеет относительно малый порядок n .

6.2. Предлагаемый регулятор. Проверим, что в ЛКГ-задаче (6.1)—(6.3) предлагаемый регулятор (1.3) соответствующего уравнению фильтра (6.5) порядка $p = n$, так что далее $Z_t \in \mathbb{R}^n$, а потому существует разность $X_t - Z_t$, является линейным и удовлетворяет соотношениям (6.5)—(6.9) теоремы разделения. Для этого убедимся, что приведенным выше достаточным условиям оптимальности удовлетворяют структурные функции регулятора:

$$u(t, z) = V(t)z, \quad f(t, z) = F(t)z, \quad G(t, z) = G(t), \quad h = m_0^x \quad (6.10)$$

и порождаемая ими условная плотность вероятности $\rho(t, x | z)$. С этой целью выберем подходящую функцию Лагранжа—Кротова и получим связи функций (6.10) и начального состояния регулятора h с параметрами задачи. Например, функция смещения регулятора должна соответствовать уравнению фильтра (6.5) и иметь вид

$$f(t, z) = (Az + Ku) - G(Cz + Mu). \quad (6.11)$$

Зададим функцию Лагранжа—Кротова как сумму двух отрицательно определенных квадратических форм, стационарной $\psi(x - z)$ и нестационарной $\sigma(t, x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, z) &= \psi(x - z) + \sigma(t, x), \\ \psi(x - z) &= 0.5(x - z)^T \Psi (x - z), \quad \Psi = \Psi^T < 0, \\ \sigma(t, x) &= 0.5x^T \Sigma(t)x, \quad \Sigma = \Sigma^T < 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

с подлежащими определению весовыми матрицами Ψ, Σ . Производные этой функции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0.5x^T \dot{\Sigma}x, & \varphi_x &= \psi_x + \sigma_x = \Psi(x - z) + \Sigma x, & \varphi_z &= \psi_z = -\Psi(x - z), \\ & & \varphi_{xx} &= \Psi + \Sigma, & \varphi_{zz} &= \Psi, & \varphi_{xz} &= -\Psi. \end{aligned} \quad (6.13)$$

На этой основе далее последовательно получим следующие соотношения.

6.2.1. Условная плотность $\rho(t, x | z)$. Исключая из рассмотрения переменную измерений Y_t подставкой (6.2) в (1.3), получаем, что на предполагаемых оптималях (6.10) система уравнений состояния объекта (6.1) и регулятора (1.3) является линейной:

$$d \begin{bmatrix} X_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A' \\ A'' & A''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Z_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} B \\ GD \end{bmatrix} dW_t, \quad A' = KV, \quad A'' = GC, \quad A''' = F + GMV,$$

а ее начальные условия — гауссовские: $X_0 \sim N(x | m_0^x, D_0^x)$, $Z_0 = h$. Поэтому совместная плотность вероятности этих состояний тоже гауссовская:

$$r(t, x, z) = N(x, z | m_t^x, m_t^z, D_t^x, D_t^z, D_t^{xz}),$$

а ее параметры могут быть найдены из уравнений метода моментов Пугачева—Дункана. Следовательно, по теореме о нормальной корреляции [6] гауссова и условная плотность

$$\rho(t, x | z) = N[x | \bar{x}(t, z), \Gamma(t, z)], \quad (6.14)$$

а ее среднее и ковариация

$$\bar{x}(t, z) = M[X_t | Z_t = z] = \int x \rho(t, x | z) dx, \quad \Gamma(t, z) = \text{cov}[X_t | Z_t = z] = \int (x - \bar{x})(x - \bar{x})^T \rho(t, x | z) dx$$

в этом случае находятся по формулам

$$\bar{x}(t, z) = m_t^x + D_t^{xz} D_t^{z\otimes} (z - m_t^z), \quad \Gamma(t) = D_t^x - D_t^{xz} D_t^{z\otimes} D_t^{zx}, \quad (6.15)$$

где \otimes — символ псевдообращения матрицы по Муру—Пенроузу. Подчеркнем, что относительно переменной z условное среднее $\bar{x}(t, z)$ является функцией линейной, тогда как ковариация зависит только от времени.

6.2.2. Функция смещения $f(t, z)$. Из определяющего ее условия инвариантности (5.1), которое в данном случае принимает вид $\varphi_z = \Psi \int (z - x) \rho(t, x | z) dx = 0$, получаем, что в (6.15) условное среднее равно значению его условия $Z_t = z$:

$$\bar{x}(t, z) = z. \quad (6.16)$$

В результате связь ковариации с плотностью вероятности упрощается:

$$\Gamma(t) = \overline{(x-z)(x-z)^T} = \int (x-z)(x-z)^T \rho(t, x | z) dx. \quad (6.17)$$

Подставляя же (6.16) в первое равенство из (6.15), находим справедливое для любых z тождество $(E - D_t^{xz} D_t^{z\oplus})z = m_t^x - D_t^{xz} D_t^{z\oplus} m_t^z$, где E — единичная матрица. Из него следуют два равенства $E - D_t^{xz} D_t^{z\oplus} = 0$, $m_t^x - D_t^{xz} D_t^{z\oplus} m_t^z = 0$, откуда находим $D_t^{xz} = D_t^z$, $m_t^x = m_t^z$. Тогда упрощается и второе равенство из (6.15), принимая вид

$$\Gamma(t) = D_t^x - D_t^z, \quad (6.18)$$

а разность $X_t - Z_t$ оказывается центрированной: $M[X_t - Z_t] = 0$.

В начальный момент времени из (6.18) имеем $\Gamma(0) = D_0^x - D_0^z$, где, согласно (1.3), $D_0^z = \text{cov } Z_0 = \text{cov } h = 0$. Таким образом, найдено начальное значение условной ковариации

$$\Gamma(0) = D_0^x. \quad (6.19)$$

Для определения самой функции смещения $f(\cdot)$ используем формулу (5.2). В ней, согласно (6.13), имеем $\varphi_{zz} = \Psi$, $\partial\varphi_z/\partial t = 0$, так что теперь

$$f(t, z) = -\Psi^{-1} \int K_{xz}^{*u0G} [\varphi_z] \rho dx, \quad (6.20)$$

где действие оператора на скалярную функцию $\eta(\cdot)$ задается выражением (2.1), которое здесь имеет вид

$$K_{xz}^{*u0G} [\eta] = (Ax + Ku)^T \eta_x + (Cx + Mu)^T G^T \eta_z + 0.5 \text{tr}[Q \eta_{xx} + 2GS^T \eta_{xz} + GRG^T \eta_{zz}].$$

Применять же этот оператор к вектор-функции $\xi = \varphi_z = -\Psi(x-z)$ нужно поэлементно. Чтобы сохранить матричную форму записи, учтем, что ее первые производные имеют вид $\xi_x = \varphi_{xz} = -\Psi$, $\xi_z = \varphi_{zz} = \Psi$, а вторые производные обращаются в нули: $\xi_{xx} = \xi_{xz} = \xi_{zz} = 0$. Тогда, используя для справедливости последующих матричных соотношений свойство коммутативности скалярного произведения $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha$, получаем вектор-функцию

$$K_{xz}^{*u0G} [\varphi_z] = -\Psi[(Ax + Ku) + G(Cx + Mu)],$$

подставляя которую в (6.20) и интегрируя ее по переменной x с весом (6.14), находим

$$f(t, z) = (A\bar{x} + Ku) - G(C\bar{x} + Mu).$$

Наконец, учитывая здесь равенство (6.16), окончательно имеем формулу

$$f(t, z) = [Az + Ku(t, z)] - G(t, z)[Cz + Mu(t, z)], \quad (6.21)$$

которая похожа на желаемое выражение (6.11).

6.2.3. Функция усиления $G(t, z)$. Сначала определим ее частично-оптимальную версию $G^u(t, z)$. Так как $\varphi_{zz} = \Psi < 0$, то достаточное условие справедливости ее уравнения (5.3) выполняется, а оно само принимает вид

$$\int \varphi_{zz} \rho dx G^u R = - \left[\int (Cx + Mu) \varphi_z^T \rho dx + S^T \int \varphi_{xz} \rho dx \right]^T.$$

Используя здесь выражения (6.13) для производных функции $\varphi(\cdot)$, имеем

$$\Psi G^u R = \Psi \left[\overline{(x-z)x^T} C^T + (\bar{x} - z) u^T M^T + S \right],$$

а умножая это равенство на Ψ^{-1} и учитывая, что из (6.16), (6.17) следуют равенства $\bar{x} - z = 0$, $(x-z)x^T = \Gamma$, получаем частично-оптимальную функцию усиления независимой от переменной управления u :

$$G^u(t, z) = [\Gamma C^T + S] R^{-1}.$$

Тогда подстановка (5.5) не нужна, и сама оптимальная функция усиления действительно в соответствии с (6.10) зависит только от времени и определяется по формуле

$$G(t) = (\Gamma C^T + S)R^{-1}. \quad (6.22)$$

Последняя отличается от классической (6.6) только заменой матрицы P , определяемой по уравнению Риккати (6.7), на неизвестную пока матрицу Γ . Этот факт упрощает и функцию смещения (6.21):

$$f(t, z) = [Az + Ku(t, z)] - G[Cz + Mu(t, z)], \quad (6.23)$$

делая ее вид уже совпадающим с классическим (6.11).

6.2.4. Функция выхода $u(t, z)$. Максимизируем по переменной u гамильтониан (5.4). Он в данном случае принимает вид

$$H_z^u[\varphi, \rho] = \int \left(-\mu^u + (Ax + Ku)^T \varphi_x + 0.5 \text{tr}[Q \varphi_{xx}] + \text{tr}[G(Cx + Mu) \varphi_z^T + GS^T \varphi_{xz} + 0.5GRG^T \varphi_{zz}] \right) \rho dx.$$

Выделяя в нем только зависящие от u слагаемые и выполняя интегрирование по x , имеем

$$H_z^u[\varphi, \rho] = -0.5u^T \Phi u + (Ku)^T \overline{\varphi_x} + \text{tr}[G(Mu) \overline{\varphi_z^T}] + \text{invar}(u).$$

Учитывая здесь условие инвариантности (5.1) и то, что из (6.13), (6.16) следует зависимость

$$\overline{\varphi_x} = \Psi(\bar{x} - z) + \Sigma \bar{x} = \Sigma z,$$

получаем независимую от G квадратическую функцию

$$H_z^u[\varphi, \rho] = -0.5u^T \Phi u + (Ku)^T \Sigma z + \text{invar}(u),$$

которая вследствие исходного условия $\Phi > 0$ имеет по u единственный максимум

$$u(t, z) = \Phi^{-1} K^T \Sigma z. \quad (6.24)$$

Найденная функция выхода действительно, как в (6.10), является линейной с коэффициентом $V = \Phi^{-1} K^T \Sigma$ и с точностью до его последнего сомножителя совпадает с ее классическим видом (6.8). Подставляя же (6.22), (6.24) в (6.21), получаем, что функция смещения тоже соответствует оптимальной (6.10), являясь линейной с коэффициентом

$$F = (A + KV) - G(C + MV).$$

6.2.5. Начальное состояние h . Из (6.13) следует, что необходимое и достаточное условия его оптимальности (5.6) принимают вид

$$\int \Psi(x - h) p_0(x) dx = 0, \quad \int \Psi p_0(x) dx = \Psi < 0.$$

Второе из них выполняется по (6.12), а из первого легко получаем

$$h = \int x p_0(x) dx = m_0^x, \quad (6.25)$$

что соответствует уравнению фильтра Калмана—Бьюси (6.5).

В результате применением достаточных условий показано, что в ЛКГ-задаче (6.1)—(6.3) оптимальный регулятор (1.3) действительно является линейным с функциями (6.10), причем их связи с параметрами задачи соответствуют теореме разделения. Остается получить ковариацию (6.17), которая определяет функцию усиления регулятора (6.22), а также найти входящую в функцию его выхода (6.24) весовую матрицу $\Sigma(t)$ нестационарной части квадратичной функции Лагранжа—Кротова (6.12). Отметим, что весовая матрица Ψ ее стационарной части на структурные функции оптимального регулятора не влияет и искать ее не нужно.

6.2.6. Условная ковариация $\Gamma(t)$. Найдем ее двумя способами.

1. *Метод моментов.* Учитывая в уравнении регулятора (1.3) функции усиления (6.22) и смещения (6.23), имеем

$$dZ_t = [AZ_t + KU_t] - G(CZ_t + MU_t)dt + GdY_t.$$

Подставляя сюда уравнение измерителя (6.2), после приведения подобных членов получаем

$$dZ_t = [AZ_t + GC(X_t - Z_t) + KU_t]dt + GDdW_t.$$

Вычитая это равенство из уравнения состояния линейного объекта (6.1), находим замкнутое линейное уравнение для разности $E_t = X_t - Z_t$:

$$dE_t = (A - GC)E_t dt + (B - GD)dW_t.$$

Тогда, используя известное [7, с. 268] уравнение Пугачева—Дункана для матрицы ковариаций линейной стохастической системы получаем, что матрица $\Gamma(t) = \text{cov } E_t$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Gamma} = (A - GC)\Gamma + \Gamma(A - GC)^T + (B - GD)(B - GD)^T$$

или, группируя в нем слагаемые в зависимости от наличия в них матрицы G ,

$$\dot{\Gamma} = A\Gamma + \Gamma A^T + Q - G(CG + S^T) - (\Gamma C^T + S)G^T + GRG^T. \quad (6.26)$$

Подставляя сюда выражение (6.22), можно убедиться, что последние три слагаемых здесь представляют собой одинаковые подобные члены, равные $(CG + S^T)^T R^{-1} (CG + S^T)$. В итоге получаем матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{\Gamma} = A\Gamma + \Gamma A^T + Q - (\Gamma C^T + S)R^{-1}(CG + S^T), \quad (6.27)$$

а его начальное условие имеет вид (6.19). Все это отличается от (6.7) лишь обозначением, так что $\Gamma(t) = P(t)$, что и требовалось доказать.

2. *Тождество для УПВ.* Из (6.17) следует, что искомая ковариация является условным средним матричной функции $\Theta(x, z) = (x - z)(x - z)^T$, так как $\int \Theta \rho dx = \Gamma$. Подставляя в тождество (2.3) каждый элемент этой матрицы $\eta(\cdot) = \Theta_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, n$, и учитывая равенства $\int \eta \rho dx = \Gamma_{ij}$, $\partial \Theta_{ij} / \partial t = 0$, $L_z^{*ufG}[\Gamma_{ij}] = 0$, получаем тождество

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \int K_{xz}^{*ufG}[\Theta_{ij}(x, z)]\rho dx \quad \forall t, z. \quad (6.28)$$

Определяющий его оператор в соответствии с (2.1), (6.4) и свойством $e^T g = \text{tr}[ge^T]$ имеет вид

$$K_{xz}^{*ufG}[\Theta_{ij}] = \text{tr}[(\Theta_{ij})_x(Ax + Ku)^T] + \text{tr}[(\Theta_{ij})_z(f + G(Cx + Mu))^T] + \\ + 0.5 \text{tr}[Q(\Theta_{ij})_{xx} + 2GS^T(\Theta_{ij})_{xz} + GRG^T(\Theta_{ij})_{zz}]$$

и содержит не зависящие от переменной интегрирования x функции $u(t, z)$, $f(t, z)$, $G(t)$. Тогда, выполняя дифференцирование скалярной функции $\Theta_{ij} = (x_i - z_i)(x_j - z_j)$, находим, что ее первые производные по переменной x линейны:

$$(\Theta_{ij})_x = \left[\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial x_k} \right]_{k=1, \bar{n}} = \left[\delta_{ik}(x_j - z_j) + (x_i - z_i)\delta_{jk} \right]_{k=1, \bar{n}}, \quad (\Theta_{ij})_z = -(\Theta_{ij})_x,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, тогда как вторые производные от нее не зависят:

$$(\Theta_{ij})_{xx} = \left[\frac{\partial^2 \Theta_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right]_{k, l=1, \bar{n}} = \left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right]_{k, l=1, \bar{n}}, \quad (\Theta_{ij})_{zz} = (\Theta_{ij})_{xx}, \quad (\Theta_{ij})_{xz} = -(\Theta_{ij})_{xx}.$$

Поэтому упорядочим в операторе слагаемые по степеням этой переменной. Используя для конкретности только основные производные $(\Theta_{ij})_x, (\Theta_{ij})_{xx}$, получаем

$$K_{xz}^{*ufG}[\Theta_{ij}] = \text{tr}[(\Theta_{ij})_x x^T (A - GC)^T] + \text{tr}[(\Theta_{ij})_x (Ku - f - GMu)^T] + 0.5 \text{tr}[(Q - 2GS^T + GRG^T)(\Theta_{ij})_{xx}],$$

а после подстановки этого равенства в тождество (6.28) и выполнения интегрирования находим

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \overline{\text{tr}[(\Theta_{ij})_x x^T (A - GC)^T]} + \overline{\text{tr}[(\Theta_{ij})_x (Ku - f - GMu)^T]} + 0.5 \text{tr}[(Q - 2GS^T + GRG^T)(\Theta_{ij})_{xx}] \quad \forall t, z.$$

Учитывая, что здесь во втором слагаемом $(\Theta_{ij})_x = \left[\delta_{ik}(\bar{x}_j - z_j) + (\bar{x}_i - z_i)\delta_{jk} \right]_{k=1, \bar{n}} = 0$, и выполняя в третьем симметризацию матрицы по свойству $\text{tr}[2(GS^T)\Xi] = \text{tr}[GS^T\Xi + SG^T\Xi^T]$, имеем более простое тождество:

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \overline{\text{tr}[(\Theta_{ij})_x x^T \hat{A}^T]} + 0.5 \text{tr}[\hat{Q}(\Theta_{ij})_{xx}] \quad \forall t, z \tag{6.29}$$

с матрицами

$$\hat{A} = A - GC, \quad \hat{Q} = Q - GS^T - SG^T + GRG^T,$$

причем последняя из них симметрическая $\hat{Q}^T = \hat{Q}$. Усредняя здесь произведение

$$(\Theta_{ij})_x x^T = \left[\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial x_k} x_l \right]_{k,l=1, \bar{n}} = \left[\delta_{ik}(x_j - z_j)x_l + (x_i - z_i)x_l \delta_{jk} \right]_{k,l=1, \bar{n}},$$

получаем его представление только через ковариацию Γ :

$$\overline{(\Theta_{ij})_x x^T} = \left[\delta_{ik} \overline{(x_j - z_j)x_l} + \overline{(x_i - z_i)x_l} \delta_{jk} \right]_{k,l=1, \bar{n}} = \left[\delta_{ik} \Gamma_{jl} + \Gamma_{il} \delta_{jk} \right]_{k,l=1, \bar{n}}.$$

Наконец, вычисляя входящие в (6.29) слагаемые

$$\overline{\text{tr}[(\Theta_{ij})_x x^T \hat{A}^T]} = \sum_{k,l=1}^{\bar{n}} \left[\overline{(\Theta_{ij})_x x^T} \right]_{kl} \hat{A}_{kl} = \sum_{k,l=1}^{\bar{n}} [\delta_{ik} \Gamma_{jl} + \Gamma_{il} \delta_{jk}] \hat{A}_{kl} = \sum_{l=1}^{\bar{n}} \hat{A}_{il} \Gamma_{jl} + \Gamma_{il} \hat{A}_{jl} = \left[\hat{A} \Gamma + \Gamma \hat{A}^T \right]_{ij},$$

$$\text{tr}[\hat{Q}(\Theta_{ij})_{xx}] = \sum_{k,l=1}^{\bar{n}} \hat{Q}_{lk} \frac{\partial^2 \Theta_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{k,l=1}^{\bar{n}} \hat{Q}_{lk} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] = \hat{Q}_{ji} + \hat{Q}_{ij} = 2\hat{Q}_{ij},$$

окончательно находим скалярные соотношения

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \left[\hat{A} \Gamma + \Gamma \hat{A}^T \right]_{ij} + \hat{Q}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

которым соответствует матричное равенство $\dot{\Gamma} = \hat{A} \Gamma + \Gamma \hat{A}^T + \hat{Q}$. Учитывая в нем обозначения матриц \hat{A}, \hat{Q} , получаем

$$\dot{\Gamma} = (A - GC)\Gamma + \Gamma(A - GC)^T + Q - GS^T - SG^T + GRG^T,$$

а группируя и здесь слагаемые по степеням G , имеем уравнение

$$\dot{\Gamma} = A\Gamma + \Gamma A^T + Q - G(C\Gamma + S^T) - (\Gamma C^T + S)G^T + GRG^T, \tag{6.30}$$

которое совпадает с промежуточным результатом метода моментов (6.26), а значит тоже дает уравнение Риккати (6.27). Отметим, что этим вторым способом продемонстрирована справедливость для данного случая и тождества для УПВ.

6.2.7. Весовая матрица $\Sigma(t)$ функции Лагранжа—Кротова. Воспользуемся достаточными условиями (3.1), (3.3), согласно которым значения экстремумов на оптималях $u(\cdot), f(\cdot), G(\cdot), \rho(\cdot)$ из (6.14), (6.22)—(6.24) представляют собой алгебраические тождества:

$$\alpha(z) = \int (\varphi + \nu) \rho dx \Big|_{t=T} = 0 \quad \forall z, \quad \gamma(t, z) = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_{xz}^{*ufG} [\varphi] - \mu^u \right) \rho dx = 0 \quad \forall t, z.$$

В данной задаче они имеют вид

$$\int (\varphi + 0.5x^T \Pi x) \rho dx \Big|_{t=T} = 0, \quad - \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho dx = \int \left(K_{xz}^{*ufG} [\varphi] - 0.5(x^T X x + u^T \Phi u) \right) \rho dx$$

с оператором

$$K_{xz}^{*ufG} [\varphi] = (Ax + Ku)^T \varphi_x + [f + G(Cx + Mu)]^T \varphi_z + 0.5 \text{tr} [Q \varphi_{xx} + 2GS^T \varphi_{xz} + GRG^T \varphi_{zz}],$$

в котором учтена одинаковая размерность векторов $x, z \in \mathbb{R}^n$, а функции $f = f(t, z)$, $G = G(t)$, $u = u(t, z)$ не зависят от переменной интегрирования x . Подставляя сюда выражения для функции Лагранжа—Кротова (6.12) и ее производных (6.13), после умножения на два получаем два тождества:

$$\begin{aligned} & \int [(x-z)^T \Psi(x-z) + x^T (\Sigma + \Pi)x] \rho dx \Big|_{t=T} = 0, \\ - \int x^T \dot{\Sigma} x \rho dx = & \int \left(\begin{aligned} & 2(Ax + Ku)^T (\Psi(x-z) + \Sigma x) - 2[f + G(Cx + Mu)]^T \Psi(x-z) + \\ & + \text{tr} [Q(\Psi + \Sigma) - 2GS^T \Psi + GRG^T \Psi] - (x^T X x + u^T \Phi u) \end{aligned} \right) \rho dx. \end{aligned}$$

Записывая в них все билинейные и квадратичные формы как следы соответствующих матриц вроде $x^T \Psi z = \text{tr} [\Psi z x^T]$, группируя слагаемые по степеням переменной x и выполняя интегрирование по ней, имеем

$$\begin{aligned} & \text{tr} [\overline{\Psi(x-z)(x-z)^T} + (\overline{\Sigma_t + \Pi}) \overline{xx^T}] \Big|_{t=T} = 0, \\ - \text{tr} [\overline{\dot{\Sigma}_t xx^T}] = & - \text{tr} [X \overline{xx^T} + \Phi \overline{uu^T}] + 2 \text{tr} [\overline{\Psi(x-z)x^T} (A + GC)^T + \overline{\Sigma xx^T} A^T] + \\ & + 2 \text{tr} [\overline{\Psi(\bar{x} - z)} (f + Mu + Ku)^T + \overline{\Sigma \bar{x} u^T} K^T] + \text{tr} [Q(\Psi + \Sigma) - 2GS^T \Psi + GRG^T \Psi]. \end{aligned}$$

Так как здесь, согласно (6.16), (6.17), условные средние определяются по формулам $\bar{x} = z$, $(x-z)x^T = \Gamma$, $\overline{xx^T} = \Gamma + zz^T$, то в первом из этих тождеств слагаемое с функцией $f(\cdot)$ исчезает и в результате получаем

$$\text{tr} \{ \Psi \Gamma(T) + [\Sigma(T) + \Pi] [\Gamma(T) + zz^T] \} = 0, \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} - \text{tr} [\dot{\Sigma} (\Gamma + zz^T)] = & - \text{tr} [X (\Gamma + zz^T) + \Phi \overline{uu^T}] + 2 \text{tr} [\Psi \Gamma (A + GC)^T + \Sigma (\Gamma + zz^T) A^T] + \\ & + 2 \text{tr} [\Sigma z u^T K^T] + \text{tr} [Q(\Psi + \Sigma) - 2GS^T \Psi + GRG^T \Psi]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Эти два полиномиальных тождества должны выполняться при любых значениях векторной переменной z , поэтому, так как тождество $\text{tr} [\Xi + \Upsilon zz^T] = 0 \quad \forall z$ справедливо только при условиях $\text{tr} \Xi = 0$, $\Upsilon = 0$, из (6.31) легко находим конечное значение искомой функции

$$\Sigma(T) = -\Pi. \quad (6.33)$$

Аналогично и в тождестве (6.32), учитывая линейность (6.24) оптимальной функции $u(t, z)$ по z , приравняем слева и справа слагаемые, содержащие квадраты этой переменной:

$$- \text{tr} [\dot{\Sigma} zz^T] = \text{tr} [-Xzz^T - \Phi \overline{uu^T} + 2A^T \Sigma zz^T + 2K^T \Sigma z u^T],$$

или, подставляя сюда саму зависимость (6.24),

$$\text{tr} [(\dot{\Sigma} - X - \Sigma K \Phi^{-1} K^T \Sigma + 2A^T \Sigma + 2\Sigma K \Phi^{-1} K^T \Sigma) zz^T] = 0.$$

Используя здесь для симметризации матриц свойство следа от их произведения $\text{tr}[A^T \Xi] = \text{tr}[A^T \Xi + \Xi^T A]$ и приводя подобные члены, имеем тождество

$$\text{tr}[(\dot{\Sigma} - X + A^T \Sigma + \Sigma A + \Sigma K \Phi^{-1} K^T \Sigma) z z^T] = 0 \quad \forall z,$$

из которого для матрицы Σ окончательно получаем обратное уравнение Риккати:

$$\dot{\Sigma} + A^T \Sigma + \Sigma A - X + \Sigma K \Phi^{-1} K^T \Sigma = 0. \quad (6.34)$$

Вместе со своим конечным условием (6.33) оно отличается от (6.9) лишь обозначением, так что $\Sigma(t) = L(t)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, выбрав в ЛКГ-задаче (6.1)—(6.3) порядок предлагаемого регулятора (1.3) равным порядку объекта управления, с помощью достаточных условий оптимальности (3.1)—(3.3), процедур их применения (5.1)—(5.6) и тождества для УПВ (2.3) показано, что существует такая функция Лагранжа—Кротова (6.12), при которой структурные функции линейного регулятора (6.10) являются оптимальными, а их вид и параметры удовлетворяют теореме разделения. Тем самым доказано, что из теорем 1, 3—6 следует такое утверждение.

Следствие. Если в условиях ЛКГ-задачи (6.1)—(6.3) синтезировать линейную версию (6.10) регулятора (1.3) порядка объекта управления $p = n$, то найденные с помощью полученных достаточных условий оптимальности его структурные функции и их параметры удовлетворяют теореме разделения.

Отметим, что этим подтверждена оптимальность всех структурных функций линейного регулятора (6.10) в смысле единого квадратического критерия оптимальности (6.3). В отличие от этого в классическом регуляторе его инерционная часть, линейный фильтр Калмана—Бьюси (6.5)—(6.7), и безынерционная часть, детерминированный позиционный регулятор (6.8), (6.9), оптимальны в разных смыслах. Действительно, уравнения и параметры этого фильтра не зависят от весовых матриц критерия (6.3), которые определяют только позиционный регулятор.

Заключение. Для случая неточных измерений состояния объекта управления приведены достаточные условия оптимальности конечномерного динамического регулятора и соотношения для определения соответствующих экстремалей, а также алгоритмы нахождения каждой из оптимальных структурных функций регулятора. На примере ЛКГ-задачи эти алгоритмы проверены сравнением получаемых результатов с известной теоремой разделения.

В следующей части статьи из-за сложности точного вычисления в нелинейной задаче условной (усечено-апостериорной) плотности вероятности планируется рассмотреть процедуру построения *гауссовского приближения* к оптимальному конечномерному регулятору. Применение этой процедуры будет продемонстрировано на задаче синтеза оптимального *нелинейного* закона конечномерного управления *линейным* стохастическим объектом по *квадратично-биквадратному критерию* качества. В подобной детерминированной задаче линейно-кубический закон позиционного управления был предложен в [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко Е.А. Оптимальный конечномерный регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. I. Неполные точные измерения // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 59—74.
2. Руденко Е. А. Оперативно-оптимальный конечномерный динамический регулятор состояния стохастического дифференциального объекта по его выходу. I. Общий нелинейный случай // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 23—39.
3. Руденко Е. А. Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 6. С. 25—51.
4. Wonham W. M. On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1968. V. 6. No. 2. P. 312—326.
5. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
6. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
7. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1985.
8. Верба В. С., Меркулов В. И., Руденко Е. А. Линейно-кубическое локально-оптимальное управление линейными системами и его применение для наведения летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 129—141.
9. Верба В. С., Меркулов В. И., Руденко Е. А. Оптимизация систем автоматического сопровождения воздушных объектов на основе локальных квадратично-биквадратных функционалов. I. Синтез оптимального управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 24—29.

УДК: 531.38

УПРАВЛЕНИЕ АМПЛИТУДОЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

© 2024 г. Ю.Ф. Голубев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
e-mail: golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

После доработки 18.09.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Выполнено обобщение метода поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия на случай склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На её движение влияют другие, активно управляемые степени свободы, координаты которых выбираются в качестве функций управления. В число функций управления могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженные переменные в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примерах конкретных колебательных механических моделей о маятнике с опорой, скользящей по циклоиде с сухим и вязким трением, и о спасении шестиногого робота из аварийного положения “навзничь” продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: управление, колебания, трение, амплитуда, оптимизация, механическая система

DOI: 10.31857/S0002338824010054, EDN: IWXXAJ

AMPLITUDE CONTROL OF SYSTEMS OSCILLATIONS WITH FRICTION

© 2024 Yu.F. Golubev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS
e-mail: golubev@keldysh.ru

The method of searching for optimal control of the amplitude of one-dimensional oscillations in the vicinity of the equilibrium position is generalized to the case of a scleronomous multidimensional mechanical system with friction. The oscillatory degree of freedom of the system does not lend itself to direct control. Its movement is influenced by other, directly controlled degrees of freedom, the coordinates of which are selected as control functions. The number of control functions can include both positional and cyclic coordinates. The method does not use conjugate variables in the sense of the Pontryagin's maximum principle and does not increase the dimension of the original system of differential equations of motion. Using examples of specific oscillatory mechanical models about a pendulum with a support sliding along a cycloid with dry and viscous friction, and about the rescue of a six-legged robot from an emergency position “upside down”, the effectiveness of the proposed method is demonstrated.

Keywords: control, oscillations, friction, amplitude, optimization, mechanical system

Введение. Среди колебательных систем особый интерес вызывают механические устройства, способные управляемо раскачиваться в поле естественных сил (таких, как поле силы тяжести, электрические и магнитные поля) за счет целенаправленного изменения собственной конфигурации. Примером могут служить различные варианты перемещения с помощью конечностей. Это могут быть ходьба, бег, раскачивание на качелях, работа воздушных гимнастов, спасение в аварийных ситуациях и др. Изменение собственной конфигурации происходит с помощью внутренних сил, обеспечиваемых соответствующими приводами, и само по себе не может повлиять на изменение положения центра масс системы в абсолютном пространстве. Для того чтобы вызвать требуемое движение центра масс, нужна опора о внешнюю среду, и если опора меняется, то в точках контакта практически невозможно обеспечить

непосредственное управляющее воздействие. Тем самым естественно возникают системы с недостаточным набором приводов для всех степеней свободы (неполноприводные системы). В теории управления их ещё называют системами с дефицитом управления. К настоящему времени имеется довольно много исследований на эту тему [1—13].

Увеличение или уменьшение амплитуды качаний колебательных систем может быть достигнуто за счет соответствующим образом организованного накопления (уменьшения) энергии резонансными методами [4]. Но это в большинстве случаев громоздкий и плохо управляемый процесс. Применение методов оптимального управления для организации движения по свободным от приводов степеням свободы может оказаться более предпочтительным. В [9—13] предложен простой и экономный метод оптимизации колебаний для голономных консервативных систем с дефицитом управления по одной степени свободы, основанный на идеях работы [14]. В [9, 10] главный результат получен с помощью вычисления первой вариации функционала. В нём в качестве управляющих функций выбираются непосредственно координаты управляемых степеней свободы. В [11—13] найдено более простое доказательство справедливости метода. Этот метод, который не использует сопряженные переменные в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [15] и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения, получает в данной статье дальнейшее развитие для систем с сухим и вязким трением. Показано, что наличие трения в системе не влияет на стратегию оптимального раскачивания (торможения), следующую из работ [8—13]. Оно влияет лишь на фактическую зависимость управляющих функций от времени, что не существенно, а также на результат применения этой стратегии, затрудняя и замедляя процедуру раскачивания, а при большом вязком трении ограничивая достижимую амплитуду.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n — число степеней свободы системы, q_i — обобщённые координаты, \dot{q}_i — обобщённые скорости, а симметричная положительно определённая матрица (a_{ij}) зависит от координат. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

в которых t — время, Q_i — обобщённые силы. В отличие от работ [9—13] эти силы могут содержать слагаемые, выражающие влияние как сухого, так и вязкого трения. Пусть первая обобщённая координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщённые силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщённую координату, обозначив её буквой x : $q_1 = x$.

Будем считать, что обобщённая сила Q_1 представлена суммой

$$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \dots, q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, x, q_2, \dots, q_n), \quad (1.2)$$

где позиционная сила F зависит только от x и других обобщённых координат. Сила R оказывает сопротивление изменению координаты x и зависит как от обобщённых скоростей, так и от обобщённых координат. Пусть первыми в наборе (q_2, \dots, q_n) идут $s-1$ координат, от которых обобщённая сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат не входят явно в выражение для F . Координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причём $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ — вектор координат, непосредственно влияющих на значение F , $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ — вектор координат, от которых F явно не зависит, так что $\partial F / \partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где $s - 1$ — число u -координат и

$$T^*(x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{k+s,r+s} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

Следуя работам [9—13], в системе (1.1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного возрастания: $\dot{x} > 0$ и обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$ — векторы управляющих координат и их производных по координате x . Тогда уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] - p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

где

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y})}{\partial x} - (t')^2 R(\dot{x}, x, \mathbf{y}),$$

причем $t'(x) = \dot{x}^{-1}$. Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\left| u_j^m \leq u_j(x) \leq u_j^M \right|, \left| w_k^m \leq w_k(x) \leq w_k^M \right|, \quad j = \overline{1, s-1}, k = \overline{1, n-s},$$

$$\left| \dot{u}_j^m \leq \dot{u}_j(x) \leq \dot{u}_j^M \right|, \left| \dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M \right|, \quad (1.5)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы Q_2, \dots, Q_n вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ реализовались. Предположим, что это может быть сделано, так чтобы ограничения (1.5) удовлетворялись. Тогда можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.6)$$

где x_0 — начальное значение независимой переменной x , $\lambda(x, \mathbf{y})$ — любая функция. Уравнение (1.6) эквивалентно уравнению (1.4). Заметим, что если $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, то уравнение (1.4) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве λ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Равенство (1.6) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} \left[\dot{x}^2 f(x, \mathbf{y}) \lambda(x, \mathbf{y}) \right]_{x_0}^x = 0$$

или

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} \left[f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \right]_{x_0}^x, \quad (1.8)$$

где

$$f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k, \quad (1.9)$$

$$\lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right).$$

В том случае, когда $\dot{x} = \dot{x}(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.8) становится несобственным из-за того, что при $\dot{x} = 0$ значения $t' = 1 / \dot{x}$, $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}} / \dot{x}$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}} / \dot{x}$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.8) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ — следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0. \quad (1.11)$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

Обратное движение маятника ($\dot{x} < 0$) сводится к случаю его прямого движения [9] с помощью замены независимой переменной $\xi = -x$.

2. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний. Пусть λ определено формулой (1.7). Тогда справедливы следующие теоремы (их формулировки, по существу, совпадают с формулировкой работ [12, 13] и приводятся здесь исключительно для удобства их дальнейшего использования).

Теорема 1 (принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.3) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$.

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\mathbf{w}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Теорема 2 (принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.3) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$.

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_1) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Доказательство приведенных теорем практически совпадает с доказательством, представленным в работе [12], и поэтому здесь не приводится.

Следствие. Стратегия (синтез) выбора оптимального управления раскачиванием не зависит от наличия трения в системе. От трения зависит лишь результат применения этой стратегии в каждом конкретном случае.

Доказательство. Поиск оптимального управления осуществляется в соответствии с формулами (2.1)–(2.4), в которые информация о трении явным образом не входит.

Замечание 1. Функции управления от времени будут зависеть от наличия трения в системе.

Замечание 2. Приведенные теоремы справедливы в предположении, что функция $f \neq 0$. По существу, она представляет собой коэффициент при старшей производной в уравнении (1.4). Обращение её в нуль свидетельствует о том, что при выбранном законе управления для заданных параметров системы происходит вырождение. Часто вырождение происходит потому, что динамические параметры управляющих частей системы превосходят динамические характеристики управляемой её части. Тогда соответствующей настройкой параметров системы будет возможно устранить указанную неприятность. При невозможности настройки параметров вырождение также можно исключить переходом к классу кусочно-постоянных функций, разбивая процесс интегрирования на отрезки с сохранением непрерывности фазовых

координат. На каждом таком отрезке производные от управляющих функций окажутся равны нулю, и будет выполнено $f = a_{11} > 0$. Таким образом образуется последовательность кусочно постоянных функций, дающая приближенное представление об оптимальном решении.

3. Пример 1. Маятник с точкой подвеса на перевернутой циклоиде. Твердое тело, имеющее массу m и центральный момент инерции I_b , движется плоскопараллельно так, что его центр масс скользит с сухим и вязким трением в вертикальной плоскости по перевернутой циклоиде (брахистохроне). Тело вращается, отслеживая касательную к траектории центра масс. К этому телу в его центре масс подвешен стержень, имеющий массу M и центральный момент инерции I_r . Относительно тела стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить тело m двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний в окрестности нижней точки циклоиды. Решение этой задачи рассматривалось в сокращённом виде в [13]. Здесь дадим более подробный вариант. Обозначим буквой l расстояние от центра масс C стержня до точки подвеса. Пусть \mathbf{v} — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а ψ — угол между стержнем и вектором \mathbf{v} . Угол ψ примем в качестве управления в целях раскачивания системы (рис. 1).

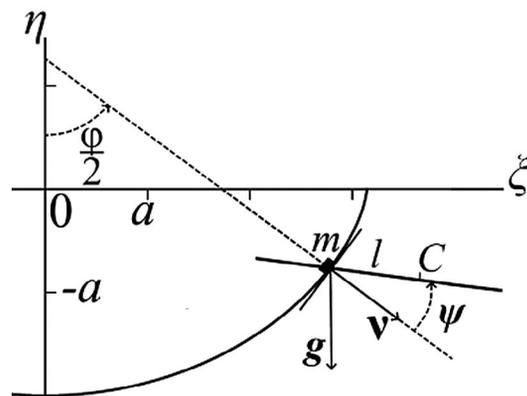


Рис. 1. Циклоидальный маятник со стержнем

Для описания движения введём абсолютную правоориентированную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\eta$ направим вертикально вверх. Ось $O\xi$ расположим в плоскости движения. Тогда ось $O\zeta$ будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin \varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos \varphi), \quad \zeta = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где $a > 0$ — постоянная, а φ — обобщенная координата, задающая положение точки m на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Её внешняя нормаль $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, 0)$ имеет координаты

$$v_\xi = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_\eta = -\cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор \mathbf{v} образует с отрицательным направлением оси $O\eta$ угол $\varphi / 2$. Центр масс стержня имеет координаты

$$\xi_C = a(\varphi + \sin \varphi) + l \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \eta_C = -a(1 + \cos \varphi) - l \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Далее получим

$$\dot{\xi}_C = 2a\dot{\varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \dot{\eta}_C = a\dot{\varphi} \sin \varphi + l \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = 2 \left[(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos\psi \right] \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{Ml^2 + I_r}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right)^2 + \frac{I_b}{8} \dot{\varphi}^2.$$

Найдем силовую функцию:

$$U = (m + M)ga(1 + \cos\varphi) + Mgl \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right).$$

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\psi\dot{\varphi} + B_\psi\dot{\psi}) + C_\psi &= -Mlg \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}(A_\varphi\dot{\varphi} + B_\varphi\dot{\psi}) + C_\varphi &= -(m + M)ga \sin\varphi - \frac{Mgl}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + R, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_\psi &= 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2}, \\ B_\psi &= Ml^2 + I_r, \quad C_\psi = 2Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_\varphi = 4(m + M)a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2} + \frac{I_b}{4}, \\ B_\varphi = 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + Ml^2 + I_r, \\ C_\varphi = \left[(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos\psi \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь Q_ψ — обобщенная сила, управляющая углом ψ , R — обобщенная сила, учитывающая воздействие сухого и вязкого трения.

Следует отметить, что коэффициенты (3.2), когда $I_b = 0$, отличаются от соответствующих неправильных коэффициентов, полученных в [12], из-за неточности, допущенной там при выводе уравнений движения. В настоящей работе эта погрешность исправлена. Ошибка ни на что не повлияла, так как цель примера в упомянутой работе состояла лишь в том, чтобы продемонстрировать технику применения теорем в общем случае сколько-нибудь сложной системы дифференциальных уравнений.

Из уравнений (3.1) видно, что при отсутствии управления и трения система имеет положения равновесия, когда

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad \sin\varphi = 0. \quad (3.3)$$

В допустимых пределах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ условиям (3.3) соответствуют значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. Очевидно, что при $\varphi = 0$ достигается нижнее устойчивое положение равновесия (нулевое положение

равновесия), а при $\varphi = \pm\pi$ — два верхних неустойчивых положения равновесия по краям циклоиды. Первое условие (3.3) означает, что в положениях равновесия стержень должен быть направлен вертикально вниз.

Перейдём к анализу оптимальных законов раскачивания маятника. В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол ψ . Для простоты анализа влияния трения не будем накладывать никаких ограничений на величину угла ψ . В соответствии с уравнением (1.4) получим $f = A_\varphi + B_\varphi \psi'$, где ψ' — производная по φ . Знак множителя λ , вычисляемого по формуле (1.7), совпадает со знаком функции f . Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла ψ . Оптимизируемая по величине ψ функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u}) = \Phi = -\chi \left[(m + M)ga \sin \varphi + \frac{Mgl}{2} \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right) \right]. \quad (3.4)$$

Экстремальные значения функции Φ достигаются при

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \rightarrow \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$f = A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = Mal \left[2b \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \pm \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{I_b}{4}, \quad b = \frac{2(M + m)a}{Ml}. \quad (3.5)$$

Учтем, что

$$\min \left\{ \left[2b \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \pm \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right\} = \min \left(b + b \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) = b - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}.$$

Следовательно, если

$$\frac{I_b}{Mal} > 2 \left(\sqrt{4b^2 + 1} - 2b \right), \quad (3.6)$$

то коэффициент $\chi > 0$. Воспользовавшись рекомендацией замечания 2, будем в дальнейшем считать условие (3.6) выполненным.

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ , а $\varphi_1 > 0$ — соответственно правая граница, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (2.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полукослабления состоит в применении правила

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.7)$$

Геометрический смысл полученного закона управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен к вертикальной оси и составлять с горизонтальной осью развернутый угол, обеспечивая максимальное значение силового момента.

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.8)$$

Геометрический смысл закона управления (3.8) состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярным к вертикальной оси и сонаправленным с горизонтальной осью, обеспечивая минимальное значение силового момента.

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.8); после достижения минимального отрицательного отклонения следует пользоваться формулой (3.7), и т.д. Таким образом, при достижении экстремальных отклонений маятника стержень должен мгновенно поворачиваться на развернутый угол. Естественно, что в реальности такой скачок по координате невозможен. Его следует рассматривать как предел, когда время переходного процесса стремится к нулю. На практике указанный скачок необходимо сглаживать, вводя ограничения типа (1.5) и выбирая ту границу для функции $\psi(\varphi)$, которая наиболее близка к полученному выше релейному закону.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.7); после достижения минимального отрицательного отклонения следует воспользоваться формулой (3.8), и т.д.

После того как зависимость $\psi(\varphi)$ установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым, и его можно решать любым известным методом [16]. В частности, для решения можно применить формулу (1.8). После определения функции $\varphi(t)$ становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу Q_ψ , обеспечивающую требуемое изменение угла ψ .

Из системы уравнений (3.1) видим, что при $l = 0$ угол ψ становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться правилами разд. 2 для управления скоростями в конце полуразмаха.

Если $\dot{\varphi} \neq 0$, то для законов управления (3.8), (3.9) сила трения может быть представлена формулой

$$R = -2a(M + m) \left[f_r (a\dot{\varphi}^2 + g) \operatorname{sgn} \dot{\varphi} + 2ak_r \dot{\varphi} \right] \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.9)$$

в которой f_r и k_r — коэффициенты сухого трения скольжения и вязкого трения соответственно.

Тем самым принимается во внимание трение лишь между телом m и циклоидой, а в шарнире стержня трение должно быть компенсировано управляющей силой Q_ψ . Заметим, что сухое трение скольжения квадратично зависит от $\dot{\varphi}$ из-за влияния центробежной силы. Если $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, то на систему будет действовать трение покоя.

Наличие сухого трения осложняет картину положений равновесия. В точках $\varphi = \pm\pi$ сухое трение отсутствует. Если управления нет, то в окрестности точки $\varphi = 0$ возникает множество положений равновесия (зона застоя) из-за наличия трения покоя. Условия равновесия в окрестности $\varphi = 0$ принимают вид

$$\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right) = 0, \quad -f_r \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq f_r. \quad (3.10)$$

3.1. Маятник при раскачивающем законе управления (3.7). Тогда должно быть $\dot{\varphi}(t_0 + 0) > 0$. Второе уравнение системы (3.1) запишем как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\varphi} \left[\left(2b \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] \right\} + \frac{b}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \\ = \frac{g}{2a} (1 - b \sin \varphi) - b \left(f_r \dot{\varphi}^2 + 2k_r \dot{\varphi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сначала найдем положения равновесия, когда сухое трение отсутствует ($f_r = 0$). Тогда если $b < 1$, то положений равновесия нет. Если $b = 1$, то система имеет одно положение равновесия при $\varphi = \pi/2$, а при $b > 1$ — два положения равновесия, соответствующие значению $\sin \varphi = 1/b$.

Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_1 = \arcsin(1/b)$, будет устойчивым, так как если $\varphi < \varphi_1$, то соответствующая обобщенная сила положительна, а если $\varphi > \varphi_1$ она отрицательна. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_2 = \pi - \arcsin(1/b)$, будет неустойчивым, так как в его окрестности имеет место обратное действие обобщенной силы. Заметим, что

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} = b - \sqrt{b^2 - 1}, \quad \tan \frac{\varphi_2}{2} = b + \sqrt{b^2 - 1}. \quad (3.12)$$

Если есть сухое трение, то из-за действия трения покоя возникают зоны застоя. Эти зоны в соответствии с уравнением (3.11) обусловлены выражением

$$|1 - b \sin \varphi| \leq 2f_r b \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.13)$$

Раскроем выражение (3.13). Пусть $1 - b \sin \varphi \geq 0$. В этом случае из (3.13) следует, что зона застоя определена неравенством

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 2b \tan \frac{\varphi}{2} + 1 - 2f_r b \leq 0. \quad (3.14)$$

Обозначим через

$$d_1 = b - \sqrt{b^2 - (1 - 2f_r b)}, \quad d_2 = b + \sqrt{b^2 - (1 - 2f_r b)} \quad (3.15)$$

корни квадратного трехчлена в левой части неравенства (3.14). При

$$b^2 < (1 - 2f_r b) \Rightarrow f_r < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \quad (3.16)$$

корни d_1 и d_2 оказываются комплексными, что говорит о том, что зона застоя в этом случае отсутствует. Отметим, что второе неравенство (3.16) имеет смысл лишь при $b \leq 1$.

Если одновременно выполнены неравенства

$$b \leq 1 \ \& \ f_r \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right), \quad (3.17)$$

то зона застоя односвязная и определяется неравенством

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.18)$$

Она стягивается в точку при

$$f_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \ \& \ b \leq 1.$$

Пусть теперь $b > 1$. Тогда система имеет два положения равновесия, причем $\tan(\varphi_2 / 2) \leq d_2$ и $d_1 \leq \tan(\varphi_1 / 2)$. Неравенство (3.14) будет справедливо, только если

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq \tan \frac{\varphi_1}{2}, \quad \text{либо} \quad \tan \frac{\varphi_2}{2} \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.19)$$

Остальные участки областей застоя получаются в результате исследования случая, когда $1 - b \sin \varphi < 0$. Из (3.13) тогда следует, что область застоя определена неравенством

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 2b \tan \frac{\varphi}{2} + 1 + 2f_r b > 0. \quad (3.20)$$

Обозначим через

$$d_3 = b - \sqrt{b^2 - (1 + 2f_r b)} \text{ и } d_4 = b + \sqrt{b^2 - (1 + 2f_r b)} \quad (3.21)$$

корни квадратного трехчлена в левой части (3.20). Если сухое трение велико:

$$b^2 \leq 1 + 2f_r b \Rightarrow f_r \geq \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right), \quad (3.22)$$

то корни d_3 и d_4 оказываются либо комплексными, либо совпадают, а область застоя, охватываемая отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$, оказывается односвязной и выражается неравенством

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.23)$$

Если же

$$b^2 > 1 + 2f_r b \Rightarrow f_r < \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right), \quad (3.24)$$

то корни d_3 и d_4 действительны, причем $d_3 < d_4$. В этом случае неравенство (3.20) удовлетворяется, лишь если

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} < \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_3 \text{ либо } d_4 \leq \tan \frac{\varphi}{2} < \tan \frac{\varphi_2}{2}. \quad (3.25)$$

Объединив группу неравенств (3.19) и (3.25), найдем двухсвязную зону застоя в случае $b > 1$, когда выполнено неравенство (3.24):

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_3 \text{ и } d_4 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.26)$$

3.2. Маятник при раскачивающем законе управления (3.8). Тогда должно быть $\dot{\varphi}(t_0 + 0) < 0$. Второе уравнение системы (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\varphi} \left[\left(2b \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] \right\} + \frac{b}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \\ = -\frac{g}{2a} (1 + b \sin \varphi) + b \left(f_r \dot{\varphi}^2 - 2k_r \dot{\varphi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Перейдем к другой лагранжевой координате $\xi = -\varphi$. Уравнение Лагранжа для координаты ξ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\dot{\xi} \left(2b \cos \frac{\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} \right) \cos \frac{\xi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] + \frac{b}{2} \dot{\xi}^2 \sin \xi = \\ = \frac{g}{2a} (1 - b \sin \xi) - b \left(f_r \dot{\xi}^2 + 2k_r \dot{\xi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\xi}{2}. \end{aligned}$$

Оно по смыслу совпадает с уравнением (3.11), так как для новой переменной выполняется $\dot{\xi}(t_0 + 0) = -\dot{\varphi}(t_0 + 0) > 0$. Следовательно, все результаты предыдущего раздела переносятся на рассматриваемый случай с соответствующей интерпретацией.

Пусть трение отсутствует. Тогда если $b < 1$, то положений равновесия нет. Если $b = 1$, то система имеет одно положение равновесия при $\varphi = -\pi/2$, а при $b > 1$ система имеет два положения равновесия, соответствующие значению $\sin \varphi = -1/b$. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_3 = -\arcsin(1/b)$, будет устойчивым, так как если $\varphi > \varphi_3$, то соответствующая обобщенная сила отрицательна, а если $\varphi < \varphi_3$ — положительна. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_4 = -\pi + \arcsin(1/b)$, будет неустойчивым, так как в его окрестности возникает обратное действие обобщенной силы. Заметим, что

$$\tan \frac{\varphi_3}{2} = -b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad \tan \frac{\varphi_4}{2} = -b - \sqrt{b^2 - 1}.$$

Как и в предшествующем случае, сухое трение осложняет картину возможных равновесий системы наличием застойных зон. Эти зоны в соответствии с уравнением (3.27) обусловлены выражением

$$|1 + b \sin \varphi| \leq 2f_r b \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.28)$$

Пусть $1 + b \sin \varphi \geq 0$. Тогда при выполнении условия (3.17) зона застоя отсутствует. Если верны условия (3.17), то зона застоя односвязная и определяется неравенством

$$-d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1. \quad (3.29)$$

Она стягивается в точку, если

$$f_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \& b \leq 1.$$

Пусть теперь $b > 1$. Тогда система имеет два положения равновесия, причем $-d_2 \leq \tan(\varphi_4/2)$ и $\tan(\varphi_3/2) \leq -d_1$. Если выполнено неравенство (3.22), то область застоя, охватывая отрезок $[\varphi_3, \varphi_4]$, оказывается односвязной и выражается неравенством

$$-d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1. \quad (3.30)$$

Если же верно условие (3.24), то область застоя оказывается двухсвязной. Она описывается неравенствами

$$-d_3 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1 \quad \text{и} \quad -d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_4.$$

Заметим, что зоны застоя увеличиваются с увеличением коэффициента f_r сухого трения. Они пересекаются, когда $-d_1 \geq d_1$, что эквивалентно

$$f_r \geq \frac{1}{2b}. \quad (3.31)$$

В таком случае на отрезке

$$D = \left\{ \varphi : -|d_1| \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq |d_1| \right\} \quad (3.32)$$

из-за действия силы сухого трения возникает “мертвая” зона застоя. Если тело m попало туда с нулевой скоростью, то из этой зоны его невозможно вывести посредством изменения положения стержня l .

3.3. Анализ влияния длины стержня. Представим центральный момент инерции тела в виде $I_b = m\rho^2$, где ρ — радиус инерции тела. Дополнительно введем безразмерные параметры системы:

$$M = \mu m, l = \sigma a, \rho = \varepsilon a, b = \frac{2(\mu + 1)}{\mu\sigma}, \frac{I_b}{Mal} = \frac{\varepsilon^2}{\mu\sigma}. \quad (3.33)$$

Неравенство (3.6) предстанет в виде

$$\varepsilon^2 > 2 \left[\sqrt{16(1 + \mu)^2 + \mu^2\sigma^2} - 4(1 + \mu) \right] \quad (3.34)$$

или

$$\mu\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 16(1 + \mu)}, \quad (3.35)$$

которое устанавливает соотношение между радиусом инерции тела m , массой стержня и его длиной, исключая возникновение особенностей при управлении. Видно, что при малых значениях σ (малой длине стержня) роль ограничений (3.34), (3.35) невелика, а при достаточно больших значениях σ радиус инерции следует практически выбирать не меньше, чем $a\sqrt{2\mu\sigma}$.

Как следует из анализа положений равновесия системы, эффективность раскачивающего (тормозящего) управления зависит в основном от параметров μ , σ , и f_r . Параметры ε и k_r играют пассивную роль. От параметра ε зависит темп нарастания амплитуды, а параметр k_r ограничивает её величину, так как вязкое сопротивление при больших скоростях массы m может превосходить по величине все остальные силы. Лучше всего раскачивание происходит, когда при отклонённом стержне положения равновесия отсутствуют даже с учетом сухого трения. Такая ситуация возникает, если $b < 1$ и сухое трение сравнительно невелико, т.е. если выполнены неравенства (3.17): $b < \sqrt{f_r^2 + 1} - f_r$. Этого можно добиться, выбирая

$$\sigma > 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.36)$$

В такой ситуации максимально возможная амплитуда может быть достигнута за один взмах.

Если в соответствии с неравенствами (3.17) будет выполнено

$$2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) < \sigma \leq 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.37)$$

то из-за действия трения покоя при отклонённом стержне возникают две односвязные зоны равновесия, определённые формулами (3.18), (3.30). В этих зонах тело m может остановиться, если кинетическая энергия системы недостаточно велика.

Если в соответствии с неравенствами (3.22) будет верно

$$2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) < \sigma < 2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.38)$$

то к положениям равновесия из-за действия сухого трения добавятся еще положения равновесия из-за действия силы тяжести, хотя области положений равновесия все еще будут оставаться односвязными для каждого экстремального положения стержня.

Если выполнено неравенство (3.24), т.е.

$$0 < \sigma < 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.39)$$

то для каждого экстремального положения стержня зона положений равновесия становится двухсвязной, её расстояние от нулевого положения равновесия сокращается при уменьшении относительной длины σ стержня, уменьшая возможность увеличения амплитуды за один взмах.

Если

$$0 < \sigma < 4f_r \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = S, \quad (3.40)$$

а тело m находится на отрезке D , определённом формулой (3.32), то посредством изменения положения стержня l сдвинуть его с указанной позиции окажется невозможно. Если $\sigma > S$, то “мертвая” зона D застоя отсутствует. В зависимости от величины f_r параметр S меняет свое значение, ограничивая снизу область возможности управления системой:

$$\begin{cases} S \leq 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & 0 < f_r \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) < S \leq 2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & \frac{1}{2\sqrt{2}} < f_r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) < S < 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & f_r > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.41)$$

3.4. Результаты вычислений. Уравнения (3.11) и (3.27) можно представить в виде

$$\ddot{\phi}A - \dot{\phi}^2B = \begin{cases} \frac{g}{2a}(1 - b \sin \phi) - \frac{b}{2}(1 + \cos \phi) \left[f_r \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a} \right) + 2k_r \dot{\phi} \right], & \dot{\phi} > 0, \\ -\frac{g}{2a}(1 + b \sin \phi) + \frac{b}{2}(1 + \cos \phi) \left[f_r \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a} \right) - 2k_r \dot{\phi} \right], & \dot{\phi} < 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

где

$$A = \begin{cases} b(1 + \cos \phi) - \frac{1}{2} \sin \phi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\phi} > 0, \\ b(1 + \cos \phi) + \frac{1}{2} \sin \phi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\phi} < 0, \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{1}{2}(b \sin \phi + \cos \phi), & \dot{\phi} > 0, \\ \frac{1}{2}(b \sin \phi - \cos \phi), & \dot{\phi} < 0. \end{cases}$$

Когда оказывается, что $\dot{\phi} = 0$, то это означает, что достигнуто максимальное значение отклонения тела m от нулевого положения равновесия, и в этот момент в формулах (3.42) происходит альтернативное переключение знаков. В начальный момент t_0 времени задаётся $\dot{\phi} = \phi = 0$, а управление выбирается так, как если бы $\dot{\phi}(t_0 - 0) < 0$.

Учет трения покоя выполняется по формуле

$$\ddot{\phi} = 0 \text{ при } \begin{cases} \dot{\phi} = 0, & \phi > 0, \quad |1 + b \sin \phi| < b f_r (1 + \cos \phi), \\ \dot{\phi} = 0, & \phi \leq 0, \quad |1 - b \sin \phi| < b f_r (1 + \cos \phi). \end{cases} \quad (3.43)$$

Параметры системы имеют вид (3.33). На рис. 2 представлен фазовый портрет системы для следующего набора независимых параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = \sqrt{0.5}$, $f_r = 0$, $k_r = 0$. Пунктиром выделены оси, проходящие через начало координат, а также положения равновесия при отклоненном стержне от вертикали, соответствующие значениям $\phi_1 = -\phi_3 = \arcsin(1/b) \approx 0.0625$. На всех фазовых портретах ниже по горизонтальной оси откладываются значения параметра ϕ , а на вертикальной оси — значения скорости $\dot{\phi}$. Видно, что описанный в разд. 3 алгоритм раскачивания системы успешно справляется с задачей увеличения амплитуды колебаний вплоть до значения скорости порядка 3 С^{-1} . Далее гироскопическая сила, определяемая

коэффициентом B , будучи отрицательной в окрестности $\varphi = 0$, превосходит по модулю положительный момент силы тяжести. Затем момент силы тяжести при проходе параметра φ через точку $\varphi_3 = -\pi + \arcsin(1/b)$ тоже становится отрицательным, усугубляя уменьшение скорости после прохождения точки φ_3 . В окрестности точки $\varphi = \pi$ гироскопическая сила становится положительной, определяя некоторое увеличение скорости $\dot{\varphi}$ в конце фазовой траектории.

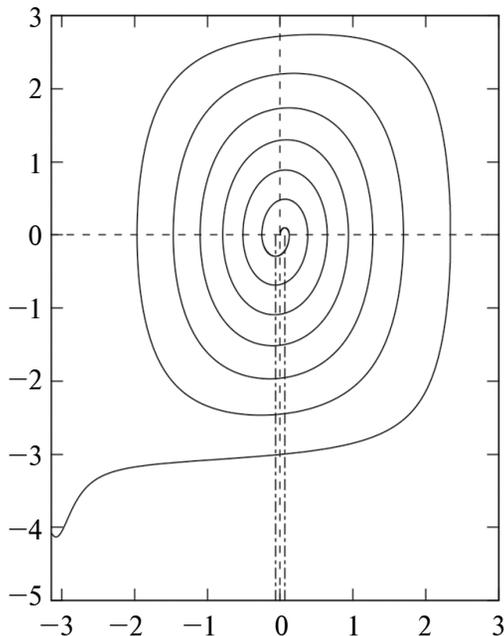


Рис. 2. Фазовый портрет при $f_r = k_r = 0$

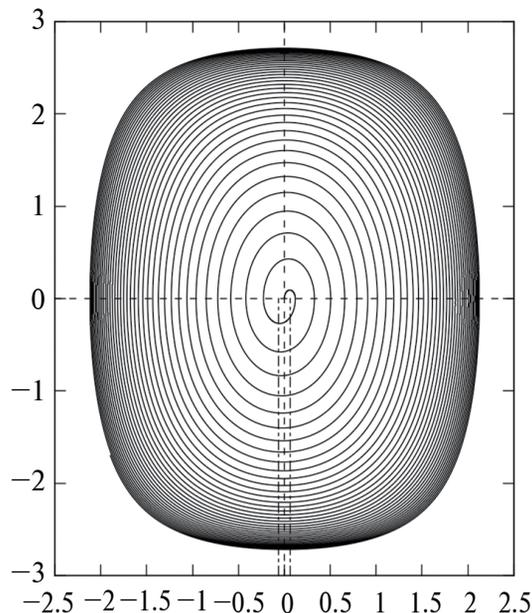


Рис. 3. Вязкое трение: $f_r = 0, k_r = 0,1$

На рис. 3 представлен фазовый портрет системы, для которого по сравнению с параметрами, принятыми для рис. 2, изменён только коэффициент вязкого трения: $k_r = 0.1$. Видим, что даже сравнительно небольшое вязкое трение препятствует неограниченному увеличению амплитуды, уменьшая приращения амплитуды на каждом следующем цикле управления. На рис. 4 показан фазовый портрет системы для $k_r = 1$. Здесь достаточно быстро удаётся достичь амплитуды, определяющей предельный цикл колебаний. Причем значение этой амплитуды оказывается весьма небольшим.

Рис. 5 дает представление о том, как ведёт себя система при $k_r = 3$. Это значение оказывается большим настолько, что вместо колебаний система аperiodически стремится к положениям равновесия ($\varphi = \pm \arcsin(1/b) \approx \pm 1/16, \dot{\varphi} = 0$). Процесс приближения $\dot{\varphi} \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \pm 1/16$ происходит на бесконечном интервале времени. Поэтому переключение управляющей функции делается не при $\dot{\varphi} = 0$, а когда $\dot{\varphi}$ становится достаточно малым. Предельная амплитуда колебаний в данном случае, очевидно, оказывается равной $\arcsin(1/b)$. При дальнейшем увеличении $k_r > 3$ амплитуда колебаний меняться уже не будет.

При выполнении расчётов, связанных с оценкой влияния сухого трения, необходимо учитывать трение покоя. В соответствии с формулой (3.32) движение тела m из нулевого положения равновесия может начаться вследствие качания стержня лишь тогда, когда выполнено соотношение $2bf_r < 1$. Если взять параметры, принятые выше для оценки влияния вязкого трения: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1, \sigma = 0.25, \varepsilon = \sqrt{0.5}$, то получим $\sigma > 8f_r$. Таким образом, при $\sigma = 0.25$ должно быть $f_r < 0.03125$. На рис. 6 показан фазовый портрет системы для значений $f_r = 0.025, k_r = 0$. Остальные параметры соответствуют ранее рассмотренным вариантам. При сравнении с рис. 1 видно, что наличие сухого трения приводит к тому, что амплитуда колебаний увеличивается медленнее и приращения амплитуды становятся больше от цикла к циклу управления, указывая на отсутствие предельно большой конечной амплитуды. Следовательно, в кинематически допустимых пределах маятник с таким трением можно раскачать до любой заданной амплитуды. Но процесс раскачивания будет замедленным.

Аналогичная картина наблюдается для коэффициентов трения, близких к предельному значению 0.03125, например $f_r = 0.031$. В этом случае приращения амплитуды в начале раскачивания настолько малы, что изображение сливается в одно пятно. Но раскачивание всё-таки происходит неограниченно. Ускорить процесс раскачивания под действием влияния сухого трения можно, увеличивая длину стержня. На рис. 7 изображен фазовый портрет системы для значений $\sigma = 0.3$, $f_r = 0.025$, $k_r = 0$. Видно, что при увеличенной длине стержня приращения амплитуды от цикла к циклу возрастают и для раскачивания требуется меньше витков.

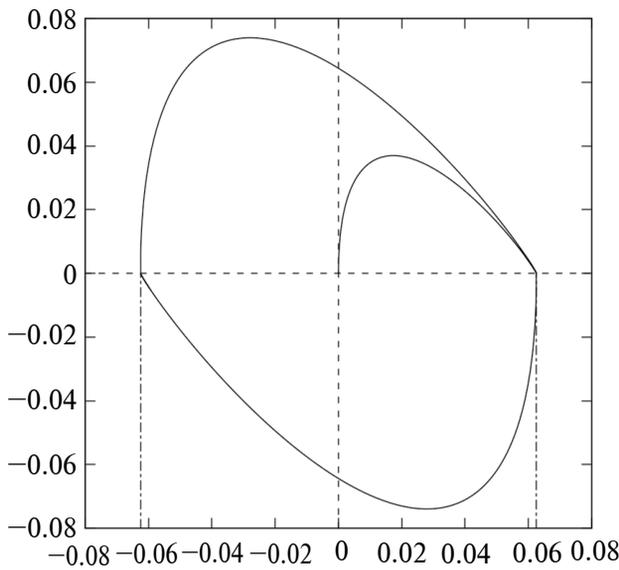


Рис. 5. Вязкое трение: $f_r = 0$, $k_r = 3$

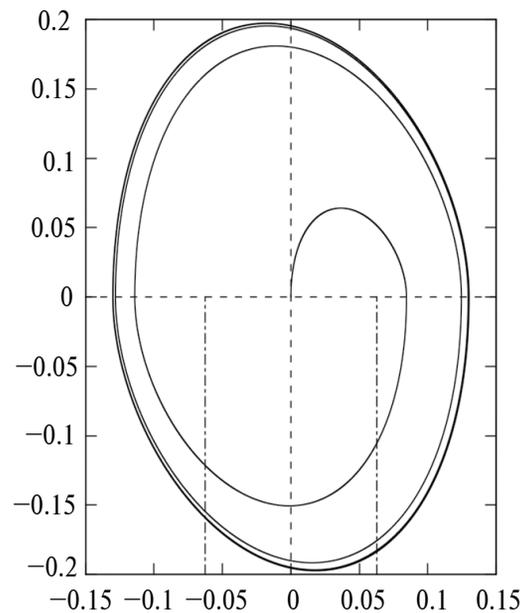


Рис. 4. Вязкое трение: $f_r = 0$, $k_r = 1$

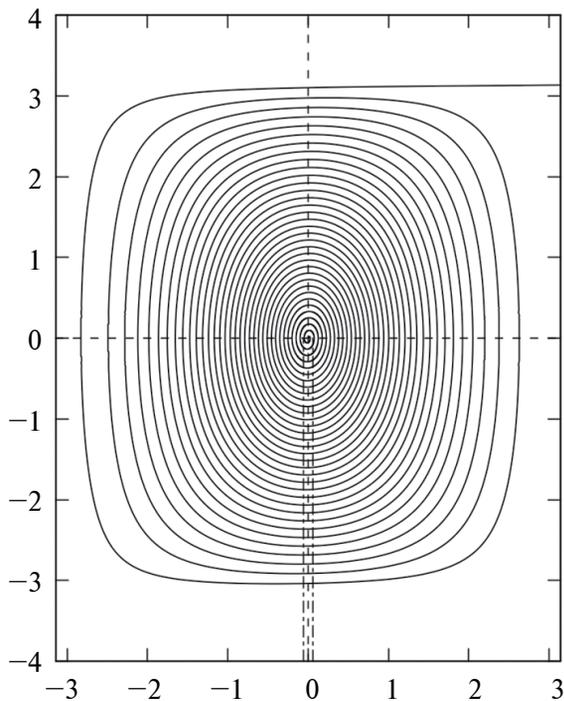


Рис. 6. Сухое трение: $f_r = 0,025$, $k_r = 0$

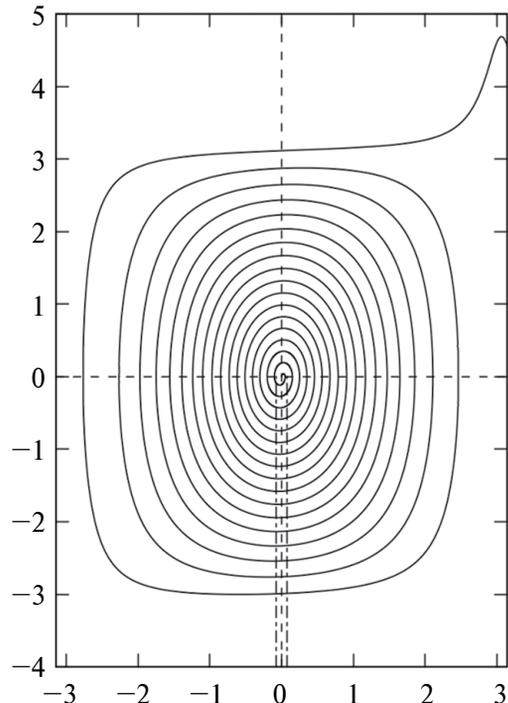


Рис. 7. Сухое трение: $f_r = 0,025$, $\sigma = 0,3$

Как уже отмечалось выше, при выполнении условия $2bf_r \geq 1$ невозможно заставить тело m выйти из нулевого положения равновесия посредством колебаний стержня. Но это тело можно попытаться вытолкнуть из положения равновесия, придав ему некоторую начальную скорость. Рис. 8 показывает, что в этом случае даже при применении оптимальной стратегии раскачивания тело m колеблется с уменьшающейся амплитудой, так как в окрестности нулевого положения равновесия влияние силы трения превосходит влияние силы тяжести. Остановка здесь происходит не в начале координат, а в некоторой точке зоны нечувствительности.

Если трение отсутствует, то в силу консервативности системы прекращение управления влечёт сохранение амплитуды колебаний. В присутствии трения такой способ сохранения амплитуды невозможен. Вместе с тем трение можно использовать для поддержания значений амплитуды колебаний в некотором диапазоне значений. На рис. 9 изображён фазовый портрет системы, соответствующий параметрам $\sigma = 0.25$, $f_r = 0.025$. Здесь при превышении значения 0.5 модуля амплитуды в моменты достижения значений скорости $\dot{\varphi} = 0$ оптимальное увеличение амплитуды прекращалось, стержень приводился в вертикальное положение вдоль отрицательного направления оси $O\eta$ и в таком положении оставался до того момента, когда амплитуда становилась меньше заданного значения. На рисунке видна полоса, внутри которой находятся фазовые траектории при таком управлении. Диапазон получающихся амплитуд приблизительно составляет 0.1. Выделяются также траектории пассивного торможения. На них происходит уменьшение амплитуды. Регулировка ширины полосы может быть обеспечена изменением длины стержня.

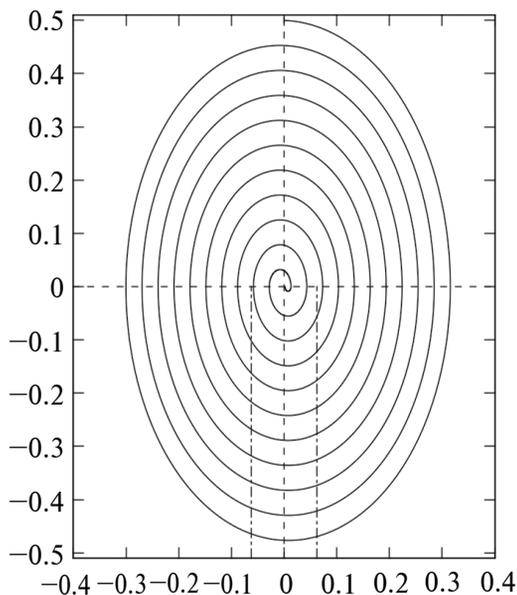


Рис. 8. Сухое трение: $\dot{\varphi}_0 = 0,5$, $f_r = 0,035$

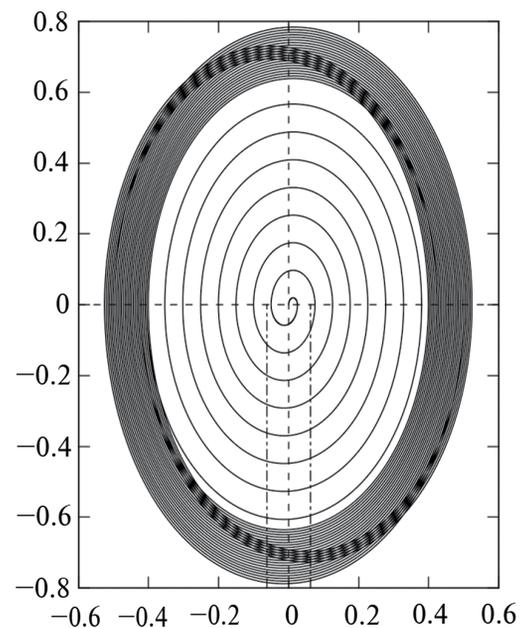


Рис. 9. Управление по амплитуде

На рис. 10 показана диаграмма Пуанкаре предложенной выше процедуры удержания амплитуды в требуемом диапазоне значений. По горизонтальной оси откладываются предыдущие значения амплитуды, а по вертикальной оси — последующие. Участки диаграммы, находящиеся выше биссектрисы координатного угла, соответствуют увеличению амплитуды, а участки, расположенные ниже биссектрисы, — уменьшению. На рисунке видно, что сначала происходит монотонное увеличение амплитуды, а затем включается описанная выше логика поддержания амплитуды в районе значения 0.5. Регулировка ширины реализуемого диапазона значений амплитуды может быть обеспечена посредством изменения длины стержня.

4. Пример 2. Выведение шестиногого робота из положения “навзничь”. В работе [8] была исследована задача о спасении робота из указанного аварийного положения с помощью согласованного колебательного движения группы ног, находящихся с одной его стороны. При этом колебательное движение ног было релейным, но содержащим линейные переходные участки между минимальным и максимальным допустимыми значениями углов между ногами и корпусом. Указанное колебательное движение ног не было оптимальным, но приводило к вынужденным

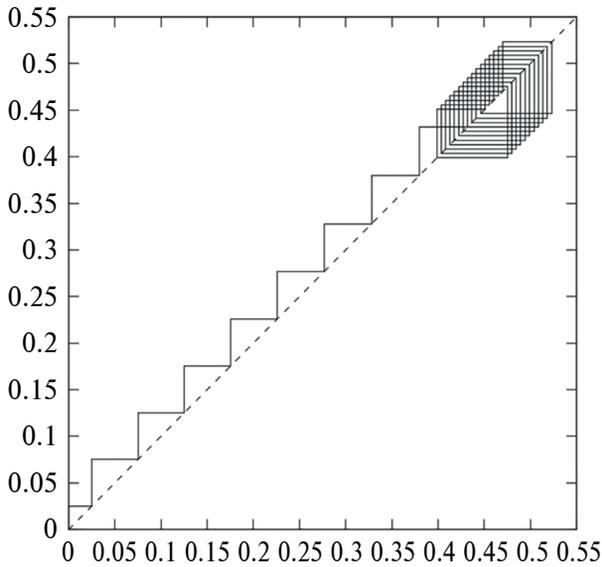


Рис. 10. Диаграмма Пуанкаре

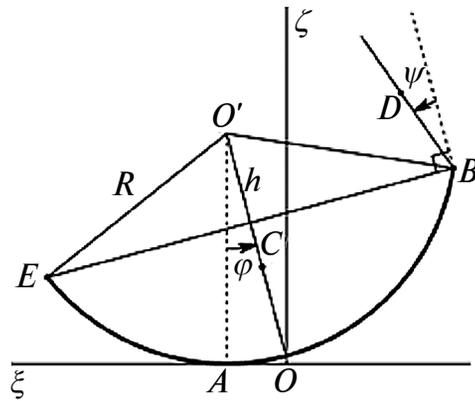


Рис. 11. Переворот робота из положения “навзничь”

колебаниям корпуса с нарастающей амплитудой, что в конечном итоге обеспечивало переворот корпуса робота в правильное рабочее положение. Здесь обсудим вопрос об оптимизации процедуры раскачивания. Движение робота будем считать плоскопараллельным.

Рассмотрим сечение системы плоскостью, перпендикулярной продольной оси корпуса. Тогда в этой плоскости на горизонтальной опорной прямой будет лежать однородный сегмент круга, имеющий массу M . Сегмент ограничен дугой окружности радиуса R и хордой BE , отстоящей от центра окружности на расстоянии h . Дуга окружности сегмента касается опорной прямой в точке A . Сегмент может перекачиваться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь вокруг центра упомянутой окружности на угол φ , отсчитываемый от вертикального радиуса, который направлен в точку A касания сегмента с прямой. Если $\varphi = 0$, то сегмент лежит так, что его хорда параллельна опорной прямой (рис. 11).

К правому концу B хорды BE сегмента плоским шарниром прикреплен стержень (выпрямленные ноги) массы m_1 , который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . Угол ψ отсчитывается от внешнего перпендикуляра к хорде сегмента. Когда $\psi = 0$, стержень направлен перпендикулярно хорде в сторону от опорной прямой. На другом конце хорды BE в точке расположена точечная масса m_2 , уравновешивающая стержень. Центр масс D стержня расположен на расстоянии ρ от точки B . Центр масс C сегмента расположен на срединном перпендикуляре к хорде на расстоянии r от центра окружности сегмента. Сегмент имеет момент инерции J относительно прямой, проходящей через центр масс сегмента перпендикулярно плоскости сегмента. Момент инерции стержня относительно его центра масс обозначим буквой J_r . Для описания движения воспользуемся системой координат $O\xi\zeta$. Начало O поместим в точку касания сегмента с опорной прямой при $\varphi = 0$. Ось $O\xi$ пустим вдоль опорной прямой справа налево. Ось $O\zeta$ направим вертикально вверх.

Уравнение изменения кинетического момента системы относительно продольной оси корпуса, проходящей через точку A , возьмём из работы [8]:

$$\frac{d}{dt}(K_\varphi \dot{\varphi} + K_\psi \dot{\psi}) - R\dot{\varphi}Q_\zeta = M_\sigma g(\xi_{cm} - R\varphi), \tag{4.1}$$

где

$$K_\varphi = I + 2R[M_\sigma(\zeta'_{cm} \cos \varphi - \xi'_{cm} \sin \varphi) - m_1 \rho \cos(\psi - \alpha)],$$

$$K_\psi = J_r + m_1 \rho^2 + m_1 \rho R[\cos(\varphi + \psi) - \cos(\psi - \alpha)],$$

$$\xi'_{cm} = \frac{m_1 \rho \sin \psi - S_2}{M + m_1 + m_2}, \quad \eta'_{cm} = 0, \quad \zeta'_{cm} = \frac{m_1 \rho \cos \psi - S_1}{M + m_1 + m_2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{R}.$$

$$\begin{aligned}
I &= J + J_r + M(R^2 + r^2) + m_1(\rho^2 + 2R^2) + 2m_2R^2, \quad M_\sigma = M + m_1 + m_2, \\
\xi_{cm} &= R\varphi + \xi'_{cm} \cos \varphi + \zeta'_{cm} \sin \varphi, \quad \eta_{cm} = 0, \quad \zeta_{cm} = R - \xi'_{cm} \sin \varphi + \zeta'_{cm} \cos \varphi, \\
Q_\zeta &= -M_\sigma(\xi_{cm} - R\varphi)\dot{\varphi} - m_1\rho\dot{\psi} \sin(\varphi + \psi), \quad Q_\xi = M_\sigma\zeta_{cm}\dot{\varphi} + m_1\rho\dot{\psi} \cos(\varphi + \psi), \\
S_1 &= Mr + (m_1 + m_2)h, \quad S_2 = (m_1 - m_2)\sqrt{R^2 - h^2}.
\end{aligned}$$

4.1. Оптимальное управление. В соответствии с обозначениями разд. 1 в рассматриваемом примере имеем

$$f = K_\varphi + K_\psi \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad F = g[m_1 \sin(\varphi + \psi) - (S_2 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi)]. \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что экстремальные по углу ψ значения функции F достигаются при

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} - \varphi \rightarrow \frac{d\psi}{d\varphi} = -1. \quad (4.3)$$

Функция f на экстремали имеет вид

$$f = J + M |AC|^2 + m_1 [|AB|^2 \mp \rho R \sin(\varphi + \alpha)].$$

Следовательно, $f > 0$ для любых значений угла φ , если

$$\frac{J + M |AC|^2}{m_1} + |AB|^2 > \rho R. \quad (4.4)$$

В дальнейшем условие (4.4) будем предполагать выполненным.

Простейший вариант стратегии управления при раскачивании корпуса робота получается, когда ограничения на угол ψ отсутствуют:

$$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi, & \dot{\varphi} > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \dot{\varphi} < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Геометрический смысл полученного управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен вертикальной оси $O\xi$. Для положительного полуразмаха стержень направлен влево, а для отрицательного полуразмаха — вправо (рис. 11). При этом переключения управления должны быть мгновенными.

Из-за инерционности стержня закон управления (4.5) практически нереализуем и может рассматриваться лишь как предельный вариант при бесконечно большой скорости переходного процесса. Кроме того, наличие неровностей опорной поверхности может привести к столкновениям ноги с опорой и связанных с этим потерям энергии и уменьшению амплитуды колебаний.

Более реалистичным представляется вариант, когда функция $\psi(t)$ и её производная по времени ограничены: $\psi_m \leq \psi \leq \Psi_M$, $\dot{\psi}_m \leq \dot{\psi} \leq \dot{\Psi}_M$. Тогда оптимальное управление, учитывающее только ограничение на величину угла ψ , предстанет в виде

$$\dot{\varphi} > 0 : \psi_n = \begin{cases} \Psi_M, & \frac{\pi}{2} - \varphi \geq \Psi_M, \\ \frac{\pi}{2} - \varphi, & \psi_m \leq \frac{\pi}{2} - \varphi < \Psi_M, \\ \psi_m, & \frac{\pi}{2} - \varphi < \psi_m; \end{cases} \quad \dot{\varphi} < 0 : \psi_n = \begin{cases} \psi_m, & -\frac{\pi}{2} - \varphi < \psi_m, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \Psi_M \geq -\frac{\pi}{2} - \varphi \geq \psi_m, \\ \Psi_M, & -\frac{\pi}{2} - \varphi > \Psi_M. \end{cases}$$

Смысл управления ψ_n состоит в том, что если вычисленное по формуле (4.5) оптимальное значение угла ψ не попадает в отрезок $[\psi_m, \psi_M]$, то в качестве ψ_n выбирается ближайшая к этому значению граница отрезка $[\psi_m, \psi_M]$. Учет ограничения по скорости переходного процесса выполняется линейно по времени в соответствии с формулой

$$\dot{\psi}_t = \begin{cases} \dot{\psi}_n, & |\psi - \psi_n| \leq d, \\ \frac{1}{2}[(\dot{\psi}_m - \dot{\psi}_M)\text{sign}(\psi - \psi_n) + \dot{\psi}_m + \dot{\psi}_M], & |\psi - \psi_n| > d, \end{cases} \quad (4.6)$$

где d — ширина зоны чувствительности следящей системы. Значение $\dot{\psi}_t$ подается на вход следящей системы. Иными словами, значение угла ψ_t будет максимально быстро приближаться к значению ψ_n с постоянной допустимой угловой скоростью. После того как неравенство $|\psi - \psi_n| \leq d$ окажется выполненным, система начнёт реализовывать желаемое управление ψ_n .

4.2. Результаты компьютерного моделирования. Параметры робота были взяты такими же, как в работе [8]. При расчётах трением качения, ввиду его малости, будем пренебрегать. На рис. 12 показан фазовый портрет раскачивающегося робота, когда значения угла ψ были ограничены диапазоном $\psi_m = -30^\circ \leq \psi \leq 60^\circ = \psi_M$, а значения угловой скорости $\dot{\psi}$ лежали в пределах $\dot{\psi}_m = -2\text{с}^{-1} \leq \dot{\psi} \leq 2\text{с}^{-1} = \dot{\psi}_M$. Естественно, что перед началом процесса раскачивания корпуса ноги робота, не участвующие в этом процессе, складываются так, чтобы они не мешали раскачиванию. Зависимость $\dot{\phi}(\phi)$ выделена символом “□”, причем значения $\dot{\phi}$ откладываются по оси ординат в 1/с. Значения ϕ откладываются по оси абсцисс в радианах. Зависимость $\psi(\phi)$ выделена символом “○”. Для неё по оси ординат откладываются значения в радианах. Характерные “ушки” на графиках $\dot{\phi}(\phi)$ соответствуют моментам переключения функции $\psi(\phi)$. Криволинейные участки зависимости $\psi(\phi)$ соответствуют линейному по времени переходу между ограничениями. Не параллельные оси абсцисс прямолинейные участки функции $\psi(\phi)$ соответствуют случаю, когда $\psi + \phi = \pm\pi / 2$.

Функция $\psi(\phi)$ начинается практически из начала координат, затем выходит на максимальное ограничение, сходит с него линейно по ϕ , а когда становится $\dot{\phi} = 0$ при $\phi > 0$, она линейно по времени устремляется к минимальному ограничению и т.д. В данном варианте желаемый переворот корпуса происходит сразу после первого полного качания на третьем размахе.

Если возникает опасность соударения маховых ног с неровностью опорной поверхности, то тогда возникает необходимость сузить допустимую область изменения угла ψ . На рис. 13 показан фазовый портрет системы при ограничениях $10^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$. Остальные параметры были взяты такими же, как в предыдущем примере.

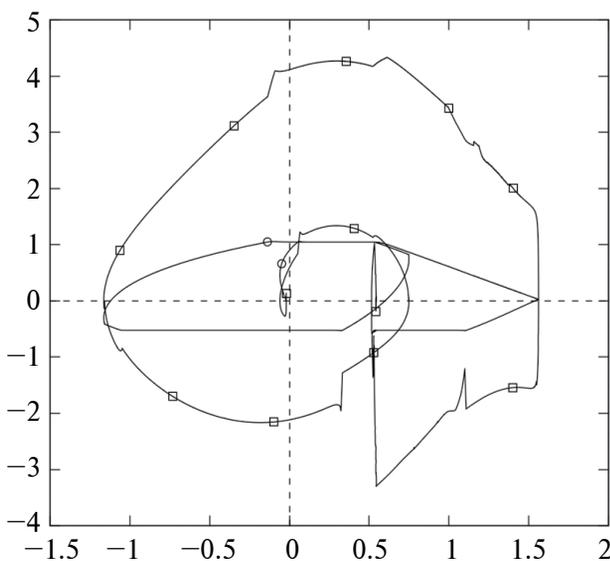


Рис. 12. Фазовый портрет при $-30^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$

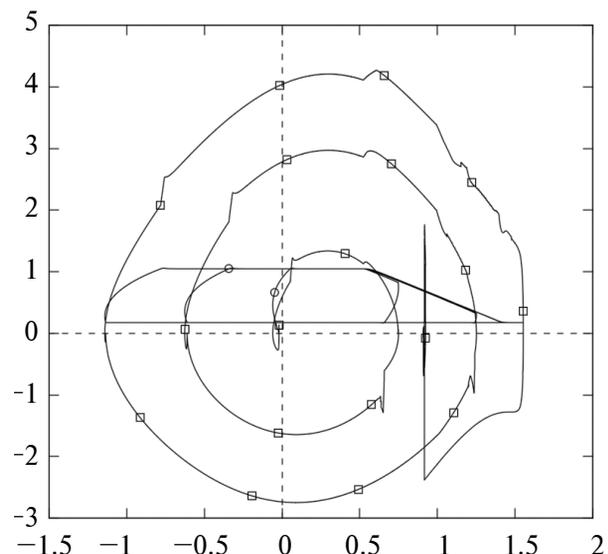


Рис. 13. Фазовый портрет системы при $10^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$

На рис. 13 видно, что простое сужение области допустимых значений управления приводит к потере преимуществ оптимального управления в связи с увеличением числа колебаний. Для сохранения указанных преимуществ может потребоваться введение более изощрённых ограничений, зависящих от φ .

На рис. 14 представлен для сравнения фазовый портрет системы, когда управление происходит с тем же набором ограничений, что и для рис. 13, но в соответствии с неоптимальным алгоритмом, предложенном в [8]. Здесь число колебаний получается таким же, как и для оптимального варианта на рис. 13.

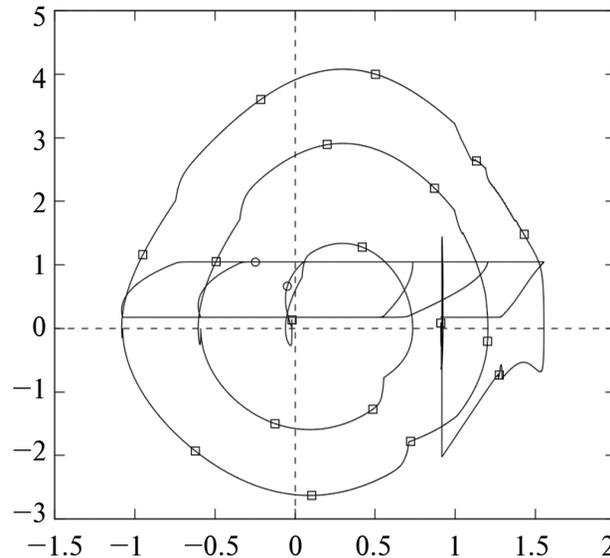


Рис. 14. Фазовый портрет при управлении “по упорам”

Заключение. Предложены простые и лаконичные необходимые условия оптимальности управления колебаниями для голономных механических систем общего вида с сухим и вязким трением и дефицитом управления по одной степени свободы. Применение алгоритмов управления, получаемых из указанных необходимых условий оптимальности (2.1)—(2.4), предполагает учет информации о достижении экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукосильвания. Условия (2.1)—(2.4) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [15]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на стратегию выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этой стратегии в каждом конкретном случае. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Эти условия упрощают решение оптимальных задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. В примере о маятнике с опорой, скользящей по циклоиде, проиллюстрированы особенности применения предложенного метода в системах с трением и продемонстрирована техника учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности её заданного значения. В задаче о спасении шестиногого робота из аварийного положения “навзничь” с необременительными ограничениями на управление найдено оптимальное решение, позволяющее выполнить переворот робота на третьем размахе колебаний. Показано, что простое сужение области допустимых управлений может привести к существенной потере преимуществ, связанных с оптимальностью. Тем не менее задача спасения робота успешно выполняется и в этом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Перевод с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
2. *McGeer Tad.* Passive Dynamic Walking // Intern. J. Robotics Research. 1990. V. 9. No. 2. P. 62–82.
3. *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
4. *Чернусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 384 с.
5. *Гришин А. А., Житомирский С. В., Ленский А. В., Формальский А. М.* Управление ходьбой двуногого пятизвенного механизма // Изв. РАН: ТиСУ. 1999. № 6. С. 15–19.
6. *Климина Л. А., Формальский А. М.* Об оптимальном раскачивании качелей стоящим на них человеком // Изв. РАН: ТиСУ. 2022. № 6. С. 85–94. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.31857/S0002338822060117. *Klimina, L. A., Formalskii, A. M.* On the Optimal Swinging of a Swing by a Person Standing on It // J. Computer and Systems Sciences International. 2022. V. 61. No. 6, P. 944–953. ISSN 064-2307. DOI: 10.1134/S1064230722060119.
7. *Безнос А. В., Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Формальский А. М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 1. С. 27–38.
8. *Голубев Ю. Ф., Корянов В. В., Мелкумова Е. В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами” // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163–176. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.1134/S0002338819060052.
9. *Golubev Yu.F., Koryanov V. V., Melkumova E. V.* Bringing an Insectomorphic Robot to a Normal Position from an Abnormal Upside Down Position // J. Computer and Systems Sciences International. 2019. V. 58. No. 6. P. 987–999. ISSN PRINT 1064-2307. DOI: 10.1134/S1064230719060054.
9. *Голубев Ю. Ф.* Метод оптимального управления колебаниями механических систем: Препринт № 33. М: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>, <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>
10. *Golubev, Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. No. 11. P. 2596–2607. ISSN: 1995-0802. <https://doi.org/10.1134/S199508022111010X>
11. *Голубев Ю. Ф.* Оптимизация колебаний механических систем // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 52–57. ISSN: 2686-9543. DOI: 10.31857/S2686954322010040.
12. *Голубев Ю. Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // Известия РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 22–30. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.31857/S0002338822040084. *Golubev Yu.F.* Controlling the Amplitude of Oscillations of Mechanical Systems // J. Computer and Systems Sciences International. 2022. V. 61. No. 4. P. 496–504. <https://doi.org/10.1134/S1064230722040086>
13. *Голубев Ю. Ф.* Оптимизация колебаний механических систем с трением // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. С. 18–26. ISSN: 2686-9543. DOI: 10.31857/S2686954323600052.
14. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. М.: ГОСТЕХИЗДАТ. 1957. С. 5–32.
15. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
16. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е, испр. М.: МЦНМО. 2018. 344 с. ISBN 978-5-94057-907-6.

УДК 519.977

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ МАШИНЫ ДУБИНСА С ОДНОКРАТНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А.С. Бортакровский^{a, b, *}, И.В. Урюпин^{c, **}

^a Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^b МИСИС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

^c ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

**e-mail: uryupin93@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

После доработки 19.09.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается задача быстродействия гибридной системы, в процессе функционирования которой количество объектов управления меняется. Движение начинает один объект управления (носитель). В некоторый момент времени от него отделяются несколько подвижных объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). Носитель представляется гибридной моделью машины Дубинса, допускающей траектории неограниченной кривизны. Движение отделяемых объектов прямолинейное с ограниченными скоростями и ускорениями. Решается задача минимизации времени достижения всех целей.

Ключевые слова: гибридная система, модель Дубинса, оптимальное управление, разделение объектов управления

DOI: 10.31857/S0002338824010063, EDN: IVVBVB

RESERCHING PERFORMANCE OF THE DUBINS MACHINE HYBRID MODEL WITH SINGLE SEPARATION OF CONTROL OBJECTS

© 2024 A.S. Bortakovskii^{a, b, *}, I.V. Uryupin^{c, **}

^a Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

^b National University of Science and Technological University (MISiS), Moscow, Russia

^c Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia

*e-mail: asbortakov@mail.ru

**e-mail: uryupin93@yandex.ru

The problem of the performance of a hybrid system, which the number of control objects changes during the operation is considered. One control object (carrier) begins to move. At some point in time, several moving objects are separated from it and sent to specified terminal states (targets). The carrier is represented by a hybrid model of the Dubins machine, allowing trajectories of unlimited curvature. The movement of separated objects is rectilinear with limited speeds and accelerations. The problem of minimizing the time to achieve all goals is solved.

Keywords: hybrid system, Dubins model, optimal control, separation of control objects

Введение. Задачи группового управления имеют многочисленные приложения, в том числе при управлении подвижными объектами [1–3], в частности летательными аппаратами [4–8]. Постановки задач группового управления подвижными объектами весьма разнообразны [9]. Например, задачи сбора группы в заданной области [4], обход препятствий [2, 4, 8], перехват подвижной цели [10], управление в конфликтной среде [11]. Управляемыми динамическими системами служат

математические модели роботов, летательных аппаратов, надводных и подводных кораблей. Для моделирования движения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [12] нередко используется модель Маркова—Дубинса [13—15] или ее модификации и обобщения [16—20].

Рассматривается задача достижения точечных целей группой подвижных объектов за наименьшее время. Процесс управления разбивается на два этапа. На первом этапе объект управления один — это так называемый носитель. Его движение представляется гибридной моделью машины Дубинса, допускающей траектории неограниченной кривизны. Первый этап заканчивается, когда от носителя отделяются несколько объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). На втором этапе происходит управление группой отделяемых объектов. Скорость движения и ускорение каждого объекта ограничены. Второй этап заканчивается, когда все отделяемые объекты попадают в заданные терминальные состояния. Требуется найти наименьшее время достижения целей, т.е. решить задачу группового быстрогодействия.

Для решения поставленной задачи нужно найти оптимальное управление на каждом этапе, а также оптимальную точку разделения объектов управления, в которой заканчивается первый этап — управление носителем, и начинается второй этап — управление группой отделяемых объектов. Оптимальное управление подвижными объектами находится с помощью принципа максимума Понтрягина [21]. Наилучшее положение точки разделения определяется путем применения негладкого анализа [22] и параметрической оптимизации.

В статье получены типовые оптимальные траектории движения гибридной модели машины Дубинса, описано положение оптимальной точки разделения объектов управления, разработан алгоритм решения задачи группового быстрогодействия. Эффективность алгоритма показана на примерах.

1. Постановка задачи. Пусть на промежутке времени $[0, s]$ прямолинейное движение носителя описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma, \dot{y}(t) = v(t)\sin\gamma, \dot{v}(t) = u(t), \quad (1.1)$$

а криволинейное движение (поворот) —

$$\dot{x}(t) = v\cos\gamma(t), \dot{y}(t) = v\sin\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t). \quad (1.2)$$

Здесь x, y — координаты положения объекта управления на плоскости, γ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, v, u — линейные скорость и ускорение, а ω, ε — угловые скорость и ускорение соответственно. Управление осуществляется выбором ускорений u и ε , удовлетворяющих ограничениям $|u(t)| \leq U, |\varepsilon(t)| \leq \mathcal{E}$, где U и \mathcal{E} — заданные максимальные значения ускорений. Изменение модели движения, когда прямолинейное движение (1.1) сменяется криволинейным (1.2) или наоборот, считается переключением. В моменты переключений координаты x, y, γ, v непрерывны, а угловая скорость $\omega = 0$.

Динамическая система (1.1), (1.2) является гибридной моделью машины Дубинса [19].

В отличие от классической модели, при прямолинейном движении возможно изменение линейной скорости, а при поворотах — угловой. Кроме того, допустимы повороты на месте, которые исключаются в других обобщениях машины Дубинса. Заметим, что модель (1.1), (1.2) относится к гибридным системам переменной размерности [23], так как количество координат вектора состояния системы до разделения и после разделения разное.

Начальное состояние носителя задано

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \gamma(0) = \gamma_0, v(0) = v_0, \omega(0) = \omega_0. \quad (1.3)$$

Конечное состояние может определяться по-разному, в зависимости от постановки задачи [19]. Например, для попадания в точку $S(x_S, y_S)$ условия имеют вид

$$x(s) = x_S, y(s) = y_S. \quad (1.4)$$

Для остановки носителя в точке $S(x_S, y_S)$ добавляются равенства нулю конечных скоростей (линейной и угловой):

$$x(s) = x_S, y(s) = y_S, v(s) = 0, \omega(s) = 0. \quad (1.5)$$

В момент времени s происходит отделение от носителя m отделяемых объектов, движение которых описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t)\cos\gamma_i(t), \dot{y}_i(t) = v_i(t)\sin\gamma_i(t), \dot{v}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

Здесь x_i, y_i, γ_i — плоские координаты и угол направления движения i -го объекта, v_i, u_i — его линейная скорость и ускорение. Управление каждым объектом осуществляется выбором угла направления γ_i и ускорения u_i , удовлетворяющего ограничению $|u_i(t)| \leq U_i$.

Начальное состояние i -го отделяемого объекта определяются конечным состоянием носителя

$$x_i(s) = x(s), y_i(s) = y(s), v_i(s) = 0,$$

а конечное состояние объекта — заданной терминальной точкой $F_i(x_{F_i}, y_{F_i})$. При этом возможны варианты:

либо попадание в точку (цель)

$$x_i(T_i) = x_{F_i}, y_i(T_i) = y_{F_i}, \quad (1.7)$$

либо остановка в точке

$$\begin{aligned} x_i(T_i) &= x_{F_i}, y_i(T_i) = y_{F_i}, \\ v_i(T_i) &= 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Движение отделяемого объекта заканчивается в момент T_i достижения цели.

Качество управления оценивается временем T достижения всех целей:

$$T = \max_{i=1, \dots, m} T_i. \quad (1.9)$$

Требуется найти наименьшее значение T_{\min} функционала (1.9) и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстродействия:

$$\max_{i=1, \dots, m} T_i \rightarrow \min. \quad (1.10)$$

В постановке задачи будем учитывать дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач. Это естественное ограничение линейных скоростей: носителя $v(t) \in [0, V]$ при $t \in [0, s]$ и отделяемого объекта $v_i(t) \in [0, V_i]$ при $t \in [s, T_i]$, $i = 1, \dots, m$, где V и V_i — заданные величины максимальных линейных скоростей носителя и отделяемых объектов соответственно. Предполагаем, что максимальная скорость носителя больше максимальных скоростей отделяемых объектов, т.е. $V > V_i$, $i = 1, \dots, m$. В противном случае оптимальное разделение было бы в начальный момент времени.

Возможно дополнительное ограничение угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$, где Ω — заданная величина максимальной по модулю допустимой скорости. Это ограничение менее “значимо”, чем ограничение линейной скорости. Действительно, рост угловой скорости не может быть продолжительным, так как полный поворот на угол, превосходящий 2π , вряд ли возможен на оптимальной траектории [24]. Другие ограничения рассматриваются в [16–20]. Заметим, что ограничения скоростей относятся к фазовым ограничениям в задаче оптимального управления.

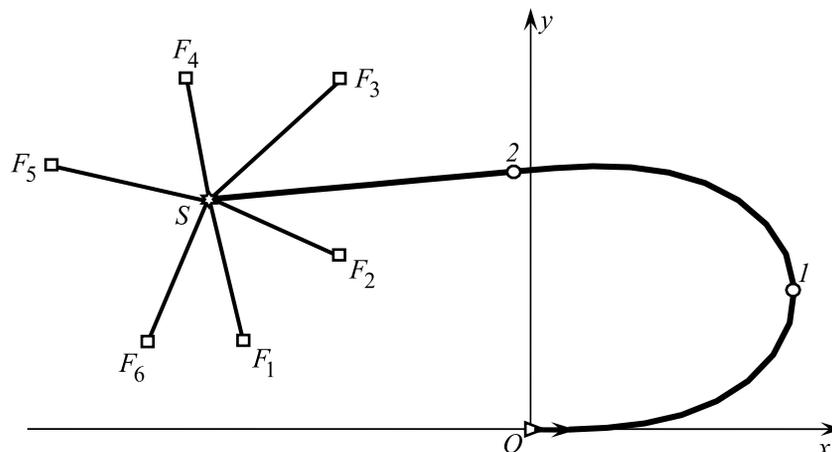


Рис. 1. Типовая траектория системы с одним разделением объектов управления

На рис. 1 представлена типовая траектория системы с одним разделением объектов управления. Траектория OS носителя изображена полужирной линией OS , траектории SF_1, \dots, SF_6 шести отделяемых объектов — светлыми линиями. Начальное состояние носителя обозначено треугольником в начале координат, начальная скорость — полужирной стрелкой, точка разделения S — звездочкой, заданные конечные состояния отделяемых объектов — квадратами.

2. Состав оптимальных траекторий. Для решения задачи быстродействия применяем принцип максимума Понтрягина [25].

2.1. Прямолинейное движение носителя. Для системы (1.1) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_v, v, u) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_v u - 1, \quad (2.1)$$

где ψ_x, ψ_y, ψ_v — вспомогательные переменные. Записываем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_v = -\psi_x \cos \gamma - \psi_y \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что ψ_x, ψ_y — постоянные величины, а $\psi_v(t)$ — линейная функция. Условия трансверсальности сводятся к равенству нулю функции Гамильтона—Понтрягина в нефиксированный конечный момент времени $H|_s = 0$. Заметим, что в силу постоянства функции Гамильтона—Понтрягина на оптимальном процессе (в стационарном случае) равенство нулю сохраняется на всем промежутке $[0, s]$ функционирования системы:

$$H \equiv 0. \quad (2.3)$$

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.1) по управлению приводит к равенству

$$u = \arg \max_{|u| \leq U} H = U \operatorname{sign} \psi_v, \quad (2.4)$$

при $\psi_v \neq 0$. Если переменная $\psi_v(t) = 0$ на некотором интервале (t_1, t_2) , то условие (2.3) не позволяет однозначно найти оптимальное управление u . На этом интервале возникает особое управление [24].

Рассмотрим особый режим подробнее. При $\psi_v = 0$ функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma - 1. \quad (2.5)$$

Если $\psi_x = \psi_y = 0$, то получаем равенство $H = -1$, которое противоречит (2.3). Следовательно, ψ_x и ψ_y не равны нулю одновременно, поэтому

$$H = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma - 1 = v \psi_{xy} \sin(\gamma + \phi) - 1, \quad (2.6)$$

где $\psi_{xy} = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \neq 0$, $\sin \phi = \psi_x / \psi_{xy}$, $\cos \phi = \psi_y / \psi_{xy}$. Отсюда следует, что линейная скорость v постоянна. Значит, особый режим — равномерное движение.

Таким образом, оптимальное управление прямолинейным движением носителя — кусочно-постоянное ($u \in \{0, \pm U\}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок разгона ($u = U$), либо участок торможения ($u = -U$), либо участок равномерного движения ($u = 0$).

2.2. Криволинейное движение (поворот) носителя. Для системы (1.2) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_\omega, \gamma, v, \omega, \varepsilon) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_\gamma \omega + \psi_\omega \varepsilon - 1, \quad (2.7)$$

где $\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_\omega$ — вспомогательные переменные. Записываем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_\gamma = v \psi_x \sin \gamma - v \psi_y \cos \gamma, \dot{\psi}_\omega = -\psi_\gamma. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что ψ_x, ψ_y — постоянные величины. Как и в случае прямолинейного движения носителя, получаем тождество (2.3) — равенство нулю функции Гамильтона—Понтрягина.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.7) по управлению приводит к равенству

$$\varepsilon = \arg \max_{|\varepsilon| \leq \mathcal{E}} H = \mathcal{E} \operatorname{sign} \psi_\omega \quad (2.9)$$

при $\psi_\omega \neq 0$. Если переменная $\psi_\omega(t) = 0$ на некотором интервале (t_1, t_2) , то условие (2.9) не позволяет однозначно найти оптимальное управление ε . На этом интервале возникает особое управление [24].

Рассмотрим особый режим подробнее. При $\psi_\omega = 0$, согласно (2.8), имеем $\psi_\gamma = -\dot{\psi}_\omega = 0$.

Следовательно, функция Гамильтона—Понтрягина (2.7) имеет вид (2.5). Рассуждая, также как в прямолинейном случае (см. разд. 2.1), заключаем, что ψ_x и ψ_y не равны нулю одновременно. Поскольку $\psi_\gamma = 0$, то $\dot{\psi}_\gamma = 0$, из (2.8) получаем

$$v \psi_x \sin \gamma - v \psi_y \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow v \psi_{xy} \cos(\gamma + \phi) = 0. \quad (2.10)$$

Величина ψ_{xy} и вспомогательный угол ϕ такие же, как в (2.6). Поскольку $\psi_{xy} \neq 0$, то из равенства (2.10) следует либо $v = 0$, либо $\gamma = \operatorname{const}$, так как угол ϕ постоянный. В первом случае (при $v = 0$) носитель совершает поворот на месте. Во втором случае (при $\gamma = \operatorname{const}$) движение прямолинейное и равномерное, а не криволинейное.

Таким образом, оптимальное управление криволинейным движением носителя — кусочно-постоянное ($\varepsilon = \pm \mathcal{E}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок закручивания — увеличения угловой скорости ($\varepsilon = \mathcal{E}$), либо участок раскручивания — уменьшения угловой скорости ($\varepsilon = -\mathcal{E}$), при этом не исключаются повороты на месте (при $v = 0$).

Заметим, что при дополнительном ограничении угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$ возникает еще один тип оптимального управления — поворот с нулевым угловым ускорением и максимальной угловой скоростью. При $\varepsilon = 0$ и $\omega = \pm \Omega$ траектория движения — либо окружность, если $v \neq 0$, либо поворот на месте с постоянной угловой скоростью, если $v = 0$.

2.3. Движение отделяемого объекта. Для каждого объекта системы (1.6) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_v, \gamma, v, u) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_v u - 1. \quad (2.11)$$

Для сокращения записи индекс i у переменных x, y, v, γ, u опущен. Как видим, функция Гамильтона—Понтрягина (2.11) совпадает с (2.1). Поэтому соотношения (2.2)—(2.4) для носителя будут также выполняться и для каждого отделяемого объекта. Отличие моделей (1.1) и (1.3) заключается в том, что угол направления $\gamma = \gamma(t)$ является для отделяемого объекта управлением. Поэтому из необходимого условия максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.11) по управлению γ получаем

$$H_\gamma = 0 \Rightarrow -v \psi_x \sin \gamma + v \psi_y \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow v \psi_{xy} \cos(\gamma + \phi) = 0. \quad (2.12)$$

Величина ψ_{xy} и вспомогательный угол ϕ такие же, как в (2.6). Поскольку $v \neq 0$ и $\psi_{xy} \neq 0$, то из равенства (2.12) следует, что угол направления γ постоянный, например $\gamma = \pi/2 - \phi$. Значит, оптимальный выбор угла направления происходит в начальный момент времени S , а затем не меняется. Для i -го объекта ($i = 1, \dots, m$), который из положения $S(x_S, y_S)$ двигается в цель (x_{iT}, y_{iT}) , получаем

$$\sin \gamma_i = \frac{y_{iT} - y_S}{L_i}, \quad \cos \gamma_i = \frac{x_{iT} - x_S}{L_i}, \quad (2.13)$$

где $L_i = \sqrt{(x_{iT} - x_S)^2 + (y_{iT} - y_S)^2}$ — длина пути.

Таким образом, после выбора оптимального направления (2.13) оптимальное управление прямолинейным движением i -го отделяемого объекта — кусочно-постоянное ($u_i \in \{0, \pm U_i\}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок разгона ($u_i = U_i$), либо участок торможения ($u_i = -U_i$), либо участок равномерного движения ($u_i = 0$).

3. Оптимальные траектории. Оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов составляются из частичных траекторий — участков движения с постоянными ускорениями. Получим такие составные траектории, интегрируя уравнения движения.

3.1. Прямолинейное движение носителя до остановки. Найдем оптимальное по быстродействию управление прямолинейным движением носителя из начального состояния (1.3) в конечное состояние (1.5), которое соответствует остановке носителя в заданном положении $S(x_S, y_S)$. Предполагаем, что в начальный момент времени угловая скорость равна нулю, а носитель “нацелен” в точку $S(x_S, y_S)$, т.е. угол направления γ удовлетворяет равенствам

$$\sin \gamma = \frac{y_S - y_0}{L}, \cos \gamma = \frac{x_S - x_0}{L}, \tag{3.1}$$

где $L = \sqrt{(x_S - x_0)^2 + (y_S - y_0)^2}$ — длина пути носителя.

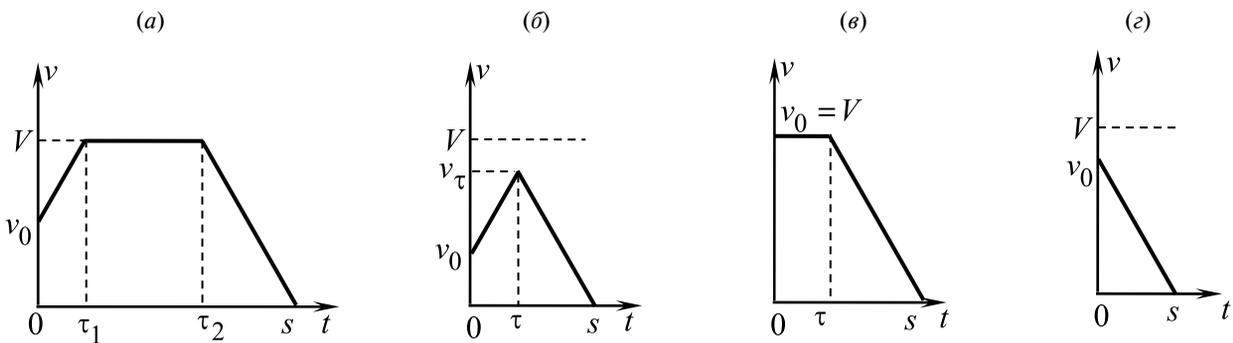


Рис. 2. Графики изменения скорости прямолинейного движения носителя до остановки

На рис. 2, учитывая результаты разд. 2.1, представлены все возможные графики изменения скорости движения носителя. Линейная скорость сначала возрастает, достигая в некоторый момент τ_1 максимального допустимого значения V , затем это значение сохраняется до момента τ_2 , после которого скорость уменьшается до нуля в момент s окончания движения носителя (рис. 2, а). Найдем параметры этой траектории. Для этого составляем систему уравнений

$$L = sV - \frac{1}{2}(V - v_0)\tau_1 - \frac{1}{2}V(s - \tau_2), V = v_0 + \tau_1 U, V = (s - \tau_2)U. \tag{3.2}$$

Подставляя в первое уравнение $\tau_1 = (V - v_0) / U$ и $s - \tau_2 = V / U$, получаем

$$L = sV - \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2U} \Leftrightarrow s = \frac{L}{V} + \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2UV}. \tag{3.3}$$

Линейная скорость сначала возрастает до значения v_τ в некоторый момент τ , не достигая максимального допустимого значения V , а затем уменьшается до нуля (рис. 2, б). Составляем систему уравнения для нахождения параметров этой траектории:

$$L = \frac{v_0 + v_\tau}{2}\tau + v_\tau(s - \tau), v_\tau = v_0 + \tau U, v_\tau = (s - \tau)U. \tag{3.4}$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\tau = \frac{1}{2}s - \frac{v_0}{2U}, v_\tau = \frac{1}{2}sU + \frac{v_0}{2}. \tag{3.5}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (3.4), после упрощений приходим к квадратному уравнению относительно s :

$$L = \frac{1}{4}s^2U + \frac{1}{2}v_0s - \frac{v_0^2}{4U}.$$

Находим положительный корень этого уравнения:

$$s = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4LU}}{U}. \quad (3.6)$$

Графики на рис. 2, *в*, *г* получаются из графиков рис. 2, *а*, *б* соответственно. Действительно, параметры графика *в* находим по формулам (3.2), (3.3), полагая $v_0 = V$:

$$s = \frac{L}{V} + \frac{V}{2U}, \tau_1 = 0, \tau_2 = s - \frac{V}{U}.$$

Время $s = v_0 / U$ для графика *г* определяется первой формулой в (3.5) при $\tau = 0$.

Осталось записать аналитические условия, позволяющие установить тип оптимального управления, т.е. сделать правильный выбор одного из четырех случаев графиков рис. 2, *а–г* оптимального управления. Для этого рассмотрим рис. 2, *б*, когда линейная скорость не достигает своего максимально допустимого значения V , т.е. выполняется неравенство $v_\tau < V$. Подставляя в это неравенство v_τ из формул (3.5) с учетом (3.6), получаем

$$\frac{1}{2}sU + \frac{v_0}{2} < V \Leftrightarrow \sqrt{2v_0^2 + 4LU} < 2V \Leftrightarrow 2v_0^2 + 4LU < 4V^2 \Leftrightarrow 2LU < 2V^2 - v_0^2.$$

Следовательно, если $2LU < 2V^2 - v_0^2$, то оптимальное управление (сначала разгон, потом торможение), как на рис. 2, *б*, или, в частности, при $2LU = v_0^2$ — только торможение, как на рис. 2, *г*. Если же $2LU \geq 2V^2 - v_0^2$, то оптимальное управление (сначала разгон, затем равномерное движение с максимальной допустимой скоростью, потом торможение), как на рис. 2, *а* или, в частности, при $2LU = V^2$ — только равномерное движение, а потом торможение, как на рис. 2, *в*. Заметим, что при $2LU < v_0^2$ допустимого процесса нет, поскольку носитель не успевает затормозить. Условия и параметры оптимального управления прямолинейным движением носителя до остановки в заданном положении приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальное управление прямолинейным движением носителя до остановки

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение, торможение (см. рис. 2, <i>а</i>)	$2LU \geq 2V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau_1;$ $u(t) = 0, \tau_1 \leq t < \tau_2;$ $u(t) = -U, \tau_2 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} + \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2UV};$ $\tau_1 = \frac{V - v_0}{U}, \tau_2 = s - \frac{V}{U}$
Разгон, торможение (см. рис. 2, <i>б</i>)	$v_0^2 \leq 2LU < 2V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau;$ $u(t) = -U, \tau \leq t \leq s$	$s = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4LU}}{U};$ $\tau = \frac{1}{2}s - \frac{v_0}{2U}$
Равномерное движение, торможение (см. рис. 2, <i>в</i>)	$2LU = V^2$	$u(t) = 0, 0 \leq t < \tau_2;$ $u(t) = -U, \tau_2 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} + \frac{V}{2U}; \tau_2 = s - \frac{V}{U}.$
Торможение (рис. 2, <i>г</i>)	$2LU = v_0^2$	$u(t) = -U, 0 \leq t \leq s$	$s = \frac{v_0}{U}$

3.2. Прямолинейное движение носителя до заданной точки. Рассмотрим теперь движение носителя из начального состояния (1.3) в заданную точечную цель (1.4). Оптимальное управление, разумеется, заключается в наискорейшем разгоне носителя, а торможение при этом исключается. Графики изменения скорости движения приведены на рис. 3.

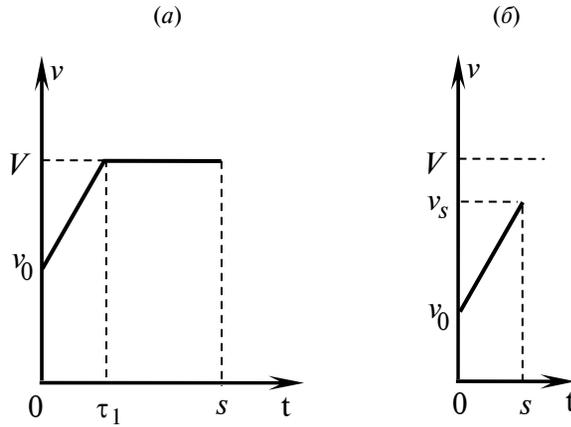


Рис. 3. Графики изменения скорости прямолинейного движения носителя до цели

На рис. 3, *a* линейная скорость сначала возрастает, достигая в некоторый момент τ_1 максимального допустимого значения V , затем эта скорость сохраняется до момента s окончания движения. Из системы уравнений

$$L = sV + \frac{1}{2}\tau_1(V - v_0), V = v_0 + \tau_1 U$$

находим параметры управления

$$s = \frac{L}{V} - \frac{(V - v_0)^2}{2U}, \tau_1 = \frac{V - v_0}{U}.$$

На рис. 3, *б* линейная скорость возрастает, но не успевает достигнуть максимально допустимого значения. Поэтому имеем систему

$$L = \frac{v_0 + v_s}{2}s, v_s = v_0 + sU,$$

откуда

$$s = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2LU}}{U}.$$

Из неравенства $v_s < V$ определяем условие, при котором имеет место график на рис. 3, *б*:

$$v_0 + sU < V \Leftrightarrow \sqrt{v_0^2 + 2LU} < V \Leftrightarrow 2LU < V^2 - v_0^2.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то тип оптимального управления соответствует графику на рис. 3, *a*. Условия и параметры оптимального управления прямолинейным движением носителя до цели приведены в табл. 2.

Таблица 2. Оптимальное управление прямолинейным движением носителя до цели

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение (см. рис. 3, <i>a</i>)	$2LU \geq V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau_1;$ $u(t) = 0, \tau_1 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} - \frac{(V - v_0)^2}{2U}, \tau_1 = \frac{V - v_0}{U}$
Разгон (см. рис. 3, <i>б</i>)	$2LU < V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t \leq s$	$s = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2LU}}{U}$

3.3. Криволинейное движение (поворот) носителя. Как показано в разд. 2.2, оптимальное по быстродействию криволинейное движение происходит с максимальным по модулю постоянным угловым ускорением. Запишем систему (1.2) с постоянным угловым ускорением $\varepsilon \neq 0$:

$$\dot{x}(t) = v \cos \gamma(t), \dot{y}(t) = v \sin \gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \dot{\omega}(t) = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Получим ее решение с начальными условиями (1.3). Последние два уравнения интегрируются элементарно:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (3.8)$$

Подставляя $\gamma(t)$ в первые два уравнения в (3.7), получаем

$$\dot{x}(t) = v \cos(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2), \dot{y}(t) = v \sin(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2). \quad (3.9)$$

Обозначим

$$\hat{\gamma}_0 = \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}, \tau = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left(t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right).$$

Тогда

$$t = \tau \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} - \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \left(t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right)^2 + \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon, \quad (3.10)$$

при этом уравнения (3.9) принимают вид

$$\dot{x}(t) = v \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon), \dot{y}(t) = v \sin(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon). \quad (3.11)$$

Интегрируя первое уравнение в (3.11) на промежутке $[0, t]$, делаем замену переменной t , согласно (3.10). Получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon) dt = x_0 + v \int_{\tau_0}^{\tau_1} \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} d\tau = \\ &= x_0 + v \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\cos \hat{\gamma}_0 \cos \tau^2 - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \sin \tau^2) \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\tau_0 = \frac{\omega_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}, \tau_1 = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + t \right) \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}.$$

Полученный интеграл выражаем через интегралы Френеля [26]:

$$C(t) = \int_0^t \cos \tau^2 d\tau, S(t) = \int_0^t \sin \tau^2 d\tau.$$

В результате имеем

$$x(t) = x_0 + v \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \cos \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \}. \quad (3.12)$$

Аналогично интегрируем второе уравнение в (3.9):

$$y(t) = y_0 + v \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \sin \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] + \text{sign } \varepsilon \cos \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \}. \quad (3.13)$$

Траектория (3.12), (3.13) представляет собой спираль Эйлера (клотоиду, спираль Корню) [26], кривизна которой изменяется линейно. Если линейная скорость нулевая, то совершается поворот на месте. Положение объекта не меняется $x(t) = x_0, y(t) = y_0$, а угловая скорость и угол направления меняются, согласно (3.8).

При дополнительном ограничении угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$ возможен поворот с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \pm\Omega$ и нулевым ускорением $\varepsilon = 0$. Система (1.2) при этих условиях имеет вид

$$\dot{x}(t) = v \cos \gamma(t), \dot{y}(t) = v \sin \gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega, \dot{\omega}(t) = 0. \tag{3.14}$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t, \omega(t) = \omega_0.$$

Интегрируем первые два уравнения в (3.14):

$$x(t) = x_0 + \frac{v}{\omega_0} \sin(\gamma_0 + \omega_0 t), y(t) = y_0 - \frac{v}{\omega_0} \cos(\gamma_0 + \omega_0 t). \tag{3.15}$$

Траектория (3.15) представляет собой окружность.

3.4. Оптимальная траектория отделяемого объекта. Рассмотрим управление i -м отделяемым объектом ($i = 1, \dots, m$). После мгновенного выбора направления (2.13) в момент отделения s движение объекта будет прямолинейным с ограниченной скоростью $0 \leq v_i(t) \leq V_i$ и ускорением $|u_i(t)| \leq U_i$. Это движение отличается от прямолинейного движения носителя только ограничениями. Поэтому оптимальное по быстродействию управление u_i находится так же, как управление прямолинейным движением носителя (см. разд. 3.1). При этом параметры U, V носителя и длину пути L нужно соответственно заменить параметрами U_i, V_i объекта и длиной его пути:

$$L_i = \sqrt{(x_{iT} - x_s)^2 + (y_{iT} - y_s)^2}.$$

Кроме того, необходимо учесть, что движение i -го объекта происходит на промежутке $[s, T_i]$, а движение носителя — на $[0, s]$. Поэтому моменты переключений управления u_i и время T_i окончания движения следует увеличить на величину s . Наконец, поскольку начальная скорость объекта нулевая $v_i(s) = 0$, в формулах для носителя полагаем $v_0 = 0$. При этом исчезает случай график торможения на рис. 2, z .

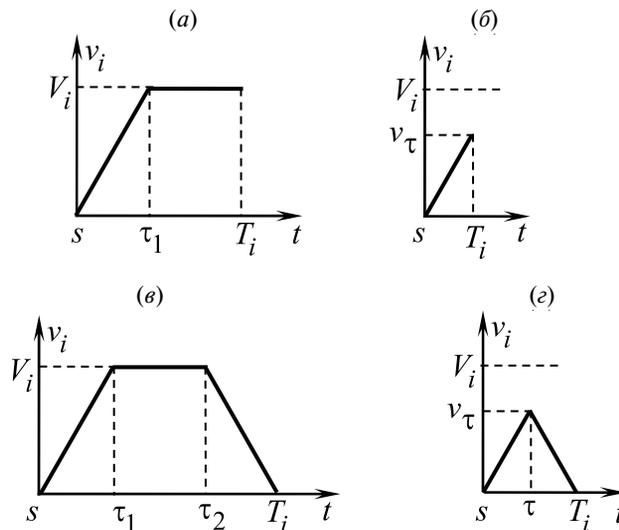


Рис. 4. Графики изменения скорости движения отделяемого объекта

На рис. 4 представлены графики изменения скорости движения отделяемого объекта, а в табл. 3 — условия и параметры оптимального управления его движением. Графики

на рис. 4, *a*, *b* соответствуют условиям (1.7) — попадания в заданную точечную цель, а *в* и *г* — условиям (1.8), т.е. остановке в заданной точке.

Таблица 3. Оптимальное управление движением *i*-го объекта

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение (см. рис. 4, <i>a</i>)	$2L_i U_i \geq V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau_1;$ $u_i(t) = 0, \tau_1 \leq t \leq T_i$	$T_i = s + \frac{L_i}{V_i} + \frac{V_i}{2U_i};$ $\tau_1 = s + \frac{V_i}{U_i}$
Разгон (см. рис. 4, <i>a</i>)	$2L_i U_i < V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < T_i$	$T_i = s + \sqrt{\frac{2L_i}{U_i}}$
Разгон, равномерное движение, торможение (см. рис. 4, <i>в</i>)	$4L_i U_i \geq V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau_1;$ $u_i(t) = 0, \tau_1 \leq t < \tau_2;$ $u_i(t) = -U_i, \tau_2 \leq t \leq T_i$	$T_i = s + \frac{L_i}{V_i} + \frac{V_i}{U_i}; \tau_1 = s + \frac{V_i}{U_i};$ $\tau_2 = T_i - t_1$
Разгон, торможение (см. рис. 4, <i>г</i>)	$4L_i U_i < V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau;$ $u_i(t) = -U_i, \tau \leq t \leq T_i$	$T_i = s + 2\sqrt{\frac{L_i}{U_i}};$ $\tau = \frac{s + T_i}{2}$

3.5. Оптимальная траектория носителя до остановки в заданной точке. Оптимальные по быстродействию траектории носителя состоят из частичных траекторий — участков движения с постоянными ускорениями. Как показано в разд. 3.1—3.3, частичными траекториями могут быть: либо отрезок (\mathbb{L}) в случае прямолинейного движения, либо спираль (\mathbb{S}) при повороте, либо точка (\mathbb{P}) при повороте на месте.

Опишем оптимальное по быстродействию управление движением носителя из нулевого начального состояния:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, \gamma(0) = 0, \nu(0) = 0, \omega(0) = 0 \quad (3.16)$$

с остановкой в заданной точке (1.5). Без ограничения общности будем считать, что конечное положение задано в верхней полуплоскости координатной плоскости Oxy . Поскольку в конечный момент времени линейная скорость нулевая, то последний участок допустимой траектории прямолинейный (\mathbb{L}). Так как в начале прямолинейного участка угловая скорость должна быть равна нулю, то криволинейное движение носителя должно заканчиваться с нулевой угловой скоростью. Поэтому криволинейное движение состоит из двух участков (\mathbb{SS}) одинаковой продолжительности, на первом из которых происходит увеличение угловой скорости (участок “закручивания”), а на втором — уменьшение угловой скорости (участок “раскручивания”). Большее количество участков криволинейного движения, чередование “закручивания” и “раскручивания” не будет оптимальным. Заметим, что движение по спирали невозможно в начальный момент времени, так как начальная линейная скорость движения нулевая. Поэтому первый участок траектории прямолинейный (\mathbb{L}) либо поворот на месте (\mathbb{P}).

Таким образом, оптимальная траектория носителя с остановкой в заданной точке представляет собой либо поворот на месте и прямолинейное движение (траектория \mathbb{PL}), либо прямолинейное движение (разгон), затем два участка криволинейного движения (“закручивания” и “раскручивания”), потом прямолинейное движение (траектория \mathbb{LSSL}). Траектории типов \mathbb{PL} и \mathbb{LSSL} изображены на рис. 5 полужирными линиями. Начальное положение носителя представлено треугольником в начале координат, а после поворота на месте на угол γ — пунктирным треугольником. Звездочками *A* и *B* отмечены точки остановки носителя.

На рис. 6 показано примерное разделение верхней полуплоскости на две области PL и LSSL. Расчеты проводились при $V = 3$, $U = 4$, $\mathcal{E} = 1$ и нулевых начальных условиях. Если точка разделения S находится в области PL, то траектория PL носителя лучше траектории LSSL. Если точка S находится в области LSSL, то, наоборот, лучше траектория LSSL.

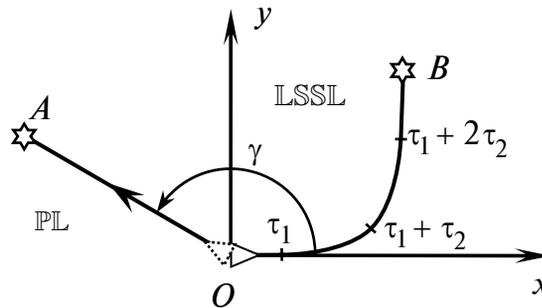


Рис. 5. Траектории PL и LSSL носителя

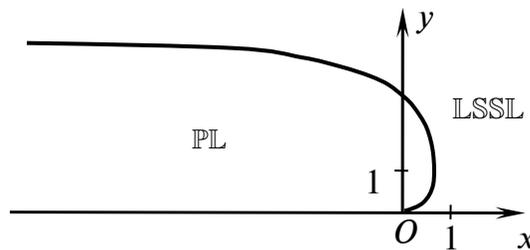


Рис. 6. Области конечных точек движения носителя, в которые приводят оптимальные траектории PL и LSSL соответственно

Параметры указанных траекторий определяются следующим образом. Для траектории PL поворот на месте на угол γ задается формулами (3.1). Он выполняется с максимальным по модулю угловым ускорением: сначала $\varepsilon(t) = \mathcal{E}$, $0 \leq t \leq \tau_1$, а затем $\varepsilon(t) = -\mathcal{E}$, $\tau_1 \leq t \leq 2\tau_1$, где $\tau_1 = \sqrt{\gamma / \mathcal{E}}$. Поворот оканчивается с нулевой угловой скоростью, после чего начинается участок прямолинейного движения, параметры которого указаны в табл. 1 (тип управления рис. 2, а или б).

Для траектории LSSL нужно задать два параметра: продолжительность τ_1 первоначального разгона (с управлением $u(t) = U$), а также времена τ_2 “закручивания” траектории (поворот с ускорением $\varepsilon(t) = \mathcal{E}$). Эти параметры полностью определяют часть LSS траектории, поскольку время “раскручивания” такое же, как и время “закручивания”, так как поворот заканчивается с нулевой угловой скоростью. Параметры последнего прямолинейного участка указаны в табл. 1. Заметим, что в момент окончания поворота носитель должен быть направлен в заданную точку разделения (x_S, y_S) , иначе попадания не будет. Поэтому оптимизация траектории LSSL по параметрам τ_1 и τ_2 является условной и может быть выполнена только численно.

После нахождения оптимальной траектории каждого типа (PL или LSSL), сравниваем полученные для этих траекторий значения функционала (1.9). Предпочтение отдается процессу с меньшим значением функционала.

3.6. Оптимальная траектория носителя до заданной точки. Оптимальные траектории движения носителя из нулевого состояния (3.16) в заданную точку (1.4) могут быть разных типов. Во-первых, подходят траектории PL или LSSL, рассмотренные в разд. 3.5, с тем отличием, что последние участки этих траекторий представляют собой прямолинейное движение без торможения, параметры которого находятся по табл. 2. Во-вторых, возможны траектории LSS, поскольку в конечный момент времени скорости (линейная и угловая) не заданы. Такие траектории определяются тремя параметрами: продолжительностью τ_1 первоначально-го разгона (с управлением $u(t) = U$), временем τ_2 “закручивания” траектории и временем τ_3

“раскручивания”. Причем “закручивание” на промежутке $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ может быть как в положительном направлении, когда $\varepsilon(t) = \mathcal{E}$, так и в отрицательном направлении при $\varepsilon(t) = -\mathcal{E}$. “Раскручивание” происходит на промежутке $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ в противоположном “закручиванию” направлении. Заметим, что в момент окончания $s = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ носитель должен оказаться в заданной точке $S(x_S, y_S)$. Поэтому оптимизация траектории \mathbb{LSS} по трем параметрам τ_1, τ_2, τ_3 является условной и может быть выполнена только численно. После нахождения оптимальной траектории каждого типа сравниваем полученные для этих траекторий значения функционала (1.9). Предпочтение отдается процессу с меньшим значением функционала.

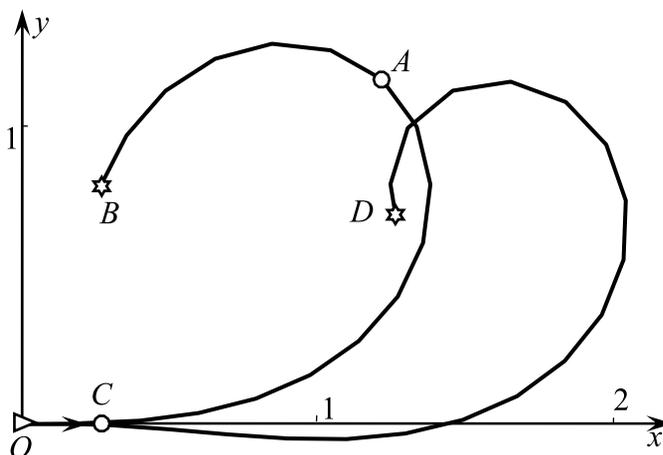


Рис. 7. Траектории \mathbb{SS} носителя

Если начальная скорость ненулевая, первоначального разгона (или торможения) может не быть и оптимальными будут траектории \mathbb{SS} . Эти траектории определяются в результате условной минимизации по двум параметрам: времени “закручивания” и “раскручивания”. На рис. 7 представлены две типовых траектории. Траектории отличаются направлением “закручивания”. Траектория OAB получается при “закручивании” в положительном направлении (дуга OA), а траектория OCD — в отрицательном направлении (дуга OC). “Раскручивание” происходит в противоположном направлении (дуги AB и CD соответственно).

4. Оптимальный выбор точки разделения. Для решения задачи (1.10) группового быстрого действия нужно выбрать оптимальную точку $S(x_S, y_S)$ разделения объектов управления. Оптимальную по быстрдействию траекторию носителя из начального положения O до выбранной точки разделения S и оптимальные траектории группы объектов после отделения можно получить описанными в разд. 3 способами. Выбор точки $S(x_S, y_S)$ зависит от заданных целей (1.7), (1.8) для отделяемых объектов.

Обозначим через $\theta(O, S)$ оптимальное время движения носителя из начальной точки O в заданную точку разделения S , а через $\theta_i(S, F_i)$ — оптимальное время движения i -го отделяемого объекта от точки разделения S до цели $F_i, i = 1, \dots, m$. В зависимости от терминальных условий (1.4) или (1.5) для носителя функция θ вычисляется по-разному (см. разд. 3.5, 3.6). Функция θ_i находится по разным формулам для конечных условий (1.7) или (1.8) (см. разд. 3.4). Заметим, что формулы для функции θ_i зависят также от модели отделяемого объекта — от его максимальной скорости V_i и максимального по модулю ускорения U_i .

Используя введенные функции, функционал (1.9) можно записать следующим образом:

$$T = \theta(O, S) + \max_{1 \leq i \leq m} \theta_i(S, F_i). \quad (4.1)$$

Тогда решение задачи группового быстрого действия (1.10) находится при минимизации:

$$T_{\min} = \min_{S \in \mathbb{R}^2} \{ \theta(O, S) + \max_{1 \leq i \leq m} \theta_i(S, F_i) \}. \quad (4.2)$$

Так как функция (4.1) негладкая, точнее, квазидифференцируемая, для поиска минимума нужно использовать методы недифференцируемой оптимизации [22]. Если целей несколько ($m > 1$), то максимум в (4.2) не может достигаться только для одной цели, например для цели F_1 .

В этом случае оптимальная точка разделения S совпадала бы с худшей целью F_1 . Но тогда $\theta_1(S, F_1) = 0$, а $\theta_2(S, F_2) > 0$. Значит, цель F_2 хуже, чем F_1 (противоречие). Поэтому нужно рассматривать такие случаи, когда максимум в (4.2) достигается в двух или более точках. Иначе говоря, когда имеются две или более худшие цели.

Предположим, что максимум в (4.2) достигается в точках F_i и F_j ($1 \leq i < j \leq m$) и, быть может, в еще некоторых других:

$$\theta_i(S, F_i) = \theta_j(S, F_j) \geq \theta_k(S, F_k), k = 1, \dots, m, k \neq i, k \neq j. \quad (4.3)$$

Тогда, решая задачу минимизации

$$T_{ij} = \min_{S \in \mathbb{R}^2} \{ \theta(O, S) + \theta_i(S, F_i) \} \quad (4.4)$$

при ограничениях (4.3), получаем оптимальное значение T_{ij} функции (4.2) для худших целей F_i и F_j (и, быть может, еще каких-нибудь худших целей). Решая задачу (4.3), (4.4), для всех пар целей F_i, F_j ($1 \leq i < j \leq m$) находим значения T_{ij} , среди которых выбираем наименьшее:

$$T_{\min} = \min_{1 \leq i < j \leq m} T_{ij}.$$

Процедура поиска упрощается, если удастся эффективно использовать ограничения (4.3). Например, если все отделяемые объекты одинаковые, т.е. $V_1 = \dots = V_m$ и $U_1 = \dots = U_m$, то равенство $\theta_i(S, F_i) = \theta_j(S, F_j)$ будет означать, что равны длины отрезков $SF_i = SF_j$. Значит, точку S нужно искать на серединном перпендикуляре к отрезку F_iF_j . Положение точки S при этом задается одним параметром, а задача минимизации (4.3), (4.4) будет однопараметрической.

5. Примеры. Рассмотрим два примера группового быстрогодействия с разными типами траекторий носителя. В первом примере заданные точки окончания движения (остановки) находятся в II четверти и оптимальная траектория носителя — PL. Во втором примере остановки заданы во I четверти и оптимальная траектория — LSSL.

Пример 1. Пусть по сравнению с общей постановкой задачи параметры движения носителя $V = 5, U = 4, \mathcal{E} = 1$; параметры движения четырех отделяемых объектов $V_i = i, U_i = 3, i = 1, \dots, 4$. Начальное состояние носителя — нулевое (3.16). Терминальные положения (цели) отделяемых объектов $F_1(-7;1), F_2(-6;2), F_3(-7;3), F_4(-8;2)$. В точке разделения, а также в терминальных точках скорости объектов управления нулевые, т.е. речь идет об остановках подвижных объектов в этих точках. Требуется найти наименьшее время достижения всех целей и оптимальное управление, при котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстрогодействия.

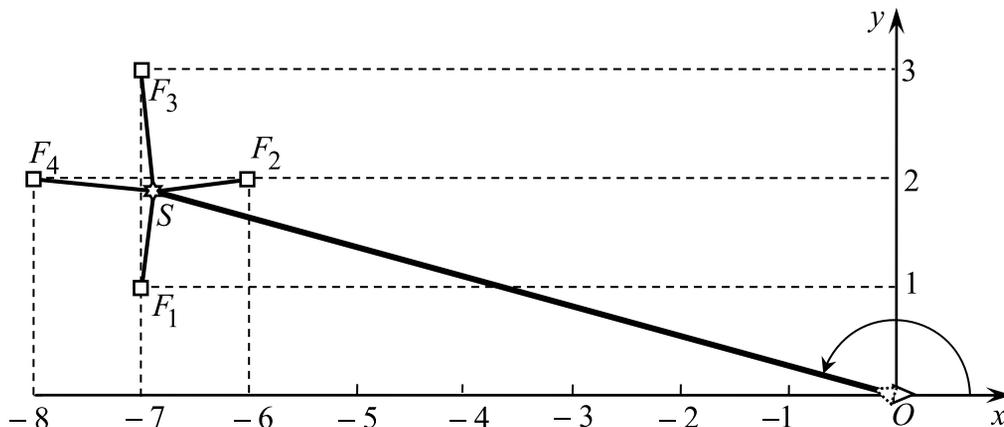


Рис. 8. Оптимальная траектория PL носителя и четырех отделяемых объектов

На рис. 8 показаны оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов. Управление носителем: сначала поворот на месте (“закручивание” в течение 1.695 с, затем “раскручивание” той же продолжительности). После поворота — прямолинейное движение: сначала

разгон в течение 1.25 с, потом равномерное движение — 0.177 с, затем — торможение в течение 1.25 с. Траектория $\mathbb{P}L$ носителя изображена на рис. 8 полужирной линией, начальное состояние — треугольником, точка разделения $S(-6.882; 1.883)$ — звездочкой. Оптимальное управление первым отделяемым объектом — разгон (в течение 0.333 с), равномерное движение (0.558 с), торможение (0.333 с). Управление остальными объектами — разгон и торможение одинаковой продолжительности: для второго объекта время разгона 0.545 с, для третьего — 0.612 с, для четвертого — 0.612 с. Траектории отделяемых объектов изображены светлыми линиями. Минимальное время достижения всех целей $T_{\min} = 7.292$. Заметим, что первый, третий и четвертый объекты являются “худшими”, так как время достижения целей этими объектами совпадает с T_{\min} . Время остановки второго объекта меньше гарантирующего значения T_{\min} .

Координаты точки разделения $S(-6.882; 1.883)$ найдены приближенно на квадратной сетке с шагом 0.001. Остальные результаты округлены, но вычисления проводились с машинной точностью без методических погрешностей.

Пример 2. Пусть по сравнению с общей постановкой задачи параметры движения носителя $V = 3$, $U = 4$, $\mathcal{E} = 1$; параметры движения трех отделяемых объектов $V_1 = V_2 = 1$, $V_3 = 2$, $U_1 = U_2 = U_3 = 3$. Начальное состояние носителя — нулевое (3.16). Терминальные положения (цели) отделяемых объектов $F_1(7; 1)$, $F_2(7; 3)$, $F_3(8; 2)$. В точке разделения, а также в терминальных точках скорости объектов управления нулевые, т.е. речь идет об остановках подвижных объектов в этих точках. Требуется найти наименьшее время достижения всех целей и оптимальное управление, при котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстройдействия.

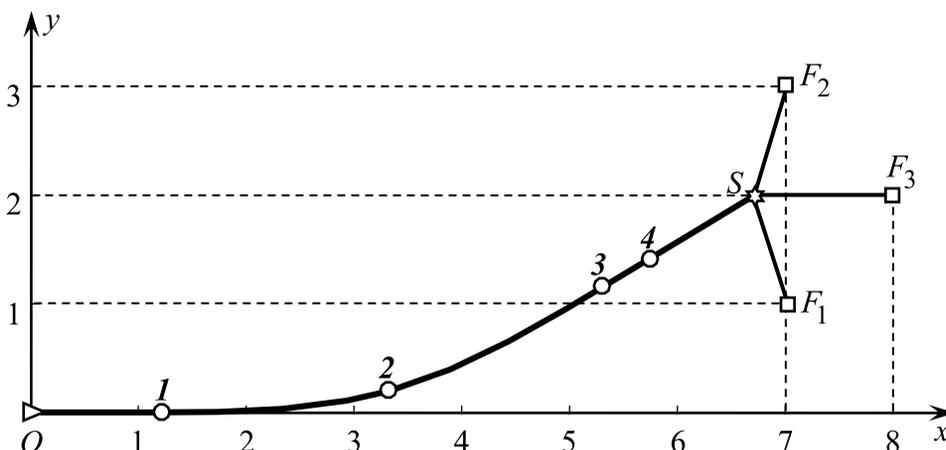


Рис. 9. Оптимальная траектории \mathbb{LSSL} носителя и трех отделяемых объектов

На рис. 9 показаны оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов. Управление носителем: сначала разгон в течение 0.75 с, затем поворот — “закручивание” в течение 0.735 с и “раскручивание” той же продолжительности, потом равномерное движение 0.173 с и, наконец, торможение — 0.75 с. Траектория \mathbb{LSSL} носителя изображена на рис. 7 полужирной линией, начальное состояние — треугольником, точка разделения $S(6.702; 2)$ — звездочкой. Управление первым и вторым отделяемыми объектами: разгон в течение 0.333 с, равномерное движение — 0.710 с и торможение — 0.333 с. Управление третьим объектом — разгон и торможение одинаковой продолжительности 0.658 с. Траектории отделяемых объектов изображены светлыми линиями. Минимальное время достижения всех целей $T_{\min} = 4.520$. Заметим, что первый и второй объекты являются “худшими”, так как время достижения целей этими объектами совпадает с T_{\min} . Время остановки третьего объекта меньше гарантирующего значения T_{\min} .

Поскольку первые два отделяемых объекта одинаковые, то поиск точки разделения проводился на серединном перпендикуляре к отрезку F_1F_2 . Координаты точки разделения $S(6.702; 2)$ найдены приближенно на сетке с шагом 0.001. Результаты, относящиеся к движению носителя — приближенные, так как получены путем численного решения задачи условной минимизации. Параметры управления отделяемыми объектами округлены, но вычисления проводились с машинной точностью без методических погрешностей.

Заключение. Поставлена задача группового быстрогодействия с однократным разделением объектов управления. Для описания движения системы до разделения используется гибридная модель машины Дубинса, допускающая повороты на месте. После разделения система представляет собой группу управляемых объектов, которые перемещаются в заданные конечные состояния с ограниченными скоростями и ускорениями. Получены типовые оптимальные траектории, выведены формулы для траекторий движения с постоянными ускорениями, разработан алгоритм решения задачи, применение которого демонстрируется на примерах. Решение задачи с моделью Дубинса может служить начальным приближением для аналогичных прикладных задач управления летательными аппаратами.

Дальнейшие исследования задачи группового быстрогодействия могут развиваться в разных направлениях. Во-первых, возможны изменения терминальных и промежуточных условий. Условия остановки подвижных объектов в заданных точках можно изменить на условия попадания, условия “парковки”, т.е. остановки с заданным направлением движения и т.п. Во-вторых, для описания движения всех подвижных объектов можно использовать разные модели машины Дубинса, допускающие не только повороты на месте, но и движения задним ходом. Важными представляются задачи с учетом препятствий и воздействий противника, с перемещением или изменением целей. Для задачи быстрогодействия группы БПЛА актуальными будут исследования с пространственным движением управляемых объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
2. *Куржанский А. Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 1. С. 20–25.
3. *Бортаковский А. С.* Быстродействие группы управляемых объектов // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 51–77.
4. *Евдокименков В. Н., Красильщиков М. Н., Оркин С. Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд-во МАИ, 2015.
5. *Гончаренко В. И., Желтов С. Ю., Князь В. А., Лебедева Г. Н., Михайлина Д. А., Царева О. Ю.* Интеллектуальная система планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных мобильных объектов на заданной территории // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 39–56.
6. *Tsourdos A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. N. Y.: Wiley&Sons, 2011.
7. *Jia Zeng, Xiaoke Yang, Lingyu Yang, Gongzhang Shen.* Modeling for UAV Resource Scheduling Under Mission Synchronization // J. Systems Engineering and Electronics. 2010. V. 21. № 5. P. 821–826.
8. *Babel L.* Coordinated Target Assignment and UAV Path Planning with Timing Constraints // J. Intelligent & Robotic Systems. 2019. V. 94 (3-4). P. 857–869.
9. *Poudel S., Moh S.* Task Assignment Algorithms for Unmanned Aerial Vehicle Networks: A Comprehensive Survey // Vehicular Communications. 2022. V. 35. P. 100469.
10. *Бузинов М. Э., Галеев А. А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021. № 5. С. 3–19.
11. *Галеев А. А., Рубинович Е. Я.* Планирование движения подвижных объектов в конфликтной среде // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. XI Междунар. Четаевской конф. (пленарные доклады). Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 71–90.
12. *Mohsan S. A. H., Othman N. Q. H., Li Y.* et al. Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): Practical Aspects, Fplications, Open Challenges, Security Issues, and Future Trends. Intel Serv Robotics. 2023. V. 16. P. 109–137.
13. *Марков А. А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250–276.
14. *Dubins L. E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
15. *Isaacs R.* Games of Pursuit // Scientific Report of the RAND Corporation. Santa Monica, 1951.
16. *Reeds J. A., Shepp L. A.* Optimal Paths for a Car that Goes Both Forwards and Backwards // Pacific J. Math. 1990. V. 145. No. 2. P. 367–393.
17. *Бердышев Ю. И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 26–35.
18. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2002. Т. 90. С. 5–189.
19. *Бортаковский А. С.* Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 38–48.

20. Пацко В. С., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 25–49.
21. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
22. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
23. Бортакровский А. С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28–40.
24. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
25. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
26. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 62-40

МИНИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ
КВАДРАТИЧНОЙ ОЦЕНКИ УПРАВЛЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ
В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

© 2024 г. Ю.Э. Плешивцева^а, *, Э.Я. Рапопорт^а, **

^аСамарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

*e-mail: yulia_pl@mail.ru

**e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.

После доработки 27.07.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления системой с распределенными параметрами параболического типа в условиях равномерной оценки целевых множеств с критерием оптимальности в форме интегральной квадратичной оценки управляемой функции состояния в пространственно-временной области ее определения. Приводится параметризованная форма представления с требуемой точностью управляющих воздействий на особых участках оптимального процесса, в пределах которых они не могут быть определены с помощью аналитических условий оптимальности первого порядка. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов сводятся на особых участках к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта, которые дополняются переключениями в граничных точках на предельно допустимые управляющие воздействия при достижении соответствующих расчетных значений управляемой величины.

Ключевые слова: системы с распределенными параметрами, интегральная квадратичная оценка, особое управление, равномерная оптимизация, альтернативный метод, синтез оптимального управления

DOI: 10.31857/S0002338824010075, EDN: IUUVGQ

MINIMIZATION OF INTEGRAL QUADRATIC ESTIMATE
OF CONTROLLED VARIABLE IN SYSTEMS WITH DISTRIBUTED
PARAMETERS

© 2024 Yu.E. Pleshivtseva^а, *, E.Ya. Rapoport^а, **

^аSamara State Technical University

*e-mail: yulia_pl@mail.ru

**e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

A constructive method for solving the linear-quadratic problem of optimal control of a parabolic-type system with distributed parameters is proposed under the condition of uniform estimation of target sets. The optimality criterion takes the form of an integral quadratic estimate of the controlled state function in the spatio-temporal domain of its definition. A parameterized representation of control inputs is given with the required accuracy within special intervals of the optimal process, where control inputs cannot be determined using first-order analytical optimality conditions. The suggested approach is based on a previously developed alternance method for constructing parameterized algorithms of programmed control, which heavily relies on fundamental regularities of the subject area. It is demonstrated that the equations of the optimal regulators within the special intervals are reduced to the linear feedback algorithms based on the measured states of the objects. These algorithms are supplemented with switches at boundary points to apply admissible control inputs corresponding to the calculated values of the controlled variable.

Keywords: systems with distributed parameters; integral quadratic estimate; special control; uniform optimization; alternance method; optimal control synthesis

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00180), <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

Введение. В типичном частном случае линейно-квадратичной задачи оптимального управления динамическими системами критерий оптимальности представляет собой интегральную квадратичную оценку (ИКО) управляемой функции состояния в области ее определения [1–3]. Подобные задачи оптимизации существенно усложняются наличием особых участков на протяжении процесса управления, в пределах которых оптимальные управляющие воздействия не могут быть найдены с помощью аналитических условий оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина [4–7]. Начиная с определения особого управления и первого примера его отыскания Л.И. Розоноэром [4], к настоящему времени разработаны конструктивные методы вычисления особых управляющих воздействий, в том числе с помощью общего аппарата скобок Пуассона применительно к конечномерным системам с сосредоточенными параметрами [6, 7]. При этом возникает самостоятельная проблема компоновки алгоритмов программного оптимального управления из особых и неособых участков на достаточно широком множестве вариантов их сопряжения [6], которая усугубляется возможностью возникновения четтеринг-режимов с бесконечным числом переключений управляющих воздействий в точках стыкования [7–10].

Трудности решения задач оптимизации с особыми управлениями в бесконечномерных системах с распределенными параметрами (СРП) увеличиваются, приобретают принципиальный характер [10–12] и требуют дальнейшего развития способов их преодоления в целях разработки конструктивной технологии определения оптимальных управлений.

Известные работы в области оптимизации поведения динамических СРП с учетом особых участков управляемых процессов относятся, как правило, к задачам построения оптимальных программных управляющих воздействий и не предлагают способов синтеза алгоритмов обратной связи в замкнутых системах управления.

В настоящей работе рассматривается метод решения задачи оптимального по величине ИКО программного и позиционного управления для линейных моделей СРП параболического типа в типичных для приложений условиях оценки целевых множеств в равномерной метрике в форме допустимой точности равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины к заданному состоянию в конце оптимального процесса [13, 14].

При этом решение задачи синтеза оптимального регулятора существенно усложняется неприменимостью классических условий трансверсальности на негладкой границе соответствующего целевого множества в бесконечномерном фазовом пространстве СРП. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы ее специальные альтернантные свойства, определяемые по схеме конструктивного альтернантного метода, который является распространением на задачи параметрической оптимизации теории нелинейных чебышевских приближений с учетом дополнительной информации о закономерностях предметной области [13–16].

Развиваемый подход существенно опирается на предлагаемый способ построения параметризуемых алгоритмов оптимального программного управления, содержащих особые участки, который базируется на альтернантных свойствах искомым экстремалей [13–16].

1. Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t^*]$:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + f_V(x) u_V(t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = const \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = u_S(t) \quad (1.3)$$

при сосредоточенном внутреннем $u_V(t)$ или граничном $u_S(t)$ кусочно-непрерывных управляющих воздействиях, заданных достаточно гладких функциях $f_V(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$ и постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$; $\beta_0, \beta_1 > 0$.

Управляющие воздействия стесняются ограничениями

$$u_{V \min} \leq u_V(t) \leq u_{V \max}; u_{S \min} \leq u_S(t) \leq u_{S \max} \quad (1.4)$$

с известными предельно допустимыми величинами $u_{V \max}$, $u_{V \min}$ и $u_{S \max}$, $u_{S \min}$. Здесь и всюду далее используется обозначение $u(t) = u_V(t)$ или $u(t) = u_S(t)$, исключая для простоты случай одновременного использования внутреннего и граничного управлений.

Пусть необходимо обеспечить за заранее фиксируемое ограниченное время $t^* < \infty$ заданную точность $\varepsilon > 0$ равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины $Q(x, t^*)$ к требуемому состоянию $Q^{**}(x) > Q_0 \forall x \in [x_0, x_1]$, согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.5)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [13—16]. Всяду далее предполагается, что заданное время t^* превышает его минимально возможное в условиях (1.4) значение t_{opt} , при котором выполняется требование (1.5) к конечному состоянию объекта.

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)—(1.4) оценивается величиной интегральной квадратичной оценки

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x) Q^2(x, t) dx dt \rightarrow \min_u \quad (1.6)$$

с весовым коэффициентом $\rho(x)$.

Применение к уравнениям объекта конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу x с ядром, равным собственным функциям $\phi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, начально-краевой задачи (1.1)—(1.3), где μ_n^2 — собственные числа, приводит к представлению СРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по $\phi_n(\mu_n, x)$ [17, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t), n = 1, 2, \dots, \\ \bar{Q}_n(\mu_n, 0) &= \bar{Q}^{(0)}(\mu_n); \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \phi_n(\mu_n, x). \quad (1.8)$$

Здесь k_{Vn} , $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ — моды конечных интегральных преобразований $f_V(x)$ и $Q_0(x)$ соответственно; k_{Sn} — известные постоянные коэффициенты [18].

При выполнении усиленных условий Коши—Липшица система уравнений (1.7) имеет единственное решение при заданном воздействии $u(t)$, которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется решением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом N первых уравнений (1.7) при $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0 \forall n > N$, т.е. оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.7) при $n = \bar{1}, N$ [19]. Всяду далее на этом основании учитываются N_1 мод \bar{Q}_n , $n = \bar{1}, N_1$, в (1.7), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей реализации исследуемых алгоритмов управления.

Конкретный выбор числа N_1 должен производиться, исходя из требуемой точности описания модели объекта N_1 уравнениями (1.7).

Переход к модальному описанию СРП в форме (1.7), (1.8) приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций при выборе коэффициента $\rho(x)$ в (1.6) равным весовой функции $r(x)$ конечного интегрального преобразования [18] к представлению критерия (1.6) в следующем виде:

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \left[\sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) \right] dt \rightarrow \min_u, \quad (1.9)$$

а требования (1.5) к конечному состоянию объекта определяются на основании (1.8) выполнением условия

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*) \phi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Рассматриваемая задача оптимального управления сводится к определению программного управления $u^*(t)$ и алгоритма обратной связи $u^*(Q, t)$, обеспечивающих перевод объекта (1.7), (1.8) в требуемое конечное состояние (1.10) при минимально возможном в условиях (1.4) значении критерия оптимальности (1.9).

2. Программные оптимальные управляющие воздействия. 2.1. Структура оптимального управления. На бесконечномерную задачу оптимизации (1.4), (1.7)–(1.10) распространяется принцип максимума Понтрягина [14, 20]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = \max_u H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t)), t \in [0, t^*] \quad (2.1)$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}^*(t)$, $u^*(t)$, $\psi^*(t)$ максимума функции Понтрягина H по переменной u

$$H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t)) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t)), \quad (2.2)$$

где $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$, и вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в условиях (1.4) программное оптимальное управление

$$u^*(t) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \quad (2.4)$$

для всех $t \in (0, t^*)$, для которых

$$\sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \neq 0. \quad (2.5)$$

Здесь $k_n = k_{Vn}$, если $u(t) = u_V(t)$; $k_n = k_{Sn}$, если $u(t) = u_S(t)$.

При этом в общем случае заранее неизвестно, какое конкретно значение u_{\max} или u_{\min} принимает $u^*(t)$ при $t = 0$. В такой ситуации необходимо либо найти независимо друг от друга решение двух задач оптимального управления для обоих возможных вариантов с последующим выбором в качестве искомого решения того из них, на котором достигается меньшая величина критерия оптимальности, либо заранее произвести отбор единственного варианта, если это оказывается возможным, исходя из закономерностей предметной области конкретной рассматриваемой задачи.

В условиях $t^* > t_{opt}$ на протяжении оптимального процесса существуют интервалы $[t_n, t_k]$, $t_n < t_k$, в пределах которых

$$\sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \equiv 0 \forall t \in [t_n, t_k]. \quad (2.6)$$

Оптимальное управление на каждом из таких интервалов не определяется из условия (2.4) и является особым [6, 7]. Заметим, что при $t^* \leq t_{opt}$ $u^*(t)$ находится для достижимых значений ε в (1.10) только в форме “релейных” алгоритмов вида (2.4), (2.5) [3, 13–15]. Таким образом, оптимальная программа $u^*(t)$ может содержать на протяжении процесса управления как неособые, согласно (2.4), (2.5), так и особые (в соответствии с (2.6)) участки. При этом возникает дальнейшая проблема вычисления управляющих воздействий на интервалах (2.6) и компоновки оптимальной программы из особых и неособых участков.

2.2. Особые оптимальные управления в открытой области определения управляющих воздействий. Рассмотрим сначала задачу (1.7)–(1.10), считая, что ограничения (1.4) не достигаются на всем протяжении оптимального процесса. В таком случае условие максимума в (2.1) заменяется условием стационарности функции Понтрягина на оптимальном управлении:

$$\left. \frac{\partial H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t))}{\partial u} \right|_{u=u^*(t)} = 0, \quad (2.7)$$

которое приводит, согласно (2.2), к равенствам (2.6), и, следовательно, оптимальное программное управляющее воздействие $u^*(t)$ является особым на всем интервале $[0, t^*] \ni t$.

Известный способ вычисления особого управления $u_{oc}(t)$ для конечномерных объектов путем последовательного дифференцирования тождества вида (2.6) вплоть до появления в явной форме искомого управляющего воздействия [6, 7] не распространяется на рассматриваемую СРП ввиду расходимости ряда для производных четного порядка в (2.6) при $N_1 = \infty$ [10].

В [10] показано, что $u_{oc}(t)$ следует искать в форме ряда экспонент

$$u_{oc}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-p_n t}, p_n > 0, \quad (2.8)$$

где значения p_n определяются из условия (2.6) как корни уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{\mu_n^4 - p^2} = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, особое управление находится с точностью до выбора бесконечномерного вектора весовых коэффициентов a_n в (2.8), который должен быть найден из условий (1.10) достижения требуемого конечного состояния управляемой величины.

В работах [13—16] предложен конструктивный способ последовательной параметризации подобных управляющих воздействий ($\Delta^{(M)}$ -параметризация) на конечномерных подмножествах векторов $\Delta^{(M)} = (\Delta_i), i = \overline{1, M}$, где в рассматриваемой задаче

$$\Delta^{(M)} = (a_i), i = \overline{1, M}; a_i = 0, i = \overline{M+1, N_1}; 1 \leq M < N_1. \quad (2.10)$$

Применение процедуры $\Delta^{(M)}$ -параметризации приводит к параметрическому представлению $u_{oc}(t)$ в следующей форме, согласно (2.8), (2.10):

$$u_{oc}(\Delta^{(M)}, t) = \sum_{n=1}^M a_n e^{-p_n t}. \quad (2.11)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием управления $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$ в сужающееся к требуемому состоянию $Q^{**}(x)$ в пространстве (\bar{Q}_n) целевое множество, гарантируя выполнение условия (1.10) для достижимых значений $\varepsilon > 0$ при некотором конечном числе $M \geq 1$ [13—16].

Интегрирование уравнений модели объекта (1.7) с управляющим воздействием $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$ в (2.11) позволяет получить зависимости $Q(x, \Delta^{(M)})$ управляемой величины $Q(x, t^*)$ в конце процесса управления и критерия оптимальности $I_1(\Delta^{(M)})$ в (1.8), (1.9) для каждого значения $\bar{Q}(0)$ в форме явных функций своих аргументов. Здесь $Q(x, \Delta^{(M)})$ представляется разложением в ряд (1.8), где $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, \Delta^{(M)})$ находятся в результате интегрирования уравнений (1.7) с управлением $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [13—16, 21]:

$$I_1(\Delta^{(M)}) \rightarrow \min; \max_{\Delta^{(M)} \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta^{(M)}) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon \quad (2.12)$$

на экстремум функции $I_1(\Delta^{(M)})$ конечного числа M переменных $a_i, i = \overline{1, M}$, с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (1.10) для всех $x \in [x_0, x_1]$ и заменяемых одним ограничением на функцию максимума в (2.12). В соответствии с результатами, полученными в [13—16, 21], число M искомым параметров определяется для заданной величины ε в (1.10) соотношением

$$M = \upsilon \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\upsilon-1)}, \quad (2.13)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} = \min_{\Delta^{(\upsilon)}} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta^{(\upsilon)}) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.14)$$

Значения минимаксов $\varepsilon_{\min}^{(\upsilon)}$ образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием υ [13—16, 21], и задача (2.12) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$. Здесь точная нижняя грань ε_{\inf} достижимых значений ε оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x)$ объектов [13].

Решение ЗПО (2.12) относительно вектора $\Delta^{(M)}$, а также априори неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в случае $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.12) может быть получено в условиях малостеснительных

допущений альтернансным методом параметрической оптимизации [13–16, 21]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомых значений $\Delta_*^{(M)} = (a_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, соответствующих оптимальному процессу, которые являются аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и на дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния $Q(x, \Delta_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, диктуемой закономерностями предметной области рассматриваемой задачи.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x)|$ достигаются в некоторых точках x_g^0 , $g = \overline{1, R}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Число R этих точек оказывается равным числу искомых неизвестных в ЗПО (2.12)–(2.14), включая все компоненты $\Delta_*^{(M)}$ при заданной величине ε : $\varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$ и наряду с ними неизвестную величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если значение ε в (2.13) должно совпадать с $\varepsilon_{\min}^{(M)}$:

$$R = \begin{cases} M, \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тем самым образуется замкнутая относительно этих неизвестных система соотношений

$$\left| Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0) \right| = \varepsilon, g = \overline{1, R}. \quad (2.16)$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \Delta_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей идентифицировать координаты x_g^0 и знаки $Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0)$, равенства (2.16), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$ в точках $x_{g_p}^0 \in \text{int}[x_0, x_1]$, $p = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $x_{g_p}^0 \in \{x_p^0\}$, переводятся в систему $R + R_1$ уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0) &= \pm \varepsilon, g = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(x_{g_p}^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_{g_p}^0) \right] &= 0, p = \overline{1, R_1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

с заведомо фиксируемым знаком ε в каждой точке x_g^0 , которая разрешается относительно a_i^* , $i = \overline{1, M}$; значений $x_{g_p}^0$, $p = \overline{1, R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если в (2.12) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$. Найденные указанным образом значения $\Delta_*^{(M)}$ полностью определяют искомый алгоритм оптимального особого управления в форме (2.11):

$$u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, t) = \sum_{n=1}^M a_n^* e^{-p_n t}. \quad (2.18)$$

2.3. Оптимальное управление в замкнутой области определения управляющих воздействий. Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.7)–(1.10) с учетом ограничений (1.4). Сравнение значений $u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, t)$, $t \in [0, t^*]$ с заданными предельно допустимыми

величинами u_{\max}, u_{\min} в (1.4) позволяет определить структуру программного управляющего воздействия $u^*(t)$ в условиях (1.4) и способ его компоновки на всем протяжении оптимального процесса из чередующихся особых и неособых участков с точностью до выбора моментов $t_j, j = \overline{1, h}, h \geq 1, t_j < t_{j+1}$ их сопряжения в условиях конкретного выбора первого из них путем сравнения $u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, 0)$ с пределами в (1.4).

Тем самым находится явная форма параметрического представления $u(T_h, t), T_h = (t_j), j = \overline{1, h}$, искомого программного управления с точностью до выбора h моментов сопряжения t_j при сохранении на особых участках управления в форме (2.18), которое, согласно его определению, минимизирует на их протяжении соответствующие составляющие критерия оптимальности (1.9). Интегрирование уравнений (1.7) с управляющим воздействием $u(T_h, t)$ позволяет получить зависимости конечного состояния управляемой величины $Q(x, T_h)$ и критерия оптимальности $I_1(T_h)$, согласно (1.8), (1.9), в виде явных функций своих аргументов с последующей редукцией, подобно (2.12), к задаче полубесконечной оптимизации:

$$I_1(T_h) \rightarrow \min; \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, T_h) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon. \quad (2.19)$$

Ограничимся далее ситуацией с числом $h = M$ точек $t_j, j = \overline{1, M}$, равным размерности вектора $\Delta_*^{(M)}$ в (2.18) при $T_h = T_M, \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}$ в (2.19), где аналогично (2.14)

$$\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} = \min_{T_M} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, T_M) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.20)$$

При $T_h = T_M$, согласно альтернансным свойствам искомого значения T_M^* [13–16], выполняется базовая система правил вида (2.15), (2.16):

$$\tilde{R} = \begin{cases} M, \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}, \\ M + 1, \varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$|Q(\tilde{x}_g^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_g^0)| = \varepsilon, g = \overline{1, \tilde{R}}, \quad (2.22)$$

в \tilde{R} точках альтернанса $\tilde{x}_g^0 \in [x_0, x_1]$ с последующей редукцией на основании закономерностей предметной области к подобной (2.17) системе $\tilde{R} + \tilde{R}_1$ уравнений:

$$\begin{aligned} Q(\tilde{x}_g^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_g^0) &= \pm \varepsilon, g = \overline{1, \tilde{R}}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(\tilde{x}_{g_p}^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_{g_p}^0) \right] &= 0, p = \overline{1, \tilde{R}_1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

разрешаемой относительно $\tilde{R} + \tilde{R}_1$ искомым величин $t_j^*, j = \overline{1, M}; \tilde{x}_{g_p}^0, p = \overline{1, \tilde{R}_1}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$, если $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$ в (2.22), (2.23).

В итоге определяемый описанным способом вектор T_M^* обеспечивает заданную точность равномерного приближения конечного состояния объекта к $Q^{**}(x)$ при $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}$ в (1.10). При этом особые управления (2.18) не предъявляют дополнительных требований к поведению управляемой величины в точках сопряжения $t_j^*, j = \overline{1, M}$, при задании целевого

множества (1.10) и не сопровождаются появлением четтеринг — режимов с бесконечным числом переключения управляющих воздействий, которые возникают, в частности, при входе на особые участки в задачах управления СРП с целевым множеством $Q(x, t^*) = 0$ и критерием оптимальности вида (1.9), оцениваемым на бесконечном временном интервале $[0, t^*]$, $t^* \rightarrow \infty$ [10, 11].

3. Синтез оптимального управления. Рассмотрим далее задачу аналитического конструирования оптимальных регуляторов $u^*(Q, t)$ в рассматриваемой задаче (1.4), (1.7)—(1.10). Интегрирование уравнений объекта (1.7) с особым управлением (2.18) приводит, согласно [10], к следующим выражениям для модальных составляющих $Q(x, t)$:

$$\bar{Q}_n(\mu_n, t) = \sum_{j=1}^M \frac{k_n a_j^*}{\mu_n^2 - p_j} e^{-p_j t}, n = \overline{1, N_1}. \quad (3.1)$$

Первые M равенств в (3.1) образуют линейную систему M уравнений относительно M значений экспонент в каждый момент времени в зависимости от наблюдаемых величин $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$, $n = \overline{1, M}$. Решение такой системы находится по формулам Крамера:

$$e^{-p_j t} = \sum_{n=1}^M \frac{D_{jn}}{D} \bar{Q}_n(\mu_n, t), j = \overline{1, M}, \quad (3.2)$$

где D_{jn} — алгебраическое дополнение n -го элемента j -го столбца определителя

$$D = \det \left[\frac{k_n a_j^*}{\mu_n^2 - p_j} \right]_{n=1, M}^{j=1, M}.$$

Подстановка (3.2) в (2.18) приводит к линейному закону синтеза особого управления $u_{oc}^*(\bar{Q}, t)$ с постоянными коэффициентами η_n^* передачи обратных связей по неполному измерению состояния объекта $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, M}$:

$$u_{oc}^*(\bar{Q}, t) = \sum_{n=1}^M \eta_n^* \bar{Q}_n(\mu_n, t), \eta_n^* = \sum_{j=1}^M \frac{a_j^* D_{jn}}{D}. \quad (3.3)$$

Переход в (3.3) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q_u(x_{ui}, t))$ в r точках $x_{ui} \in [x_0, x_1]$, $i = \overline{1, r}$, определяется, согласно (1.8), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t); \Phi_u = [\phi_n(\mu_n, x_{ui})], n = \overline{1, N_1}; i = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

В условиях $r < M$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q(x_u, t)$ требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [22, 23]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.7), (1.8) можно ограничиться учетом только M составляющих $\bar{Q}(t)$, полагая $N_1 = r = M$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (3.4) при $r = M$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (3.5)$$

Подстановка (3.3) в (3.5) приводит к линейному алгоритму синтеза особого управления с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$u_{oc}^*(Q_u, t) = \eta^* \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t), \quad (3.6)$$

где $\eta^* = (\eta_n^*)$, $n = \overline{1, M}$ — матрица-строка и $\Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) = \bar{Q}(t)$ — матрица-столбец.

Точное решение задачи синтеза в замкнутой области определения управляющих воздействий связано с серьезными затруднениями в условиях существования наряду с особыми участками интервалов изменения управляющих воздействий по алгоритму (2.4), (2.5) [24]. В большинстве случаев с приемлемой в приложениях точностью искомые алгоритмы обратной связи $\tilde{u}^*(\bar{Q}, t)$ и $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ могут быть построены путем дополнения регуляторов (3.3) и (3.6) участками выхода управляющих воздействий на ограничения (1.4) [24, 25]:

$$\tilde{u}^*(\bar{Q}, t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\min}, \\ u_{oc}^*(\bar{Q}, t) & \text{на особых участках (2.6),} \\ u_{\max} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \end{cases} \quad (3.7)$$

$$u_{oc}^*(\bar{Q}, t) \text{ на особых участках (2.6),} \quad (3.8)$$

$$u_{\max} \text{ на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \quad (3.9)$$

$$\tilde{u}^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\min}, \\ u_{oc}^*(Q_u, t) & \text{на особых участках (2.6),} \\ u_{\max} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \end{cases} \quad (3.10)$$

$$u_{oc}^*(Q_u, t) \text{ на особых участках (2.6),} \quad (3.11)$$

$$u_{\max} \text{ на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \quad (3.12)$$

где $u_{oc}^*(\bar{Q}, t)$ и $u_{oc}^*(Q_u, t)$ находятся, согласно (3.5) и (3.6).

Реализация законов управления $\tilde{u}^*(\bar{Q}, t)$, $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ обеспечивается переходом к алгоритмам (3.7), (3.9) и (3.10), (3.12) в точках сопряжения t_j^* , $j = \overline{1, M}$, особых и неособых интервалов при достижении расчетных значений соответственно $\bar{Q}(t_j^*)$ и $Q_u(x_u, t_j^*)$, определяемых по результатам предварительного решения задачи программного управления.

4. Оптимальный регулятор для управления индукционным нагревом металлической пластины. В качестве примера рассмотрим задачу аналитического синтеза оптимального управления нестационарным процессом теплопроводности с внутренним тепловыделением.

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ пластины в процессе индукционного нагрева описывается в зависимости от времени t и пространственной координаты x линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [15, 26]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + W(x)u_V(t), x \in [0, 1], t \in [0, t^*] \quad (4.1)$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0 = const \geq 0 \quad (4.2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0, \quad (4.3)$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на поверхности пластины $x = 1$ по закону конвективной теплоотдачи с заданным значением α критерия Био.

Здесь $u_V(t)$ — внутреннее сосредоточенное управляющее воздействие по мощности электромагнитных источников тепла, удовлетворяющее ограничениям вида (1.4):

$$0 \leq u_{\min} \leq u_V(t) \leq u_{\max}, t \in [0, t^*]; \quad (4.4)$$

$W(x)$ — известная функция пространственного распределения мощности внутреннего тепловыделения:

$$W(x) = \sqrt{2\xi} \frac{ch(\sqrt{2\xi}x) - \cos(\sqrt{2\xi}x)}{sh(\sqrt{2\xi}) - \sin(\sqrt{2\xi})},$$

где ξ — характерный параметр, определяемый глубиной проникновения тока в металл при индукционном нагреве [15, 26].

В пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ объект управления (4.1)–(4.4) описывается бесконечной системой уравнений вида (1.7):

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{W}_n u_V(t), \bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}_n(0), n = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

где $\bar{Q}_n(0)$ и \bar{W}_n — соответственно моды начального температурного состояния Q_0 и конечного интегрального преобразования $W(x)$. Температурное поле $Q(x, t)$ представляется его разложением в ряд вида (1.8) по собственным функциям $\cos(\mu_n x)$ [15, 26]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \phi_n(\mu_n, x); \phi_n(\mu_n, x) = \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n}. \quad (4.6)$$

Здесь $\mu_n, n = 1, 2, \dots$, — бесконечно возрастающая последовательность положительных корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0,$$

и в формуле (4.5)

$$\bar{W}_n = \int_0^1 W(x) \cos(\mu_n x) dx.$$

Пусть к конечному температурному состоянию $Q(x, t^*)$ предъявляется требование (1.10) равномерного нагрева пластины до заданной температуры $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0, x \in [0, 1]$, с допустимой погрешностью ε :

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*) - Q^{**} \right| \leq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Задача сводится к определению алгоритма обратной связи $u_V^*(Q, t)$, обеспечивающего перевод объекта (4.5), (4.6) в требуемое конечное состояние $Q^{**}(x)$ с заданной точностью ε , согласно (4.7), при минимально возможном в условиях (4.4) значении критерия оптимальности (1.9) за фиксируемое заранее время t^* , превышающее длительность t_{opt} оптимального по быстройдействию процесса управления с той же точностью ε приближения к $Q^{**}(x)$.

4.1. Вычисление особого управления в открытой области определения управляющих воздействий. Ограничимся здесь и всюду далее двухпараметрическим представлением особого управления при $M = 2, R = 3$ в (2.11)–(2.15) для типичного в приложениях случая, когда требуемая величина ε в (4.7) должна совпадать с заранее неизвестным значением $\varepsilon_{\min}^{(2)}$.

Замкнутая система соотношений (2.16) в трех точках $x_g^0, g = 1, 2, 3$ при $M = 2, \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ приводит с учетом физических закономерностей поведения температурных полей в процессе индукционного нагрева [15, 26] к системе четырех уравнений вида (2.17) с известной формой кривой распределения $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ на отрезке $[0, 1]$, показанной на рис. 1:

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= \varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(1, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)})}{\partial x} &= 0, 0 < x_2^0 < 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

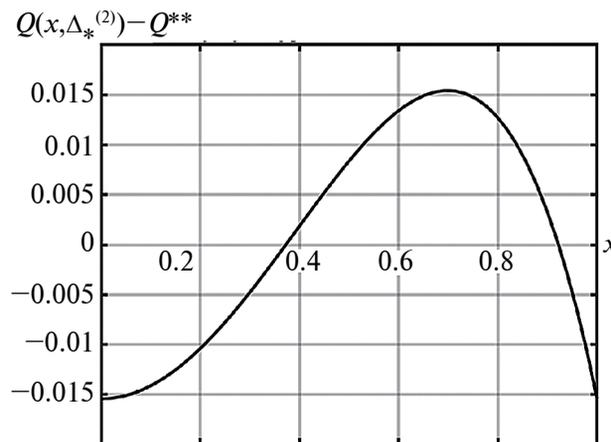


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса с неограничиваемым особым управлением при $M = 2, \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)} = 0.0154$

Система (4.8) решается относительно четырех неизвестных $\Delta_*^{(2)} = (a_1^*, a_2^*), \varepsilon_{\min}^{(2)}$ и x_2^0 , первые два из которых полностью определяют оптимальное управление $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ в (2.18) после вычисления корней p_1, p_2 уравнения (2.9), где $k_n = k_{Vn} = \bar{W}_n$. Конечное пространственное распределение $Q(x, t^*) = Q(x, \Delta_*^{(2)})$ температурного поля вычисляется в (4.8) в форме разложения в ряд (4.6) при $t = t^*$, где в результате интегрирования уравнений (4.5) с управлением $u_V(t) = u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ вида (2.18) получаем следующие выражения для $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, \Delta_*^{(2)}, t^*)$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, a_1^*, a_2^*, t^*) &= Q_0 \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 t^*} + \frac{\bar{W}_n a_1^*}{\mu_n^2 - p_1} \left(e^{-p_1 t^*} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right) + \\ &+ \frac{\bar{W}_n a_2^*}{\mu_n^2 - p_2} \left(e^{-p_2 t^*} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right), n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при $\xi = 4, Q_0 = 0, Q^{**} = 0.5; \alpha = 0.5, t^* = 0.4, N_1 = 15$.

4.2. Программное управление с учетом ограничений на управляющее воздействие. Сравнение найденного особого управления $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ на всем протяжении оптимального процесса с заданными величинами u_{max}, u_{min} в (4.4) определяет в условиях $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, 0) > u_{max}, u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t^*) < u_{min}$ (рис. 2) параметризованную структуру $u_V(t_1, t_2, t)$ программного управления в замкнутой области изменения u_V с точностью до выбора двух моментов сопряжения t_1, t_2 интервалов вида (2.4) с единственным особым участком:

$$u_V(t_1, t_2, t) = \begin{cases} u_{max}, t \in [0, t_1), \\ u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t), t_1 < t < t_2, \\ u_{min}, t \in (t_2, t^*]. \end{cases} \quad (4.10)$$

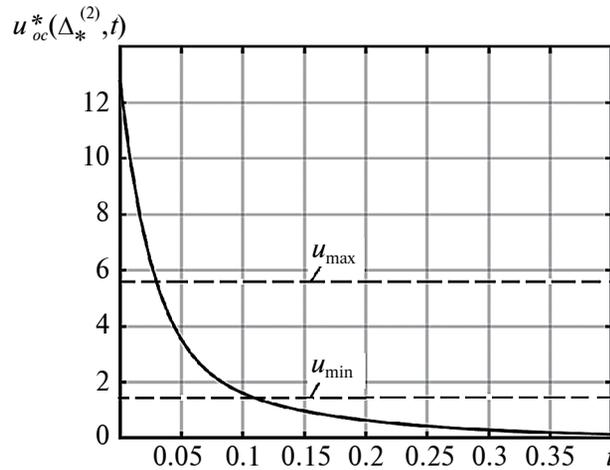


Рис. 2. Особое оптимальное управление в открытой области определения управляющих воздействий ($M = 2, a_1^* = 3.019, a_2^* = 9.792, p_1 = 7.855, p_2 = 37.754$)

В итоге задача программного оптимального управления сводится к подобной (2.19) ЗПО при $T_h = T_M = (t_1, t_2), \tilde{\varepsilon}_{min}^{(2)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{min}^{(1)}$. Здесь $Q(x, T_M)$ опять находится в форме ряда (4.6) при $t = t^*$, где теперь $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, t_1, t_2, t^*)$ вычисляются после интегрирования уравнений (4.5) с управлением (4.10) по следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1, t_2, t^*) = & Q_0 \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 t^*} + \frac{\bar{W}_n}{\mu_n^2} u_{max} \left(e^{-\mu_n^2 (t^* - t_1)} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right) + \\ & + \frac{\bar{W}_n a_1^*}{\mu_n^2 - p_1} e^{-\mu_n^2 t^*} \left(e^{(\mu_n^2 - p_1) t_2} - e^{(\mu_n^2 - p_1) t_1} \right) + \frac{\bar{W}_n a_2^*}{\mu_n^2 - p_2} e^{-\mu_n^2 t^*} \left(e^{(\mu_n^2 - p_2) t_2} - e^{(\mu_n^2 - p_2) t_1} \right) + \\ & + \frac{\bar{W}_n}{\mu_n^2} u_{min} \left(1 - e^{-\mu_n^2 (t^* - t_2)} \right), n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Альтернативные свойства (2.21), (2.22) искомого вектора параметров $T_M^* = (t_1^*, t_2^*)$ переводят замкнутую систему соотношений (2.22) при $R = 3$ опять с использованием физических закономерностей процесса индукционного нагрева [15, 26] в однозначно определяемую систему уравнений аналогичного (4.8) вида при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$, соответствующую известной форме кривой $Q(x, T_M^*) - Q^{**}$ (рис. 3):

$$\begin{aligned} Q(0, T_M^*) - Q^{**} &= -\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ Q(\tilde{x}_2^0, T_M^*) - Q^{**} &= \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ Q(1, T_M^*) - Q^{**} &= -\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial Q(\tilde{x}_2^0, T_M^*)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

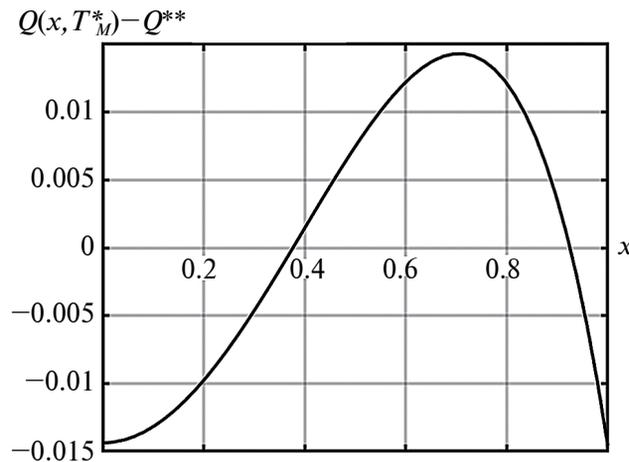


Рис. 3. Температурное распределение в конце оптимального процесса с замкнутой областью изменения управляющих воздействий ($M = 2$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)} = 0.0144$, $u_{\max} = 5.0$, $u_{\min} = 0.2$)

Система четырех уравнений (4.12) решается относительно четырех неизвестных t_1^* , t_2^* , $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$, \tilde{x}_2^0 . Подстановка найденных значений t_1^* , t_2^* в (4.10) полностью определяет искомое программное управление $u_V^*(t_1^*, t_2^*, t)$.

4.3. Аналитическое конструирование оптимального регулятора. Алгоритм оптимального управления $\tilde{u}_V^*(Q_u, t)$ с линейными обратными связями по выходу объекта представляется, согласно (3.3)—(3.6), в форме (3.10)—(3.12) при синтезе особого управляющего воздействия в виде (3.6), где следует принять $N_1 = r = M = 2$ в (3.3)—(3.5) при наличии двух измерителей управляемой величины в точках $x_{u1}, x_{u2} \in [0, 1]$:

$$\tilde{u}_V^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\max}, t \in [0, t_1^*), & (4.13) \\ \eta^* \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t), t_1^* < t < t_2^*, & (4.14) \\ u_{\min}, t \in (t_2^*, t^*]. & (4.15) \end{cases}$$

Реализация закона управления (4.13)—(4.15) обеспечивается путем перехода к алгоритмам (4.13), (4.15) в точках сопряжения t_1^* , t_2^* при достижении расчетных значений $Q_u(x_u, t)$ при $t = t_j^*$, $j = 1, 2$, определяемых предварительным решением задачи программного управления.

На рис. 3, 4 представлены некоторые расчетные результаты, полученные для исходных данных, указанных в разд. 4.1, при выборе $x_{u1} = 0$, $x_{u2} = 1$. На рис. 3 показано конечное распределение температуры по толщине пластины при точности $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$ равномерного приближения $Q(x, t_1^*, t_2^*)$ к Q^{**} .

На рис. 4 приведено оптимальное управление $\tilde{u}_V^*(Q_u, t)$, изменяющееся во времени по алгоритму (4.13)—(4.15) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратных связей по величинам $Q(0, t)$ и $Q(1, t)$ с автоматическим контролем точек сопряжения t_1^* и t_2^* по расчетным значениям $Q(0, t_j^*)$, $j = 1, 2$, которые находятся при расчете программного управления.

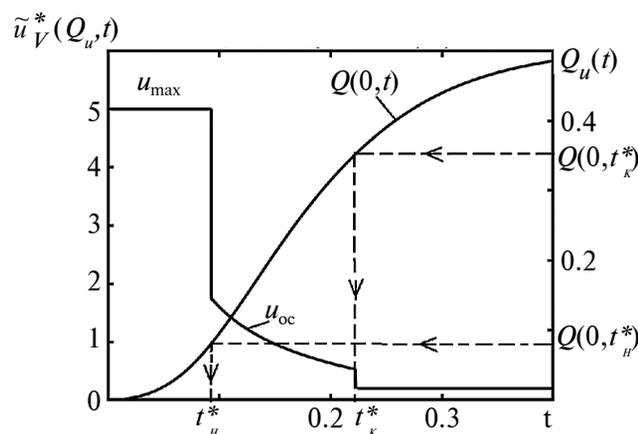


Рис. 4. Зависимость управляющего воздействия от изменяющихся во времени сигналов обратной связи ($t_1^* = 0.0927$, $t_2^* = 0.222$, $u_{\max} = 5.0$, $u_{\min} = 0.2$)

Заключение. Предлагаемый метод решения задачи минимизации интегральной квадратичной оценки управляемой величины в системах с распределенными параметрами параболического типа разработан применительно к оценкам целевых множеств в равномерной метрике. Найдены в явной параметризованной форме выражения для нестесняемых ограничениями особых оптимальных управляющих воздействий. Предложен базирующийся на этом результате способ определения структуры программного управляющего воздействия и метод его компоновки из особых и неособых участков с точностью до моментов их сопряжения, определяемых предварительным решением задачи программного управления. Полученные уравнения оптимальных регуляторов сводятся на особых участках к линейным алгоритмам обратной связи по наблюдаемому состоянию управляемой величины, которые дополняются переключениями на предельно допустимые управляющие воздействия при достижении в точках сопряжения расчетных значений измеряемого выхода объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2003.
2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. М.: Физматлит, 2007.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
4. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. II // АиТ. 1959. № 11. С. 1441—1458.
5. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
7. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.

8. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Некоторые вопросы теории колебаний и теории оптимального управления. Тр. МИАН СССР, М197. М.: Наука, 1991. С. 85—166.
9. Сухинин Б. В., Сурков В. В., Филимонов Н. Б. Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. № 7. С. 339—348.
10. Берцанский Я. М. Релейные и особые участки оптимальных траекторий в задаче с уравнением параболического типа // АиТ. 2003. № 2. С. 3—10.
11. Зеликин М. И., Манита Л. А. Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 19. С. 78—113.
12. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестн. ТГУ. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1452—1461.
13. Рапопорт Э. Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
14. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
15. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgiya, 1993.
16. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ГиСУ. 2009. № 3. С. 22—33.
17. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
18. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
19. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
20. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Математический сборник (новая серия). 1964. Т. 64(106). № 1. С. 79—101.
21. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021.
22. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
23. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.
24. Летов А. М. Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969.
25. Летов А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
26. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.

УДК: 004.852

ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ ОБУЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

© 2024 г. А.А. Докукин^{а,*}, А.В. Кузнецова^{б,**}, Н.В. Окулов^{с,***}, О.В. Сенько^{а,****},
В.Я. Чучупал^{а,*****}

^а *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук,
Москва, Россия*

^б *Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля Российской академии наук, Москва, Россия*
^с *ООО “Правильное Пчеловодство”, Пермь, Россия*

* *e-mail: dalex@ccas.ru*

** *e-mail: azforus@yandex.ru*

*** *e-mail: stereoperm@yandex.ru*

**** *e-mail: senkoov@mail.ru*

***** *e-mail: v.chuchupal@vail.ru*

Поступила в редакцию 01.08.2023 г.

После доработки 05.09.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассмотрен программный комплекс, позволяющий генерировать алгоритмы автоматической классификации сигналов. Программный комплекс включает алгоритм, переводящий записи непрерывных сигналов в векторную форму, набор методов машинного обучения, а также средства интеллектуального анализа данных, направленные на достижение прозрачности и интерпретируемости обучения. В основе подхода лежит представление различий между сравниваемыми классами в виде совокупности относительно простых, статистически значимых и интерпретируемых эффектов, которые графически изображаются на двумерных диаграммах. Работа метода иллюстрируется на задаче оценки состояния улья по звуковым сигналам. Программный комплекс может быть использован при решении прикладных задач автоматической диагностики и анализа данных.

Ключевые слова: интерпретируемость, машинное обучение, обработка сигналов, программный пакет, звуки пчел, пчелиная матка

DOI: 10.31857/S0002338824010085, EDN: ITJGID

INTERPRETABILITY OF LEARNING IN A SIGNAL PROCESSING SYSTEM

© 2024 A. A. Dokukin^{а,*}, A. V. Kuznetsova^{б,**}, N.V. Okulov^с, O.V.Sen'ko^а, V. Ya. Chuchupal^а

^а *FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

^б *Emanuel Institute of Biochemical Physics of RAS, Moscow, Russia*

^с *“Pravilnoe pchelovodstvo”, Perm, Russia, 614002*

* *e-mail: dalex@ccas.ru*

The paper presents a software package that allows one to generate algorithms for automatic classification of signals. The software package includes an algorithm that converts records of continuous signals into vector form, a set of machine learning methods, as well as data mining tools aimed at achieving transparency and interpretability of learning. The approach is based on the presentation of differences between compared classes as a set of relatively simple, statistically significant and interpretable effects, which are graphically represented on two-dimensional diagrams. The performance of the method is illustrated on the problem of assessing the state of the hive by sound signals. The software package can be used in solving applied problems of automatic diagnostics and data analysis.

Keywords: interpretability, machine learning, signal processing, software package, bees sounds, queen bee

Введение. Задачи компьютерной диагностики, когда требуется автоматически предсказать состояния изучаемых объектов по параметрам, наблюдаемым от их сигналов, все чаще возникают в различных областях человеческой деятельности. Наиболее эффективным способом решения таких задач является применение технологий машинного обучения.

В последние годы в этой области активно используются технологии машинного обучения, основанные на сверточных нейронных сетях [1, 2]. Отличительная особенность сверточных нейронных сетей — возможность применения их непосредственно к изображениям или сигналам.

Сверточные сети демонстрируют высокую эффективность при решении многих прикладных задач. Вместе с тем успех обычно достигается при решении задач, для которых существуют обучающие выборки значительного размера. Иными словами, должны существовать размеченные коллекции из многих тысяч сигналов. Разметка, в частности, предполагает, что каждому сигналу должен быть сопоставлен известный диагноз для соответствующего этому сигналу объекта. Сбор и разметка таких больших размеченных корпусов данных требует значительных затрат времени и средств, поэтому для многих, в частности, новых прикладных задач они отсутствуют.

Наряду с нейросетевыми методами в современном машинном обучении существует целый ряд альтернативных технологий, которые предназначены для решения задач автоматической классификации объектов, описания которых задаются векторами числовых переменных (признаков).

К числу таких технологий можно отнести получившие широкое распространение статистические методы, включая дискриминантный анализ Фишера, байесовские методы, логистическую регрессию и др.

Наряду со статистическими методами активно развивались эффективные альтернативные технологии, включая метод опорных векторов [3, 4], случайные решающие леса [3, 5]; леса, основанные на адаптивном или градиентном бустинге [3, 6–8]; различные методы, базирующиеся на принятии коллективных решений по наборам закономерностей [9]. Краткое описание некоторых из перечисленных технологий представлено в разд. 1. Перечисленные методы нередко превосходят многослойные нейросетевые архитектуры по обобщающей способности при относительно небольшом объеме обучающих данных.

Следует отметить продолжающееся совершенствование альтернативных технологий. В связи с этим представляются актуальными разработка и развитие методов и программных систем компьютерной диагностики, основанных на переводе сигналов во многомерные векторы признаков с дальнейшим использованием перечисленных выше методов автоматической классификации для генерации алгоритмов диагностики [10].

При этом для генерации векторных описаний целесообразно применять хорошо разработанные методы спектрального анализа, а также вейвлет-анализа.

Другим существенным недостатком большинства методов современного машинного обучения является непрозрачность полученных с их помощью алгоритмов автоматической классификации в смысле сложности понимания пользователем их работы, а также процесса обучения [11].

Одним из возможных способов повышения прозрачности служит дополнительное использование методов интеллектуального анализа данных, позволяющих представить работу сложного многофакторного алгоритма в виде совокупности относительно простых, достоверных и интерпретируемых эффектов.

Такими возможностями обладает представленный в разд. 2 метод оптимальных достоверных разбиений (ОДР), позволяющий находить разнообразие нелинейные взаимосвязи с оценкой их статистической значимости [12, 13]. Предполагается, что высокая статистическая значимость может обеспечить достоверность эффекта. Для оценки статистической значимости выявленных закономерностей применяется комбинация технологий перестановочных тестов и принципа бритвы Оккама. Перестановочные тесты во многих случаях обладают несомненными преимуществами по сравнению с традиционными параметрическими и непараметрическими критериями и прочно вошли в современный статистический анализ [14, 15, 16]. Принцип бритвы Оккама используется для оптимизации сложности моделей. В этом смысле цели применения совпадают с целями известных информационных критериев, включая информационный критерий Акаике [17], байесовский информационный критерий Шварца [18], принцип Риссанена [19]. Однако недостатком перечисленных критериев является невозможность по отдельности оценить статистическую значимость каждого элемента модели, что осуществляется с помощью рассматриваемого варианта принципа бритвы Оккама, ранее предложенного в работах [13, 20].

Использование принципа бритвы Оккама в машинном обучении подвергалось критике в том смысле, что более сложные модели позволяют нередко достигать более высокой обобщающей способности [21].

Основные цели рассматриваемого варианта принципа — резкое сокращение множества генерируемых моделей с сохранением только значимых эффектов, что существенно упрощает и облегчает анализ пользователем выявленных закономерностей.

Для решения задач компьютерной диагностики была разработана программная система, состоящая из пакета прикладных программ автоматической классификации и интеллектуального анализа данных Data Master Azforus и программы, генерирующей векторные признаковые описания. Пакет Data Master содержит набор методов автоматической классификации, включая методы, перечисленные в разд. 1; методы кластерного анализа; методы статистического анализа, включая метод ОДР.

В статье представлен пример применения для диагностики наличия матки в улье разработанной системы и подхода, основанного на анализе звуковых сигналов, производимых пчелами. Ранее приведенные подходы использовались для решения задачи автоматической диагностики деменции по данным электроэнцефалографии [22].

1. Методы автоматической классификации. Рассмотрим следующее определение задачи автоматической классификации.

Пусть даны некоторые объекты, которые можно описать вектором в признаковом пространстве (пространстве объясняющих переменных) $x \in \{R^n\}$.

Дополнительно у объекта есть выделенный, целевой, признак (целевая переменная) y , которая известна только для части объектов.

Множество признаков описаний с известной целевой переменной $\tilde{S}_0 = (y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m)$ называется обучающей выборкой.

Необходимо по выборке \tilde{S}_0 построить алгоритм A , который бы для произвольного объекта, в том числе ранее неизвестного, по его признаковому описанию x вычислял бы прогноз значения $y = A(x)$.

При этом если $y \in \{1, K\}$, то задача называется задачей классификации. И этот случай нам будет наиболее интересен далее. Если же $y \in R$, то задача называется задачей регрессии. Перейдем к рассмотрению методов классификации.

1.1. Метод опорных векторов. Метод опорных векторов изначально основывался на принципе максимального зазора, который было предложено использовать для построения оптимальной линейной разделяющей поверхности в задачах распознавания с двумя линейно разделимыми классами. Было показано, что указанная задача сводится к известной математической задаче квадратичного программирования. Избежать требования априорной линейной разделимости и добиться таким образом универсальной применимости метода позволила модифицированная постановка задачи с помощью дополнительных параметров, “смягчающих” ограничения, которые необходимы для обеспечения линейного разделения классов. Было замечено, что при обучении и распознавании новых объектов метод опорных векторов применяет только взаимные скалярные произведения векторных описаний объектов обучающей выборки или векторных описаний новых распознаваемых объектов с векторными описаниями объектов обучающей выборки.

Данное свойство метода опорных векторов позволило разработать его дополнительную модификацию, основанную на использовании так называемого “ядерного” трюка, состоящего в применении вместо скалярных произведений других скалярных функций от пары векторов.

Наиболее успешной заменой оказался гауссиан, вычисляемый по формуле

$$\rho_G(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\|x_1 - x_2\|^2}{2\sigma^2}},$$

где x_1, x_2 — признаковые описания объектов.

Функция $\rho_G(x_1, x_2)$ имеет смысл ядерной функции, используемой в непараметрической статистике, а параметр σ имеет смысл размера ядра. При больших размерах ядра вычисление оценки за целевой класс для нового классифицируемого объекта с описанием x производится по всей обучающей выборке. При малых размерах ядра вычисление оценки за целевой

класс для нового классифицируемого объекта производится по объектам обучающей выборке с описаниями из окрестности x в многомерном признаковом пространстве.

Эффективность метода опорных векторов доказана практикой его применения при решении разнообразных прикладных задач. Недостатком метода является отсутствие в нем встроенных процедур отбора признаков. Поэтому при использовании метода опорных векторов целесообразно проводить предварительный отбор признаков.

1.2. Бинарные решающие деревья. Одним из популярных и информативных непараметрических методов является метод бинарных регрессионных деревьев. Бинарное решающее дерево представляет собой иерархически организованную систему вопросов, касающихся описывающих объекты признаков и подразумевающих ответ в форме Да / Нет. При этом вопрос, задаваемый на следующем уровне иерархии, зависит от ответа, полученного на предыдущем уровне. Преимуществом метода решающих деревьев является его прозрачность для пользователя. Процедура вычисления прогноза наглядно представлена на диаграмме и понятна для пользователя. Недостатком метода решающих деревьев является недостаточно высокая обобщающая способность.

1.3. Метод случайных решающих лесов. Обобщающая способность может быть повышена с помощью метода случайного решающего леса. Ансамбль решающих деревьев T_1, \dots, T_N строится по выборкам S_1^r, \dots, S_N^r , которые представляют собой выборки с возвращениями из \tilde{S}_0 . При построении дерева T_j используется случайное подмножество исходного набора признаков, а также простое коллективное решение: объект относится в тот класс, куда его отнесло большинство деревьев. Применение случайного решающего леса в большинстве случаев позволяет существенно снизить ошибку.

Вместе с тем теряется присущая методу решающих деревьев прозрачность.

1.4. Градиентный бустинг. Еще более высокие результаты показывает метод градиентного бустинга, в котором процедура построения ансамбля регрессионных деревьев в определенной степени аналогична использованию метода градиентного спуска в задачах многомерной оптимизации.

Предположим, что качество аппроксимации описывается с помощью функции потерь $L(A, \tilde{S}_0)$, причем она имеет вид $L(A, \tilde{S}_0) = F(y_1, y_1', \dots, y_m, y_m')$, где $y_i' = A(x_i)$ — прогноз вероятности принадлежности i -го объекта классу y_i , $i = \overline{1, m}$ (в случай регрессии — непосредственно прогноз величины y_i).

Вычислив градиент функции потерь по вектору прогнозов

$$\nabla F(y_1, y_1', \dots, y_m, y_m') = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_1'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_m'} \right\}$$

для вектора прогнозов на $(k-1)$ -м шаге $\{A_{k-1}(x_1), \dots, A_{k-1}(x_m)\}$, можно скорректировать алгоритм на k -м шаге с помощью метода градиентного спуска:

$$A_k(x_j) = A_{k-1}(x_j) - \eta \frac{\partial F}{\partial y_j'} \Big|_{A_{k-1}(x_j)}.$$

К сожалению, эта формула работает только на обучающей выборке. Для нового классифицируемого объекта x последнее слагаемое не определено. И даже если формально включить в функционал F дополнительные переменные с индексами $m+1$, для x неизвестно настоящее значение целевой переменной y . Однако оно известно в точках x_1, \dots, x_m и может быть спрогнозировано как решение задачи регрессии с помощью дерева T_k , обученного по выборке

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} \Big|_{A_{k-1}(x_1)}, x_1 \right), \dots, \left(\frac{\partial F}{\partial y_m'} \Big|_{A_{k-1}(x_m)}, x_m \right).$$

Таким образом на шаге k в ансамбль добавляется дерево T_k .

Для вычисления коллективного прогноза в методе градиентный бустинг используется линейная комбинация прогнозов, полученных с помощью алгоритмов ансамбля. В качестве коэффициентов линейной комбинации при этом выступают оптимальные величины шага градиентного спуска.

1.5. Метод статистически взвешенных синдромов. В методе статистически взвешенных синдромов на этапе обучения ищутся оптимальные разбиения интервалов значений отдельных признаков и совместных областей значений пар признаков в рамках семейств разбиений I—IV (рис. 1). Классификация производится с использованием оценок вероятности целевого класса K внутри синдромов — областей найденных оптимальных разбиений.

Предположим, что описание нового классифицируемого объекта x принадлежит пересечению синдромов q_1, \dots, q_r . Тогда оценка вероятности $P(K|x)$ вычисляется как отношение

$$P(K|x) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i v_i}{\sum_{i=1}^r w_i},$$

где v_i — доля объектов \tilde{S}_0 из K внутри синдрома q_i , w_i — вес синдрома. Для вычисления весов с помощью метода максимального правдоподобия получена простая аналитическая формула.

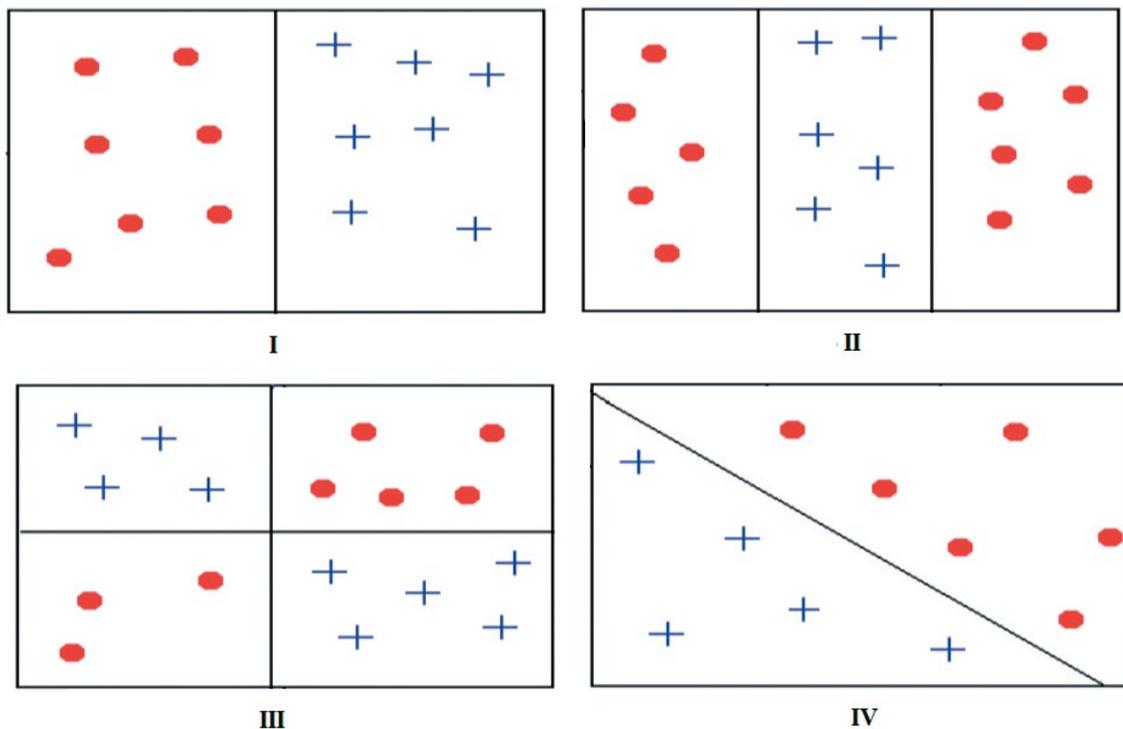


Рис. 1. Семейства разбиений I—IV

2. Метод ОДР. Целью метода ОДР является исследование зависимости бинарной переменной $y \in \{0,1\}$ от объясняющих переменных $x = \{X_1, \dots, X_n\}$.

Метод ОДР включает поиск оптимальных разбиений интервалов значений отдельных переменных и двумерных областей значений пар переменных по обучающей выборке стандартного вида $\tilde{S}_0 = \{(y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m)\}$. Границы разбиений подбираются таким образом, чтобы достичь наилучшего разделения групп с различными значениями целевой переменной Y . При этом качество разделения для разбиения признакового пространства $r = q_1, \dots, q_k$ описывается функционалом

$$Q(r, \widetilde{S}_0) = \frac{1}{v_0(1-v_0)} \sum_{i=1}^k m_i (v_0 - v_i)^2, \quad (2.1)$$

где v_0 — доля объектов с $y_j = 1$ во всей обучающей выборке \widetilde{S}_0 , v_i — доля объектов с $y_j = 1$ внутри области q_i , m_i — полное число объектов обучающей выборки внутри области q_i . Оптимальные разбиения ищутся внутри четырех семейств, представленных на рис. 1, где $Y = 0$ — кружки, $Y = 1$ — крестики.

Ось абсцисс на диаграммах семейств I и II соответствует объясняющей переменной X . Ось абсцисс на диаграммах семейств III и IV отвечает объясняющей переменной X' , а ось ординат — объясняющей переменной X'' . Наилучшее разбиение, найденное по выборке \widetilde{S} , далее будет обозначаться через $r_b(\widetilde{S})$.

Разбиения из семейств I и II соответствуют закономерностям, связывающим целевую переменную Y с одной объясняющей переменной X . Разбиения из семейств III и IV отвечают закономерностям, связывающим целевую переменную Y с парой переменных X' и X'' . Простейшее одномерное семейство I включает все разбиения интервалов значений единичных переменных с одной граничной точкой. Более сложное семейство II включает все разбиения интервалов значений единичных переменных с двумя граничными точками. Двумерное семейство III содержит двумерные разбиения с двумя границами, параллельными координатным осям, двумерное семейство IV — все разбиения с одной прямой граничной линией, произвольно ориентированной относительно координатных осей.

Статистическая значимость закономерностей, описываемых оптимальными разбиениями, может быть оценена с помощью перестановочного теста. Пусть $\tilde{f} = \{f_1, \dots, f_N\}$ — множество всевозможных взаимно различимых перестановок чисел из множества $\{1, m\}$. Предположим, что $\widetilde{S}_p(f)$ является выборкой, полученной из исходной выборки \widetilde{S}_0 с помощью случайных перестановок величин y_1, \dots, y_m : $\widetilde{S}_p(f) = \{[y_{f(1)}, x_1], \dots, [y_{f(m)}, x_m]\}$.

Множество S_b включает всевозможные различимые между собой выборки, удовлетворяющие следующим двум условиям:

а) эмпирическое распределение Y в \widetilde{S} совпадает с эмпирическим распределением Y в исходной выборке \widetilde{S}_0 ;

б) описания в \widetilde{S} полностью совпадают с x -описаниями в \widetilde{S}_0 .

Пусть $P_{pv}(\widetilde{S})$ — предикат:

$$F[M_b(\widetilde{S}), \widetilde{S}] \geq F[M_b(\widetilde{S}_0), \widetilde{S}_0],$$

где F — функционал, характеризующий качество аппроксимации Y от X_1, \dots, X_n , $M_b(\widetilde{S})$ — оптимальная модель, найденная по выборке \widetilde{S} внутри множества моделей M .

В качестве меры значимости существования закономерности, описываемой оптимальным разбиением r_b , естественно использовать вероятность истинности предиката $P_{pv}(\widetilde{S})$ при соблюдении нулевой гипотезы H_0 : Y не зависит от X_1, \dots, X_n и наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными, соблюдаются условия а) и б).

Лемма 1. Отношение

$$\frac{|\{\widetilde{S} \mid P_{pv}(\widetilde{S}) = 1, \widetilde{S} \in \widetilde{S}_b\}|}{|\widetilde{S}_b|}$$

равно вероятности выполнения равенства $P_{pv}(\widetilde{S}) = 1$ при справедливости нулевой гипотезы H_0 .

Доказательство. Утверждение следует из равновероятности всех выборок из множества \widetilde{S}_b , что непосредственно следует из нулевой гипотезы. Действительно, из условия независимости Y от X_1, \dots, X_n и взаимной независимости наблюдений и соблюдения условий а) и б) вытекает, что вероятность произвольной выборки $\widetilde{S} = \{(y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m)\}$ равна $\prod_{j=1}^m P(Y = y_j)P(X = x_j)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Каждая выборка из \widetilde{S}_b может быть получена \widetilde{S}_0 с помощью одинакового числа перестановок.

Доказательство. Действительно, произвольная выборка $\widetilde{S} \in \widetilde{S}_b$ может быть получена из \widetilde{S}_0 с помощью последовательного выполнения двух перестановок: произвольной перестановки $f_0 \in \widetilde{f}$, переводящей \widetilde{S}_0 в \widetilde{S} , и перестановки $f_0 \in \widetilde{f}$, переводящей \widetilde{S} в неотличимую от нее выборку. Пусть Y принимает в \widetilde{S}_0 значения $\{y_1^d, \dots, y_k^d\}$. Число перестановок f' одинаково всех $\widetilde{S} \in \widetilde{S}_b$ и равно $\prod_{i=1}^k m_i!$, где m_i — число объектов в \widetilde{S}_0 , для которых Y принимает значение y_i^d .

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Отношение

$$\frac{|\{f \mid P_{pv}(\widetilde{S}_p p(f)) = 1, f \in \widetilde{f}\}|}{|\widetilde{f}|} \quad (2.2)$$

равно вероятности выполнения равенства $P_{pv}(\widetilde{S}) = 1$ при справедливости нулевой гипотезы H_0 . Что и требовалось доказать.

Отношение (2.2) по сути является значением при использовании в качестве статистики критерия оптимального значения функционала F , т. е. критерия $F[M_b(\widetilde{S}), \widetilde{S}]$. Отношение не может быть точно рассчитано даже при относительно небольших объемах \widetilde{S}_0 из-за необходимости повторения при всех перестановках, общее количество которых равно $m!$. Однако для приближенного оценивания может быть применен подход, основанный на использовании датчиков случайных чисел. Пусть $\{\widetilde{f}_g = f_{(j)} \mid j = \overline{1, N_g}\}$ представляет собой набор перестановок чисел из множества $\{\overline{1, m}\}$, сгенерированных с помощью генератора случайных чисел. Вычисление p -значений тогда приближенно производится по формуле

$$p = \frac{|\{f \mid P_{pv}(\widetilde{S}_p(f)) = 1, f \in \widetilde{f}_g\}|}{|\widetilde{f}_g|} \quad (2.3)$$

Преимуществом перестановочного теста является отсутствие априорных предположений о вероятностных распределениях и возможность использования при произвольных размерах выборок. При применении метода ОДР (поиска значимых одномерных закономерностей, связывающих Y с признаком X_1) в качестве статистики критерия используется $Q[r_b(\widetilde{S}_0), \widetilde{S}_0]$, где оптимальное разбиение $r_b(\widetilde{S}_0)$ ищется внутри семейств I или II. При поиске значимых двумерных закономерностей, связывающих Y с признаками X_1 и X_2 , в качестве статистики критерия выбирается $Q[r_b(\widetilde{S}_0), \widetilde{S}_0]$, где оптимальное разбиение $r_b(\widetilde{S}_0)$ ищется внутри семейств III или IV.

Для поиска оптимальных одномерных разбиений из семейства I значение функционала Q вычисляется при всевозможных границах, находящихся посередине между двумя ближайшими отличными друг от друга значениями признака X_1 . Примеры одномерных закономерностей приведены на рис. 2 и рис. 3. Каждой одномерной закономерности из семейства I ставится в соответствие одно p -значение, вычисляемое по формуле (2.3).

Эксперименты с искусственно сгенерированными данными показали, что поиск закономерностей с оценкой их статистической значимости по формуле (2.1) может быть эффективным только в случае применения простейших одномерных моделей из семейства I. При использовании более сложных моделей из семейств I—IV такой поиск обычно приводит к появлению в выходном наборе частично ложных закономерностей, не предусмотренных сценарием эксперимента. Например, найденная двумерная закономерность из семейства III считается частично ложной, если на самом деле с целевой переменной связана только одна из двух объясняющих переменных. Вторая объясняющая

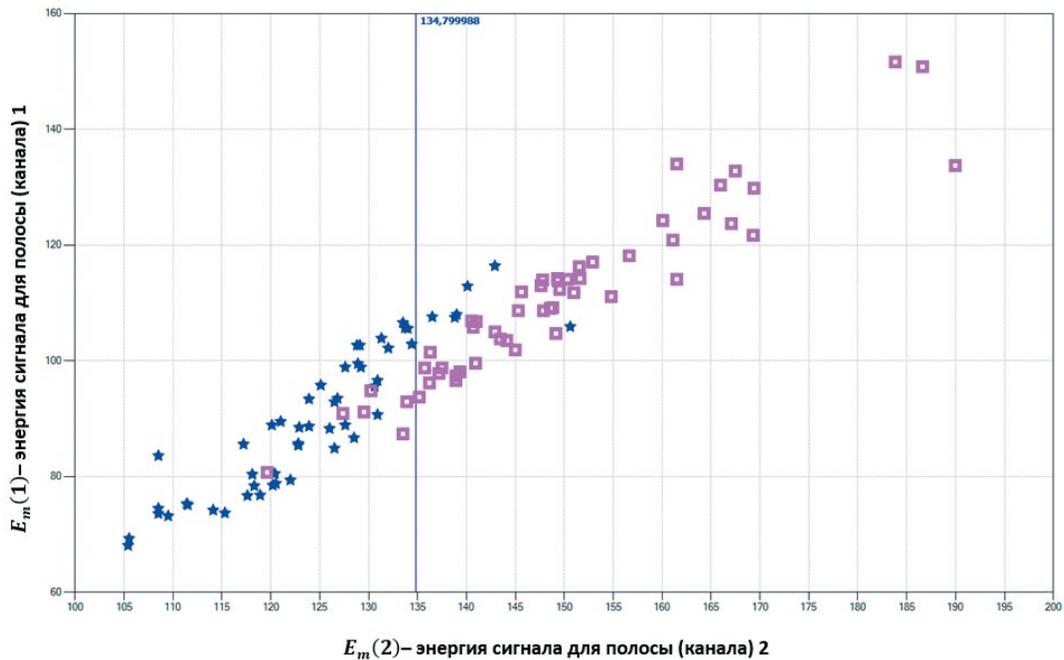


Рис. 2. Связь показателя $\bar{E}(2)$ с наличием матки в улье

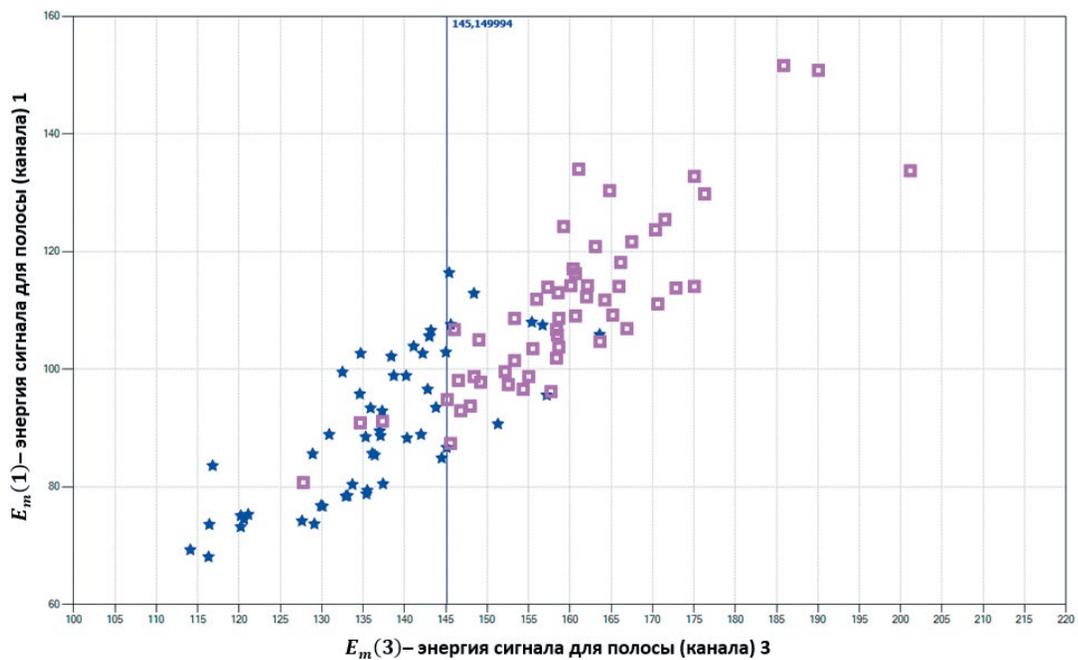


Рис. 3. Связь показателя $\bar{E}(3)$ с наличием матки в улье

переменная при этом избыточна и вхождение ее в найденную закономерность является чисто случайным.

Эксперименты на искусственно сгенерированных данных показали, что число частично ложных закономерностей может значительно превышать число закономерностей, предусмотренных сценарием экспериментов, что делает анализ с помощью более сложных моделей в значительной степени бессмысленным. Для преодоления указанной проблемы

используется принцип бритвы Оккама в формулировке, ориентированной на статистический анализ данных: более сложная модель должна применяться только в том случае, если она позволяет отвергнуть нулевую гипотезу об исчерпывающем описании зависимости простой моделью.

Пусть \widetilde{M}_s — множество простых моделей, \widetilde{M}_c — множество более сложных моделей. Используемый вариант бритвы Оккама сводится к более простому принципу: более сложная модель должна быть применена тогда и только тогда, когда в множестве \widetilde{M}_s не существует модели, исчерпывающей зависимость Y от переменных X_1, \dots, X_n .

Дополнительно предполагается, что нулевая гипотеза об исчерпывающем описании зависимости Y от переменных X_1, \dots, X_n моделью $M \in \widetilde{M}_s$ может быть отвергнута с помощью более сложной модели из \widetilde{M}_c .

Рассмотрим процедуру бритвы Оккама применительно к проверке предположения об исчерпывающем описании данных моделью из семейства I с помощью более сложной модели из одного из семейств III или IV.

Пусть простейшая одномерная модель из семейства I задается разбиением с граничной точкой δ_1 для интервала значений объясняющей переменной X_1 , который обозначим (a_l, a_r) .

Мы пытаемся проверить, позволит ли использование дополнительной переменной X_2 и моделей из одного из семейств III или IV более точно описать зависимость. Для этого проверяем нулевую гипотезу, что Y не зависит от переменных X_1, X_2 внутри интервалов (a_l, δ_1) и (δ_1, a_r) .

В этом случае применяется модифицированная нулевая гипотеза H_0^1 : Y не зависит от X_1, X_2 внутри интервалов (a_l, δ_1) и (δ_1, a_r) и наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными, условия а) и б) соблюдаются слева и справа от границы.

В качестве меры значимости двумерной закономерности, описываемой оптимальным разбиением r_b , естественно использовать вероятность истинности предиката $P_{pv}(\widetilde{S})$:

$$Q[r_b(\widetilde{S}), \widetilde{S}] \geq Q[r_b(\widetilde{S}_0), \widetilde{S}_0]$$

при соблюдении нулевой гипотезы H_0 .

Обозначим через J_l множество номеров объектов \widetilde{S}_0 , для которых $X_1 < \delta$, а через J_r — множество номеров объектов \widetilde{S}_0 , для которых $X_1 \geq \delta$. Пусть \widetilde{f}_l — множество всевозможных перестановок J_l , \widetilde{f}_r — множество всевозможных перестановок J_r , \widetilde{f}_δ — декартово произведение \widetilde{f}_l и \widetilde{f}_r , $\widetilde{f}_\delta = \widetilde{f}_l \times \widetilde{f}_r$.

Теорема 2. Отношение

$$\frac{|\{f \mid P_{pv}(\widetilde{S}_p(f)) = 1, f \in \widetilde{f}_\delta\}|}{|\widetilde{f}_\delta|} \tag{2.4}$$

равно вероятности выполнения равенства $P_{pv}(\widetilde{S}) = 1$ при справедливости нулевой гипотезы H_0 .

Доказательство следует из возможности применения лемм 1 и 2 к выборкам слева и справа от границы δ_1 .

Пусть $\{\widetilde{f}_{g\delta} = f(j) \mid j = \overline{1, N_g}\}$ является набором перестановок из множества \widetilde{f}_δ , сгенерированных с помощью генератора случайных чисел. Вычисление p -значений тогда приближенно производится по формуле

$$p = \frac{|\{f \mid P_{pv}(\widetilde{S}_p(f)) = 1, f \in \widetilde{f}_{g\delta}\}|}{|\widetilde{f}_{g\delta}|} \tag{2.5}$$

Для того чтобы оценить значимость двумерной закономерности, необходимо одновременно с нулевой гипотезой H_0^1 опровергнуть нулевую гипотезы H_0^2 об исчерпывающем описании зависимости Y от X_1, X_2 одномерной моделью из семейства I с граничной точкой δ_2 . Таким образом, значимость двумерной закономерности оценивается с помощью двух p -значений: при низких p_1 отвергается гипотеза H_0^1 и подтверждается вклад в двумерную закономерность X_2 ; при низких p_2 отвергается гипотеза H_0^2 и подтверждается вклад в двумерную закономерность X_1 .

Для поиска оптимальных одномерных разбиений из семейства III и IV значение функционала Q рассчитывается при всевозможных границах, находящихся посередине между двумя ближайшими отличными друг от друга значениями признаков X_1 или X_2 .

Примеры двумерных закономерностей приведены на рис. 4. Каждой двумерной закономерности из семейств III или IV ставится в соответствие два значения, вычисляемые по формуле (2.5).

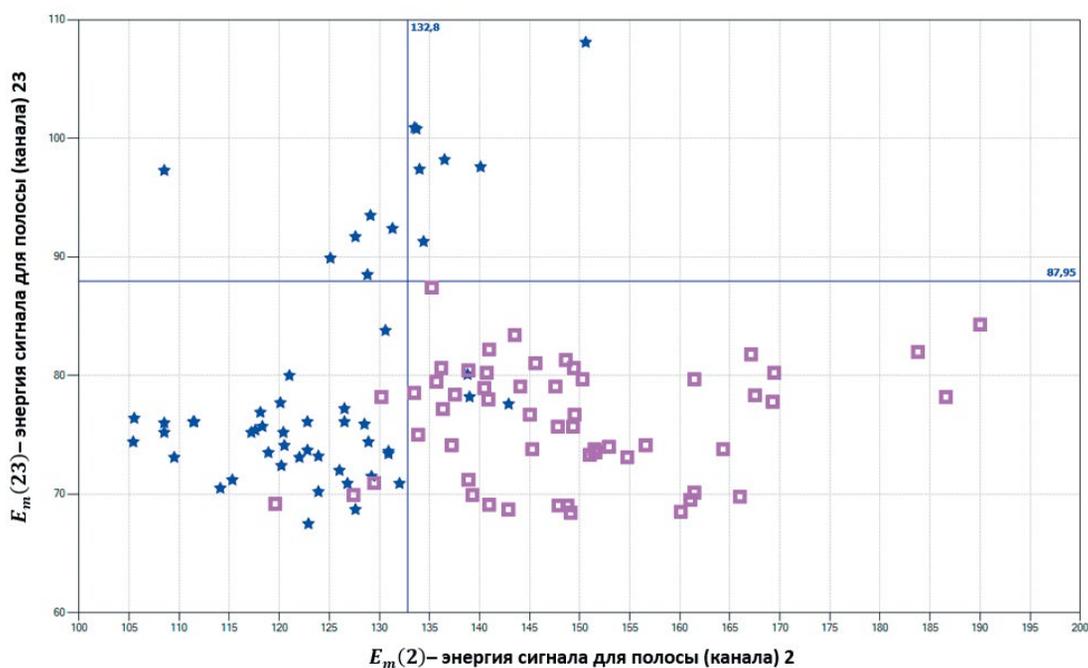


Рис. 4. Связь наличия матки в улье со спектральными показателями $\bar{E}(2)$ и $\bar{E}(23)$

3. Распознавание состояния объекта по временным сигналам. Рассматриваемый программный комплекс может применяться для распознавания состояния разнообразных биологических или технических систем по генерируемым ими сигналам различной природы. В частности, в задачах медицинской диагностики с помощью электрокардиограмм, электроэнцефалограмм, фотоплетизмограмм и т.д.; в задачах технической диагностики по акустическим и иным сигналам. В данной работе в качестве практического приложения представлены методы была использована задача автоматической классификации ульев по признаку наличия или отсутствия в них пчелиной матки.

В иерархии многих видов социальных насекомых, в частности пчел, центральное место занимает матка, которая производит на свет всех членов сообщества. При ее отсутствии сообщество быстро погибает. В случае пчел, если это произошло во второй половине лета, потеря матки ведет к гарантированному вымиранию пчелиной семьи. Поэтому важно вовремя уметь находить улья, в которых пропала матка. Для промышленных пасек с десятками и сотнями ульев — это трудоемкая процедура.

Существенно ее удешевить и облегчить в целом иные процедуры оценки состояния ульев может использование компьютерных методов, в частности интеллектуальный анализ звуковых сигналов, издаваемых пчелами.

Роль звуков в организации “общения” между пчелами подтверждается многими исследователями [23–25].

Данные для анализа собирались с помощью приложения для Android на смартфонах Dexp. Всего для анализа использовались 108 звуковых профилей продолжительностью 3 мин, включая 55 профилей, соответствующих ульям без матки, и 53 профиля, соответствующих ульям с маткой. В экспериментах применялось признаковое описание в амплитудо-частотной области. Для его получения в амплитудо-частотной области исходные аудиозаписи конвертировались в формат WAV с частотой дискретизации 8 кГц и разрядностью 16 бит.

Данные в каждой записи $s_t, t = \overline{0, T}$, разбивались на перекрывающиеся сегменты конечной длины N : $x_m(t) = s(ml + t), 0 \leq t < N, m = \overline{0, M-1}; M = (T - N) / l + 1$, где N, m, l — соответственно длина, индекс и смещение сегментов в сэмплах.

В экспериментах использовались $N = 256, l = 128$, что соответствовало размеру сегментов анализа 32 мс.

Сэмплы каждого m -го сегмента взвешивались весовым окном Хемминга:

$$x_m(t) = x_m(t) \left[0.54 + 0.46 \cos \left(\frac{2\pi t}{N-1} \right) \right], t = \overline{0, N-1}.$$

Для них вычислялись коэффициенты преобразования Фурье:

$$X_m(k) = FFT(x_m(t)), k = \overline{0, N-1} \text{ и их амплитуды } |X(k)|, k = \overline{0, N/2}.$$

Вычислялось значение энергии сигнала в 30 перекрывающихся частотных полосах, равномерно разнесенных по шкале мелов в диапазоне от 40 Гц до 3.2 кГц. Центральные частоты полос приведены в табл. 1. Для этого суммировались и логарифмировались взвешенные значения амплитуд $|X(k)|$, где k изменялся от индекса, соответствующего центру предыдущей полосы, до индекса центра следующей:

$$E_m(n) = \log \left(\sum_{k=d(n-1)}^{d(n+1)} w_n(k) |X_m(k)| \right),$$

Таблица 1. Различия между группами ульев с маткой и без матки с учетом оптимальных порогов

n	Граница для $\bar{E}(n)$	$p <$		n	Граница для $\bar{E}(n)$	$p <$
3	145.2	0.0004		14	88.55	0.0007
2	134.8	0.0004		16	93	0.001
6	150.4	0.0004		18	87.95	0.002
4	146.1	0.0004		20	89.45	0.002
5	149.5	0.0005		21	96.9	0.002
1	90.8	0.0005		23	87.15	0.002
7	154.75	0.0005		17	103.9	0.001
8	93.25	0.0005		22	109.55	0.002
10	125.3	0.0005		24	87.4	0.004
9	87.3	0.0005		29	88.55	0.007
11	100.25	0.0005		25	81.3	0.006
12	85.9	0.0005		26	83.2	0.006
13	133.7	0.0004		27	83	0.007
15	144.75	0.001		28	82.15	0.007
19	87.9	0.002		30	82.95	0.031

где n — номер полосы, $d(n)$ — индекс коэффициента преобразования Фурье, который соответствует центру n -й частотной полосы, а $w_n(k)$ — вес амплитуды k -го коэффициента в n -й полосе, $n = 1, 30$, $d(0) = 0$, $d(31) = 104$. Веса $w_n(k)$ неотрицательные, с суммой, равной единице, их значения обратно пропорциональны $|k - d(n)|$. Максимальное значение веса соответствовало центру текущей частотной полосы, а минимальное, равное 0, границам.

Дополнительно к вектору из логарифмов энергии сигнала в частотных полосах вычисляется вектор разности между соседними сегментами логарифмов энергии сигнала в частотных полосах в качестве аппроксимации первой производной значений параметров по времени:

$$\Delta E_m(n) = E_{m+1}(n) - E_m(n), n = \overline{1, 30}; m = \overline{0, M-2}.$$

Таким образом, каждый m -й сегмент аудиозаписи описан 60-мерным вектором, в котором содержатся 30 логарифмов энергий сигнала в частотных полосах и столько же их первых разностей, а вся запись представляется как последовательность из таких векторов, длина которой зависит от длительности аудиозаписи.

Поскольку сигналы были фактически квазистационарны, при обучении моделей и классификации звуков ульев вместо последовательностей векторных значений параметров $E(m)$ и $\Delta E(m)$, $m = \overline{0, M-1}$, используется вектор средних этих параметров для всей записи:

$$\bar{E}(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} E_m(n).$$

Таким образом, для каждой записи звука улья получается вектор признаков фиксированной размерности, который состоит из средних значений логарифмов энергии сигнала в 30 частотных полосах, равно-разнесенных по шкале мел и оценок их первых производных по времени.

4. Использование метода ОДР. Полученные спектральные показатели были проанализированы с помощью метода ОДР.

4.1. Однофакторный анализ. На первом этапе с использованием метода ОДР анализировалась информативность отдельных спектральных показателей. Работа метода проиллюстрирована на рис. 2 и рис. 3. Звездочками обозначены ульи с маткой, квадратами — без матки.

На рис. 2 показана связь спектрального показателя $\bar{E}(2)$, соответствующего частотной полосе 2 с центральной точкой 83 Гц, с наличием матки в улье. Вдоль оси Y , не имеющей содержательного смысла и необходимой для развертки изображения, отложены значения показателя $\bar{E}(1)$.

Из рис. 2 видно, что значения показателя $\bar{E}(2)$ выше границы 134.8 в подавляющем большинстве случаев соответствуют ульям без матки: из 55 значений $\bar{E}(2)$ выше границы 134.8 49 значений отвечают ульям без матки, из 53 значений $\bar{E}(2)$ ниже границы 134.8 47 значений — ульям с маткой. Значимость закономерности на рис. 2 была оценена с помощью перестановочного теста на уровне $p < 0.0005$.

На рис. 3 показана связь спектрального показателя $\bar{E}(3)$, соответствующего частотной полосе 3 с центральной точкой 128.1 Гц, с наличием матки в улье. Из рис. 3 видно, что значения показателя $\bar{E}(3)$, отвечающего частотной полосе 3 с центральной точкой 128.1 Гц, выше границы 145.2 в подавляющем большинстве случаев соответствуют ульям без матки: из 60 значений $\bar{E}(3)$ выше границы 145.2 52 значения относятся к ульям без матки, из 48 значений $\bar{E}(3)$ ниже границы 145.2 45 значений — к ульям с маткой. Значимость закономерности на рис. 3 была оценена с помощью перестановочного теста на уровне $p < 0.0005$.

В табл. 1 даны подробные результаты применения ОДР. Частотные полосы упорядочены по величинам функционала Q (2.1). Согласно табл. 1, ОДР выявляет значимые различия между сравниваемыми группами ульев по величинам \bar{E} для всех полос. При этом лучшее разделение достигается с помощью порога 145.2 для $\bar{E}(3)$ и порога 134.8 для $\bar{E}(2)$. Видно, что значимые различия между сравниваемыми группами существуют по всем спектральным показателям. Однако значимость на уровне $p < 0.001$ существует только для первых 15 полос.

На рис. 5 представлена зависимость информативности спектрального показателя в зависимости от соответствующих частот. Вдоль оси X отложен номер частотной полосы. Из рис. 5 видно, что максимальная способность разделять ульи с маткой и без матки наблюдается для показателей $\bar{E}(2)$ и $\bar{E}(3)$, соответствующих центральным частотам 83 и 128.1 Гц. При дальнейшем увеличении частот информативность постепенно снижается, достигая минимального уровня для полос с номером более 15.

4.2. Двухфакторный анализ. На рис. 4 представлена двумерная закономерность из семейства III, связывающая наличие матки со спектральными показателями $\bar{E}(2)$ и $\bar{E}(23)$. Показатель $\bar{E}(23)$ соответствует полосе 3 с центральной точкой 1838.3 Гц. Из рис. 4 видно, что значения спектральных показателей для 51 из 55 сигналов, отвечающих отсутствию матки, попали в правый нижний квадрант, соответствующий одновременному выполнению неравенств: $\bar{E}(2) > 132$, $\bar{E}(23) < 87.95$. В этот квадрант попали значения спектральных показателей только для трех сигналов, отвечающих наличию матки в улье. Значимость вхождения в модель каждого из показателей $\bar{E}(2)$ и $\bar{E}(23)$ оценивается с помощью метода, описанного в разд. 2 на уровне $p < 0.0004$.

Из рис. 4 видно, что более высокие частоты вносят дополнительный вклад и позволяют улучшить разделение групп ульев.

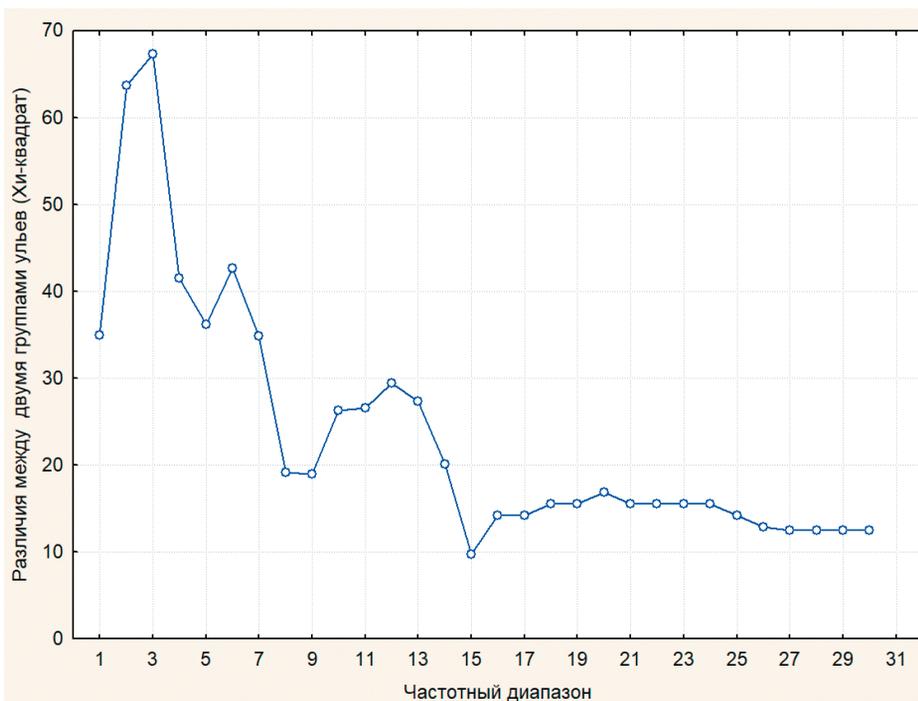


Рис. 5. Зависимость информативности спектрального показателя от номера полосы частот

4.3. Мультифакторный анализ с использованием методов машинного обучения. Для предсказания наличия или отсутствия матки в улье по полной совокупности спектральных показателей применялись методы машинного обучения. Выбор диагноза или прогностического решения осуществляется компьютерным алгоритмом по показателям, значения которых на соответствующий момент известны. При этом настройка алгоритмов производится в автоматическом режиме по данным, для которых известны как значения прогнозируемой величины, так и значения показателей, по которым предполагается вычислять прогноз или диагностику. Процесс настройки алгоритмов принято называть обучением. В настоящем исследовании использовались следующие методы: градиентный бустинг (ГБ), основанный на генерации ансамблей решающих деревьев, вариант метода опорных векторов (МОВ) с гауссианами в качестве базисных функций, метод статистически взвешенных синдромов (СВС), который основан на вычислении коллективных решений по синдромам — областям значений показателей с преобладанием одного из значений прогнозируемой величины.

Оценивание точности алгоритмов машинного обучения происходит с помощью метода Leave One Out, состоящего в проверке точности обученного алгоритма при распознавании состояния отдельных ульев, звуковые сигналы, которые не использовались при обучении этого алгоритма. При этом обучение выполняется по выборке, состоящей из звуковых сигналов для ульев, за исключением того, на котором производится проверка. Применяются стандартные показатели, включая правильность (ассигасу), чувствительность, специфичность, а также площадь под ROC-кривой (ROC AUC). При этом под чувствительностью понимается доля правильно распознанных ульев без матки; под специфичностью — доля правильно распознанных ульев с маткой; под точностью — доля ульев без матки в группе, для которых наличие в них матки было распознано.

Результаты распознавания ульев с маткой с помощью перечисленных выше методов машинного обучения представлены в табл. 2. Из таблицы видно, что более высокая точность достигается для логистической регрессии и метода опорных векторов. Более подробно результаты для логистической регрессии приведены на рис. 6.

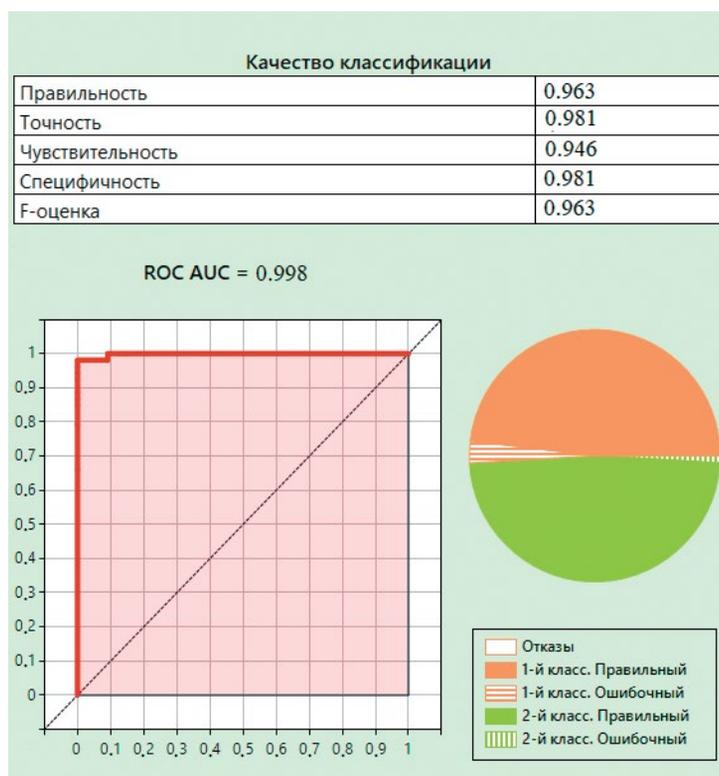


Рис. 6. Результаты распознавания состояния ульев с использованием логистической регрессии

Таблица 2. Результаты работы методов машинного обучения для распознавания ульев

Метод машинного обучения	Чувствительность	Специфичность	ROC AUC
Логистическая регрессия	0.946	0.981	0.998
МОВ	0.946	1.0	0.997
ГБ	0.909	0.868	0.967
СВС	0.891	0.868	0.963

Заключение. Рассмотрен программный комплекс, позволяющий генерировать алгоритмы автоматической классификации сигналов. Генерация алгоритмов производится с помощью нескольких методов машинного обучения, эффективность которых подтверждена многочисленными исследованиями. Преимуществом подхода является возможность выделения и графического представления совокупности статистически значимых эффектов (законо-

мерностей), связанных с решаемой задачей классификации. Такая возможность позволяет в определенной степени преодолеть проблему непрозрачности и плохой интерпретируемости в машинном обучении. Оценивание статистической значимости производится с помощью перестановочных тестов, не требующих априорных предположений о нормальности распределений. Перестановочные тесты могут быть также использованы при выборках произвольного размера. Применение при оценке значимости принципа бритвы Оккама позволяет отклонить закономерности избыточной сложности. Метод является в значительной степени универсальным и может быть использован при решении разнообразных прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glorot X., Bordes A., Bengio Y.* Deep Sparse Rectifier Neural Networks // Proc. Fourteenth Intern. Conf. on Artificial Intelligence and Statistics ({AISTATS} 2011). Fort Lauderdale, USA, 2011. V. 15. P. 315–323.
2. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E.* Imagenet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // Advances in Neural Information Processing Systems. 2012. No. 1. P. 1097–1105.
3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* Chapter 15. Random Forests. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2nd ed. Springer-Verlag, 2009.
4. *Cortes C., Vapnik V.* Support-vector Networks // Machine Learning. 1995. V. 20. No. 3. P. 273–297.
5. *Breiman L.* Random Forests // Machine Learning. 2001. V. 45. No. 1. P. 5–32.
6. *Freund Y., Schapire R.* A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting // J. Computer and System Sciences. 1997. No. 55. P. 119–139.
7. *Schapire R. E., Freund Y.* Boosting: Foundations and Algorithms. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 2012.
8. *Friedman J.* Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine // The Annals of Statistics. 2001. V. 29. No. 5. P. 1189–1232.
9. *Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В.* “Распознавание”. Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: Фазис, 2006.
10. *Davis S., Mermelstein P.* Comparison of Parametric Representations for Monosyllabic Word Recognition in Continuously Spoken Sentences // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1980. V. 28. No. 4. P. 357–366.
11. *Haibe-Kains B., Adam G. A., Hosny A.* et al. Transparency and Reproducibility in Artificial Intelligence // Nature. 2020. No. 586. E14–E16.
12. *Kuznetsova A. V., Kostomarov I. V., Senko O. V.* Modification of the Method of Optimal Valid Partitioning for Comparison of Patterns Related to the Occurrence of Ischemic Stroke in Two Groups of Patients // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. V. 24. \textnumero 1. P. 114–123.
13. *Senko O. V., Kuznetsova A. V., Matveev I. A., Litvinchev I. S.* Chapter 8 — Search of Regularities in Data: Optimality, Validity, and Interpretability. Eds P. Vasant, J. Thomas, E. Munapo, G.-W. Weber Advances of Artificial Intelligence in a Green Energy Environment. Amsterdam: Acad. Press, 2022. P. 151–171.
14. *Good P.* Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses, 3rd Ed. N. Y.: Springer-Verlag, 2005.
15. *Pesarin F., Salmaso L.* Permutation Tests for Complex Data: Theory, Applications and Software. Hoboken: John Wiley and Sons, Ltd 2010.
16. *Kim H. J., Fay M. P., Feuer E. J., Midthune D. N.* Permutation Tests for Jointpoint Regression with Applications to Cancer Rates // Stat Med. 2000. No. 19. P. 335–351.
17. *Akaike H.* A New Look at the Statistical Model Identification // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. V. 19. No. 6. P. 716–723.
18. *Schwarz G.* Estimating the Dimension of a Model // Annals of Statistics. 1978. V. 6. P. 461–464.
19. *Rissanen J.* Modeling by Shortest Data Description // Automatica. 1978. V. 14. No. 5. P. 465–658.
20. *Senko O. V., Dzyba D. S., Pigarova E., Rozhinskaya L. Ya., Kuznetsova A. V.* A Method for Evaluating Validity of Piecewise-linear Models // Intern. Conf. on Knowledge Discovery and Information Retrieval (KDIR-2014). Rome, 2014. P. 437–443.
21. *Domingos P.* The Role of Occam’s Razor in Knowledge Discovery // Data Mining and Knowledge Discovery. 1999. V. 3. No. 4. P. 409–425.
22. *Доровских И. В., Сенько О. В., Чучупал В. Я., Докукин А. А., Кузнецова А. В.* Исследование возможности диагностики деменции по сигналам ЭЭГ с помощью методов машинного обучения // Мат. биология и биоинформатика. 2019. Т. 14. № 2. С. 543–553.
23. *Еськов Е. К., Тобоев В. А.* Изменение структуры звуков, генерируемых пчелиными семьями в процессе социотомии // Зоол. журн. 2011. Т. 90. № 2. С. 192–198.
24. *Еськов Е. К.* Генерация, восприятие и использование акустических и электрических полей в коммуникациях медоносной пчелы // Биофизика. 2013. Т. 58. № 6. С. 1051–1064.
25. *Дрейзин В. Э., Рыбочкин А. Ф., Захаров И. С.* Акустический контроль пчелиных семей с помощью вычислительной техники // Пчеловодство. 2000. № 4. С. 25–27.

УДК 519.86

ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

© 2024 г. М.Г. Фуругян

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

e-mail: rtscas@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.06.2023 г.

После доработки 19.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается задача планирования вычислений в многопроцессорной системе для случая, когда в некоторые моменты времени поступают запросы на выполнение комплексов работ с известными характеристиками. Допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. В первой постановке состав всех комплексов и характеристики заданий известны заранее. Во второй постановке эта информация становится известной только в момент поступления каждого запроса. Требуется определить, существует ли допустимое расписание для совокупного комплекса работ и построить его в случае положительного ответа. Исследована постановка, в которой помимо процессоров имеется невозобновляемый ресурс. Разработан полиномиальный алгоритм решения задачи, основанный на построении сетевой потоковой модели и поиске максимального потока.

Ключевые слова: построение расписания, многопроцессорная система реального времени, допустимое расписание, сетевая модель, максимальный поток, не возобновляемый ресурс

DOI: 10.31857/S0002338824010091, EDN: WJFLNB

SCHEDULING CALCULATIONS FOR A MULTIPROCESSOR SYSTEM IN REAL TIME

© 2024 M. G. Furugyan

Federal Research Center "Computer Science and Control"

of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

e-mail: rtscas@yandex.ru

The problem of scheduling computations in a multiprocessor system is considered for the case when, at some time instants, requests for the execution of job packages with known characteristics are received. Interrupts and switching from one processor to another are allowed. In the first formulation, the composition of all complexes and the characteristics of tasks are known in advance. In the second setting, this information becomes known only at the time of each request. It is required to determine whether there is an admissible schedule for the total set of jobs and build it in case of a positive answer. A setting is studied in which, in addition to processors, there is a non-renewable resource. A polynomial algorithm for solving the problem is developed, based on the construction of a network flow model and the search for the maximum flow.

Keywords: scheduling computations, multiprocessor real-time system, admissible schedule, network model, maximum flow, non-renewable resource

Введение. Главной отличительной чертой вычислительных систем реального времени является то, что каждый прикладной модуль должен выполняться в строго заданном временном директивном интервале и завершиться не позднее установленного заранее срока. Такие системы находят широкое применение в различных областях деятельности человека. Например, при проектировании, испытаниях и эксплуатации сложных технических объектов (самолеты, ракеты, электростанции), при проведении опытно-конструкторских работ, в гражданском и военном строительстве, при оценке запасов полезных ископаемых в месторождениях, при обработке больших массивов информации, при проектировании и функционировании транспортных и конвейерных систем, во многих других областях. При этом одна из основных

задач заключается в распределении ресурсов вычислительной системы между программными модулями и построении оптимального расписания их выполнения. Алгоритмам решения таких задач посвящено большое количество публикаций. Здесь можно отметить такие фундаментальные работы, как [1—3], в которых авторы изучают различные постановки (составление расписаний с прерываниями и переключениями с одного процессора на другой и без прерываний, задачи на быстродействие и на соблюдение директивных сроков, построение однопроцессорных и многопроцессорных расписаний). В [3] исследуются NP-трудные задачи быстродействия и минимизации максимального временного смещения для одного и нескольких приборов. Предлагается новый подход к поиску приближенных решений. В [4, 5] рассматривается методика построения оптимальных расписаний в задачах с нефиксированными параметрами (длительности, потребляемые ресурсы). Методика основана на использовании метода “ветвей и границ” и построении многогранников устойчивости решений. В [6—8] разработана методика проверки выполнения ограничений реального времени, заключающихся в том, что каждая работа должна выполняться в заданном директивном интервале. Проведенные исследования выполнены для многоядерной вычислительной системы реального времени и базируются на построении имитационной модели с применением обобщенных конечных автоматов с остановкой таймера. С помощью этой модели строится временная диаграмма работы системы, позволяющая осуществить непосредственную проверку выполнения ограничений реального времени. В [8] предложен псевдополиномиальный алгоритм решения задачи построения оптимального по быстродействию расписания исполнения заданий с логическими условиями предшествования. В этой задаче для каждого задания дан список его непосредственных предшественников, а также число завершенных непосредственных предшественников, необходимое для начала его выполнения. Задача сведена к циклической игре. В [9, 10] некоторые задачи планирования работ сведены к минимаксным задачам.

Указанные выше публикации посвящены распределению возобновляемых ресурсов (процессоров, машин, исполнительных механизмов, приборов, рабочих), т.е. ресурсов, которые могут использоваться многократно. В ряде публикаций исследуются вопросы распределения невозобновляемых ресурсов (финансы, топливо, электроэнергия, различные материалы, оперативная память ЭВМ, закрепленная за определенными программными модулями). В отличие от возобновляемых ресурсов, невозобновляемые повторно применяться не могут. В этой связи отметим работы [11, 12], в которых предполагается, что длительности заданий линейно зависят от величины выделенного им ресурса. В [13] исследована задача со смешанными типами ресурсов — возобновляемыми и невозобновляемыми. Рассматривается задача составления допустимого расписания с прерываниями в многопроцессорной системе в случае, когда заданы директивные интервалы, процессоры могут иметь произвольные производительности, имеется несколько типов невозобновляемых ресурсов, а длительности выполнения работ линейно зависят от выделенного им количества этих ресурсов. Построены полиномиальные алгоритмы, основанные на сведении исходной задачи к потоковой в сети специального вида.

Отметим несколько интересных статей по планированию в промышленном производстве. Так, в [14] авторы исследовали методику совместного планирования развития производственных мощностей и составления расписания с учетом рыночных возможностей, а также детализировали интегрированную модель планирования мощности производства с несколькими дискретными и непрерывными вариантами изменения краткосрочной и среднесрочной мощности и разработали эвристический алгоритм, основанный на сведении исходной задачи к нелинейной смешанной целочисленной задаче. В [15] представлены некоторые вопросы в области планирования и контроля производства, разработана иерархическая архитектура планирования и управления производством. В [16] приведена двухуровневая система хранения одного продукта, с помощью которой региональный центр пополняет заказы нескольких независимых местных распределительных центров в течение установленного периода времени. Разработанная модель определяет значения цены продукта, обязательного времени пополнения и обязательного времени доставки, которые максимизируют ожидаемую общесистемную прибыль за заданный период с учетом затрат на хранение продукта и фиксированных затрат на оборудование.

В [17] исследована задача, в которой планирование осуществляется в два этапа: сначала определяется последовательность действий, затем в график вставляется время простоя, чтобы минимизировать сумму ранних и поздних затрат. Последовательность работ определяется с помощью эвристического метода, а задача вставки времени простоя решается с помощью линейного программирования для задания времени начала и окончания действий. В [18] приведена задача планирования сроков выполнения заказов, а также указаны компромиссы, которые следует учитывать при установлении этих сроков. Предложена модель, показывающая, как запланированное время выполнения операции зависит от стохастической изменчивости требований

к ресурсам для этой операции, а также от использования ресурсов, связанных с этой операцией. В [19] описана задача планирования работы и маршрутизации двух роботов, которые доставляют продукты в определенные места. Решена задача минимизации времени выполнения всех операций и возврата роботов в исходное положение. Доказана NP-трудность задачи. Решение основано на использовании целочисленного линейного программирования и генетического алгоритма, а также динамического программирования для оценки качества решений.

В настоящей статье исследуется задача планирования вычислений в многопроцессорной системе при следующих предположениях. В заданные моменты времени поступают запросы на выполнение комплексов работ с известными длительностями и директивными интервалами. Допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Рассматриваются две постановки задачи. В каждой из них моменты поступления запросов известны заранее. Однако в первой постановке состав всех комплексов и характеристики работ также известны заранее, и поэтому в этом случае планировать выполнение всех заданий можно до момента поступления первого запроса. Во второй постановке состав комплексов заданий и их характеристики становятся известными только в момент поступления каждого запроса. Тогда планировать выполнение работ возможно только после поступления соответствующего запроса, т.е. в режиме реального времени. В обеих постановках требуется определить, существует ли допустимое расписание для всей совокупности комплексов работ и построить его в случае положительного ответа. Рассмотрена также задача для случая, когда помимо процессоров задания используют невозобновляемый ресурс. При этом длительность выполнения задания является убывающей функцией от количества выделенного ему невозобновляемого ресурса. В отличие от [13] не предполагается, что эта функция будет линейной. Решение задачи основано на построении сетевой потоковой модели и поиске максимального потока.

1. Постановка задачи. В моменты времени τ_k поступают запросы на выполнение K комплексов работ (заданий): $W_k = \{w_k^1, w_k^2, \dots, w_k^{r_k}\}$, $k = \overline{1, K}$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K$. Для этого в каждом интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ имеется m_k процессоров (τ_{K+1} — момент времени, после которого эти процессоры использоваться не могут). Все процессоры идентичные. Каждое задание w_k^i имеет следующие характеристики: $[b_k^i, c_k^i]$ — директивный интервал (работа w_k^i может выполняться только в этом интервале), $b_k^i \geq \tau_k$, t_k^i — его длительность, $t_k^i \leq c_k^i - b_k^i$, $i = \overline{1, r_k}$. При выполнении заданий допускаются их прерывания и переключения с одного процессора на другой, которые по предположению не требуют временных затрат. Кроме того, не допускается параллельное исполнение одного задания несколькими процессорами и одновременное выполнение нескольких работ одним процессором.

Рассматриваются две постановки задачи. В каждой из них моменты τ_k известны заранее. Однако в первой постановке состав всех комплексов W_k и характеристики входящих в них работ также известны заранее. Поэтому в данном случае планировать работу всех заданий можно до момента времени τ_1 . Во второй постановке состав комплекса заданий W_k и их характеристики становятся известными только в момент τ_k . Тогда планировать выполнение работ W_k возможно только после поступления соответствующего запроса, который поступает в момент τ_k , т.е. в режиме реального времени.

В обеих постановках требуется определить, существует ли допустимое расписание для всего комплекса работ:

$$W = \bigcup_{k=1}^K W_k$$

(т.е. расписание, при котором каждое задание выполняется в своем директивном интервале) и построить его в случае положительного ответа. Предполагается, что временем работы самого алгоритма построения расписания в обоих случаях можно пренебречь.

Решение поставленной задачи основано на построении сетевой потоковой модели и поиске максимального потока. Поэтому в следующем разделе дается описание одного из наиболее эффективных потоковых алгоритмов, модификация которого будет использована для построения расписания.

2. Краткое описание полиномиального алгоритма поиска максимального потока в сети. Дана сеть $G = (V, A)$, V — множество вершин, u — источник, v — сток, $u, v \in V$, A — множество ориентированных дуг, $U(a, b)$ — пропускная способность дуги $(a, b) \in A$. В [20] предложен следующий полиномиальный алгоритм поиска максимального потока в сети G .

Шаг 1. Выбрать в качестве начального нулевой поток f , т.е. положить $f(a, b) = 0$ для всех $(a, b) \in A$.

Шаг 2. Построить остаточную сеть $G(f) = (V, A(f))$: если $f(a, b) < U(a, b)$, то включить в $A(f)$ дугу (a, b) с пропускной способностью $U(a, b) - f(a, b)$; если $f(a, b) > 0$, то включить в $A(f)$ дугу (b, a) с пропускной способностью $f(a, b)$.

Шаг 3. Если в сети $G(f)$ не существует прямого пути из u в v , то f — максимальный поток; алгоритм завершен. В противном случае перейти на шаг 4.

Шаг 4. Построить слоистую сеть $G^*(f) = (V^*(f), A^*(f))$. Она содержит все кратчайшие ориентированные пути из u в v .

Шаг 5. Найти тупиковый поток g в сети $G^*(f)$. (Тупиковый поток — это поток, относительно которого нет прямого увеличивающего пути.)

Шаг 5.1. Определить узел $a_0 \in V^*(f)$ с минимальной пропускной способностью. (Пропускная способность узла — это минимум из максимальной величины потока, который может войти в этот узел, и максимальной величины потока, который может выйти из него.)

Шаг 5.2. “Протолкнуть” из узла a_0 влево вплоть до источника u и вправо вплоть до стока v максимально возможный поток. Полученные при этом потоки по дугам определяют поток g .

Шаг 5.3. Удалить из сети $G^*(f)$ узел a_0 и все другие узлы с нулевой остаточной пропускной способностью, инцидентные этим узлам дуги, все полностью насыщенные дуги, образовавшиеся “висячие” узлы (если таковые имеются) и все инцидентные им дуги.

Шаг 5.4. Если существует путь из u и v в оставшейся части сети $G^*(f)$, то перейти на шаг 5.1. В противном случае тупиковый поток g в сети $G^*(f)$ построен.

Шаг 6. Произвести коррекцию потока f в сети G :

если дуге $(a, b) \in A$ соответствует дуга $(a, b) \in A^*(f)$, то положить $f(a, b) = f(a, b) + g(a, b)$; если дуге $(a, b) \in A$ соответствует дуга $(b, a) \in A^*(f)$, то положить $f(a, b) = f(a, b) - g(b, a)$. Перейти на шаг 2.

Вычислительная сложность описанного алгоритма составляет $O(|V|^3)$.

3. Краткое описание алгоритма В.С. Танаева построения допустимого расписания. Дальнейшее исследование поставленной задачи основано на использовании алгоритма В.С. Танаева построения допустимого многопроцессорного расписания с прерываниями и переключениями [1]. Приведем краткое описание этого алгоритма для сформулированной в разд. 1 задачи при $K = 1$. Будем предполагать, что в этом случае множество работ $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, их длительности t_i и директивные интервалы $[b_i, c_i]$, m — число идентичных процессоров.

Пусть $y_0 < y_1 < \dots < y_p$ — все различные величины $b_i, c_i, i = \overline{1, n}, I_j = [y_{j-1}, y_j], \delta_j = y_j - y_{j-1}, j = \overline{1, p}$. Строится потоковая сеть $G = (V, A)$ (см. рисунок), где $V = \{u, I_j, w_i, v\}$ — множество вершин, u — источник, v — сток, $A = \{(u, I_j), (I_j, w_i), (w_i, v)\}$ — множество ориентированных дуг. Дуга (I_j, w_i) вводится в сеть, если $I_j \in [b_i, c_i]$. Отметим, что при всех j и i либо $I_j \in [b_i, c_i]$, либо $I_j \cap [b_i, c_i] = \emptyset$. Пропускные способности $U \in$ дуг определяются следующим образом: $U(u, I_j) = m\delta_j, U(I_j, w_i) = \delta_j, U(w_i, v) = t_i$.

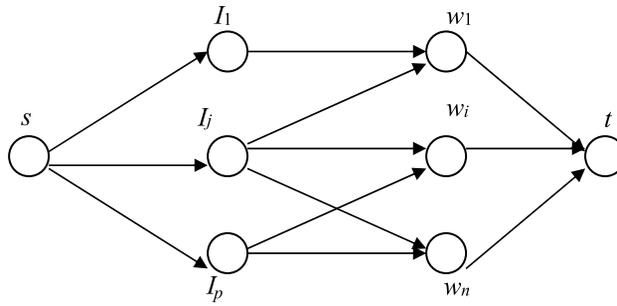


Рисунок. Потокосеть G для поиска допустимого расписания

В [1] доказано, что допустимое расписание существует в том и только том случае, когда максимальный поток f в сети G насыщает все выходные дуги (w_i, v) , т.е. когда $f(w_i, v) = t_i$ при всех $i = 1, n$. Величина $f(I_j, w_i)$ равна процессорному времени, выделяемому работе w_i в интервале I_j . Для построения допустимого расписания следует в каждом интервале I_j применить алгоритм упаковки [1], вычислительная сложность которого составляет $O(n)$. Для поиска максимального потока в сети G можно использовать полиномиальный алгоритм, описанный в разд. 2. Поскольку $p \leq 2n$, то вычислительная сложность алгоритма В.С. Танаева в этом случае составляет $O(n^3)$.

4. Построение расписания для случая, когда информация о множествах W_k , $k = \overline{1, K}$, поступает до момента τ_1 . Рассмотрим случай, когда заранее (т.е. до момента времени τ_1) известны состав всех множеств W_k и характеристики входящих в них работ. В этом случае еще до поступления запросов на выполнение работ W_k в моменты времени τ_k (т.е. до момента времени τ_1) можно составить расписание для всего комплекса заданий W .

Пусть y_k^j — это все различные величины τ_k , b_k^i и c_k^i , $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, r_k}$. Далее, так же как в разд. 3, определяются интервалы I_k^j и потокосеть $G_k = (V_k, A_k)$, где $V_k = \{u, v, I_k^j, w_k^i, j = \overline{1, p_k}\}$ — множество узлов, u — источник, v — сток, $A_k = \{(u, I_k^j), (I_k^j, w_k^i), (w_k^i, v)\}$ — множество ориентированных дуг. Дуга (I_k^j, w_k^i) вводится в сеть G_k , если $I_k^j \in [b_k^i, c_k^i]$.

Далее, для решения вопроса о существовании и построении допустимого расписания может быть использован алгоритм, аналогичный тому, который описан в разд. 3. Вычислительная сложность алгоритма составляет

$$O\left(\left(\sum_{k=1}^K r_k\right)^3\right).$$

5. Построение расписания для случая, когда информация о множестве W_k поступает в момент τ_k , $k = \overline{1, K}$. Рассматривается случай, когда моменты τ_k поступления запросов на выполнение работ W_k известны заранее, а состав каждого множества W_k и характеристики входящих в него заданий становятся известными только в момент τ_k . Сначала рассмотрим задачу построения расписания для W_1 .

5.1. Построение сетевой модели и допустимого расписания для W_1 . Пусть $y_1^0 < y_1^1 < \dots < y_1^{p_1}$ — все различные величины среди $\tau_1, \tau_2, b_1^i, c_1^i, i = \overline{1, r_1}$, принадлежащие интервалу $[\tau_1, \tau_2]$. Определим интервалы $I_1^j = [y_1^{j-1}, y_1^j]$, $j = \overline{1, p_1}$, и сеть $G_1 = (V_1, A_1)$, где $V_1 = \{u, v, I_1^j, w_1^i\}$, а множество ориентированных дуг A_1 и их пропускные способности $U_1(i, j)$ определяются по аналогии с тем, как это сделано в разд. 3 при $m = m_1, n = r_1$.

При нахождении максимального потока f_1 в сети G_1 используется следующая модификация алгоритма, описанного в разд. 2. При проталкивании потока из вершины I_1^j вправо (шаг 5.2 разд. 2) в первую очередь следует использовать дуги (I_1^j, w_1^i) для работ w_1^i , у которых $c_1^i \leq \tau_2$.

Это объясняется тем, что такие задания могут выполняться только в интервале $[\tau_1, \tau_2]$, а работам с директивным сроком, большим τ_2 , процессорное время может выделяться и после момента τ_2 .

Величина потока $f_1(I_1^j, w_1^i)$ равна объему процессорного времени, выделенному работе w_1^i в интервале I_1^j . Расписание в интервале I_1^j строится с помощью алгоритма упаковки.

Если хотя бы для одной работы w_1^i с директивным сроком $c_1^i \leq \tau_2$ оказалось, что $f_1(w_1^i, v) < t_1^i$ (т.е. дуга (w_1^i, v) насыщена не полностью), то допустимого расписания для W_1 , и, следовательно, для всего комплекса заданий W не существует. В случае когда $f_1(w_1^i, v) = t_1^i$ для всех работ w_1^i с директивным сроком $c_1^i \leq \tau_2$, построение допустимого расписания продолжится в момент τ_2 для незавершенных работ из W_1 (если таковые имеются) и вновь поступивших работ из W_2 .

5.2. Построение сетевой модели и допустимого расписания для $W_1 \cup \dots \cup W_k, k = \overline{2, K}$. Предположим, что построена потоковая сеть $G_{k-1}, k = \overline{2, K}$, и в ней найден максимальный поток f_{k-1} . Если хотя бы для одной работы $w_r^i, r = \overline{2, k-1}$, для которой $c_r^i \leq \tau_k$, после нахождения максимального потока f_{k-1} в сети G_{k-1} оказалось, что $f_{k-1}(w_r^i, v) < t_r^i$, т.е. дуга (w_r^i, v) насыщена не полностью, то допустимого расписания для $W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$, и, следовательно, для всего комплекса W не существует. Если же $f_{k-1}(w_r^i, v) = t_r^i$ для всех дуг $(w_r^i, v), r = \overline{1, k-1}$, для которых $c_r^i \leq \tau_{k-1}$, то построение допустимого расписания для W продолжается в момент τ_k для незавершенных работ из множества $W_1 \cup \dots \cup W_{k-1}$ (если таковые имеются) и вновь поступивших заданий из W_k .

Пусть $y_k^0 < y_k^1 < \dots < y_k^{p_k}$ — все различные величины $\tau_k, \tau_{k+1}, b_k^i, c_k^i, i = \overline{1, r_k}$. Определим интервалы $I_k^j = [y_k^{j-1}, y_k^j]$ и пусть $\delta_k^j = y_k^j - y_k^{j-1}$. Из сети G_{k-1} удалим следующие элементы: узлы $I_{k-1}^j, j = \overline{1, p_{k-1}}$, и все инцидентные им дуги $(u, I_{k-1}^j), (I_{k-1}^j, w_{k-1}^i), j = \overline{1, p_k}, i = \overline{1, r_{k-1}}$; узлы w_z^i , для которых

$$f_{k-1}(w_z^i, v) = t_z^i, \tag{5.1}$$

и соответствующие дуги $(w_z^i, v), z = \overline{1, k-1}, i = \overline{1, r_z}$ (поскольку выполнение условия (5.1) означает завершение работы w_z^i).

Далее, длительности каждой оставшейся работы w_z^i уменьшаются на величину потока $f_{k-1}(w_z^i, v)$ по дуге (w_z^i, v) . Сеть G_k строится из оставшейся не удаленной части сети G_{k-1} путем добавления к ней узлов I_k^j, w_k^i и дуг $(I_k^j, w_k^i), j = \overline{1, p_k}, i = \overline{1, r_z}, z = \overline{1, k}, (w_k^i, v), i = \overline{1, r_k}$, по аналогии с тем, как это описано в разд. 3 при $m = m_k, n = n_k +$ (число оставшихся вершин в G_{k-1}). В сети G_k находится максимальный поток f_k . По аналогии с разд. 5.1 при проталкивании потока из вершины I_k^j вправо (шаг 5.2 разд. 2) в первую очередь следует использовать дуги (I_k^j, w_k^i) для работ w_k^i , у которых $c_k^i \leq \tau_{k+1}$. Величина потока $f_k(I_k^j, w_k^i)$ равна объему процессорного времени, выделяемому работе w_k^i в интервале I_k^j . Расписание выполнения работ в интервале I_k^j находится с помощью алгоритма упаковки [1].

Вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет

$$O \left(K \left(\sum_{k=1}^K r_k \right)^3 \right).$$

6. Распределение неоднородного комплекса ресурсов. Предполагается, что при выполнении работ помимо процессоров используется невозобновляемый ресурс, количество которого в интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ составляет S_k , $k = \overline{1, K}$. Работе w_k^i невозобновляемый ресурс может быть выделен только в момент времени τ_k . Если его объем составляет s_k^i , то длительность выполнения задания w_k^i равна

$$t_k^i = \varphi_k^i(s_k^i), \quad (6.1)$$

где

$$s_k^i \in [0, \bar{s}_k^i], \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{r_k} s_k^i \leq S_k. \quad (6.3)$$

Здесь φ_k^i — строго убывающая на интервале $[0, \bar{s}_k^i]$ функция, принимающая положительные значения, \bar{s}_k^i — заданные величины, $i = \overline{1, r_k}$.

В этих предположениях для решения задачи, поставленной в разд. 1, нам понадобится обобщение алгоритма В.С. Танаева.

6.1. Обобщение алгоритма В.С. Танаева на случай наличия невозобновляемого ресурса. Будем использовать обозначения, введенные в разд. 3. Кроме того, символы $t_k^i, s_k^i, \bar{s}_k^i, S_k, \varphi_k^i, W_k, w_k^i$ заменим на $t_i, s_i, \bar{s}_i, S, \varphi_i, W, w_i$ соответственно. В этом случае ограничения (6.1)—(6.3) записываются следующим образом:

$$t_i = \varphi_i(s_i), \quad (6.4)$$

$$s_i \in [0, \bar{s}_i], \quad (6.5)$$

$$\sum_{i=1}^n s_i \leq S. \quad (6.6)$$

Докажем следующие утверждения.

Лемма 1. Допустимое расписание выполнения множества работ W в задаче без невозобновляемого ресурса (без ограничений (6.4)—(6.6)), при котором заданию w_i предоставляется процессорное время в объеме f_i , существует в том и только том случае, когда в сети G существует поток $f(a, b), (a, b) \in A$, такой, что выполнены равенства

$$f(w_i, v) = f_i \quad (6.7)$$

при всех $i = \overline{1, n}$.

Доказательство следует из [1]. Пусть $\varphi_i^{-1}(s_i)$ — функция, обратная по отношению к $\varphi_i(s_i)$.

Лемма 2. Допустимое расписание выполнения множества работ W в задаче с невозобновляемым ресурсом (с учетом ограничений (6.4)—(6.6)), при котором заданию w_i предоставляется процессорное время в объеме f_i , существует в том и только том случае, когда в сети G существует поток $f(a, b), (a, b) \in A$, такой, что справедливы равенства (6.7) и неравенства

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(f_i) \leq S, \quad (6.8)$$

$$\varphi_i^{-1}(f_i) \leq \bar{s}_i, i = \overline{1, n}. \quad (6.9)$$

Доказательство. 1. Пусть в сети G существует поток f , для которого справедливы соотношения (6.7)—(6.9). В этом случае из (6.8) следует, что каждой работе w_i может быть выделен невозобновляемый ресурс в объеме $s_i = \varphi_i^{-1}(f_i)$. При этом будет справедливо неравенство (6.6),

а в силу (6.4) длительность выполнения работы w_i (т.е. требуемое процессорное время) составит $\varphi_i(\varphi_i^{-1}(f_i)) = f_i$. Поскольку $\varphi_i^{-1}(f_i) = s_i$, то из (6.9) вытекает (6.5). Тогда из леммы 1 следует существование допустимого расписания для W с учетом ограничений (6.4)—(6.6).

2. Пусть теперь существует допустимое расписание выполнения работ W в задаче с невозобновляемым ресурсом (с учетом ограничений (6.4)—(6.6)), при котором заданию w_i выделяется процессорное время в объеме f_i . Пусть при этом работе w_i выделен невозобновляемый ресурс в объеме s_i . Тогда в силу (6.4) $f_i = \varphi_i(s_i)$ или $s_i = \varphi_i^{-1}(f_i)$. В этом случае из (6.6) и (6.5) следуют неравенства (6.8) и (6.9) соответственно. Теперь доказательство вытекает из леммы 1. Лемма доказана.

Из (6.7), (6.9) следует, что при построении допустимого расписания в задаче с невозобновляемым ресурсом нужно искать поток f в сети G , для которого $f(w_i, v) = f_i \leq \varphi(s_i)$ при всех $i = \overline{1, n}$. С учетом того, что функции $\varphi_i^{-1}(f_i)$ строго убывают, величины f_i необходимо максимизировать. Поэтому для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм.

В сети G сначала определяется вершина w_{i_1} , для которой величина максимального потока g из u в w_i является наибольшей среди всех вершин $w_i, i = \overline{1, n}$. Далее, номер i_1 включается в множество N и пропускные способности всех дуг $(a, b) \in A$ сети G уменьшаются на величину $g(a, b)$. После чего данная процедура повторяется для вершин $w_i, i = \overline{1, n}, i \neq i_1$. Далее, выполняется проверка условия (6.8).

Алгоритм 1.

Шаг 1. В сети G положить $U(w_i, v) = \varphi_i(s_i), N = \emptyset$.

Шаг 2. Для $i_0 = \overline{1, n}, i_0 \in N$, выполнять шаги 3—5.

Шаг 3. Удалить из сети G все дуги $(w_i, v), i = \overline{1, n}, i \neq i_0$.

Шаг 4. Найти максимальный поток g в сети G и пусть g_{i_0} — его величина.

Шаг 5. Включить в сеть G дуги, удаленные на шаге 3.

Шаг 6. Пусть $\min_{i_0 = \overline{1, n}, i_0 \in N} \varphi_{i_0}^{-1}(g_{i_0}) = g_{i_1}$. Включить i_1 в N . Положить $f_{i_1} = g(w_{i_1}, v) = g_{i_1}$. Пропуск-

ные способности $U(a, b)$ всех дуг $(a, b) \in A$ сети G уменьшить на величину $g(a, b)$.

Шаг 7. Если $|N| < n$, то перейти на шаг 2. Если $|N| = n$, то перейти на шаг 8.

Шаг 8. Если выполнено неравенство (6.8), то допустимое расписание существует. При этом работе w_i выделяется невозобновляемый ресурс в объеме $\varphi_i^{-1}(f_i), i = \overline{1, n}$. Длительность выполнения работы w_i составляет f_i . Расписание строится так, как описано в разд. 3. Если неравенство (6.8) не выполнено, то допустимого расписания не существует. Алгоритм завершен.

Вычислительная сложность алгоритма 1 составляет $O(n^5)$.

6.2. Обобщение исходной задачи на случай наличия невозобновляемого ресурса. Перейдем теперь к задаче, сформулированной в разд. 1, с дополнительными ограничениями (6.1)—(6.3), связанными с распределением невозобновляемого ресурса. Вновь вернемся к обозначениям $t_k^i, s_k^i, \bar{s}_k^i, S_k, \varphi_k, W_k, w_k^i$, которые ранее были заменены на $t_i, s_i, \bar{s}_i, S, \varphi_i, W, w_i$ соответственно.

С учетом исследований, проведенных в разд. 5.1, 5.2 и 6.1, предлагается следующий алгоритм решения исходной задачи, сформулированной в разд. 1, для случая наличия невозобновляемого ресурса.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Положить $k = 1$.

Шаг 2. Построить сеть G_k (см. разд. 5.1, 5.2).

Шаг 3. Из сети G_k удалить узлы w_m^i , соответствующие работам с директивным сроком $c_m^i > \tau_{k+1}$, и инцидентные им дуги.

Шаг 4. К полученной сети применить алгоритм 1. Если на шаге 8 алгоритма 1 выяснилось, что допустимого расписания не существует, то алгоритм 2 завершен, решения не существует. В противном случае перейти на шаг 5.

Шаг 5. Включить в сеть G_k удаленные на шаге 3 узлы и дуги. Положить $k = k + 1$. Если $k \leq K$, то перейти на шаг 1. Если $k > K$, то решение построено. Алгоритм завершен.

Вычислительная сложность алгоритма 2 составляет

$$O\left(K\left(\sum_{k=1}^K r_k\right)^5\right).$$

Заключение. Исследована задача составления многопроцессорного допустимого расписания для совокупности комплексов работ, запросы на выполнение которых поступают в заданные моменты времени. Состав каждого комплекса и характеристики входящих в него работ становятся известными в момент поступления запроса. При выполнении заданий допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Исследованы постановки с невозобновляемым ресурсом и без него. Разработан полиномиальный алгоритм решения задачи, основанный на построении сетевой потоковой модели и поиске максимального потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
2. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
3. Лазарев А. А. Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М.: МФТИ, 2008.
4. Горский М. А., Мищенко А. В., Нестерович Л. Г., Халиков М. А. Некоторые модификации целочисленных оптимизационных задач с учетом неопределенности и риска // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 106—117.
5. Мищенко А. В., Кошелев П. С. Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 123—134.
6. Глоница А. Б., Балашов В. В. О корректности моделирования модульных вычислительных систем реального времени с помощью сетей временных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. № 2. С. 174—192.
7. Глоница А. Б. Обобщенная модель функционирования модульных вычислительных систем реального времени для проверки допустимости конфигураций таких систем // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6. № 4. С. 43—59.
8. Глоница А. Б. Инструментальная система проверки выполнения ограничений реального времени для конфигураций модульных вычислительных систем // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2020. № 3. С. 16—29.
8. Алифанов Д. В., Лебедев В. Н., Цурков В. И. Оптимизация расписаний с логическими условиями предшествования // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 88—93.
9. Миронов А. А., Цурков В. И. Минимум в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 4. С. 69—81.
10. Миронов А. А., Цурков В. И. Минимум при нелинейных транспортных ограничениях // ДАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 305—308.
11. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
12. Давыдов Э. Г. Исследование операций. М.: Высш. шк., 1990.
13. Фуругян М. Г. Планирование вычислений в многопроцессорных системах с несколькими типами дополнительных ресурсов и произвольными процессорами // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1917. № 3. С. 38—45.
14. Yao X., Almatooq N., Askin R. G., Gruber G. Capacity Planning and Production Scheduling Integration: Improving Operational Efficiency Via Detailed Modelling // Intern. J. Production Research. Published Online. 2022. V. 60. No. 1.
15. Missbauer H., Uzsoy R. Order Release in Production Planning and Control Systems: Challenges and Opportunities // Intern. J. Production Research. 2022. V. 60. No. 1.
16. Wang Y., Geunes J., Nie X. Optimising Inventory Placement in a Two-echelon Distribution System with Fulfillment-time-dependent Demand // Intern. J. Production Research. 2022. V. 60. No. 1.
17. Gorman M.F., Conway D. G. A Tutorial of Integrating Duality and Branch and Bound in Earliness-tardiness Scheduling with Idle Insertion Time Problems // Intern. J. Production Research. 2018. V. 56. No. 1-2.
18. Graves S. C. How to Think About Planned Lead Times // Intern. J. Production Research. 2022. V. 60. No. 1.
19. Thomasson O., Battarra M., Erdoğan G., Laporte G. Scheduling Twin Robots in a Palletising Problem // Intern. J. Production Research. 2018. V. 56. No. 1-2.
20. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.

УДК 511

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАТАМАРАНА, ПРИВОДИМОГО В ДВИЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ РОТОРА САВОНИУСА И ГРЕБНОГО ВИНТА¹

© 2024 г. М.А. Гарбуз^{a, b, *}, Л.А. Климина^a, В. А. Самсонов^a

^aНИИ механики МГУ, Москва, Россия

^bМатематический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

*e-mail: misha-garbuz@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.

После доработки 26.07.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается динамика катамарана с установленным на него ротором Савониуса и гребным винтом. Ротор вращается под действием стационарного потока ветра и приводит во вращение гребной винт, создающий тягу. В качестве управления описывается угол курса катамарана относительно потока ветра. Задачей управления является перевод центра масс корпуса из начальной точки в заданную конечную точку, расположенную строго выше по потоку ветра. Установлена возможность прямолинейного движения против ветра. Проанализирована зависимость скорости корпуса на стационарном режиме движения против ветра от радиусов ротора Савониуса и гребного винта.

Ключевые слова: движение против ветра, ротор Савониуса, гребной винт, управление

DOI: 10.31857/S0002338824010101, EDN: WJFEMG

MODELING OF THE DYNAMICS OF A CATAMARAN DRIVEN BY A SAVONIUS ROTOR AND A PROPELLER

© 2024 M.A. Garbuz^{a, b, *}, L.A. Klimina^a, V.A. Samsonov^a

^aMoscow, Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University

^bMoscow, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

*e-mail: misha-garbuz@yandex.ru

The dynamics of a catamaran with a Savonius rotor and a propeller installed on it is considered. Under the action of a stationary wind flow the rotor rotates and transmit it to the the propeller, which creates thrust. As a control, the angle of the catamaran's course relative to the wind flow is considered. The control task is to move the center of the masses of the hull from the starting point to a given endpoint located strictly upstream of the wind. The possibility of straight motion against the wind is shown. The dependence of the average velocity in the stationary mode of movement against the wind on the radii of the Savonius rotor and propeller is analyzed.

Keywords: motion against the wind, Savonius rotor, water propeller, control

Введение. Важной задачей, стоящей перед механическими и роботехническими устройствами, является перемещение в горизонтальной плоскости. При этом в качестве источника энергии для такого перемещения представляется актуальным использование возобновляемой энергии ветра.

Классическое средство преобразования энергии ветра в полезную форму — это применение парусов. На парус, находящийся в потоке среды, действует сила лобового давления, мотивирующая движение. В судовой навигации паруса позволяют организовать перемещение в произвольном направлении, в том числе и наименее очевидном: навстречу ветру. В последнем случае выбирают курс судна под острым углом к потоку, а паруса разворачивают так,

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 23-29-000191), <https://rscf.ru/project/23-29-000191/>.

чтобы проекция силы давления ветра на его направление была отрицательной. Такой принцип лежит в основе движения галсами [1].

В 1922 г. возникла идея замены парусов вращающимися цилиндрами [2]. На корпусе судна устанавливаются цилиндрические роторы с вертикальной осью вращения. При обтекании вращающегося тела в потоке воздуха возникает так называемая сила Магнуса [3], перпендикулярная направлению потока. Эта сила по величине может существенно превосходить силу давления, действующую на неподвижный ротор [4, 5]. Под действием боковой силы корабль с ротором способен перемещаться под более острым углом к встречному ветру, по сравнению с классическим парусником. В работе [6] на основе уравнений Навье-Стокса построена математическая модель такой системы, проведен параметрический анализ.

Вместе с тем известны схемы, реализующие строго прямолинейное движение навстречу потоку за счет энергии этого потока. Для водных судов в 70-е годы XX в. были испытаны ветродвигатели, состоящие из комбинации пропеллерной турбины и гребного винта [7]. В [8] построена математическая модель катамарана с ветродвигателем, проведено численное моделирование установившихся режимов движения против ветра и определены параметры, обеспечивающие наивысшую скорость.

Отметим, что возможность перемещения против ветра за счет энергии ветра была установлена не только для водных судов. Так, в работе [9] показано, что колесное транспортное средство, оснащенное в качестве привода только горизонтально-осевой ветротурбиной, способно перемещаться строго против ветра. В [10] приводом для ветромобиля выступает ветроустановка колебательного типа. Колебания ветроприемной пластины инициируют вращение ведущих колес. В статье выполнен параметрический анализ, в ходе которого описаны зависимости средней скорости устройства на периодических решениях от параметров модели. Перемещение шагающего аппарата с пропеллерной ветротурбиной обсуждалось в работе [11]. Были определены условия существования самоподдерживающегося периодического режима движения, при котором корпус аппарата перемещается навстречу потоку. Возможность описанного перемещения для шагающего аппарата подтверждена экспериментально.

Для транспортных устройств в качестве источника силы и момента наряду с пропеллерными турбинами представляется уместным использование роторов с вертикальной осью вращения. В качестве последних могут служить турбины Савониуса или Дарье [12, 13]. При этом основным преимуществом является отсутствие чувствительности ветроприемного устройства к направлению ветра. В научной литературе известно множество работ, посвященных моделированию поведения таких турбин в потоке. Среди них отметим статью [14], в которой проведена экспериментальная идентификация коэффициентов феноменологической модели аэродинамического воздействия на ротор Савониуса. Полученные результаты идентификации применены для исследования динамики колесной тележки, с установленным на нее ротором Савониуса в роли силового привода. В частности, продемонстрирована возможность движения тележки навстречу ветру за счет энергии ветра.

Конструкция водного судна с ротором Савониуса, который выступает силовым приводом, была предложена в патентах [15, 16], а также описана в публикации [17]. В частности, утверждается, что конструкция позволяет двигаться прямо против ветра [17]. Однако на данный момент в литературе не рассматривалась математическая модель такого объекта, не было получено оценок для характеристик его движения.

Настоящая статья посвящена математической модели катамарана с установленным на него ротором Савониуса. Определен диапазон параметров, для которого возможно организовать прямолинейное движение против ветра. Поставлена задача выбора управления курсом движения катамарана, которое обеспечивает его наискорейшее перемещение в заданную точку, расположенную выше по потоку ветра. Несмотря на то что движение по прямой против ветра происходит по кратчайшему пути, время перемещения в заданную точку, расположенную строго выше по направлению ветра, будет минимально при комбинации движений под некоторыми углами к ветру. Это объясняется влиянием боковой силы, действующей на ротор.

1. Описание математической модели и постановка задачи. Рассмотрим прямолинейное движение плавательного катамарана, снабженного ротором Савониуса [12], в стационарном потоке ветра. Механическая система состоит из двух поплавков, образующих корпус, а также установленных на нем ротора Савониуса и гребного винта. Гребной винт и ротор Савониуса

связаны между собой прямой передачей, т.е. один оборот ротора преобразуется в один оборот гребного винта. Система находится в стационарном горизонтальном потоке воздуха, скорость которого равна \vec{v} . Под действием ветра ротор Савониуса начинает вращаться, передавая это вращение на гребной винт. Гребной винт создает толкающую силу, которая используется для движения катамарана.

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Ox была направлена противоположно скорости ветра, ось Oz — вертикально, а ось Oy дополняла бы систему до правой тройки. Схема катамарана представлена на рис. 1, а.

Будем считать, что поплавки катамарана разнесены между собой на достаточно большое расстояние, что препятствует опрокидыванию корпуса и обеспечивает устойчивость вертикальной ориентации оси ротора Савониуса даже под воздействием ветра. Далее считаем, что ось ротора вертикальна и катамаран совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости (рис. 1, б). При этом среди класса возможных движений ограничимся рассмотрением лишь тех, при которых корпус движется вдоль своей продольной оси. Для реальных судов это условие можно обеспечить добавлением к поплавкам килевой системы, которая исключает их смещение в боковом направлении. Угол между продольной осью катамарана и осью Ox — угол курса — обозначим β . Далее считаем, что значение β кусочно-постоянно в процессе движения и выступает в качестве управления в рассматриваемой системе.

Пусть центры масс ротора и гребного винта расположены на их осях вращения. Запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}(mu^2 + (J_a + J_w)\omega^2). \tag{1.1}$$

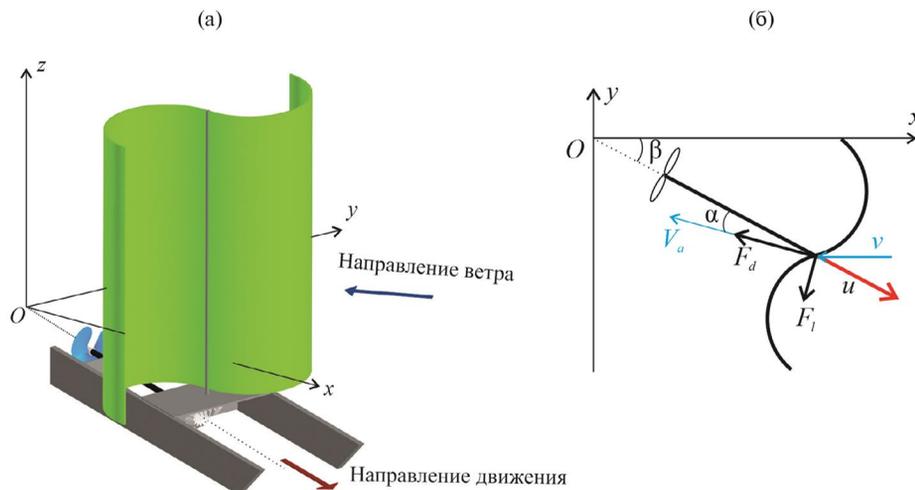


Рис. 1. Катамаран с ротором Савониуса

Здесь M — масса всей системы, u — величина вектора \vec{u} скорости корпуса, J_a — момент инерции ротора Савониуса относительно его оси вращения, J_w — момент инерции гребного винта относительно его оси вращения, ω — величина угловой скорости ротора Савониуса и гребного винта.

Опишем силы, действующие на систему. На корпус катамарана со стороны жидкости при движении действует сила вязкого трения $-k|u|\vec{u}$. На лопасти ротора действуют аэродинамические силы со стороны потока ветра. По аналогии с работой [14] будем считать, что это воздействие сводится к силе лобового сопротивления \vec{F}_d , боковой силе \vec{F}_l и моменту \vec{M}_a относительно оси ротора, причем сила \vec{F}_d направлена против воздушной скорости \vec{V}_a ротора (т.е. скорости оси ротора относительно набегающего потока), а сила \vec{F}_l — перпендикулярно ей. Гребной винт

создает толкающую силу \vec{T}_w , направленную вдоль продольной оси корпуса, и момент \vec{M}_a относительно оси винта. Вышеуказанные силы и моменты имеют следующую структуру [18, 19]:

$$F_d = \frac{\rho_a S_a}{2} V_a^2 C_d(\lambda); F_l = \frac{\rho_a S_a}{2} V_a^2 C_l(\lambda); M_a = \frac{\rho_a S_a}{2} R V_a^2 C_m(\lambda); \quad (1.2)$$

$$T_w = \rho_w v^2 D^4 K_T(j); Q_w = \rho_w v^2 D^5 K_Q(j). \quad (1.3)$$

Здесь ρ_a — плотность воздуха, ρ_w — плотность воды, R — радиус ротора, $S_a = 4R^2$ — характерная площадь поперечного сечения ротора (считаем его квадратом), $V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \beta}$ — величина воздушной скорости ротора, $v = \omega / 2\pi$ — угловая скорость гребного винта, вычисленная в оборотах в секунду, D — диаметр гребного винта.

Функции C_d, C_l, C_m — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, боковой силы и момента, действующих на ротор, соответственно. Аргументом этих функций выступает так называемая быстроходность $\lambda = R\omega V_a^{-1}$. Эти функции аппроксимированы в [20] многочленами на основе экспериментальных данных для ротора, приведенных в [19], и имеют следующее представление (рис. 2):

$$C_m(\lambda) = -0.118\lambda^5 + 0.48\lambda^4 - 0.5\lambda^3 + 0.25\lambda + 0.26; C_d(\lambda) = 1; C_l(\lambda) = 1.71\lambda - 0.35.$$

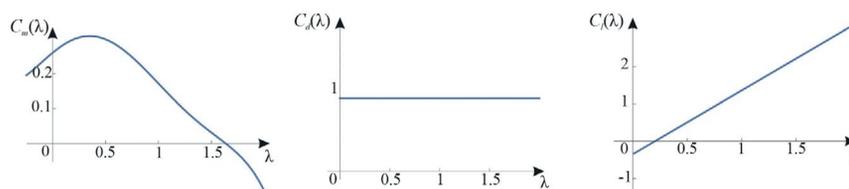


Рис. 2. Графики аэродинамических коэффициентов для ротора Савониуса

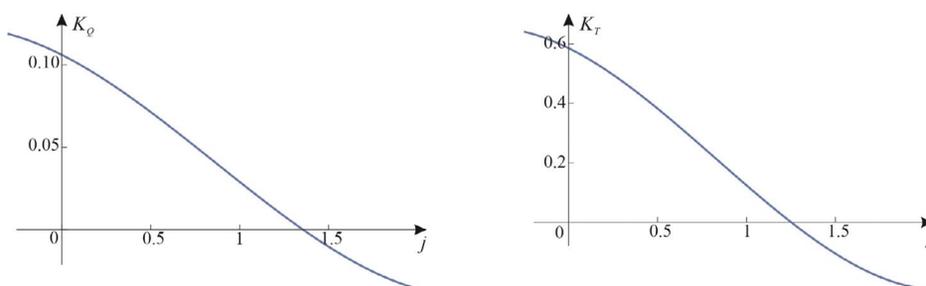


Рис. 3. Характеристики гребного винта серии В4-85

K_T, K_Q — безразмерные коэффициенты тяги и момента гребного винта, которые аппроксимируются по результатам серийных экспериментов в опытовых бассейнах [18]. Аргументом этих функций выступает относительная поступь $j = \pi u (\omega r_w)^{-1}$. Поведение функций указано на рис. 3.

В рамках настоящей работы ограничим область исследования диапазоном значений $0 < v < 600$ об/мин, поскольку формулы (1.3) справедливы только в этом интервале. Тогда, пренебрегая потерями в редукторе и соединительных узлах, можно записать уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{cases} M\dot{u} = T_w - F_d \cos \alpha + F_l \sin \alpha - ku^2, \\ (J_a + J_w)\dot{\omega} = M_a - Q_w. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь $\sin \pm = V_a^{-1} v \sin^2$, $\cos \pm = V_a^{-1} (v \cos^2 + u)$. Запишем (1.4) более подробно:

$$\begin{cases} M\dot{u} = \frac{4}{\pi^2} \rho_w \omega^2 r_w^4 K_T(j) - \frac{\rho_a R h}{2} V_a^2 \left(C_d(\lambda) \frac{v \cos \beta + u}{V_a} - C_l(\lambda) \frac{v \sin \beta}{V_a} \right) - k u^2, \\ (J_a + J_w) \dot{\omega} = \frac{\rho_a R^2 h}{2} V_a^2 C_m(\lambda) - \frac{8}{\pi^2} \rho_w \omega^2 r_w^5 K_Q(j). \end{cases} \quad (1.5)$$

Рассмотрим задачу перемещения центра масс корпуса по произвольной траектории из одной точки, лежащей на оси Ox , в другую на этой же оси, более удаленную от точки. При этом, как упомянуто выше, будем считать управлением угол курса β . Предполагаем, что угол β меняется мгновенно и пренебрегаем временем переходных процессов, связанных с изменением угла курса (считаем, что время выхода системы на стационарный режим пренебрежимо мало по сравнению со временем движения на стационарном режиме). Итак, требуется определить, как менять угол β во время движения, чтобы за минимальное время перевести центр масс корпуса из начальной точки в конечную, расположенную по отношению к начальной выше по направлению ветра.

2. Движение против ветра. В рамках поставленной задачи отдельно рассмотрим возможность перемещения корпуса между заданными точками по прямой.

2.1. Уравнения стационарного движения. Найдем неподвижные точки системы (1.5) в случае $\beta = 0$. Уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\rho_a \pi^2}{8 \rho_w r_w^4} \left(\frac{R h (u + v)^2}{\omega^2} + \frac{2 k u^2}{\omega^2} \right) = \frac{K_T(j)}{C_d(\lambda)}, \\ \frac{\rho_a \pi^2 R^2 h}{16 \rho_w r_w^5} \frac{(u + v)^2}{\omega^2} = \frac{K_Q(j)}{C_m(\lambda)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Зададим параметры системы следующим образом: $\rho_a = 1 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $r_w = 0.07 \text{ м}$, $R = 0.195 \text{ м}$, $k = 0$, $v = 5 \text{ м/с}$. (Выбор геометрических размеров ротора и гребного винта обусловлен численным подбором с целью возможности осуществления режима движения против ветра.) На рис. 4 изображена плоскость скоростей u, ω , на которой численно построены две кривые, соответствующие решениям уравнений (2.1). Точка пересечения этих кривых отвечает стационарному режиму движения. Стрелками указано качественное поведение фазовых траекторий: на кривой, соответствующей уравнению $\dot{u} = 0$ ($\dot{\omega} = 0$), стрелки вертикальны (горизонтальны). Знаки ускорений $\ddot{u}, \ddot{\omega}$ в каждой из четырех областей, ограниченных построенными кривыми, показывают, что найденный стационарный режим является притягивающим. Соответствующее качественное направление фазовых скоростей показано на рис. 4 пунктирными стрелками.

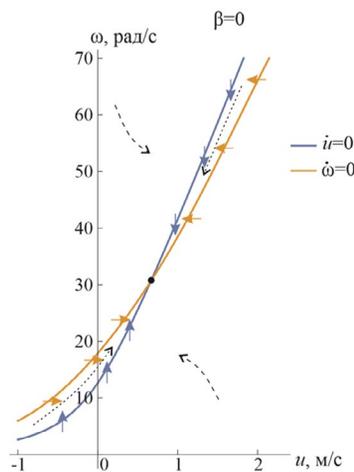


Рис. 4. Кривые, отвечающие стационарным решениям $\dot{u} = 0$, $\dot{\omega} = 0$ на фазовой плоскости

В данном случае параметры системы подобраны так, что точка пересечения кривых лежит в области $u > 0$. Таким образом, режим движения катамарана в направлении, противоположном скорости ветра, может быть реализован.

Отметим, что при старте из состояния покоя ($u = 0, \omega = 0$) катамаран начинает смещаться в “отрицательном” направлении (влево на рис. 1, б). При этом угловая скорость ротора монотонно возрастает, за счет чего увеличивается тяга гребного винта. Как только достигается баланс величин силы тяги T_w и силы лобового сопротивления F_d , ускорение катамарана становится нулевым, после чего скорость u начинает возрастать. Дальнейшее движение приводит к выходу на установившийся режим с положительными скоростями u и ω . Соответствующее изменение u и ω показано на рис. 5.

2.2. Исследование зависимости скорости катамарана от параметров системы. Зафиксируем параметры, указанные в разд. 2.1, и определим оптимальные значения размеров гребного винта r_w и ротора Савониуса R с точки зрения достижения наивысшей скорости движения.

На рис. 6 построены бифуркационные диаграммы, отражающие зависимость приведенной скорости корпуса (u/v) и угловой скорости вала на установившемся режиме от радиуса гребного винта r_w .

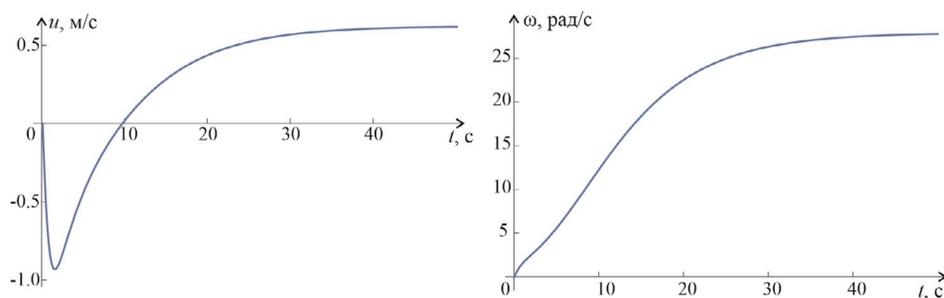


Рис. 5. Зависимость скорости корпуса и угловой скорости ротора Савониуса от времени

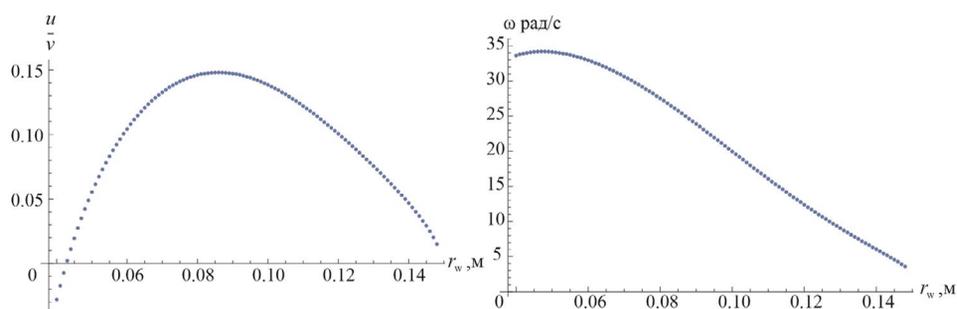


Рис. 6. Зависимости u/v и ω от r_w

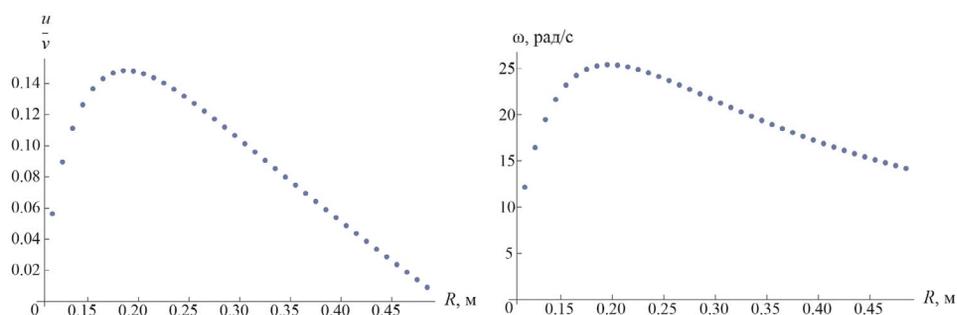


Рис. 7. Зависимости u/v и ω от R

Численно было определено, что движение против ветра осуществимо при $0.04 \text{ м} < r_w < 0.15 \text{ м}$. В указанном диапазоне существует только один режим (устойчивый), на котором катамаран плывет против ветра. Если радиус гребного винта слишком мал, то развиваемая им толкающая сила не превосходит силы встречного лобового сопротивления, поэтому катамаран движется по направлению ветра. При $r_w \approx 0.045 \text{ м}$ результирующая сила, действующая на систему, равна нулю, вследствие чего разгона катамарана не происходит. Увеличение r_w приводит к росту скорости корпуса и угловой скорости вала. Наибольшее значение приведенной скорости корпуса u/v при движении против ветра составляет 0.147 и достигается при $r_w \approx 0.087 \text{ м}$.

На рис. 7 при фиксированном r_w построены бифуркационные диаграммы, отражающие зависимость приведенной скорости корпуса (u/v) и угловой скорости вала от радиуса ротора Савониуса R . При дальнейшем изложении в целях упрощения считаем, что R зафиксировано и равно 0.195 м.

Получившаяся скорость движения против ветра почти в 3 раза ниже, чем при использовании схемы катамарана, в которой приводом выступает горизонтально-осевая турбина пропеллерного типа [8]. Однако для катамарана с ротором Савониуса режим движения против ветра является единственным и притягивающим, т.е. выход на него обеспечен при задании нулевых начальных условий (из состояния покоя). В то же время катамаран с пропеллерной ветротурбиной хотя и способен потенциально развить существенно более высокую скорость, но для этого ему необходим некоторый начальный разгон, так как область притяжения соответствующего режима отделена от нуля. Помимо этого недостатком схемы с пропеллерным ветродвигателем является необходимость поддержания курса движения строго против ветра. Поэтому, исходя из практических соображений, использование схемы катамарана с ротором Савониуса может быть более предпочтительным.

3. Оптимальный угол курса. Рассмотрим задачу о выборе курса движения β , при котором достигается максимальная проекция скорости корпуса на стационарном режиме движения на направление против ветра. Для этого при каждом значении β в диапазоне $\beta \in [0, \pi/2)$ найдем r_w , который обеспечивает наибольшее значение проекции $u \cos \beta / v$ приведенной скорости на направление, противоположное направлению ветра. При оптимальном r_w вычислим значение проекции приведенной скорости на ось Ox . Результаты численного моделирования представлены на рис. 8, а.

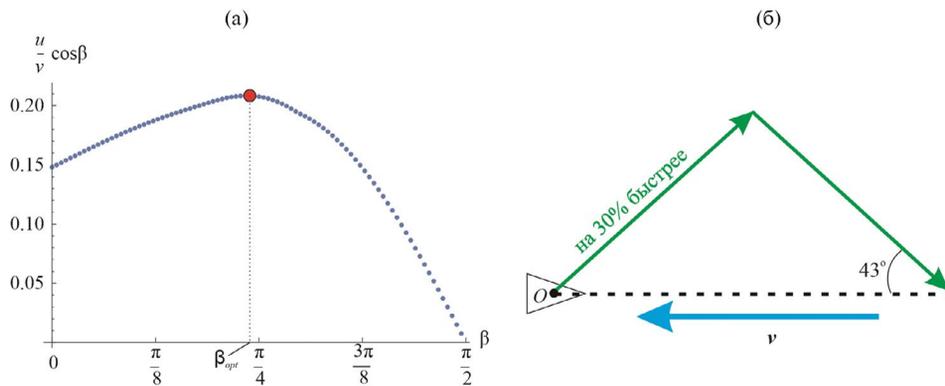


Рис. 8. Зависимость проекции скорости корпуса на ось Ox от курса

Оказывается, прямолинейное движение против ветра не обеспечивает наивысшую скорость перемещения. Оптимальное с точки зрения максимизации проекции скорости корпуса значение составляет $\beta_{opt} \approx 43^\circ$ (выделено на рис. 8, а). Соответствующая проекция скорости на 30% выше, чем при прямолинейном курсе $\beta = 0$. Все дело в том, что при движении вдоль Ox боковая сила, действующая на ротор Савониуса, перпендикулярна скорости корпуса и поэтому не влияет на скорость перемещения. Ситуация меняется при значениях $\beta \neq 0$. Когда корпус движется под углом к ветру, проекция боковой силы на направление ветра отлична от нуля. И хотя отклонение курса увеличивает общий путь, скорость перемещения при этом может быть заметно выше по сравнению с движением против вектора скорости ветра. Итак, для перемещения между заданными точками, расположенными на оси Ox , целесообразно использовать следующую схему изменения угла курса: половину пути двигаться под углом 43°

к направлению ветра, после чего изменить курс и двигаться под симметричным углом в конечную точку (рис. 8, б).

Закключение. Рассмотрена динамика катамарана, приводом которого является ротор Савониуса с гребным винтом, в стационарном горизонтальном потоке ветра. Аэродинамическое воздействие на ротор и гидродинамическое воздействие на гребной винт описано на основе квазистатической модели с привлечением экспериментальных данных. Найден диапазон параметров, при которых возможен режим движения катамарана против ветра за счет энергии ветра. Построены бифуркационные диаграммы, отражающие зависимость скорости на таких режимах от радиуса гребного винта и радиуса ротора. Исследовано поведение катамарана при различном угле курса. Построено оптимальное управление углом курса, при котором за минимальное время происходит перемещение корпуса в заданную точку, расположенную выше по направлению ветра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акмайкин Д. А., Ярошук В. В., Русанов М. М. Математическая модель траектории движения яхты против ветра и вероятного его изменения // Наука и техника транспорта. 2013. № 1. С. 14—19.
2. Tradt M. Der Umbau des Motorseglers “Buckau” zum Ttner-Rotorschiff und seine Erprobungen // Werft Reederei Hafen. 1925. В. 6. No. 25. S. 160—167.
3. Magnus G. P. Uber die Abweichung der Geschosse, Und: Ueber eine Auffallende Erscheinung bei Rotiren — den Korpern // Annalen der Physik und Chemie. 1853. V. 88. No. 1. P. 1—29. Doi: 10.1002/andp.18531640102.
4. Magnus G. P. Von Peter Pringsheim // Die Naturwissenschaften. 1925. В. 13. Iss. 3. S. 49—52.
5. Прандтль Л. Эффект Магнуса и ветряной корабль // УФН. 1925. Т. 5. № 1. С. 1—27. Doi: 10.3367/UFNr.0005.192501a.0001.
6. De Marco A., Mancini S. Flettner Rotor Concept for Marine Applications: A Systematic Study // Intern. J. Rotating Machinery. 2016. V. 2016. No. 10. P. 1—12. Doi: 10.1155/2016/3458750.
7. Григорьев Б. В., Лысенко Г. П. Характеристики судов с ветродвигателями // Тр. Николаевск., кораблестр. ин-та. 1979. Вып. 155. С. 80—85.
8. Гарбуз М. А. Динамическая модель судового ветродвигателя с трансмиссией // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2022. № 1. С. 68—71.
9. Gaunaa M., Stig O., Mikkelsen R. Theory and Design of Flow Driven Vehicles Using Rotors for Energy Conversion // European Wind Energy Conf. and Exhibition. Marseille. EWEC 2009.
10. Klimina L., Dosaev M., Seluytskiy Yu. Asymptotic Analysis of the Mathematical Model of a Wind-powered Vehicle // Appl. Math. Modelling. 2017 V. 46 P. 691—697. Doi: 10.1016/j.apm.2016.06.022.
11. Garbuz M., Klimina L., Samsonov V. Wind Driven Plantigrade Machine Capable of Moving Against the Flow // Appl. Math. Modelling. 2022. V. 110. P. 17—27.
12. Savonius S. J. Rotor Adapted to be Driven by Wind or Flowing Water. U.S. Patent № 1697574 A, 1929.
13. Darrieus G. J. M. Turbine Having its Rotating Shaft Traverse to the Flow of the Current. U.S. Patent № 1,835,018, 1931.
14. Голуб А. П., Зубков А. Ф., Мастерова А. А., Селоцкий Ю. Д. Динамика колесной тележки, приводимой в движение ротором Савониуса // МАУ. 2021. Т. 22. № 5. С. 254—261.
15. Vanderhye R. A., Augello M., Nicol T., Rees C., Shedd J., Zbytniewski W. Savonius Rotor with Spillover. U.S. Patent № 7766600B1, 2004.
16. Керов В. Г. Судно. Патент RU 2030323 C1, МПК В 63 Н 13/00, 1995.
17. Парус-двигатель // Юный техник. 1972. № 10. С. 84.
18. Вейткунский Я. И. Справочник по теории корабля. — Л.: Судостроение, 1986.
19. Vach V. G. Untersuchungen uber Savonius-Rotoren und Verwandte Stromungsmaschinen // Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A. 1931. В. 2. No. 6. S. 218—231.
20. Ишханян М. В., Климина Л. А. Ветрогенератор класса “Савониус—Магнус” с коническими лопастями: динамика и управление // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. №. 4. С. 160—168.

УДК 519.7

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ¹

© 2024 г. А.Н. Жирабок^{a, b, *}, А.В. Зуев^{a, b}, Ким Чхун Ир^a

^aДальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

^bИнститут проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию: 22.01.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 31.08.2023 г.

Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для дискретных линейных систем при внешних возмущениях, шумах измерений и параметрических неопределенностях. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной вектор-функции состояния системы. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: дискретные линейные системы, возмущения, шумы измерения, параметрические неопределенности, интервальный наблюдатель

DOI: 10.31857/S0002338824010113, EDN: WJFEAF

INTERVAL ESTIMATION IN DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

© 2024 A. Zhirabok^{a, b, *}, A. Zuev^{a, b}, C. Kim^a

^aFar Eastern Federal University, Vladivostok

^bInstitute of Marine Technology Problems, Vladivostok

*e-mail: zhirabok@mail.ru, zuev.al@dyfu.ru, kim.ci@dyfu.ru

The problem of interval observer design for discrete-time linear systems under the external disturbances, measurement noise, and parametric uncertainties is studied. The relation allowing designing the interval observer of minimal dimension estimating the set of admissible values of the specified linear vector function of the system state are derived. Theoretical results are illustrated by the example.

Keywords: discrete-time linear systems, disturbances, measurement noise, parametric uncertainties, interval observer.

Введение. Статья является логическим продолжением работы [1], в которой рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем при наличии внешних возмущений и шумов измерений.

Задача построения интервальных наблюдателей активно исследуется последние годы, обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [2, 3], решения для различных классов систем, а также практические приложения можно найти в [4–11]. Особенностью этих работ является то, что в них определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в теории же и на практике интерес может представлять интервальная оценка только для значений заданной линейной функции этого вектора. Такой интервальный наблюдатель может иметь меньшую размерность, чем наблюдатель для полного вектора состояния, а точность оценивания выше. Кроме того, динамика наблюдателя может

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 23-29-000191), <https://rscf.ru/project/23-29-000191/>.

быть представлена в канонической форме, что позволяет упростить процесс решение задачи и расширить класс систем, для которых интервальные наблюдатели могут быть построены.

В статье ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для стационарных дискретных систем, описываемых линейными динамическими моделями, работающими в условиях действия внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

1. Основные модели и постановка задачи. Предполагается, что рассматриваемые системы описываются дискретной линейной моделью

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\y(t) &= Hx(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния и выхода; $u(t) \in R^m$ – точно известный вектор управления, $F \in R^{n \times n}$, $G \in R^{n \times m}$, $L \in R^{n \times q}$ и $H \in R^{l \times n}$ – постоянные матрицы; $\rho(t) \in R^q$ описывает внешние возмущения и полагается неизвестной ограниченной функцией времени, $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$; $\tilde{A}(t) \in R^{l \times n}$ описывает шумы измерений и также является неизвестной ограниченной функцией времени, $\|\tilde{A}(t)\| \leq v_*$; здесь символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма; $\mu(t) \in \Pi \subset R^s$ – ограниченный вектор переменных параметров. Как и в [2], предполагается, что значения вектора $\mu(t)$ недоступны для измерений, множество Π известно, матричная функция $\Delta F(\mu)$ ограничена для всех $\mu \in \Pi$: $\underline{\Delta F} \leq \Delta F(\mu) \leq \overline{\Delta F}$ с известными границами $\underline{\Delta F}$ и $\overline{\Delta F}$. Как и в [2], для векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$ и матриц $A^{(1)}, A^{(2)}$ отношения $x^{(1)} \leq x^{(2)}$ и $A^{(1)} \leq A^{(2)}$ понимаются поэлементно.

Как следует из описания системы (1.1), неопределенность в задаче представлена в виде шума измерений $v(t)$ и возмущения $\rho(t)$ с верхними границами v_* и ρ_* соответственно для всех $t \geq 0$, а также и параметрической неопределенности ΔF из интервала $(\underline{\Delta F}, \overline{\Delta F})$.

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, не чувствительный или мало чувствительный к внешним возмущениям и параметрическим неопределенностям, формирующий нижнюю $\underline{z}(t)$ и верхнюю $\overline{z}(t)$ границы линейной вектор-функции состояния, которая задана известной матрицей M в виде

$$z(t) = Mx(t), z(t) \in R^p, M \in R^{p \times n},$$

такие, что $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$ при всех $t \geq 0$. Вид матрицы M определяется решаемой задачей, в частности, в примере разд. 6 требуется оценить неизмеряемую компоненту вектора состояния системы. Поскольку задачи учета шума измерений и возмущений для дискретных и непрерывных систем решаются практически одинаково, а последние были детально рассмотрены в [1], в настоящей работе акцент сделан на параметрические неопределенности; поэтому предположим вначале, что $v(t) = 0$ и $\rho(t) = 0$, в результате чего модель (1.1) упрощается:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t), \\y(t) &= Hx(t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

В [1] показано, что для непрерывных систем интервальный наблюдатель может быть построен на основе модели минимальной размерности, реализованной в двух разных канонических формах – идентификационной (ИКФ) и жордановой. Для дискретных систем более предпочтительной представляется ИКФ, которая является устойчивой и неотрицательной, что соответствует требованиям, предъявляемые к дискретным интервальным наблюдателям [2]. Отметим, что неотрицательность используется в доказательстве теоремы 1, а устойчивость – это стандартное требование к наблюдателю.

Решение задачи построения интервального наблюдателя основано на модели исходной системы (1.2) минимальной размерности, оценивающей вектор-функцию $z(t)$:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= (F_* + \Delta F_*)x_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ z(t) &= H_z x_*(t) + Qy(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния модели, k – ее размерность, F_* , J , J' , G_* , L_* , H_z и Q – матрицы, подлежащие определению, матрица J' – это поправка на параметрическую неопределенность. По аналогии с (1.2) предполагается, что $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$ для известных $\underline{\Delta F}_*$ и $\overline{\Delta F}_*$ и $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \overline{x}_*(0)$.

Для решения задачи будем полагать, что векторы $x(t)$ и $x_*(t)$ связаны матрицей Φ :

$$x_*(t) = \Phi x(t).$$

Известно [12, 13], что при $\Delta F(\mu) = 0$ и $\Delta F_* = 0$ матрицы, описывающие модель, удовлетворяет уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, G_* = \Phi G, J' = 0. \quad (1.4)$$

Представим второе уравнение в (1.3) вместе с $z(t) = Mx(t)$ в виде линейного алгебраического уравнения

$$M = H_z \Phi + QH = \begin{pmatrix} H_z & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

с неизвестными матрицами H_z и Q ; оно имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

т.е. если каждая строка матрицы M линейно выражается через строки матриц Φ и H , согласно (1.5).

Замечание 1. Рассматриваемый подход имеет некоторые ограничения, связанные с параметрической неопределенностью ΔF и условием на нее в виде $\underline{\Delta F} \leq \Delta F(\mu) \leq \overline{\Delta F}$. Неопределенность ΔF_* , входящая в (1.3), определяется на основе ΔF следующим образом. Из (1.2) и (1.3) по аналогии с (1.4) следует

$$\Phi(F + \Delta F) = (F_* + \Delta F_*)\Phi + J_* H + J' H.$$

Поскольку матрица Φ удовлетворяет условию $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$, то $\Phi \Delta F = \Delta F_* \Phi + J' H$ или

$$\Phi \Delta F = \begin{pmatrix} \Delta F_* & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

После определения матрицы Φ из уравнения (1.7) вычисляются ΔF_* и J' .

2. Построение модели. Для упрощения процесса решения задачи матрица F в (1.3) задается в ИКФ:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

В отличие от непрерывного случая, когда для обеспечения устойчивости собственные числа должны иметь отрицательные вещественные части, в дискретном они по модулю не должны превосходить единицу; для рассматриваемой ИКФ они равны нулю.

Согласно (1.3), неопределенность ΔF в виде слагаемого ΔF_* влияет на модель, а следовательно, и на ширину интервала $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$. Ясно тогда, что наилучшей с точки зрения ширины интервала является модель, не чувствительная к неопределенности ΔF , т.е. когда в (1.3) $\Delta F_* = 0$. Тогда по аналогии с [12, 13] решение осуществляется на основе уравнения, гарантирующее такую нечувствительность:

$$(\Phi_1 - J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k}) \begin{pmatrix} V^{(k)} \\ \Delta^{(k)} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta F & F\Delta F & \dots & F^{k-1}\Delta F \\ 0 & H\Delta F & \dots & HF^{k-2}\Delta F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Φ_i и J_i – i -е строки матриц Φ и J_* . Матрица $V^{(k)}$ обеспечивает построение модели (1.3), $\Delta^{(k)}$ – ее нечувствительность к неопределенности ΔF . Уравнение (2.2) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} V^{(k)} \\ \Delta^{(k)} \end{pmatrix} < lk + n. \quad (2.3)$$

Для построения модели условие (2.3) проверяется последовательно для $k = 1, k = 2, \dots$ и выбирается минимальное k , при котором оно выполняется; далее из (2.2) определяется строка $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$, затем на основе известных [12, 13] соотношений

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_k H, \quad (2.4)$$

полученных из (1.4) и (2.1), строится матрица Φ . Далее проверяется условие (1.6), выполнение которого означает, что матрица M может быть выражена через $(\Phi^T H^T)^T$ и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную $z = Mx$; матрицы H_z и Q определяются из уравнения (1.5) и G – из (1.4). Если условие (1.6) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (2.2) при прежнем или увеличенном значении k . Если условие (2.3) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад неопределенности ΔF в модель, который традиционно оценивается нормой Фробениуса матрицы $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k}) \Delta^{(k)}$ [14].

3. Построение интервального наблюдателя. Поскольку в модель (1.3) входит произведение $J'y(t)$, а неопределенность ΔF , согласно (1.7), может входить в матрицу J' , вклад этой неопределенности в наблюдатель зависит от значений переменной $y(t)$. Отметим, что,

согласно (1.7), J' зависит от ΔF линейно. Для учета этого обстоятельства свяжем с J' бинарную переменную c следующим образом (предполагается для простоты, что только один элемент матрицы J' зависит от ΔF): если при возрастании ΔF значение этого элемента также возрастает, то $c = 1$, в противном случае $c = -1$. Введем матрицы \underline{J}_0 и \bar{J}_0 :

$$\underline{J}_0 = \begin{cases} J'(** \underline{\Delta F} *), \text{ если } cy(t) > 0, \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ J'(** \overline{\Delta F} *), \text{ если } cy(t) < 0, \end{cases} \quad \bar{J}_0 = \begin{cases} J'(** \overline{\Delta F} *), \text{ если } y(t) > 0, \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ J'(** \underline{\Delta F} *), \text{ если } y(t) < 0. \end{cases}$$

Символом «*» отмечены элементы, не зависящие от ΔF . Если матрица J' не зависит от ΔF_* , то $\underline{J}_0 = \bar{J}_0 = J'$. Тогда

$$(J' - \underline{J}_0)y(t) = \begin{cases} (J'(** \Delta F *) - J'(** \underline{\Delta F} *))y(t) \geq 0, \text{ если } cy(t) > 0 \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ (J'(** \Delta F *) - J'(** \overline{\Delta F} *))y(t) \geq 0, \text{ если } cy(t) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $(J' - \underline{J}_0)y(t) \geq 0$; аналогично можно показать, что $(\bar{J}_0 - J')y(t) \geq 0$.

По аналогии с [2] предлагаются два варианта построения интервальных наблюдателей – более простой, но с ограничениями на исходную систему, и более сложный без ограничений. Рассмотрим оба варианта, начав с первого, когда дополнительно предполагается, что $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ и $x_*(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. В этом случае наблюдатель строится на основе модели (1.3) с матрицами, определенными при построении этой модели, и ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (F_* + \underline{\Delta F}_*)\underline{x}_*(t) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_*u(t) \\ \bar{x}_*(t+1) &= (F_* + \overline{\Delta F}_*)\bar{x}_*(t) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_*u(t), \\ &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy(t) \underline{x}_*(0) = \underline{x}_0, \bar{x}_*(0) = \bar{x}_0 \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

уравнения для которых с учетом (1.3) и (3.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \underline{\Delta F}_* x_*(t) - \underline{\Delta F}_* \underline{x}_*(t) + (J' - \underline{J}_0)y(t), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + \overline{\Delta F}_* \bar{x}_*(t) - \overline{\Delta F}_* x_*(t) + (\bar{J}_0 - J')y(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теорема 1. Пусть $0 \leq \underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$, $H_z \geq 0$, $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ и $x_*(t) \geq 0$, тогда для интервального наблюдателя (3.1) и всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t). \tag{3.4}$$

Доказательство. Выше было показано, что $(J' - \underline{J}_0)y(t) \geq 0$. Далее, из $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, согласно (3.2), следует $\underline{e}_*(0) \geq 0, \bar{e}_*(0) \geq 0$. Из (3.3) получаем $\underline{e}_*(1) = F_* \underline{e}_*(0) + \underline{\Delta F}_* x_*(0) - \underline{\Delta F}_* \bar{x}_*(0)$.

Поскольку $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ и $\underline{x}^*(0) \leq x_*(0)$, то $\underline{\Delta F}_*(x_*(0) - \underline{x}^*(0)) \geq 0$ и $\underline{\Delta F}_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* \underline{x}^*(0)$. Так как $\Delta F_* \geq \underline{\Delta F}_*$ и $x_*(0) \geq 0$, то $(\Delta F_* - \underline{\Delta F}_*)x_*(0) \geq 0$ и $\Delta F_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* x_*(0)$, откуда с учетом предыдущего получаем $\Delta F_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* \underline{x}^*(0)$. Так как $\underline{e}_*(0) \geq 0$ и $F_* \geq 0$, то из (3.3) следует $\underline{e}_*(1) \geq 0$, т.е. $\underline{x}_*(1) \leq x_*(1)$. По индукции можно доказать неравенства $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t)$ и аналогичные $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. Так как $z(t) = H_z x_*(t) + Qu(t)$, из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = H_z x_*(t) + Qu(t) - (H_z \underline{x}_*(t) + Qu(t)) = H_z \underline{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = H_z \bar{x}_*(t) + Qu(t) - (H_z x_*(t) + Qu(t)) = H_z \bar{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \geq 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$, что эквивалентно $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$. Теорема доказана.

Замечание 2. В [2], где рассматривается аналогичная задача по оценке полного вектора состояния непрерывных систем, на исходную систему накладывается больше ограничений и доказательство заметно сложнее; в нашем случае оно упрощается за счет канонической формы матрицы F_* . Кроме того, наблюдатель в [2] имеет более сложный вид за счет введения в уравнения (3.1) дополнительных членов, обеспечивающих, в частности, устойчивость наблюдателя. В дискретном случае использование таких членов не дает требуемого результата, но для доказательства ограниченности переменных $\underline{x}_*(t)$ и $\bar{x}_*(t)$ требуется, чтобы матрицы $F_* + \underline{\Delta F}_*$ и $F_* + \Delta F_*$ в наблюдателе (3.1) были устойчивы.

Замечание 3. В случае $H_z \leq 0$ границы $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ определяются соотношениями $\underline{z} = H_z \bar{x}_* + Qu$ и $\bar{z} = H_z \underline{x}_* + Qu$. Действительно, тогда

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = H_z x_*(t) + Qu(t) - (H_z \bar{x}_*(t) + Qu(t)) = -H_z \bar{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = H_z \underline{x}_*(t) + Qu(t) - (H_z x_*(t) + Qu(t)) = -H_z \underline{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0, \bar{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \leq 0$ также получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$.

Рассмотрим более сложный интервальный наблюдатель без ограничений на исходную систему. Изложение предварим леммой.

Лемма. Пусть $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ для некоторых $(n \times n)$ -матриц \underline{A}, \bar{A} и $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ для n -мерных векторов $\underline{x}, x, \bar{x}$. Тогда

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (3.5)$$

где $A^+ = \max(0, A)$, $A^- = A^+ - A$; для переменных $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ аналогично.

Доказательство. Приведено в [6].

Интервальный наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\Delta F_*^+ \underline{x}_*^+(t) - \overline{\Delta F_*^+} \underline{x}_*^-(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*^+(t) + \overline{\Delta F_*^-} \bar{x}_*^-(t)) + (J_* + \underline{J}_0)u(t) + G_* u(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= F_* \bar{x}_*(t) + (\overline{\Delta F_*^+} \bar{x}_*^+(t) - \Delta F_*^+ \bar{x}_*^-(t) - \overline{\Delta F_*^-} \underline{x}_*^+(t) + \\ &\quad + \underline{\Delta F_*^-} \underline{x}_*^-(t)) + (J_* + \bar{J}_0)u(t) + G_* u(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* x_*(t) - (\Delta F_*^+ \underline{x}_*^+(t) - \overline{\Delta F_*^+} \underline{x}_*^-(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*^+(t) + \overline{\Delta F_*^-} \bar{x}_*^-(t)), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + (\overline{\Delta F_*^+} \bar{x}_*^+(t) - \Delta F_*^+ \bar{x}_*^-(t) - \overline{\Delta F_*^-} \underline{x}_*^+(t) + \underline{\Delta F_*^-} \underline{x}_*^-(t)) - \Delta F_* x_*(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$, $H_z \geq 0$ и $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, тогда для интервального наблюдателя (3.6) и всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \quad \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t).$$

Доказательство. Из $\underline{x}_{\bar{\Delta}}(\bar{\Delta}) \leq x(\cdot) \leq \bar{x}(\cdot)$, согласно (3.2), следует $\underline{e}_*(0) \geq 0$, $\bar{e}(0) \geq 0$. Поскольку $F_* \geq 0$, из (3.7) и леммы вытекает $\underline{e}_*(1) \geq 0$ т.е. $\underline{x}_*(1) \leq x_*(1)$. По индукции можно доказать неравенства $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t)$ и аналогичные $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. Вторая часть теоремы доказывается по аналогии с такой же частью теоремой 1. Теорема доказана.

Замечание 4. Если вектор параметров постоянен, но точно не известен, то функция $\Delta F(\mu)$ также постоянна. В этом случае соотношение (3.5) упрощается и принимает вид [6]

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x}.$$

Интервальный наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\Delta F_*^+ \underline{x}_*(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*(t)) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_* u(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= F_* \bar{x}_*(t) + (\Delta F_*^+ \bar{x}_*(t) - \Delta F_*^- \underline{x}_*(t)) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_* u(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned}$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* x_*(t) - (\Delta F_*^+ \underline{x}_*(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*(t)), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + (\Delta F_*^+ \bar{x}_*(t) - \Delta F_*^- \underline{x}_*(t)) - \Delta F_* x_*(t). \end{aligned}$$

Теорема 2 и ее доказательство трансформируются очевидным образом.

Сравнение рассмотренных вариантов показывает, что первый накладывает больше ограничений на систему (1.2), нежели второй, но дает более простую конструкцию интервального наблюдателя.

4. Робастное решение. Если условие (2.3) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад неопределенности ΔF в модель, который традиционно оценивается нормой Фробениуса матрицы $(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) \Delta^{(k)}$ [14]. Оно практически полностью совпадает с решением, предложенным в [1], за исключением того, что минимизируется норма $\left\| (\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) \Delta^{(k)} \right\|_F$ при выполнении условия

$$(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) V^{(k)} = 0. \tag{4.1}$$

Отметим, что общая идея получения робастного решения была предложена в [14].

Как и в [1], определяется минимальное значение k , при котором уравнение (4.1) имеет несколько линейно независимых решений, которые сводятся в матрицу

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_1^{(1)} & -J_2^{(1)} & \dots & -J_k^{(1)} \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ \Phi_1^{(N)} & -J_1^{(N)} & -J_2^{(N)} & \dots & -J_k^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $W \Delta^{(k)} = U_\Delta \Sigma_\Delta V_\Delta$, первый транспонированный столбец матрицы U_Δ выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$

и принимается $(\Phi_1 \ -J_1 \ \dots \ -J_k) = wW$. Определением матриц Φ , $G_* = \Phi G$ и ΔF_* завершается синтез модели (1.3), минимально чувствительной к неопределенности ΔF .

Аналогичным образом можно искать решение, минимизирующее вклад возмущения $\rho(t)$ в модель. Для этого строится матрица

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $WL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$, первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$ и принимается $(\Phi_1 \ -J_1 \ \dots \ -J_k) = wW$. Определением матриц Φ , $G_* = \Phi G$ и $L_* = \Phi L$ завершается синтез модели (1.3), минимально чувствительной к возмущениям.

5. Учет возмущений и погрешности измерений. Наличие возмущения $\rho(t) \neq 0$ в случае $L = \Phi L \neq 0$ приводит к тому, что статическая часть модели (1.3) должна быть скорректирована следующим образом:

$$z(t) = H_z x_*(t) + Qy_0(t);$$

переменная $y_0(t)$, входящая в это уравнение, должна формироваться так, чтобы $z(t)$ была не чувствительной к возмущению. Так как $y_0(t)$ – это преобразованный вектор $y(t)$, $y_0(t) = N_1 y(t) = N_1 Hx(t)$. Далее введем матрицу L_0 максимального ранга, такую, что $L_0 L = 0$. Поскольку вектор $x'(t) = L_0 x(t)$ не чувствителен к возмущению, то $y_0(t) = N_2 x'(t)$ для некоторой матрицы N_2 . Тогда для матриц N_1 и N_2 получаем уравнение $N_1 H = N_2 L_0$, которое имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0) + \text{rank}(H).$$

Если это условие выполняется, матрицы N_1 и N_2 определяются из уравнения

$$(N_1 \ -N_2) \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

При наличии возмущений и погрешностей измерений модель пополняется слагаемыми $(J_* + J')v(t)$ и $L_* \rho(t)$; для их компенсации с целью получения неотрицательных значений ошибок оценивания $\underline{e}_*(t)$ и $\bar{e}_*(t)$ в наблюдатель добавляются слагаемые $-(|J_* + J'|)E_k v_*$ и $-|L_*|E_k \rho_*$ для переменной $\underline{x}_*(t)$ и $(|J_* + J'|)E_k v_*$ и $|L_*|E_k \rho_*$ для переменной $\bar{x}_*(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (F_* + \Delta F_*)\underline{x}_*(t) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_*u(t) - (|J_* + J'|)E_k v_* - |L_*|E_k \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (F_* + \overline{\Delta F_*})\bar{x}_*(t) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_*u(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* + |L_*|E_k \rho_*, \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $|J_* + J'|$ и $|L_*|$ – матрицы, составленные из абсолютных значений элементов матриц $J_* + J'$ и L_* , E_k – $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц. Выражения (3.3) для ошибок оценивания также корректируются:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* \underline{x}_*(t) - \underline{\Delta F_*} \underline{x}_*(t) - (J_* + J')v(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* + L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*, \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + \overline{\Delta F_*} \bar{x}_*(t) - \overline{\Delta F_*} \bar{x}_*(t) + (J_* + J')v(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* - L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомый результат следует из доказательства теоремы 1 и очевидных дополнительных неравенств $\left(|J_* + J'| \right) E_k v_* \pm (J_* + J') v(t) \geq 0$ и $|L_*| E_k \rho_* \pm L_* \rho(t) \geq 0$.

Изложим все сказанное выше в виде обобщенного алгоритма.

Алгоритм.

1. Из условия (2.3) найти минимальную размерность k .
2. Из (2.2) и (2.4) определить матрицы Φ и L^* .
3. При условии выполнения (1.6) из (1.5) и (1.7) найти матрицы H_z , Q и J' .
4. Построить интервальный наблюдатель (3.1) или (3.6), или (5.1).
5. Если условие (1.6) не выполняется, найти робастное решение на основе результатов разд. 4.
6. **Пример.** Рассмотрим дискретизированную модель электропривода [15]:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= (k_2 + \Delta_1(t)) x_3(t) + x_2(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_3 x_2(t) + (k_4 + \Delta_2(t)) x_3(t) + k_5 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), y_2(t) = x_3(t) + v_2(t), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ – это скорость и угол вращения вала двигателя и ток якоря соответственно; коэффициенты $k_1 - k_5$ представляют параметры электропривода и интервал дискретизации; возмущение $\rho(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; неопределенность $\Delta_1(t)$ вызвана изменением инерционных свойств механических частей электропривода, $\Delta_2(t)$ – изменением активного сопротивления цепи якоря электродвигателя из-за его нагрева. Модель (6.1) описывается следующими матрицами:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta_1 F(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $x_2(t)$, приняв $M = (0 \ 1 \ 0)$. Поскольку неопределенность $\Delta_1(t)$ входит в уравнение для этой переменной, сделать модель нечувствительной к ней невозможно, поэтому ее можно строить, приняв $\Delta_1(t) = 0$. Уравнение (2.2) с $\Delta^{(k)} = 0$ с размерностью модели $k = 1$ имеет вид

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает $\Phi = (1/k_1 \ -1 \ 0)$ и $J_* = (1/k_1 \ -k_2)$, откуда $G_* = 0$, $L_* = -1$. Нетрудно проверить, что условие (1.5) выполняется и $H_z = -1$, $Q = (1/k_1 \ 0)$; из (1.6) следует $\Delta F_1 = 0$, $J'_1 = (0 - \Delta_1)$ и $\Delta F_2 = 0$, $J'_2 = 0$. Модель (1.3) для системы (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1/k_1) y_1(t) - (k_2 + \Delta_1(t)) y_2(t) - \rho(t), \\ z(t) &= -x(t) + (1/k_1) y_1(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для $J_1' = (0 - \Delta_1)$ переменная $= -1$. Рассмотрим такой режим работы электропривода, когда $x_2(t) = y_2(t) \geq 0$ при $v_2(t) = 0$. Тогда из определения матриц J_0 и \bar{J}_0 следует $\underline{J}_0 = \bar{\Delta}_1$, $\bar{J}_0 = \underline{\Delta}_1$. Так как $H_z = -1$, интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $z(t) = x_2(t)$, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - (k_2 + \bar{\Delta}_1)y_2(t) - (1/k_1)v_1 - k_2v_2 - \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - (k_2 + \underline{\Delta}_1)y_2(t) + (1/k_1)v_1 + k_2v_2 + \rho_*, \\ \underline{z}(t) &= -\bar{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t), \bar{z}(t) = -\underline{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Переменные $x_1(t)$ и $x_3(t)$ могут быть оценены, согласно формулам измерений из (6.1):

$$\underline{x}_1(t) = y_1(t) - v_1, \underline{x}_3(t) = y_2(t) - v_2, \bar{x}_1(t) = y_1(t) + v_1, \bar{x}_3(t) = y_2(t) + v_2.$$

Сравнивая полученные оценки с оценками, которые строятся на основе [2] и аналогичных работ, можно сделать вывод о том, что предложенный подход дает более простой наблюдатель и интервалы меньших размеров, поскольку, в частности, не все они содержат параметрические неопределенности.

Для моделирования рассмотрим систему (6.1) и наблюдатель и (6.2) с $u(t) = 0.2\sin(t/20)$ и $\Delta_1(t) = 0.3(1 + \sin(10t))$; шумы $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $\rho(t)$ в каждый момент времени t представляют собой независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(-0,01; 0,01)$. Для простоты примем $k_1 = k_2 = k_5 = 1$, $k_3 = k_4 = -1$. Результаты моделирования приведены на рисунке, где при $v_{1*} = v_{2*} = \rho = 0.015$ и $\underline{\Delta}_1 = 0$, $\bar{\Delta}_1 = 0.6$ показано поведение переменной $x_2(t)$ и ее нижней и верхней оценок $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = (0, -0.05)^T$, $\bar{x}(0) = (0, 0.05)^T$.

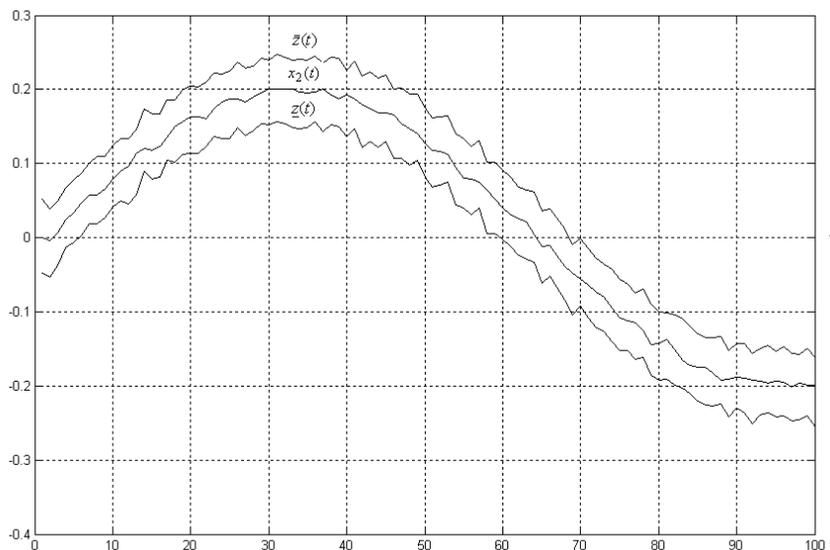


Рисунок. Поведение переменной $x_2(t)$ и ее оценок $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$

Заключение. Рассмотрена задача построения интервальных наблюдателей в системах, описываемых линейными дискретными моделями, которые позволяют оценивать множество допустимых значений заданной линейной вектор-функции состояния системы при наличии

внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. Предложен метод построения интервальных наблюдателей на основе предварительно синтезированной модели (1.3) с матрицами, определенными при синтезе этой модели на базе соотношений (1.4) и (1.5), а также идентификационной канонической формы матрицы F (2.1), которая позволяет получить простой метод минимизации размерности модели и обеспечить его нечувствительность или малую чувствительность к внешним возмущениям и параметрическим неопределенностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Ким Чхун Ир* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 22-32.
2. *Ефимов Д. В., Раиси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // АИТ. 2016. № 2. С. 5-49.
3. *Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.* Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. V. 14. P. 721-740.
4. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using Fuzzy Interacting Observers for Fault Diagnosis in Systems with Parametric Uncertainty // Proc. XII-th Inter. Sympos. «Intelligent Systems», INTELS'16. Moscow, Russia, 2016. P. 499-504.
5. *Кремлев А. С., Чеботарев С. Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 4. С. 42-46.
6. *Efimov D., Raissi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. 2013. V. 49. P. 200-206.
7. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval Observers for Continuous-time LPV Systems with L_1/L_2 Performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82-89.
8. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // IEEE Trans. Automatic Control. 2010. V. 55. №. 2. P. 523-527.
9. *Blesa J., Puig V., Bolea Y.* Fault Detection Using Interval LPV Models in an Open-flow Canal // Control Engineering Practice. 2010. V. 18. P. 460-470.
10. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // IFAC NOLCOS 2013. Toulouse, France, 2013.
11. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-Minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // Intern. J. Control. 2019. DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
12. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Шумский А. Е.* Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 73–89.
13. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Шумский А. Е.* Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // АИТ. 2020. № 2. С. 18–35.
14. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems // Automatica. 1996. V. 22. P. 333-344.
15. *Филаретов В. Ф., Зуев А. В., Губанков А. С.* Управление манипуляторами при выполнении различных технологических операций. М.: Наука, 2018.

УДК 510.64–519.816

ОБЪЯСНИТЕЛЬНЫЙ ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В АНАЛИЗЕ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ¹

© 2024 г. А.Н. Аверкин^{a,*}, Е.Н. Волков^{a,**}, С.А. Ярушев^{a,***}

^aРЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия

*e-mail: averkin2003@inbox.ru,

**e-mail: envolkoff@gmail.com

***e-mail: sergey.yarushev@icloud.com

Поступила в редакцию 06.05.2023 г.

После доработки 31.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Показаны возможности искусственного интеллекта в анализе цифровых изображений в области медицины с помощью сверточных нейронных сетей глубокого обучения. Рассматривается новое поколение систем искусственного интеллекта с объяснением пользователю алгоритмов принятия решений — объяснительный искусственный интеллект. Приводится таксономия методов объяснения и описание самих методов. Дано обоснование необходимости применения объяснительного искусственного интеллекта в задачах классификации на примере офтальмологических заболеваний. Проведено исследование используемых в обзоре работ составляющих методов глубокого обучения (архитектуры нейронных сетей, точности, характеристики наборов данных) и объяснительного искусственного интеллекта (методы объяснения, критерии точности объяснения). В качестве примера рассматривается задача распознавания двух наиболее часто диагностируемых заболеваний глаза: диабетической ретинопатии и глаукомы искусственными нейронными сетями.

Ключевые слова: объяснимый искусственный интеллект (ОИИ), машинное обучение, глубокое обучение, нейросети, нейро-нечёткие системы, анализ цифровых изображений, точность объяснения, офтальмология

DOI: 10.31857/S0002338824010122, EDN: WJCMWV

EXPLAINABLE ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN DEEP LEARNING NEURAL NETS-BASED DIGITAL IMAGES ANALYSIS

© 2024 A.N. Averkin^{a,*}, E.N. Volkov^{a,**}, S.A. Yarushev^{a,***}

^aPlekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

*e-mail: averkin2003@inbox.ru,

**e-mail: envolkoff@gmail.com

***e-mail: sergey.yarushev@icloud.com

This review shows the capabilities of artificial intelligence in the analysis of digital images in the field of medicine using convolutional neural networks of deep learning. A new generation of artificial intelligence systems is described with an explanation of decision-making algorithms to the user — explainable artificial intelligence (XAI). The taxonomy of the methods of explanation and the description of the methods themselves are given. The substantiation of the need to use explainable artificial intelligence in classification tasks is given on the example of ophthalmic diseases. The study of the components of deep learning methods used in the reviewed works (neural network architecture, accuracy, characteristics of data sets) and explainable artificial intelligence (methods of explanation, criteria for the accuracy of explanation). As an example, the problem of recognizing two of the most commonly diagnosed eye diseases: diabetic retinopathy and glaucoma by artificial neural networks is considered.

Keywords: explainable artificial intelligence, machine learning, deep learning, neural networks, neuro-fuzzy systems, digital image analysis, accuracy of explanation, ophthalmology, XAI

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10112, <https://rscf.ru/project/22-71-10112/>.

Введение. Период с 2010 по 2020 г. называют декадой искусственного интеллекта (decade of artificial intelligence), тесно связанной с декадой сознания (decade of mind) по классификации ЮНЕСКО. За последние 10—15 лет количество исследований в области искусственного интеллекта (ИИ) и его приложений возросло в тысячи раз по сравнению с периодом до 2010 г. Использование технологий машинного обучения (ML) и глубокого обучения (DL) перестало быть уделом академических исследований, заняв свою нишу в создании цифровых продуктов. Стремительное развитие искусственных нейронных сетей (ИНС), повышение их точности и оптимизация вычислительных затрат позволили создавать продукты на основе ИИ, востребованные во всех сферах человеческой жизни. По оценке Harvard Business Review [1], в нынешнем десятилетии ИИ принесет более 13 трлн долл. в мировую экономику.

До того как технология ИИ стала мейнстримом, она проделала путь длиной в полвека. Первые два поколения ИИ пришлось на последнюю треть XX и начало XXI в. Первое поколение ИИ (1960—1990 гг.) было завершено переходом от экспертных систем и символьного ИИ к коннекционистским системам ИИ, основанным на глубоком обучении и больших данных, характерных для второго поколения ИИ (2000—2020 гг.). Искусственный интеллект третьего поколения (2020—2030 гг.) предполагает возможности интерпретации и объяснения используемых алгоритмов, что значительно повышает надежность по сравнению с предыдущими поколениями [2].

Подход в оценке развития ИИ с помощью разделения временных промежутков на “волны” или “поколения” предложен Управлением перспективных исследовательских проектов Министерства обороны США DARPA (рис. 1). На сегодняшний день программа DARPA по ИИ является наиболее дорогой правительственной программой по развитию ИИ в истории человечества. К 2022 г. по программе DARPA только в развитие третьего поколения ИИ уже инвестировано более 2 млрд долл. США [3].

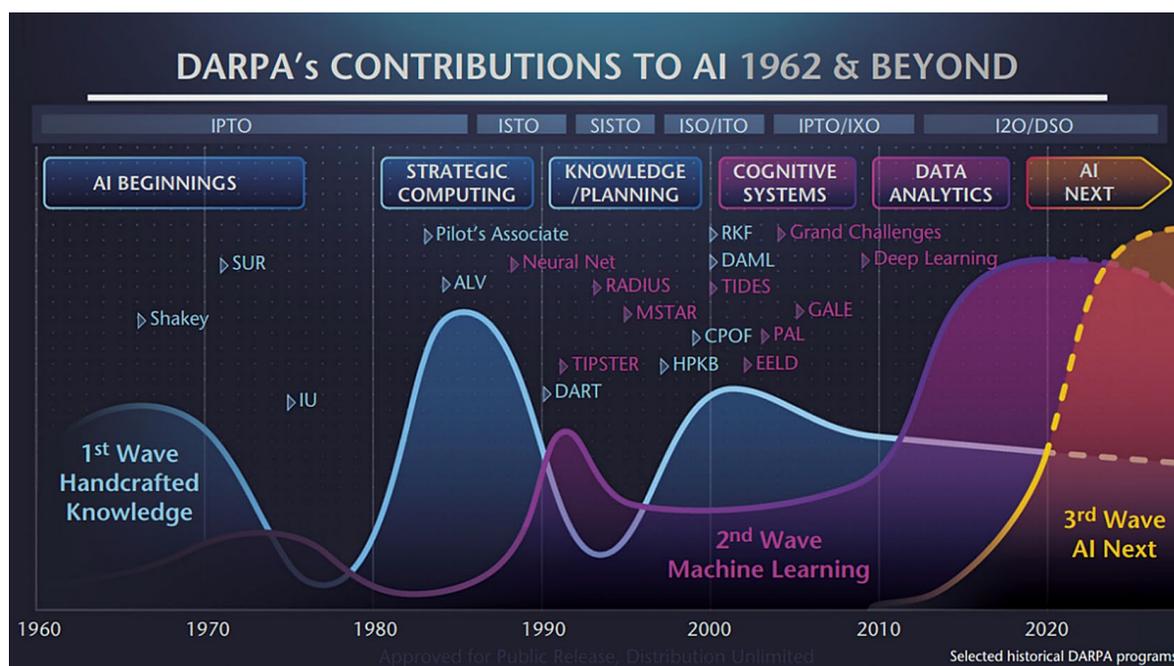


Рис. 1. Вклад DARPA в ИИ [4]

На рис. 1 графически представлен финансовый вклад DARPA в ИИ начиная с 1962 г. [4]. Показано три волны инвестиций DARPA (с несколькими локальными экстремумами), высота каждой волны соответствует величине инвестиций DARPA. На рисунке также показаны избранные исторические программы ИИ, финансируемые DARPA. Первая волна называется “волна знаний ручной работы” (1st wave handcrafted knowledge), что соответствует первому поколению символьного ИИ, основанного на экспертных знаниях. Вторая волна машинного обучения (2nd wave machine learning) соответствует второму поколению ИИ, базирующемуся на нейронных сетях глубокого обучения. Третья волна “следующий искусственный интеллект” (3rd wave AI next) соответствует третьему поколению ИИ, основанному на объяснительном ИИ (ОИИ). Программа AI next предполагает серьезные усилия по устранению ограничений существующего ИИ.

DARPA считает, что текущие инвестиции в исследования и разработки по всему миру слишком сосредоточены на ИИ второго поколения или машинном обучении, которые хорошо подходят для поиска закономерностей в тексте и в изображениях и имеют множество коммерческих приложений, но являются плохо интерпретируемыми для пользователя. Программа AI next сделает ИИ второго поколения волны более надежным для защиты и интерпретации приложений и для обеспечения безопасности, одновременно помогая реализовать третье поколение ИИ (ОИИ и контекстуального мышления). Включение этих технологий в будущие системы ИИ должно облегчить процесс принятия решений; обеспечить совместное понимание большой по объему, неполной и противоречивой информации; расширить возможности автономных робототехнических и беспилотных систем для безопасного выполнения критических миссий.

В настоящее время ОИИ выступает неотъемлемой частью любых интеллектуальных систем (ИС), созданных для работы в ответственных предметных областях. Чаще всего ОИИ используется в медицине как одной из наиболее важных областей для оценки качества полученных ИИ решений. Методы ИИ в медицине применялись с 70-х годов прошлого века, но только с появлением решений на основе машинного обучения и глубокого обучения это направление достигло результатов, сравнимых с возможностями человека-врача, что привело к большому количеству коммерческих применений. Согласно метаобзору [5], уже в 2020 г. в базе данных PubMed было проиндексировано более 11 000 исследований, посвящённых использованию ИИ в медицине. Во многом это стало возможно благодаря накопленным объёмам медицинских данных (медицинские изображения, клинические записи). Применение ИИ в медицине сосредоточено в нескольких направлениях: анализ медицинских изображений [6] и изображений в области микроскопии [7], анализ клинических записей [8], выбор тактики лечения для конкретного заболевания [9], здравоохранение и медицинская помощь [10].

Главной проблемой использования ИИ в ответственных для принятия решений системах всегда была точность и надёжность. С возникновением ИНС прибавилась задача прозрачности процесса классификации и объяснения принятого решения, появилось доверие к технологии. Решением проблемы становится применение ИИ третьего поколения в медицинских системах за счет присутствующей ключевой возможности объяснения результата своей работы. В системах третьего поколения ИИ, как и в системах первого поколения, объясняется внутренняя работа системы. С этой целью системы первого поколения ИИ использовали экспертные знания в правилах и базах знаний и пытались составить языковые описания на базе оценок экспертов. В системах ИИ второго поколения задача оказалась значительно сложнее. Третье поколение ИИ решает эту проблему, хотя недостатки объяснительных систем первого поколения, связанные со слабым уровнем детализации и непонятным языком, могут стать вопросом и для систем третьего поколения. Решение этой проблемы облегчает тот факт, что со времени создания систем объяснения первого поколения, основанных на правилах, компьютерных технологиях и в визуализации данных, анимации, видео и т. п., значительно продвинулись вперед по сравнению с первым поколением, и много новых идей было предложено в качестве потенциальных методов для генерации объяснений [11].

Объяснительный ИИ устроен таким образом, чтобы наблюдающий со стороны пользователь мог понять, почему именно алгоритм принял то или иное решение. Такие методы приходят на смену принципу “черного ящика”, при котором даже сами создатели ИИ не всегда в состоянии объяснить принципы его работы. ОИИ — это важная часть общего тренда, который цикл зрелости технологий Гарднера называют “trust in algorithm” (доверие к алгоритму). Чем больше ИИ заменяет человеческие решения, тем больше он усиливает положительные и отрицательные последствия таких решений. Оставленные без контроля подходы на основе ИИ могут увековечить закрытость и предвзятость, ведущую к проблемам потери производительности и доходов. Двигаясь вперед, организации должны разрабатывать и эксплуатировать системы ИИ на принципах справедливости и прозрачности, заботиться о безопасности и конфиденциальности для общества в целом.

В настоящее время существует постоянно расширяющийся набор методов ОИИ, в англоязычных источниках — ХАИ (explainable artificial intelligence). Методы ОИИ могут делиться по типам интерпретации результатов. Они содержат модели с внутримодельным объяснением, которые хорошо структурированы и понятны. Эти модели могут давать ответы вместе с объяснениями на базе лингвистического интерпретатора. Другой тип моделей — это модели с постфактумным объяснением. Объяснения в этих моделях получаются с помощью внешних методов анализа моделей ИИ, т.е. методов обратного распространения, отображения активации классов и послойного распространения релевантности.

В моделях ОИИ различаются также модельно-независимые и модельно-зависимые методы, локально-интерпретируемые и глобально-интерпретируемые методы, модели замещения

(суррогатные модели) и модели визуализации, стратегии предварительного моделирования, внутримодельного моделирования и модели корректировки уже разработанной архитектуры нейронной сети. Более детально эти модели будут рассмотрены в следующем разделе.

Массовое появление этих методов связано в основном с начавшейся в 2018 г. программой DARPA по созданию ИИ третьего поколения (ОИИ). Эта программа потребовала не только прогресса в представлении знаний и рассуждений, машинном обучении, языковых технологиях, зрении и робототехнике, но также тесной интеграции каждого компонента для реализации надежных и прозрачных ИС, способных работать автономно или в команде, уметь объяснить свои решения. Программа DARPA по созданию систем ОИИ объединяет 11 групп университетов США и стремится создать такие системы ИИ, чьи модели обучения и решения могут быть понятны и должным образом проверены конечными пользователями. Команды разработчиков ОИИ решают эту проблему путем создания и развития технологий объяснимого машинного обучения, исследуя принципы, стратегии и методы взаимодействия человека и компьютера для получения эффективных объяснений.

Система ОИИ обычно состоит из модели принятия решений, которую нужно объяснить, и из объясняющего интерфейса. Подобные системы часто разрабатываются в ситуации, когда у пользователя имеется ИС, которая будет рекомендовать пользователю решения возникающих у пользователя проблем из его предметной области. Для каждого типа ИС строятся свои объяснительные системы, которые в диалоговом режиме с пользователем помогут ему разобраться с возникшими вопросами и получить необходимые объяснения.

Например, команда Исследовательского центра Пало-Альто (PARC) (включающая исследователей из Университета Карнеги—Меллона, Армейского киберинститута, Эдинбургского университета и Университета Мичигана) разрабатывает интерактивную систему объяснений, которая может объяснить возможности и действия смоделированной беспилотной воздушной системы. Объяснения системы ХАИ должны сообщать, какую информацию она использует для принятия решений и как работает ее модель. Чтобы решить эту проблему, система объяснения и ее пользователи устанавливают общую основу для определения того, какие термины применять в объяснениях и их значения. Это обеспечивается интроспективной моделью дискурса PARC, которая чередует процессы обучения и объяснения [11, 12]. В России аналогичные проблемы ставятся в работе [13] в задачах интеллектуальной поддержки экипажа антропоцентрического объекта в процессе выполнения им задания на сеанс функционирования, которые обеспечиваются бортовыми ИС тактического уровня в форме представления экипажу рекомендуемого способа решения оперативно возникшей тактической задачи.

1. Применение ОИИ в нейросетях глубокого обучения. 1.1. ОИИ для прикладных ИС. В России уделяется большое внимание направлению ОИИ. Один из основных принципов развития и использования технологий ИИ, сформулированных в Национальной стратегии развития ИИ на период с 2018 до 2030 г., является прозрачность, объяснимость работы ИИ и процесса достижения им результатов, недискриминационный доступ пользователей продуктов, которые созданы с помощью технологий ИИ, к информации о применяемых в этих продуктах алгоритмах работы ИИ. Так, Нижегородский государственный университет в 2020 г. стал победителем в конкурсе крупных научных проектов от Минобрнауки России с проектом “Надежный и логически прозрачный искусственный интеллект: технология, верификация и применение при социально-значимых и инфекционных заболеваниях”. Главным результатом проекта стала разработка новых методов и технологий, позволяющих преодолеть два основных барьера систем машинного обучения и ИИ-проблемы ошибок и явного объяснения решений. В 2022 г. РЭУ им. Г.В. Плеханова выиграл проект РНФ “Гибридные модели поддержки принятия решений на основе методов дополненного искусственного интеллекта, когнитивного моделирования и нечеткой логики в задачах персонализированной медицины”, посвященный созданию медицинских систем нового поколения, базирующихся на применении ОИИ для нейросетей глубокого обучения в задачах медицинской диагностики.

Главной составляющей второй и третьей волн ИИ являются технологии глубокого обучения. Множество методов глубокого обучения можно разделить на обучение с учителем и обучение без учителя. В настоящее время эти методы неразрывно связаны с некоторым набором моделей глубоких нейросетей специального вида.

Первая группа методов требует для определения параметров сети наличия размеченных тренировочных наборов данных больших объемов. Как правило, размер наборов для обучения глубоких нейронных сетей на порядки превышает размеры тренировочных баз, используемых для обучения традиционных моделей машинного обучения. К моделям, которые обучаются с учителем, относятся многослойные полностью связанные нейронные сети, сверточные нейронные сети, рекуррентные нейронные сети. Эти модели различаются способами связи

нейронов, находящихся на соседних слоях сети, и количеством нейронов предыдущего слоя, влияющих на состояние отдельных нейронов текущего слоя. При этом для начальной инициализации весов этих моделей — предварительного обучения — могут применяться модели второй группы. Вторая группа моделей не требует наличия размеченных тренировочных наборов данных для настройки параметров сети. К данной группе моделей относятся различные виды автокодировщиков, ограниченные машины Больцмана, разверточные нейронные сети, генеративно-состязательные сети.

Стоит отметить, что около 30% публикаций в Scopus, связанных с использованием глубоких нейросетей в ОИИ, принадлежат авторам, хорошо признанным в области нечеткой логики. В основном это связано с приверженностью нечеткого сообщества созданию объяснимых нечетких систем, поскольку прозрачность и интерпретируемость являются важными составляющими нечетких систем, отмеченными уже в работах создателя аппарата нечетких множеств и мягких вычислений Лотфи Заде. Одним из наиболее интересных направлений в области разработки объяснительных моделей ИИ является извлечение правил с помощью нейронечетких моделей. Системы, основанные на нечетких правилах (СОНП), разработанные с использованием нечеткой логики, стали областью активных исследований с появлением направления мягких вычислений в 1993 г. Эти алгоритмы доказали свои сильные стороны в таких задачах, как управление сложными системами и создание нечетких элементов управления. Взаимосвязь между обоими подходами (ИНС и СОНП) была тщательно изучена, показана их эквивалентность для нейронечетких систем. Это приводит к двум важным выводам. Во-первых, можно применить то, что было обнаружено для одной из моделей, к другой. Во-вторых, можно перевести знания, заложенные в нейронную сеть, на более когнитивно приемлемый язык — нечеткие правила. Другими словами, получаем один из вариантов семантической интерпретации нейронных сетей [11]. В дальнейшем это привело исследовательское сообщество к реализации идей гибридных подходов, таких, как гибридные когнитивные нечеткие модели с функциональным замещением (с сочетанием нечеткой, нейросетевой и эволюционной технологий), композиционные гибридные нечеткие модели с взаимодействием для комплексных задач анализа систем и процессов, которые позднее стали взаимодействовать с нейросетями глубокого обучения [14]. В результате появились новые гибридные системы, классифицируемые как глубокие нейронечеткие системы (ГННС), обладающие высокой интерпретируемостью и сравнимой с классическими системами глубокого обучения точностью. В качестве перспективного типа ГННС можно упомянуть последовательные гибридные сверточные сети, последние полносвязные слои которых заменены нейронечеткой сетью. Исследования, посвященные реализации ГННС, активно применяются в таких областях, как вычислительная техника, здравоохранение, транспорт и финансы [15].

1.2. Методы ОИИ для прикладных ИС в анализе цифровых изображений. Методы построения систем ОИИ можно подразделить на зависящие от принципов их разработки группы [16]. Рассмотрим основные из них.

1. Модельно-независимые и модельно-зависимые методы. Модельно-независимые методы — это те, которые не учитывают внутренние компоненты модели. Следовательно, их можно применять к любой классической ИНС структуры “черного ящика”. Напротив, модельно-зависимые методы определяются с помощью параметров отдельной модели, таких, как интерпретация весов линейной регрессии, или с использованием выведенных правил из дерева решений, которые будут специфичны для обученной модели. У методов, не зависящих от модели, есть некоторые преимущества, такие, как высокая гибкость для разработчиков в выборе любой модели ИНС для генерации и интерпретации, которая отличается от фактической модели “черного ящика”, генерирующей решения.

2. Локально интерпретируемые и глобально интерпретируемые методы. В зависимости от объема пояснений предоставленные методы можно разделить на два класса: локальные и глобальные. Локально интерпретируемые методы используют один результат или конкретные результаты предсказания и классификации модели для создания объяснений. Напротив, глобально интерпретируемые методы используют все возможности модели и общее поведение модели для создания объяснений. В локально интерпретируемых методах существенны только специфические признаки и характеристики. Важность признаков для глобальных методов используется для объяснения общего поведения модели.

3. Модели замещения (суррогатные модели) и модели визуализации. Популярный способ трактовать модель “черного ящика” — применить интерпретируемую приближительную модель, которая заменяет модель “черного ящика” для объяснения решений. Эта приближительная модель называется суррогатной моделью или моделью-заменителем, которая обучена аппроксимировать прогнозы “черного ящика” и позже используется для получения объяснений, интерпретирующих решения из модели “черного ящика”. Примером модели “черного

ящика” может быть глубокая нейронная сеть, тогда как любая интерпретируемая модель может быть суррогатной моделью, такой, как деревья решений или линейные модели. Как и суррогатные модели, модели визуализации предлагают визуальные объяснения и помогают генерировать объяснения в более презентабельной форме, показывают внутреннюю работу многих моделей и не зависят от типа модели (например, какие пиксели помогают отличить кошку от собаки или какие слова помогают решить, является ли документ спамом или нет).

4. Стратегии предварительного моделирования, внутримодельного моделирования и модели корректировки уже разработанной архитектуры нейронной сети ОИИ можно применять на протяжении всего процесса разработки модели нейронной сети. Цель предварительного моделирования объяснимости состоит в том, чтобы описать набор данных с целью получения более полного представления о данных, используемых для построения модели. Общие цели предварительного моделирования заключаются в обобщении данных, описании набора данных, разработке объяснимых признаков и исследовательском анализе данных. Напротив, цель внутримодельного моделирования состоит в том, чтобы разработать объяснимые по своей сути модели, а не создавать модели “черного ящика”. Методологически существуют разные стратегии или способы построения внутримодельных объяснений. Наиболее очевидным является разработка объяснимой по своей сути модели, такой, как линейные модели, деревья решений и наборы правил. Однако необходимы специальные усилия по выбору типов объяснений, встраиваемых в модель.

5. Подходы, выходящие за рамки объяснимых по своей сути моделей, такие, как гибридные модели, совместное прогнозирование и объяснение, а также объяснимость посредством архитектурных корректировок. При гибридном подходе модели черного ящика сочетаются с объяснимыми моделями для разработки высокопроизводительной и объяснимой модели, например объединение глубокого скрытого слоя нейронной сети с методом k -ближайших соседей. Кроме того, модель может быть обучена для совместного предоставления прогноза и соответствующего объяснения. Идея здесь состоит в том, чтобы создать обучающий набор данных, в котором решение дополняется обоснованием. Наконец, объяснения посредством корректировки архитектуры сосредоточены на архитектуре глубокой сети для повышения объяснимости, например, использование фильтров более высокого уровня для представления части объекта, а не смеси шаблонов.

6. Методы постмодельной объяснимости извлекают объяснения, которые по своей сути не могут быть использованы для предварительного описания разработанной модели. Эти популярные апостериорные методы ОИИ обычно работают с четырьмя ключевыми характеристиками: цель — что должно быть объяснено в отношении модели; драйвер — почему решение должно быть объяснено; семейство объяснений — как объяснение будет представлено пользователю; оценщик — вычислительный процесс, порождающий объяснение.

1.3. Классификация алгоритмов ОИИ. Классификация произведена с точки зрения соответствующего типа ОИИ в различных таксономиях по типам алгоритмов ИИ, которые они могут объяснить (табл. 1).

Рассмотрим основные алгоритмы из табл. 1. Среди модельно-независимых стратегий ОИИ — локальные интерпретируемые модель-агностические объяснения LIME (local interpretable model-agnostic explanations). Они являются наиболее популярными алгоритмами, которые объясняют полученный прогноз. LIME реализует линейную интерпретируемую модель, суррогатную (замещающую) модель в качестве локального приближения для объяснения прогноза. Из-за локальной аппроксимации LIME работает со всеми моделями черного ящика и со всеми типами данных (например, с текстовыми данными, табличными данными, изображениями, графиками).

Алгоритм аддитивных объяснений Шепли SHAP (shapley additive explanations) принципиально отличается от LIME с точки зрения того, каким образом получаются оценки важности, и в целом работает лучше, чем LIME. В SHAP вклад функции в решение оценивается значениями Шепли — классическим методом оценки предельного вклада. Однако агрегированные локальные прогнозы могут использоваться для создания глобальных объяснений. Также существуют алгоритмы оптимизации с точки зрения вычислительной сложности для SHAP, такие, как TreeSHAP (древовидный SHAP) и DeepSHAP (глубокий SHAP), которые не зависят от модели.

Контрафактический алгоритм (counterfactual) — это еще один алгоритм, доступный как для модельно-независимых, так и для модельно-зависимых вариантов. Контрафактический алгоритм основан на объяснении прогноза алгоритма предиктора путем нахождения малейшего изменения значений входных признаков, вызывающего изменение исходного прогноза. Например, если изменение индекса массы тела человека привело к изменению первоначального прогноза с болезни на выздоровление, то использование значения индекса массы тела является ориентировочным объяснением для корреляции с исходным прогнозом, таким образом подразумевающие подходящие для человека объяснения.

Таблица 1. Классификация алгоритмов ОИИ

Модель ХАИ	Методы разработки моделей ХАИ				Алгоритм обучения
	Модельно-независимые и модельно-зависимые методы	Алгоритмы локально интерпретируемые и глобально интерпретируемые	Замещающие методы (суррогатные модели) и модели визуализации	Стратегии предварительного моделирования, внутримодельного моделирования и модели коррекции	
Facets	Модельно-зависимые	Оба метода	Модель визуализации	Предварительного моделирования	Без учителя
LIME	Модельно-зависимые	Локально интерпретируемые	Суррогатная модель	Модели коррективы	С учителем
SHAP	Модельно-зависимые	Оба метода	Суррогатная модель	Модели коррективы	С учителем
Counterfactual	Оба метода	Оба метода	Суррогатная модель	Модели коррективы	С учителем
LRP	Модельно-независимые	Локально интерпретируемые	Модель визуализации	Модели коррективы	Глубокое обучение
PIRL	Модельно-независимые	Глобально интерпретируемые	Суррогатная модель	Внутримодельного моделирования	Обучение с подкреплением
Hierarchical Policies	Модельно-независимые	Локально интерпретируемые	Суррогатная модель	Внутримодельного моделирования	Обучение с подкреплением
Structural Causal Model	Модельно-независимые	Локально интерпретируемые	Оба метода	Модели коррективы	Обучение с подкреплением

Послойное распространение релевантности LRP (layerwise relevance propagation) — это алгоритм, разработанный для объяснения глубоких нейронных сетей с предположением, что классификатор может быть разложен на разные уровни, что делает его модельно-зависимым методом. Алгоритм LRP разработан с учетом того фактора, что определенные уровни входных данных имеют отношение к прогнозу. Кроме того, чтобы получить представление о том, какие нейроны являются значимыми, оценки активации каждого нейрона учитываются посредством обратного прохода и в конечном итоге дают информацию о входных данных. Алгоритм наиболее часто применяется к данным изображения, чтобы выделить значимые пиксели, которые позволяют сделать определенный прогноз.

Объяснимое обучение с подкреплением XRL (explainable reinforcement learning) — многообещающая, но сложная исследовательская ветвь ОИИ, поскольку модель обучения с подкреплением RL (reinforcement learning) часто содержит огромное количество состояний. Тем не менее XRL может ускорить процесс проектирования RL, облегчая разработчикам отладку систем. Существует классификация методов XRL, основанная на типах объяснений (текст или изображения), на уровне объяснения (локальный, только для прогнозов, или глобальный, если объясняется вся модель), а также на типах объясняющих алгоритмов.

Программно-интерпретируемое обучение с подкреплением PIRL (programmatically interpretable reinforcement learning) является примером глобально-интерпретируемого метода. Идея PIRL заключается в использовании языка программирования, гораздо более близкого к человеческому мышлению для имитации поведения модели глубокого обучения с подкреплением DRL (deep reinforcement learning). PIRL применяет структуру под названием нейроуправляемый программный поиск NDPS (neurally directed program search) для изучения поведения модели DRL путем имитации обучения. Таким образом, существует два шага: построение DRL и извлечение знаний о модели DRL для создания последовательности действий. Прогнозы, получаемые алгоритмом PIRL не такие точные, как у нейронной сети, но они могут быть гораздо более понятными. Модель PIRL успешно применялась в открытом гоночном симуляторе TORCS (the open racing car simulator).

Иерархическое интерпретируемое приобретение навыков в многозадачном обучении с подкреплением является примером локально-интерпретируемой модели. Этот подход состоит в представлении модели с высокоуровневыми действиями в виде последовательности более простых действий, поскольку она более знакома людям. Этот подход использовался для игры в Майнкрафт (minecraft), и он реализует иерархическую модель, основанную на двух уровнях, с помощью алгоритма актер-критик, он же использовался для объяснения многозадачной модели RL,

играющей в Майнкрафт. Для объяснения модели RL также применяется модель стохастической временной грамматики, чтобы зафиксировать все отношения между действиями для создания иерархической модели. Люди часто просто просят припарковать автомобиль, вместо того чтобы определять все действия, связанные с рулем, сцеплением, акселератором и тормозом.

Метод иерархических политик (hierarchical policies) является еще одним встроенным в модель методом. Он используется для интерпретации процесса принятия решений в многозадачных сложных системах RL, но локально. Основной принцип этого подхода заключается в разбиении сложной задачи на более мелкие подзадачи, которые будут решаться с помощью уже изученных действий или путем овладения новым навыком.

Структурно-причинные модели SCM (structural causal model) — это очень четкий способ представления причинно-следственных связей событий. В SCM часто используется ориентированный ациклический граф DAG (directed acyclic graph), в котором узлы представляют состояния, а ребра — действия. Проходя по графу, можно наблюдать, какие действия приводят из одного состояния в другое. Процесс состоит из трех основных этапов: создание DAG; использование моделей многомерной регрессии для аппроксимации взаимосвязей с помощью минимального количества переменных; объяснения путем анализа переменных DAG, чтобы ответить на вопросы: “Почему действие A?” и “Почему не действие B?”.

1.4. Особенности применения в медицине. Далее на примере нескольких типов ИС в области медицины, основанных на анализе цифровых изображений нейронными сетями глубокого обучения, рассмотрены результативные объяснительные системы и продемонстрирована их эффективность для пользователя.

Отдельно стоит отметить, что использование объяснений в медицинских системах является традиционным для ИИ. Так, уже первая экспертная система MYCIN имела вопросно-ответный функционал в системе объяснений на базе дерева вывода, что можно считать вариантом ОИИ. Системы, основанные на знаниях, появившиеся в 1970-х годах прошлого века, также имели в своей структуре блок объяснения результата. Примерами таких систем являются NEOMYCIN и GUIDON. Успешное внедрение ИИ и машинного обучения в медицинские системы заставило задуматься о важности объяснения результатов как одной из первоочередных задач создания подобных систем.

Применение методов объяснения результатов в медицинских системах поддержки принятия решений способно вывести их на совершенно новый уровень, устранить семантический пробел, возникший при разработке подобных решений инженерами и дальнейшем их использовании клиницистами. Указанная проблема является общей для всех интерактивных медицинских систем, но особую актуальность приобретает при наличии в основе таких систем технологии нейросетей.

Так, для создателей систем поддержки принятия решений важно понимать, как модель получает те или иные результаты для улучшения ее характеристик и разработки новых алгоритмов. Нередко плохой результата после обучения модели тормозит процесс ее создания, так как нет понимания, почему это произошло. Возникает вопрос о наличии ошибок в реализации модели, приводящих к ухудшению результата. Учитывая многоэтапность создания модели, для поиска ошибок необходимо будет пройти все этапы построения модели и обучения заново. Использование методов ОИИ позволяет избежать необходимости пересмотра этапов создания модели за счет выявления ключевых признаков, сыгравших роль в предсказании результата (рис. 2).

Клиницистам как конечным пользователям продукта важно понимать алгоритм получения моделью результата. Возможна ситуация, когда клиницист убедился в компетентности ИС, которая для ряда возникших случаев дала ему правильные диагнозы и успешно решила возникшие проблемы. Но вот для очередной проблемы ИС рекомендовала решение, с которым пользователь не согласен. Клиницист ставит свой диагноз, отметив при этом, что в базе знаний его ИС произошел “семантический отказ”. Это может быть связано с неполнотой базы знаний, плохими обучающей выборкой или алгоритмом обучения, но может быть правильным решением, в справедливости которого нужно убедить пользователя. Получить обоснование результата можно за счет выделения ключевых признаков, повлиявших на результат предсказания. Эти признаки могут быть показаны клиницисту как в виде визуального объяснения, так и в виде текстового объяснения (рис. 3).

Использование методов ОИИ в медицинских системах соответствует современным требованиям, предъявляемым к таким системам. Например, в Европейском союзе были разработаны основные требования к моделям ИИ в медицине, необходимые для повышения доверия к подобным алгоритмам.

1. Надежный контроль и свобода для человеческой деятельности. Подразумевается, что системы ИИ должны позволять людям самостоятельно принимать обоснованные решения и укреплять их собственные права, а не ущемлять их. ИИ должен расширять возможности людей, но не заменять их. Но также необходимо обеспечить надежный контроль за качеством выполняемых работ.



Рис. 2. Объяснение для инженеров



Рис. 3. Объяснение для клиницистов

2. Помехоустойчивость и безопасность. Системы ИИ должны обладать высоким уровнем помехоустойчивости и безопасности. Системы, в том числе и медицинские, должны обеспечивать возможность разработки запасных планов действий, если основной план не сработал, они должны быть точными и легко воспроизводимыми вновь в случае сбоя.

3. Конфиденциальность и управление данными. Системы ИИ должны обеспечивать высокий уровень конфиденциальности и защиты данных, а также обладать всеми принципами эффективного управления данными.

4. Прозрачность моделей ИИ. Системы ИИ должны быть прозрачными, что является одним из основных принципов объяснимых моделей ИИ. Системы ИИ должны иметь такие способности объяснения, которые позволят адаптировать их для всех сторон — врачей и пациентов, профессионалов и простых пользователей. Системы должны информировать пользователей обо всех своих возможностях и ограничениях.

5. Разнообразие, недискриминация и справедливость. Системы ИИ должны избегать предвзятости, дискриминации и маргинализации уязвимых групп населения. Разнообразие подразумевает доступность систем ИИ для всех групп населения, независимо от их социального статуса и состояния здоровья.

6. Социальное и экологическое благополучие. Системы ИИ должны приносить пользу всем людям, в том числе и будущим поколениям. Они должны способствовать улучшению экологии, взаимодействовать и оценивать окружающую среду и социальное воздействие.

7. Подотчетность. Необходимо внедрять механизмы для обеспечения полной подотчетности систем ИИ. Необходима возможность аудита, оценки алгоритмов и данных, особенно это важно в таких критически значимых отраслях, как здравоохранение.

Применение ОИИ в медицине поможет не только устранить ограничения существующих решений ИИ, но и перейти на качественно новый уровень благодаря новому подходу к медицине — концепции Здравоохранения 5.0 (Healthcare 5.0) — ставящему в основу создание персонализированной медицины, появление и развитие систем медицинского ИИ. В сфере анализа медицинских изображений применение методов ОИИ уже позволило достичь результатов. Предоставление визуального объяснения результата работы ИНС способно увеличить уровень доверия медицинского персонала за счет представления интуитивно понятного объяснения в виде тепловой карты. Согласно обзору [17], на конец 2020 г. в базе данных Scopus суммарно было проиндексировано 223 публикации по исследованию возможностей применения ОИИ в анализе медицинских изображений.

Одной из областей медицины, где использование систем на основе ИИ и с помощью технологии ОИИ позволяет существенно улучшить результат, является офтальмология. Возможности ИИ в анализе изображений глаза с целью диагностики заболеваний исследовались в нескольких обзорах [18—20]. Авторы публикаций отмечают невысокую распространенность применения ИИ в анализе офтальмологических изображений. Системных обзоров применения ОИИ для тех же целей до настоящего времени нами не найдено.

Медицинскими изображениями в офтальмологии являются снимки высокого разрешения, полученные при офтальмоскопии — неинвазивной процедуре, позволяющей оценить состояние сетчатки, хрусталика, диска зрительного нерва, глазного дна, которая проводится с помощью офтальмоскопа. Офтальмоскопия бывает двух типов: прямая (не перевернутое изображение с 15-кратным увеличением) и непрямая (перевернутое изображение с не более чем 5-кратным увеличением). Офтальмоскоп представляет собой прибор (стационарный или ручной), использующий поток направленного света и линзы для увеличения изображения. Современные офтальмоскопы также имеют возможности подключения к персональному компьютеру для вывода изображения [21]. Другим вариантом медицинского изображения в офтальмологии является снимок оптической когерентной томографии (ОКТ) — метода диагностики офтальмологических заболеваний, заключающегося в визуализации структур глаза в сверхвысоком разрешении с помощью низкокогерентной интерферометрии для получения изображений поперечного сечения сетчатки и диска зрительного нерва [22].

Существуют созданные на основе цифровых технологий системы, позволяющие проводить осмотр работающих в опасных условиях. В [23] представлена специализированная система предрейсовых медицинских осмотров, использующая комплексный подход для предполетной диагностики состояния организма пилотов и членов экипажа. Внедрение в подобные системы решений на основе ИИ и ОИИ позволят повысить доверие к результатам работы и снизить нагрузку с оператора системы. Применение методов объяснения результатов в задачах диагностики состояния здоровья в ответственных системах имеет особое значение в контексте полного понимания врачом-диагностом результатов, полученных из системы [24]. Отечественные работы по исследованию возможностей раннего обнаружения патологий зрения методами интеллектуального анализа, отличающимся особым подходом к формулированию проблемы и нестандартными решениями представлены в [25]. В этих публикациях в основном рассматриваются возможности электроретинографии, что более предпочтительно для углубленной диагностики зрения, осуществляемой на базе высокоспециализированных центров, а не массовой диагностики на уровне первичного звена здравоохранения.

2. Методы ОИИ в обработке изображений в офтальмологии на основе нейронных сетей глубокого обучения. 2.1. Методы библиометрического анализа проблемной области. В исследовании авторами был проведен обзор публикаций, за прошедшие 5 лет, с 2018 до 2023 г., размещённых как в онлайн-библиотеках (Scopus, IEEE Digital Library, PubMed, ScienceDirect), так и отобранных с помощью поискового сервиса Google. В последнем случае, публикация должна была индексироваться в научных базах Scopus или Web of Science. Публикации подбирались с использованием поиска по ключевым словам и их комбинациям: “explainable artificial intelligence”, “explainable ai”, “xai”, “eye disease”, “glaucoma”, “diabetic retinopathy”, “cataract”, “retina”, “fundus image”, “eye image”, “ophthalmology”, “ophthalmoscopy”, “oct”. Результатами поиска стали 81 публикация, из которых отобрано 33 работы. Критериями отбора стали упоминание диагностики одного из офтальмологических заболеваний как цели исследования и применение методов ОИИ как визуального объяснения. Распределение исследований по годам публикаций и более подробное деление по исследуемым заболеваниям представлено на диаграммах ниже (рис. 4, 5).

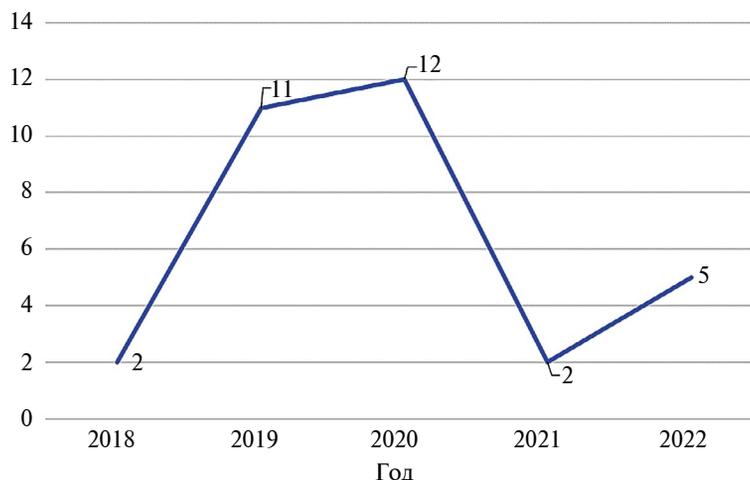


Рис. 4. Количество публикаций по годам

На основании представленных на диаграммах распределений можно сделать вывод о том, что количество исследований с помощью ОИИ в классификации офтальмологических заболеваний невелико по сравнению, например, с использованием ОИИ для анализа КТ/МРТ-снимков головного мозга ($n = 42$) или грудной клетки ($n = 33$), проиндексированных в систематическом обзоре [17]. Стоит отметить, что не обнаружено существенной разницы между количеством исследований применения методов объяснения для классификации глаукомы ($n = 13$) и диабетической ретинопатии ($n = 12$). Однако нами не было обнаружено отдельных исследований с помощью ОИИ при классификации катаракты. Проиндексированы исследования, содержащий использование методов объяснения в поиске редких глазных заболеваний на основании анализа фото/ОКТ-снимков ($n = 4$). Отдельно в обзоре упоминаются работы, посвященные улучшению качества исходных снимков при анализе изображений глазного дна и зрительного нерва ($n = 3$).

2.2. Методы ОИИ. 2.2.1. Определение. Таксономия. Методы объяснения результатов работы ИНС являются основной темой, когда речь идет о применении ОИИ в какой-либо задаче. Рассуждая об этом, мы говорим об использовании одного из многих методов объяснения результата работы ИНС (методов ОИИ).

Для правильного определения ОИИ необходимо найти ключевые термины в этой области — интерпретируемость и объяснимость, разобраться в их соотношении.

Интерпретируемость (interpretability) — способность модели машинного обучения к представлению механизма своей работы понятным для пользователя образом.

В то же время сама по себе интерпретируемость не может решить проблему объяснимости применительно к ИНС, но полезна для улучшения обучаемости [26]. Часто в литературе вместо слова интерпретируемость используется близкое ему по значению — прозрачность.

Прозрачность (transparensy) — свойство модели быть понятной априори, без применения методов интерпретации. Выделяют прозрачные (линейная и логическая регрессия, деревья решений, метод k -ближайших соседей, байесовские модели, обобщенные аддитивные модели) и непрозрачные модели (ансамбли деревьев решений, метод опорных векторов, ИНС) машинного обучения [27].

Объяснимость (explainability) — свойство модели, относимое к процессу представления результатов ее работы пользователю в виде понятного интерфейса. Иными словами, краткое описание причины принятия моделью определенного решения, представленное, чаще всего, в интерактивном виде, но не позволяющее понять полный алгоритм его принятия. Таким образом, методы объяснения результата (методы ОИИ) — это внешние (model-agnostic) или использующие внутреннюю структуру объекта объяснения (model-specific) методы, позволяющие получить визуальное представление (visual explanation) о работе исследуемой модели ИНС (объяснение “черного ящика”) путем вывода интерактивного интерфейса. Объяснения могут даваться как в отношении модели в целом (global explanations), так и относительно работы модели на одном конкретном примере (local explanations). Объяснение результатов работы модели является постфактум- объяснением (post-hoc explanation).

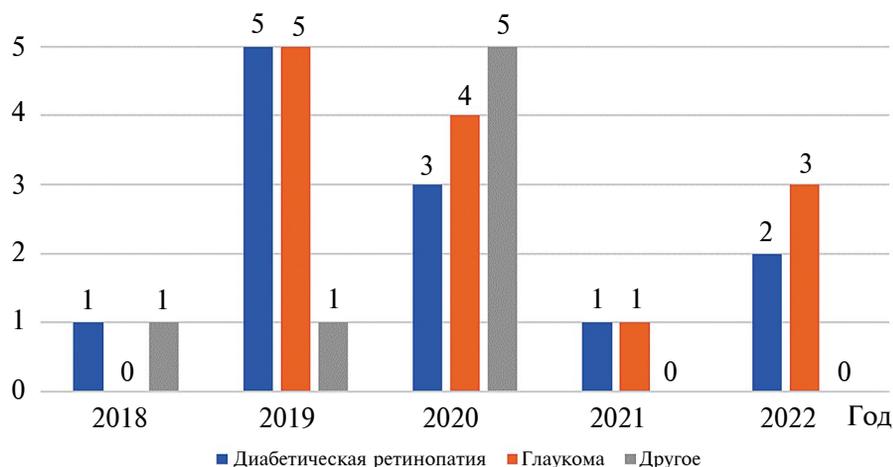


Рис. 5. Количество публикаций по годам с разбиением на глазные заболевания

Существует множество таксономий методов ОИИ [28—30]. В нашем исследовании будем использовать таксономию и определения, введённые в [27, 31].

Среди отобранных нами работ применялись следующие методы объяснения: CAM ($n = 11$), Grad-CAM и его вариации ($n = 8$), GBP ($n = 3$), LIME ($n = 2$), SHAP ($n = 1$), MIL ($n = 2$), IG ($n = 1$), TA ($n = 1$).

Методы LIME, SHAP, CAM, Grad-CAM, GBP, IG, согласно универсальной таксономии, предложенной в [31], относятся к методам, основанным на вычислении важности признаков. Этими признаками для задач работы с изображениями являются пиксели и их группировки на изображении. При этом методы, имеющие в основе своей работы создание суррогатной выборки (LIME) или компоненты теории игр (SHAP), могут применяться к любой модели машинного обучения. В то же время методы (CAM, Grad-CAM, GBP, IG), представляющие объяснения за счет вычисления карт активации классов и обратного распространения градиента, могут давать объяснения лишь для ИНС. Ниже приведено краткое описание принципов работы приведенных методов.

2.2.2. Метод CAM. Метод карты активации класса CAM (class activation mapping) был предложен в 2016 г. Принцип работы метода основан на создании карты локализации искомого класса на исследуемом изображении путем расчета взвешенной суммы карт активации классов последнего свёрточного слоя в объясняемой модели [32].

Метод CAM может применяться практически для всех архитектур ИНС, имеющих в своем составе свёрточные слои. Активно используется при объяснении работы ИНС в задачах классификации и поиска объектов на изображениях, например при объяснении классификации изображений свёрточной нейронной сетью VGG-16. Архитектура VGG-16 представлена пятью блоками свёрточных слоев и следующими за каждым из блоков экстракторами признаков — пятью слоями пулинга, а завершают цепочку три полносвязных слоя перед последним слоем Softmax.

Использование CAM для работы с любой архитектурой ИНС представляет собой имплементацию метода к последнему свёрточному слою. Для VGG-16 — это последний свёрточный слой пятого блока (Conv 5-3). Размерность этого слоя свертки составляет $i \times j \times 512$, где i и j — размерность свёртки, а 512 — количество каналов (карт признаков — A_k), сопоставленных с метками классов набора данных для обучения. Так, для VGG-16, обученной на наборе данных ImageNet, количество меток составит 1000.

Карта активации целевого класса M_c показывает с помощью интенсивности цвета на тепловой карте важность пикселя f_k в точке с координатами (x, y) в полученном предсказании, где w_c^k — вес важности предсказанного класса c :

$$S_c = \sum_{x,y} \sum_k w_c^k f_k(x,y), \quad (2.1)$$

$$M_c(x,y) = \sum_k w_c^k f_k(x,y). \quad (2.2)$$

Обобщенный алгоритм работы метода CAM приведен на рис. 6, а схема получения визуального объяснения работы ИНС — на рис. 7.

Algorithm 1 Class activation mapping.

Require: Image $I^C(H,W)$; Network N
Ensure: Replace FC layer with average pooling layer in Network N

procedure CAM(I, N)

$N(I)$ ▷ Input image into network

$W_k^c \leftarrow (w_1, w_2, w_3, \dots, w_k)$ ▷ Get weights from average pooling layer

$F_k^c \leftarrow (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), \dots, f_k(x, y))$ ▷ Feature map of the last convolution layer

layer

$M_c(x, y) = \sum_k w_k^c f_k(x, y)$ ▷ Weighted linear summation

$M_c(x, y) = \frac{1}{HW} \sum_i^H \sum_j^W M_c(x, y)$ ▷ Normalize and up-sample to Network input size

$M_c(x, y) = \text{RELU}(M_c(x, y))$ ▷ Final image heat map

end procedure

Рис. 6. Алгоритм работы метода CAM

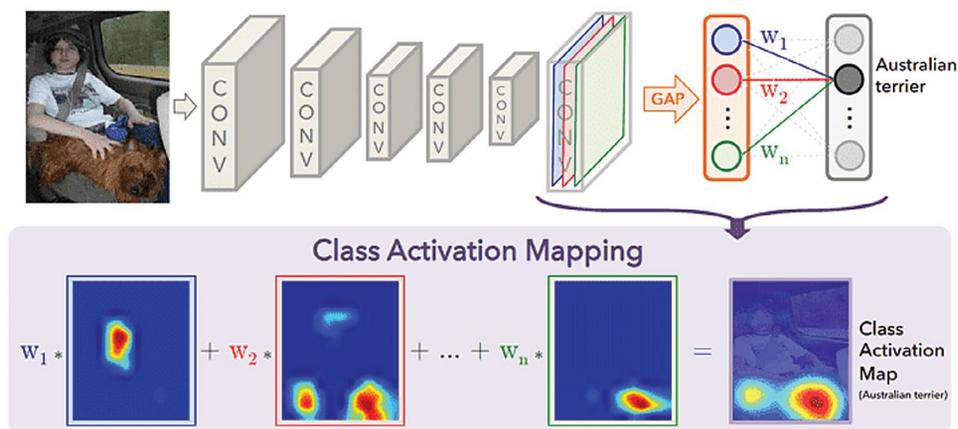


Рис. 7. Получение визуального объяснения с помощью метода CAM

2.2.3. Метод Grad-CAM. Метод градиентной карты активации класса Grad-CAM (gradient-class activation mapping) предложен в 2017 г. [33] и является обобщённой версией CAM, лишенной необходимости замены всех полносвязных слоев свёрточными. Grad-CAM использует вычисление градиента целевого класса для создания карт активации классов.

Алгоритм Grad-CAM (созданный на основе CAM) похож на предшествующий, но имеет несколько принципиальных отличий. Карты признаков A_k объединяются с помощью глобального среднего значения GAP (global average pooling), для каждого класса c ниже рассчитывается итоговое значение Y . Вычисляется градиент оценки класса Y^c относительно карт признаков A_k , который затем усредняется относительно размеров карт активации Z и определяются веса важности нейрона w_k^c , показывающие важность функции k для класса c :

$$Y^c = \sum_k w_k^c \sum_{i,j} A_{i,j}^k, \tag{2.3}$$

$$w_k^c = \frac{1}{Z} \sum_{i,j} \frac{\partial y^c}{\partial A_{i,j}^k}. \tag{2.4}$$

На финальном этапе создается визуальное объяснение в виде тепловых карт с помощью активации прямого распространения ReLU, применяемое к взвешенной комбинации карт активации. ReLU (rectified linear unit) — это функция активации, широко используемая в нейронных сетях. Она определяется следующим образом: $\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$. Если значение входа x положительное, то ReLU просто возвращает его. Если x отрицательное или равно нулю, то ReLU равно нулю, что позволяет избежать проблемы исчезающего градиента, присущей

другим популярным функциям активации (сигмоида и гиперболического тангенса). Применение ReLU необходимо для выделения с помощью интенсивности цвета пикселей, входящих в регионы изображения, которые имеют наибольшую важность в предсказании целевого класса через обнуление отрицательных значений. Схема получения объяснения предсказания ИНС с помощью метода Grad-CAM представлена на рис. 8:

$$L_{Grad-CAM}^c = ReLU \left(\sum_k w_k^c A^k \right). \tag{2.5}$$

Основными достоинствами методов CAM и Grad-CAM являются простота имплементации в объясняемую модель, при этом использование Grad-CAM не нуждается в замене слоев. Эти методы совместимы с различными типами выводов свёрточной нейронной сети для решения задач классификации изображений (визуальное объяснение) и создания подписей к изображениям (текстовое объяснение). Методы не требуют больших вычислительных затрат и значительного времени для получения объяснения и для них имеется репозиторий с открытым кодом [34, 35]. К основному недостатку метода Grad-CAM относят визуальное объяснение в виде грубой цифровой карты, которая не может дать представление о точных границах региона значимых признаков. Также при наличии на изображении нескольких объектов одного класса тепловая карта будет захватывать область между ними. Недостатком метода CAM является необходимость замены полносвязных слоев нейросети свёрточными слоями.

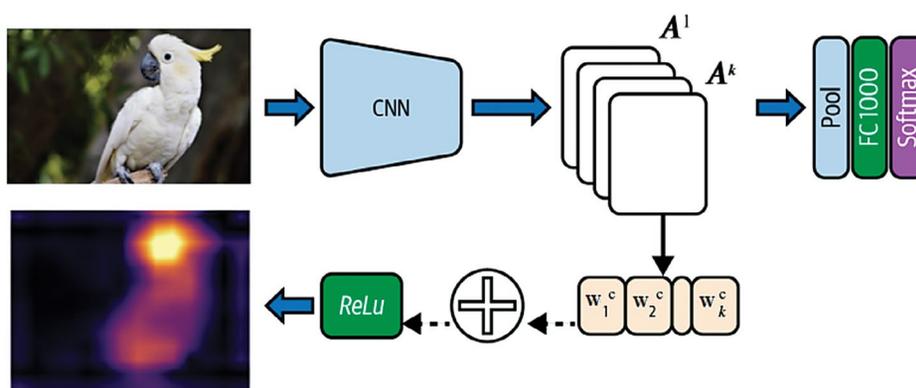


Рис. 8. Получение визуального объяснения с помощью метода Grad-CAM

2.2.4. Метод GBP. Метод управляемого обратного распространения GBP (guided back propagation) был предложен в 2014 г. [36]. Он основывается на идее вычисления обратного распространения градиента и приравнивания отрицательных градиентов к нулю, что оставляет при визуализации объяснения лишь области изображения с наибольшим вкладом в предсказание.

2.2.5. Метод LIME. Метод локальных интерпретируемых модель-агностических объяснений для визуального объяснения результатов работы любой модели машинного обучения, основанный на локальной аппроксимации областей отдельного предсказания путем создания суррогатного набора примеров и признаков, а затем его оптимизации на базе метода Лассо. Визуальный вывод представляется пользователю в виде выделенных цветом областей изображения в зависимости от важности их роли в формировании итогового предсказания [37].

Алгоритм получения объяснения методом Лассо представлен на рис. 9:

$$\varepsilon(x) = \arg \min_{g \in G} L(f, g, \pi_x) + \Omega(g), \tag{2.6}$$

где x — признаки, g — модель объяснения из общего семейства моделей G , f — предиктор, π_x — мера близости между экземплярами класса; $L(f, g, \pi_x) = \sum_{z, z' \in Z} \pi_x(z)$, $\tag{2.7}$

где g — модель для обучения, z' — экземпляр обучающих суррогатных данных.

Algorithm KernelSHAP algorithm for local explanation

Input: classifier f , input sample \mathbf{x}
Output: explainable coefficients from the linear model

- 1: $z_k \leftarrow \text{SampleByRemovingFeature}(\mathbf{x})$
- 2: $z_k \leftarrow h_{\mathbf{x}}(z_k) \triangleright h_{\mathbf{x}}$ is a feature transformation to reshape to \mathbf{x}
- 3: $y_k \leftarrow f(z_k)$
- 4: $W_{\mathbf{x}} \leftarrow \text{SHAP}(f, z_k, y_k)$
- 5: $\text{LinearModel}(W_{\mathbf{x}}).fit()$
- 6: **Return** $\text{LinearModel}.coefficients()$

Рис. 9. Алгоритм работы метода LIME

Модификацией метода стал GraphLIME [38], предложенный в 2022 г. Данный метод был разработан для применения к графовым нейронным сетям. Его основой послужило использование критерия независимости Гильберта—Шмидта, который представляет собой нелинейный метод выбора признаков. Из-за необходимости генерации суррогатной выборки основным недостатком метода стала скорость получения объяснения, напрямую зависящая от объема выборки [39]. К достоинствам метода LIME относят возможность его применения для объяснения любой модели машинного обучения на любом типе данных, а также открытый доступ к репозиторию с кодом [40].

2.2.6. Метод SHAP. Метод, основанный на теоретико-игровом подходе Шепли, который может быть использован для объяснения любой модели машинного обучения. Он предназначен для локальных объяснений, а его отдельные вариации — для получения глобальных объяснений. Значение Шепли — это принцип оптимальности распределения выигрыша среди игроков коалиции в задачах кооперативных игр [41]. На основе этого подхода С. Лундберг в 2017 г. предложил метод аддитивного объяснения Шепли, заключающийся в объяснении предсказания целевого класса (выигрыша) путем вычисления распределения вклада отдельных признаков (игроков) из общего числа всех признаков (коалиции). В случае объяснения результата задачи классификации изображения, необходимо установить вклад отдельных участков изображения (суперпикселей) в предсказание, определенное ИНС [42].

Получение объяснения методом SHAP происходит путём вычисления значения вклада каждого отдельного признака в общий результата, где ϕ_i — значение Шепли для признака i , f — модель “черного ящика”, x — входящие данные, z' — это подмножество вектора x' (сохранены только ненулевые элементы) и $|z'|$ равно количеству таких ненулевых элементов вектора z' :

$$\phi_i(f, x) = \sum_{z' \in x'} \frac{|z'|!(M - |z'| - 1)!}{M} \left[f_x(z') - f_x\left(\frac{z'}{i}\right) \right]. \quad (2.8)$$

С. Лундберг также предложил несколько вариаций метода для создания объяснения конкретных моделей машинного обучения.

Tree Explainer — метод объяснения для деревьев решений. Идея метода заключается в получении глобального объяснения модели через локальные объяснения. Авторами был создан алгоритм локального объяснения деревьев решений за полиномиальное время на основе точных значений Шепли.

Deep Explainer основан на адаптации метода DeepLIFT и используется для получения объяснений в глубоких нейронных сетях.

Linear Explainer (Linear SHAP) оценивает значения SHAP, используя весовые коэффициенты модели с учетом независимых входных характеристик. Применяется для линейных моделей, если предполагается независимость входных признаков.

Kernel Explainer (Kernel SHAP) выполняет метод атрибуции аддитивных признаков случайным образом, сделав выборку коалиций путем удаления признаков из входных данных и линеаризации влияния модели с помощью ядер SHAP. Универсальность подхода достигается за счет уменьшения количества оценок, необходимых для получения объяснения. Алгоритм работы метода представлен на рис. 10.

Algorithm LIME algorithm for local explanations

Input: classifier f , input sample x , number of superpixels n , number of features to pick m
Output: explainable coefficients from the linear model

- 1: $\bar{y} \leftarrow f.predict(x)$
- 2: **for** i in n **do**
- 3: $p_i \leftarrow \text{Permute}(x)$ \triangleright Randomly pick superpixels
- 4: $obs_i \leftarrow f.predict(p)$
- 5: $dist_i \leftarrow |\bar{y} - obs_i|$
- 6: **end for**
- 7: $simscore \leftarrow \text{SimilarityScore}(dist)$
- 8: $x_{pick} \leftarrow \text{Pick}(p, simscore, m)$
- 9: $L \leftarrow \text{LinearModel.fit}(p, m, simscore)$
- 10: **return** $L.weights$

Рис. 10. Алгоритм работы метода Kernel SHAP

Достоинством метода является вариативность объектов объяснения и наличие сложившейся библиотеки, находящейся в открытом доступе [43]. Недостатками метода выступают как необходимость больших вычислительных затрат для получения объяснения, так и возможность некорректного объяснения за счет выделения суперпикселей, относящихся к признакам-паттернам (участки фона изображения, повторяющиеся части изображений) набора данных [44]. В [45, 46] отмечено, что значения Шепли как основа метода игнорируют причинно-следственную структуру объясняемой модели. Для решения этой проблемы предлагается использовать ассиметричные значения Шепли, которые за счет применения причинно-следственной информации значительно улучшают точность и полноту объяснения работы исследуемой модели.

2.2.7. Метод MIL. Метод обучения с помощью нескольких примеров MIL (multiple instance learning) как метод визуализации объяснения использует подход на основе патчей для локализации участков изображения, внесших наибольший вклад в предсказание. Для MIL суррогатная выборка состоит из патчей экземпляров целевого класса, при этом патчи маркированы, а экземпляры в них — нет. Патч — это набор $X_i = \{x_{i,j} \vee j = \overline{1, N_i}\} \subset \mathbb{R}^m$ из N_i экземпляров, где каждый экземпляр является m -мерным вектором признаков [47].

Метод не получил широкого распространения, имеются лишь единичные работы с его использованием в качестве визуального объяснения из-за специфики трактовки принципов его работы и отсутствия открытого репозитория с программной реализацией.

2.2.8. Метод IG. Метод интегрированных градиентов IG (integrated gradients) — метод объяснения, основанный на сопоставлении прогноза модели с ее входными функциями. Он определяет значение важности для значения функции в конкретной точке изображения по формуле путем интегрирования градиента по данному измерению [48]:

$$\phi^{IG}(f, x, x') = (x_i - x'_i) \int_0^1 \frac{\partial f(x' + a(x - x'))}{\partial x_i} da, \quad (2.9)$$

где $\partial f(x) / \partial x_i$ — градиент функции $f(x)$ по i -му измерению для входных данных x и базовой точки x' .

Большим недостатком для использования метода интегрированных градиентов для объяснения предсказаний глубоких нейронных сетей является проблема насыщения — градиенты входных признаков могут иметь небольшие значения вокруг выборки, даже если сеть сильно зависит от этих признаков.

2.2.9. Метод ТА. Метод обучаемого внимания ТА (trainable attention) в отличие от методов, фокусирующихся на определенных участках изображения, выделяет, где и в какой пропорции сеть уделяет внимание входным изображениям для классификации. В дальнейшем эти результаты используются для усиления соответствующих областей и подавления нерелевантных областей [49]. Исходный код ТА представлен в открытом репозитории [50].

В табл. 2 приведен сравнительный анализ описанных ранее методов объяснения результатов, принадлежность каждого метода к одной из групп (backpropagation-based, perturbation-based) и типов методов (Model-agnostic, Model-specific) по типу (model-based, post-hoc) и виду (global, local) объяснения.

Таблица 2. Сравнение методов визуального объяснения

Метод XAI	Тип объяснения		Тип метода		Вид объяснения		Группа методов	
	Model-based	Post-hoc	Agnostic	Specific	Local	Global	Backpropagation based	Perturbation based
CAM [32]		+		+	+		+	
Grad-CAM [33]		+		+	+		+	
GBP [36]		+		+	+		+	
LIME [37]		+	+		+			+
SHAP [42]		+	+		+	+		+
MIL [47]		+			+			+
IG [48]		+		+	+		+	
TA [49]	+			+	+		+	

3. Современное состояние в области использования методов ОИИ в офтальмологии. 3.1. Диабетическая ретинопатия. Одним из наиболее частых осложнений у пациентов с сахарным диабетом является диабетическая ретинопатия — хроническое прогрессирующее нейромикрососудистое, последовательно развивающееся заболевание, связанное с поражением сосудов глаза, которое при отсутствии ранней диагностики и должного лечения приводит к частичной или полной слепоте [51]. Заболевание преимущественно поражает больных сахарным диабетом I типа — 27.2% случаев, по сравнению с больными сахарным диабетом II типа, на которых приходится 13% случаев [52]. К основным факторам риска развития диабетической ретинопатии у больных сахарным диабетом относят постоянный повышенный уровень глюкозы в крови (гипергликемия) и повышенное артериальное давление (артериальная гипертензия) [53].

Существует несколько классификаций стадий диабетической ретинопатии. В России общепринятой считается классификация диабетической ретинопатии, выделяющая три стадии (формы) заболевания: непролиферативная (НПДР), препролиферативная (ППДР) и пролиферативная (ПДР) [54]. В отдельных исследованиях по применению ИИ для классификации диабетической ретинопатии можно встретить две основные формы НПДР (Non-proliferativeDR (NPDR)), ПДР (ProliferativeDR (PDR)) и три подвиды НПДР (Microaneurysms (Mild), Hemorrhages (Moderate), Exudates (Severe)) [55] (рис. 11).

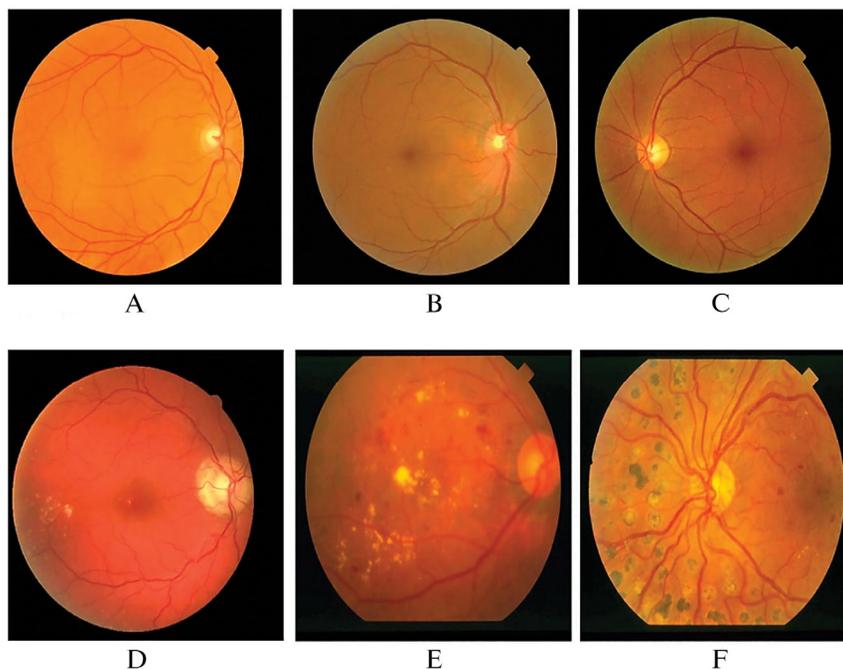


Рис. 11. Стадии диабетической ретинопатии (DR): а) Without DR, б) Early DR, в) Mild DR, д) Moderate NPDR, е) Severe NPDR, ф) Proliferative DR [56]

Отобранные для обзора публикации по исследованию применения методов объяснения при анализе медицинских изображений представлены в табл. 3, 4.

Приведенные в табл. 3 DL-составляющие исследований показывают, что меньшинством исследователей ($n = 5$) были выбраны стандартные архитектуры ИНС, представленные в библиотеке моделей Keras [93]. Архитектуры ИНС авторской разработки были выбраны в большинстве случаев ($n = 6$) [73, 80, 82, 84, 88, 89].

В табл. 4 представлены методы объяснения результата и метрики качества объяснения (при наличии), используемые в обозреваемых публикациях. Наиболее часто для объяснения результатов применялся метод SAM ($n = 6$), остальные методы — в единичных случаях: MIL ($n = 2$), Grad-CAM ($n = 1$), IG ($n = 1$). Предпочтение в применении метода SAM во многом связано как с удобством его имплементации, так и возможностями визуализации вывода [94] (рис. 12). Представлена визуализация объяснения классификации диабетической ретинопатии методом SAM.

Анализируя табл. 4, можно увидеть, что в подавляющем большинстве исследований не используются метрики оценки качества объяснения. Это связано с их существующим многообразием и их различием для разных методов ОИИ. Подобный вывод также был сделан в обзоре исследований по применению ОИИ в анализе рентгеновских снимков [95], где 81.56% отобранных публикаций не применяли метрики оценки качества объяснений.

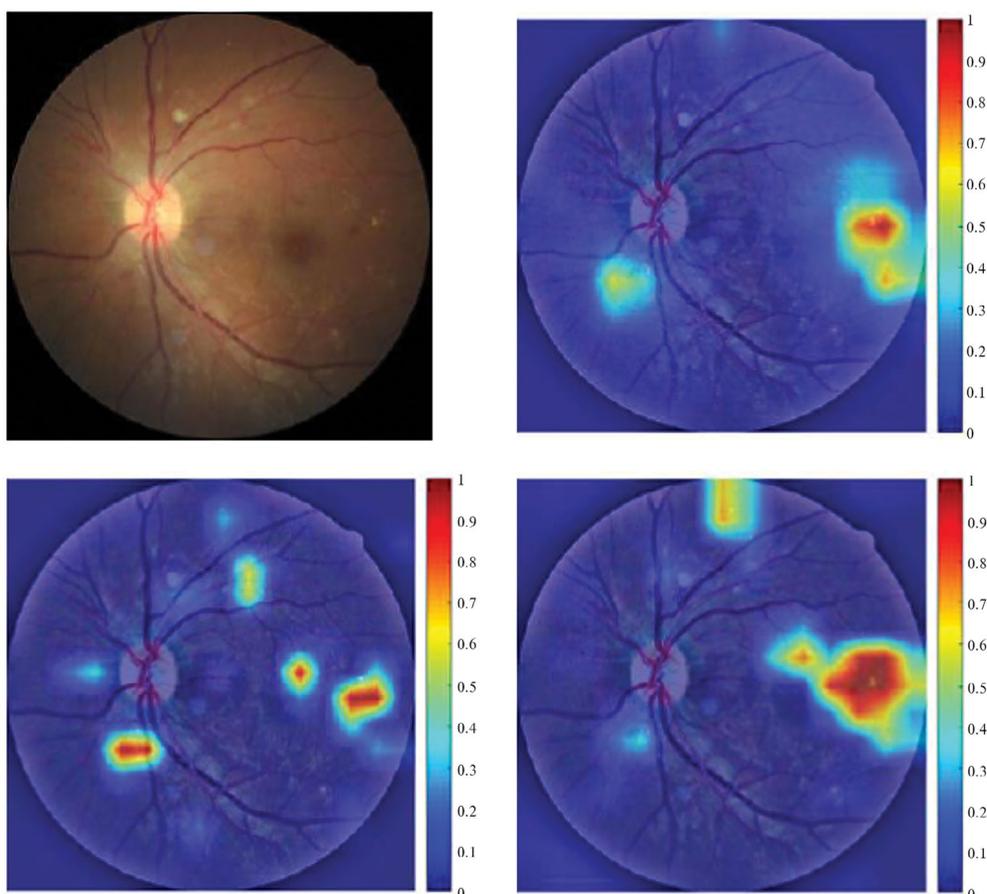


Рис. 12. Результаты использования ОИИ в классификации диабетической ретинопатии [94]

3.2. Глаукома. Глаукомы являются особой группой заболеваний (невропатий) зрительно-го нерва, характеризующихся постоянно прогрессирующими дегенеративными изменениями ганглиозных клеток сетчатки глаза, обеспечивающих генерацию нервных импульсов. Заболевание сопровождается симптомами повышенного внутриглазного давления и повреждением структур глаза. Патогенез глаукомы до конца не изучен. Глаукома при несвоевременной диагностике и отсутствии лечения в подавляющем большинстве случаев, приводит к полной потере зрения [96]. Согласно отечественным и зарубежным исследованиям, глаукомы

Таблица 3. Диабетическая ретинопатия

Исследование	Год	DL-блок			
		Характеристика ИНС		Характеристика набора данных	
		Архитектура	Результат	Название, классы, количество изображений	Доступ
[73]	2018	Авторская на основе Inception V4 [74]	Accuracy, % 88.4	Авторский датасет (всего — 2000)	Приватный
[75]	2019	DenseNet121 InceptionResNetV2 InceptionV3 NASNet ResNet50 VGG-16 VGG-19 Xception	Accuracy, % 0.90 0.94 0.93 0.95 0.90 0.94 0.93 0.92	Messidor-2 [76] (всего — 10 274, NPDR — 3564, NRDR — 4630, PDR — 2080)	По запросу
[77]	2019	VGG-16 InceptionV3 Resnet50	AUC, % 90.00 94.53 95.85	Messidor [78]	По запросу
[79]	2019	InceptionV3 Resnet152 Inception-Resnet-V2 Ансамбль моделей	Accuracy, % 87.91 87.20 86.18 88.21	Авторский датасет (всего — 30 244, 16 661 — Negative, 13 583 — Positive)	Приватный
[80]	2019	Авторская (Deep Radiomic CNN Sequencer)	Accuracy, % 73.2	Kaggle diabetic retinopathy dataset [81] (всего — 3662)	Открытый
[82]	2019	Авторская (OCT-NET)	ROC: 93% AUC: 0.99	A2A SD-OCT [83] (всего — 384)	По запросу
[84]	2020	Авторская (DR-GRADUATE)	Quadratic weighted kappa: 0.75 0.71 0.84 0.78 0.74	Kaggle diabetic retinopathy dataset [81] (всего — 3662), Messidor-2 [76] (всего — 10274, NPDR — 3564, NRDR — 4630, PDR — 2080), IDRiD [85] (всего — 516), DMR [86] (всего — 9939), SCREEN-DR (всего — 966)	Открытый По запросу Открытый Открытый Приватный
[87]	2020	AlexNet, VGG-16, ResNet, Inception V3, NASNet, DenseNet, GoogLeNet	Accuracy, % 98.4	Kaggle diabetic retinopathy dataset [81] (всего — 3662)	Открытый
[88]	2020	Авторская (SUNet)	Accuracy, % 0.61	IDRiD [85] (всего — 516)	Открытый
[89]	2021	Авторская (Patho-GAN)	MSE: 0.0093 FID: 81.16 MSE:0.0144 FID: 22.28 MSE: 0.0107 nFID: 20.34	IDRiD [85] (всего — 516), Retinal-Lesions [90], FGADR [91] (всего — 2842)	Открытый Приватный По запросу
[92]	2022	VGG-16 ResNet-18 DenseNet-121	Accuracy, % 48.43 47.86 45.57	APTOS [93] (всего — 35125, Normal — 25809, Mild — 2443, Moderate — 5292, Severe — 873, Proliferative — 708)	Открытый

Таблица 4. Диабетическая ретинопатия (продолжение)

Исследование	ХАИ-блок		
	Метод объяснения	Оценка объяснимости	
		метрика	значения
[73]	IG	Не использовалось	Не рассчитывалось
[75]	CAM		
[77]	MIL		
[79]	CAM		
[80]			
[82]			
[84]	mMIL	Количественная оценка объяснений предсказанных объектов на основе их пересечений с картами истинности	Oobj-g — 0.506 Oobj — 0.677 Omax — 0.712 Oclass — 0.784 Ogt — 0.526 Oany — 0.729
[87]	CAM	Не использовалось	Не рассчитывалось
[88]			
[89]			

выступают наиболее частой причиной потери зрения среди населения мира вне зависимости от уровня социального благополучия стран проживания. Снимок глазного дна с поражённым глаукомой глазным нервом представлен на рис. 13.

Поскольку единственным доступным неинвазивным методом лечения глаукомы остается снижение уровня внутриглазного давления, то на первый план выходит задача ранней диагностики заболевания. Использование методов компьютерной диагностики за последнее десятилетие возросло в несколько раз.

Учитывая актуальность ранней диагностики глаукомы [97–102], с каждым годом появляется множество исследований по применению методов машинного и глубокого обучения для решения задачи. Благодаря росту использования нейронных сетей в медицине в последние годы установился тренд на преобладание методов, основанных на глубоком обучении в диагностике глаукомы на базе анализа снимков глазного дна [103–107] и ОКТ-снимков [108–110], что показано в представленных систематических обзорах. Точность большинства решений по диагностике глаукомы на основе нейронных сетей составляет более 95% и является приемлемой для практики.

Однако, несмотря на достигнутые успехи, одной из самых актуальных остается проблема отсутствия прозрачности при получении результата, что ведет к снижению доверия к технологии и решениям со стороны врачей-офтальмологов.



Рис. 13. Поражение глаза глаукомой [102]

Представленные в табл. 5 характеристики DL-составляющей исследований говорят о предпочтении собственных архитектур стандартным вариантам из библиотеки Keras.

Таблица 5. Глаукома

Исследование	Год	DL-блок			
		Характеристика ИНС		Характеристика набора данных	
		архитектура	результат	название, классы, количество изображений	доступ
[111]	2019	Авторская (AG-CNN)	Accuracy, % 95.3	LAG-Dataset [112] (всего — 4250, Positive — 1711, Negative — 3143)	По запросу
[113]	2019	VGG-16 Inception-v4 ResNet-152	Accuracy, % 86 91 96	Авторский датасет (всего — 1903, Glaucoma — 1363, Normal — 540)	Приватный
[114]	2019	Авторский (EAMNet)	AUC: 0.88	ORIGA [115] (всего — 650, Glaucoma — 168, Normal — 482)	Открытый
[116]	2019	Conv Layers + Dense Layers, Conv Layers + Random Forest, VGG16 PT + Random Forest, ResNet18 PT + Random Forest, InceptionNet PT + Random Forest	Accuracy, % 95.7 94 95 94.8 94.2	Авторский датасет (всего — 737)	Приватный
[117]	2019	Авторская (Patho-GAN)	Accuracy, % 41.2	LAG-Dataset [112] (всего — 4250, Positive — 1711, Negative — 3143)	По запросу
[118]	2020	Нет доступа	AUC: 0.93	Нет доступа	
[119]	2020	Авторская на основе ResNet	AUC: 0.977 AUC: 0.933	HK Dataset (всего — 975400) Stanford Dataset (всего — 246200)	Приватный
[120]	2020	VGG-16 VGG-19	Accuracy: 0.9463 0.9416	Авторский датасет (всего — 249, Glaucoma — 93, Normal — 156)	Приватный
[121]	2020	Авторская (MCL-Net)	AUC: 0.8698	ORIGA [115] (всего — 650, Glaucoma — 168, Normal — 482), REFUGE [122] (Всего — 400)	Открытый
[123]	2021	Авторская VGG-19	Accuracy, % 94.87 92.77	Авторский датасет (всего — 85497, CNV — 37742, DME — 11840, DRUSEN — 9108, NORMAL — 26807)	Приватный

Исследование	Год	DL-блок			
		Характеристика ИНС		Характеристика набора данных	
		архитектура	результат	название, классы, количество изображений	доступ
[124]	2022	DenseNet121 InceptionV3 ResNet50 VGG-16 VGG-19	Accuracy, % 86.81 86.42 94.71 88.63 93.31	LAG-Dataset [112] (всего — 4250, Positive — 1711, Negative — 3143)	По запросу
[125]	2022	Авторская	Accuracy, % 93.5	ORIGA-Light [126] (всего — 650)	По запросу
[127]	2022	Авторская (ANFIS & CNN) AlexNet VGG-16 ResNet	Accuracy, % 96.12 93.61 93.82 96.02	Glaucoma Detection [128] (всего — 650, Positive — 482, Negative — 160)	Открытый

Авторские архитектуры ($n = 7$) рассмотрены в исследованиях [111, 114, 117, 121, 123, 125, 127]. Как следует из табл. 6, метрики оценки объяснимости в данных работах не использовались.

Таблица 6. Глаукома. Сравнительная таблица (продолжение)

Исследование	Метод объяснения	XAI-блок	
		Оценка объяснимости	
		метрика	значение
[111]	Trainable attention	Не использовались	Не рассчитывались
[113]	Grad-CAM		
[114]	CAM		
[116]	Grad-CAM		
[117]	CAM		
[118]	Grad-CAM		
[119]	CAM		
[120]	CAM		
[121]	MCL		
[123]	Grad-CAM		
[124]	LIME		
[125]	CAM		
[127]	LIME		

Применяемые для обучения нейросетей наборы данных также не отличаются разнообразием и в среднем содержат от 600 до 1000 изображений. Наибольшим по количеству примеров, использованных для обучения, стал набор данных LAG, содержащий 4 250 изображений.

3.3. Другие заболевания и методы улучшения результата объяснения. Использование методов объяснения результатов в офтальмологии не ограничивается лишь двумя вышеперечисленными заболеваниями. Существуют также некоторые другие, менее распространенные состояния, к диагностике которых исследователи также применили методы ОИИ. Нельзя забывать о важности наличия качественных снимков для правильной диагностики. В вопросах повышения качества офтальмологических снимков, поисков в них аномалий и устранения артефактов также помогает ОИИ. Речь об этом пойдет в данном разделе.

В [129] предлагается использовать новый Few-Shot Learning фреймворк для обучения ИНС классификации редких заболеваний, таких как передняя ишемическая нейропатия

зрительного нерва. Автор отмечает, что предложенный подход способен устранить проблему необходимости большого количества примеров при традиционном обучении ИНС. Результатами исследования стало достижение показателей AUC в 0.938 при обучении сети на наборе данных, полученном из телемедицинской системы ORNDIAT [130], содержащей 164 660 изображений. Использование метода объяснения GVP позволило минимизировать ошибки детектора и показало возможность классифицировать 37 из 41 заболевания, входящего в ORNDIAT.

Несмотря на большое количество исследований (например, [131—139]), посвящённых объяснению различных медицинских изображений в офтальмологии, обзорные работы по ОИИ в области офтальмологии очень редки. Только в сентябре 2023 г. появился первый обзор по ОИИ [140], гораздо более узкий, чем настоящее исследование. Там также предложено несколько методов ОИИ, которые все чаще применяются в офтальмологических DL-приложениях, преимущественно в задачах анализа медицинских изображений.

Заключение. Рассмотрена эволюция методов ОИИ для распознавания объектов на цифровых изображениях. Рассмотрены классификация методов ОИИ для прикладных интеллектуальных систем, применение ОИИ в нейросетях глубокого обучения, примеры реализованных методов ОИИ в области анализа цифровых изображений на основе нейронных систем глубокого обучения для некоторых офтальмологических заболеваний. Отобранные из различных источников исследования были разделены на несколько групп относительно изучаемых заболеваний и возможностей применений методов ОИИ. Дополнительно для каждой группы исследований составлена проанализированная информация о подходах в области глубокого обучения (архитектура ИНС, точность, набор данных, доступность набора данных) и ОИИ (метод объяснения результата, критерии точности объяснения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fontaine T., McCarthy B., Saleh T.* Building the AI-powered Organization // *Harvard Business Review*. 2019. V. 97. No. 4. P. 62—73.
2. *Shao Z. et al.* Tracing the evolution of AI in the past decade and forecasting the emerging trends // *Expert Systems with Applications*. – 2022. – С. 118221. – DOI: 10.1016/j.eswa.2022.118221
3. *Gunning D., Aha D.* DARPA's Explainable Artificial Intelligence (XAI) Program // *AI Magazine*. 2019. V. 40. No. 2. P. 44—58. DOI: 10.1609/aimag.v40i2.2850.
4. *Fouse S., Cross S., Lapin Z.* DARPA's Impact on Artificial Intelligence // *AI Magazine*. 2020. V. 41. No. 2. P. 3—8. DOI: 10.1609/aimag.v41i2.5294.
5. *Egger J. Gsaxner C., Pepeet A. et al.* Medical Deep Learning — A Systematic Meta-Review // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2022. V. 221. P. 106874. DOI: 10.1016/j.cmpb.2022.106874.
6. *Shen D., Wu G., Suk H. I.* Deep Learning in Medical Image Analysis // *Annual Review of Biomedical Engineering*. 2017. V. 19. P. 221—248. DOI: 10.1007/978-3-030-33128-3_1.
7. *Liu Z., Zhichao L., Luhong J. et al.* A Survey on Applications of Deep Learning in Microscopy Image Analysis // *Computers in Biology and Medicine*. 2021. V. 134. P. 104523. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2021.104523.
8. *Xu J., Xi X., Chen J. et al.* A Survey of Deep Learning for Electronic Health Records // *Applied Sciences*. 2022. V. 12. No. 22. P. 11709. DOI: 10.3390/app122211709.
9. *Feng R., Badgeley M., Mocco J. et al.* Deep Learning Guided Stroke Management: a Review of Clinical Applications // *Journal of Neurointerventional Surgery*. 2018. V. 10. No. 4. P. 358—362. DOI: 10.1136/neurintsurg-2017-013355.
10. *Abdel-Jaber H., Devassy D., Salam A. et al.* A Review of Deep Learning Algorithms and Their Applications in Healthcare // *Algorithms*. 2022. V. 15. No. 2. P. 71. DOI: 10.3390/a15020071.
11. *Аверкин А. Н., Ярушев С. А.* Обзор исследований в области разработки методов извлечения правил из искусственных нейронных сетей // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. Т. 6. № 6. С. 106—121. DOI 10.31857/S0002338821060044.
12. *Аверкин А. Н.* Объяснимый искусственный интеллект — итоги и перспективы // *Авиационные системы в XXI веке: тез. докл. юбилейной Всероссийск. науч.-техн. конф. М.: Государственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, 2022. С. 235—236.*
13. *Федунов Б. Е.* Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов. М.: Де'Либли, 2018. 246 с.
14. *Борисов В. В.* Систематизация нечетких и гибридных нечетких моделей // *Мягкие измерения и вычисления*. 2020. Т. 29. № 4. С. 98—120.
15. *Talpur N., Abdulkadir S. Alhussian H. et al.* Deep Neuro-Fuzzy System Application Trends, Challenges, and Future Perspectives: A Systematic Survey // *Artificial Intelligence Review*. 2023. V. 56. No. 2. P. 865—913. DOI: 10.1007/s10462-022-10188-3.

16. *Аверкин А. Н., Ярушев С. А.* Объяснительный искусственный интеллект в моделях поддержки принятия решений для здравоохранения 5.0 // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 2. С. 41—61/ DOI:10.32603/2071-2340-2023-2-41-61.
17. *Van der Velden B. H.M., Kuijff B. H., Gilhuijs H. J.* et al. Explainable Artificial Intelligence (XAI) in Deep Learning-based Medical Image Analysis // Medical Image Analysis. 2022. P. 102470. DOI: 10.1016/j.media.2022.102470.
18. *Anton N., Doroftei B., Curteanu S.* et al. Comprehensive Review on the Use of Artificial Intelligence in Ophthalmology and Future Research Directions // Diagnostics. 2022. V. 13. No. 1. P. 100. DOI: 10.3390/diagnostics13010100.
19. *Srivastava O., Tennant M., Grewal P.* et al. Artificial Intelligence and Machine Learning in Ophthalmology: A Review // Indian J. Ophthalmology. 2023. V. 71. No. 1. P. 11—17. DOI: 10.4103/ijo.ijo_1569_22.
20. *Hogarty D. T., Mackey D. A., Hewitt A. W.* Current State and Future Prospects of Artificial Intelligence in Ophthalmology: A Review // Clinical & Experimental Ophthalmology. 2019. V. 47. No. 1. P. 128—139. DOI: 10.1111/ceo.13381.
21. *Biousse V., Bruce B. B., Newman N. J.* Ophthalmoscopy in the 21st Century: the 2017 H. Houston Merritt Lecture // Neurology. 2018. V. 90. No. 4. P. 167—175. DOI: 10.1212/WNL.0000000000004868.
22. *Minakaran N., de Carvalho E. R., Petzold A.* et al. Optical Coherence Tomography (OCT) in Neuro-ophthalmology // Eye. 2021. V. 35. No. 1. P. 17—32. DOI: 10.1038/s41433-020-01288-x.
23. *Бакуткин В. В., Бакуткин И. В., Зеленов В. А.* Специализированная система предрейсовых медицинских осмотров с применением цифровых технологий // Санитарный врач. 2021. № 5. С. 60—66. DOI: 10.33920/med-08-2105-07.
24. *Кобринский Б. А.* Автоматизированные регистры медицинского назначения: теория и практика применения. Изд. 2-е, стер. М.; Берлин: Директ-Медиа, 2016. 148 с.
25. *Еремеев А. П., Колосов О. С., Зуева М. В.* и др. Интеграция методов системного анализа и когнитивной графики при ранней диагностике патологий зрения // 20-я Национальная конф. по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ-2022). М., 2022. С. 313—329.
26. *Кобринский Б. А.* Интегрированные и гибридные системы искусственного интеллекта: методологические проблемы и вопросы терминологии // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте ИММВ-2022: Сб. науч. тр. XI Междунар. науч.-практической конф. В 2 т. Коломна: Общероссийская общественная организация “Российская ассоциация искусственного интеллекта”, 2022. С. 37—46.
27. *Arrieta A. B., Díaz-Rodríguez N., Del Ser J.* et al. Explainable Artificial Intelligence (XAI): Concepts, Taxonomies, Opportunities and Challenges Toward Responsible AI // Information Fusion. 2020. V. 58. P. 82—115. DOI: 10.1016/j.inffus.2019.12.012.
28. *Schwalbe G., Finzel B.* A Comprehensive Taxonomy for Explainable Artificial Intelligence: A Systematic Survey of Surveys on Methods and Concepts // Data Mining and Knowledge Discovery. 2023. P. 1—59. DOI: 10.1007/s10618-022-00867-8.
29. *Speith T.* A Review of Taxonomies of Explainable Artificial Intelligence (XAI) Methods // ACM Conf. on Fairness, Accountability, and Transparency. Seoul, 2022. P. 2239—2250. DOI: 10.1145/3531146.3534639.
30. *Saeed W., Omlin C.* Explainable AI (XAI): A Systematic Meta-survey of Current Challenges and Future Opportunities // Knowledge-Based Systems. 2023. V. 263. P. 110273. DOI: 10.1016/j.knosys.2023.110273.
31. *Clement T., Kemmerzell N., Abdelaal M.* et al. XAIR: A Systematic Metareview of Explainable AI (XAI) Aligned to the Software Development Process // Machine Learning and Knowledge Extraction. 2023. V. 5. No. 1. P. 78—108. DOI: 10.3390/make5010006.
32. *Zhou B., Khosla A., Lapedriza A.* et al. Learning Deep Features for Discriminative Localization // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Las Vegas, 2016. P. 2921—2929.
33. *Selvaraju R. R., Cogswell M., Das A.* et al. Grad-cam: Visual Explanations from Deep Networks via Gradient-based Localization // Proc. IEEE Intern. Conf. on Computer Vision (ICCV). Venice, 2017. P. 618—626.
34. Sample Code for the Class Activation Mapping // GitHub URL: <https://github.com/zhoubolei/CAM> (дата обращения: 13.04.2023).
35. Advanced AI Explainability for PyTorch // GitHub URL: <https://github.com/jacobgil/pytorch-grad-cam> (дата обращения: 13.04.2023).
36. *Springenberg J. T.* Striving for Simplicity: The all Convolutional Net // arXiv Preprint arXiv:1412.6806.014.
37. *Ribeiro M. T., Singh S., Guestrin C.* Why Should I Trust You? Explaining the Predictions of any Classifier // Proc. 22nd ACM SIGKDD Intern. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining. San Francisco, 2016. P. 1135—1144. DOI: 10.1145/2939672.2939778.
38. *Huang Q., Yamada M., Tian Y.* et al. Graphlime: Local Interpretable Model Explanations for Graph Neural Networks // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2022. V. 35. No. 7. P. 6968—6972. DOI: 10.1109/TKDE.2022.3187455.
39. *Gramegna A., Giudici P.* SHAP and LIME: An Evaluation of Discriminative Power in Credit Risk // Frontiers in Artificial Intelligence. 2021. V. 4. P. 752558. DOI: 10.3389/frai.2021.752558.

40. Lime // GitHub URL: <https://github.com/marcotcr/lime> (дата обращения: 13.04.2023).
41. *Shapley L. S.* A Value for N-Person Games. AW Kuhn, HW Tucker, ed., Contributions to the Theory of Games II. Santa-Monica, 1953.
42. *Lundberg S. M., Lee S. I.* A Unified Approach to Interpreting Model Predictions // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. V. 30.
43. SHAP // GitHub URL: <https://github.com/slundberg/shap> (дата обращения: 13.04.2023).
44. *Sundararajan M., Najmi A.* The Many Shapley Values for Model Explanation // Intern. Conf. on Machine Learning. PMLR, Carnegie Mellon, 2020. P. 9269—9278.
45. *Frye C., Rowat C., Feige I.* Asymmetric Shapley Values: Incorporating Causal Knowledge Into Model-agnostic Explainability // Advances in Neural Information Processing Systems. 2020. V. 33. P. 1229—1239.
46. *Janzing D., Minorics L., Blöbaum P.* Feature Relevance Quantification in Explainable AI: A Causal Problem // Intern. Conf. on Artificial Intelligence and Statistics. PMLR, Sydney, 2020. P. 2907—2916.
47. *Cheplygina V., de Bruijne M., Pluim J. P.W.* Not-so-supervised: A Survey of Semi-Supervised, Multi-instance, and Transfer Learning in Medical Image Analysis // Medical Image Analysis. 2019. V. 54. P. 280—296. DOI: 10.1016/j.media.2019.03.009.
48. *Sundararajan M., Taly A., Yan Q.* Axiomatic Attribution for Deep Networks // Intern. Conf. on Machine Learning. PMLR, Sydney, 2017. P. 3319—3328.
49. *Jetley S., Lord N. A., Lee N.* et al. Learn to Pay Attention // arXiv preprint arXiv:1804.02391. 2018.
50. Learn to Pay Attention (ICLR'18) // GitHub URL: https://github.com/saumya-jetley/cd_ICLR18_LearnToPayAttention (дата обращения: 13.04.2023).
51. *Демидова Т. Ю., Кожевников А. А.* Диабетическая ретинопатия: история, современные подходы к ведению, перспективные взгляды на профилактику и лечение // Сахарный диабет. 2020. V. 23(1). P. 95—105. DOI: 10.14341/DM10273.
52. *Дедов И. И., Шестакова М. В., Вукулова О. К.* Эпидемиология сахарного диабета в Российской Федерации: клинико-статистический отчет по данным федерального регистра сахарного диабета // Сахарный диабет. 2017. V. 20. No. 1. P. 13—41. DOI: 10.14341/DM8664.
53. *Klein R., Klein B. E.K.* Are Individuals with Diabetes Seeing Better? A Long-term Epidemiological Perspective // Diabetes. 2010. V. 59. No. 8. P. 1853—1860. DOI: 10.2337/db09-1904.
54. *Porta M., Kohner E.* Screening for Diabetic Retinopathy in Europe // Diabetic Medicine. 1991. V. 8. No. 3. P. 197—198. DOI: 10.1111/j.1464-5491.1991.tb01571.x.
55. *Yasin S., Iqbal N., Ali T., et al.* Severity Grading and Early Retinopathy Lesion Detection Through Hybrid Inception-ResNet Architecture // Sensors. 2021. V. 21. No. 20. P. 6933. DOI: 10.3390/s21206933.
56. *Bidwai P., Gite S., Pahuja K.* et al. A Systematic Literature Review on Diabetic Retinopathy Using an Artificial Intelligence Approach // Big Data and Cognitive Computing. MDPI AG, 2022. V. 6. No. 4. P. 152. DOI: 10.3390/bdcc6040152.
57. *Филиппов В. М., Петрачков Д. В., Будзинская М. В., Сидамонидзе А. Л.* Современные концепции патогенеза диабетической ретинопатии // Вестн. офтальмологии. 2021. V. 137. P. 306—313. DOI: 10.17116/oftalma2021137052306.
58. *Sahiledengle B., Assefa T., Negash W.* et al. Prevalence and Factors Associated with Diabetic Retinopathy among Adult Diabetes Patients in Southeast Ethiopia: A Hospital-Based Cross-Sectional Study // Clinical Ophthalmology. 2022. V. 16. P. 3527—3545. DOI: 10.2147/OPHTH.S385806.
59. *Barsegian A., Kotlyar B., Lee J.* et al. Diabetic Retinopathy: Focus on Minority Populations // Intern. J. Clinical Endocrinology and Metabolism. 2017. V. 3. No. 1. P. 034. DOI: 10.17352/ijcem.000027.
60. *Avidor D., Loewenstein A., Waisbourd M.* et al. Cost-effectiveness of Diabetic Retinopathy Screening Programs Using Telemedicine: A Systematic Review // Cost Effectiveness and Resource Allocation. 2020. V. 18. P. 1—9. DOI: 10.1186/s12962-020-00211-1.
61. *Борщук Е. Л., Чупров А. Д., Лосицкий А. О.* и др. Организация скрининга диабетической ретинопатии с применением телемедицинских технологий // Практическая медицина. 2018. Т. 16. № 4. С. 68—70. DOI: 1032000/2072-1757-2018-16-4-68-70.
62. *Russo A., Morescalchi F., Costagliola C.* et al. Comparison of Smartphone Ophthalmoscopy with Slit-lamp Biomicroscopy for Grading Diabetic Retinopathy // American J. Ophthalmology. 2015. V. 159. No. 2. P. 360—364. e1. DOI: 10.1016/j.ajo.2014.11.008.
63. *Rajalakshmi R., Arulmalar S., Usha M.* et al. Validation of Smartphone Based Retinal Photography for Diabetic Retinopathy Screening // PloS One. 2015. V. 10. No. 9. P. e0138285. DOI: 10.1371/journal.pone.0138285.
64. *Shekar S., Satpute N., Gupta A.* Review on Diabetic Retinopathy with Deep Learning Methods // J. of Medical Imaging. 2021. V. 8. No. 6. P. 060901—060901. DOI: 10.1117/1.JMI.8.6.060901.
65. *Nadeem M. W., Goh H. G., Hussain M.* et al. Deep Learning for Diabetic Retinopathy Analysis: A Review, Research Challenges, and Future Directions // Sensors. 2022. V. 22. No. 18. P. 6780. DOI: 10.3390/s22186780.

66. Alyoubi W. L., Shalash W. M., Abulkhair M. F. Diabetic Retinopathy Detection through Deep Learning Techniques: A Review // Informatics in Medicine Unlocked. 2020. V. 20. P. 100377. DOI: 10.1016/j.imu.2020.100377.
67. Vij R., Arora S. A Systematic Review on Diabetic Retinopathy Detection Using Deep Learning Techniques // Archives of Computational Methods in Engineering. 2023. V. 30. No. 3. P. 2211–2256. DOI: 10.1007/s11831-022-09862-0.
68. Skouta A., Elmoufidi A., Jai-Andaloussi S. et al. Deep Learning for Diabetic Retinopathy Assessments: A Literature Review // Multimedia Tools and Applications. 2023. P. 1–66. DOI: 10.1007/s11042-023-15110-9.
69. Tajudin N. M.A., Kipli K., Mahmood M. H. et al. Deep Learning in the Grading of Diabetic Retinopathy: A Review // IET Computer Vision. 2022. V. 16. No. 8. P. 667–682. DOI: 10.1049/cvi2.12116.
70. Sowmiya R., Kalpana R. Survey or Review on the Deep Learning Techniques for Retinal Image Segmentation in Predicting/Diagnosing Diabetic Retinopathy // AI-Enabled Multiple-Criteria Decision-Making Approaches for Healthcare Management. IGI Global. 2022. P. 181–203. DOI: 10.4018/978-1-6684-4405-4.ch010.
71. Durga N. A Systematic Review on Diabetic Retinopathy and Common Eye Diseases Detection through Deep Learning Techniques // Journal of Positive School Psychology. 2022. V. 6. No. 4. P. 1905–1919.
72. Alaeddini Z. A Review on Machine Learning Methods in Diabetic Retinopathy Detection // J. Ophthalmic and Optometric Sciences. 2021. V. 5. No. 1. DOI: 10.22037/joos.v5i1.39216.
73. Sayres R., Taly A., Rahimy E. et al. Using a Deep Learning Algorithm and Integrated Gradients Explanation to Assist Grading for Diabetic Retinopathy // Ophthalmology. 2019. V. 126. No. 4. P. 552–564. DOI: 10.1016/j.ophtha.2018.11.016.
74. Krause J., Gulshan V., Rahimy E. et al. Grader Variability and the Importance of Reference Standards for Evaluating Machine Learning Models for Diabetic Retinopathy // Ophthalmology. 2018. V. 125. No. 8. P. 1264–1272. DOI: 10.1016/j.ophtha.2018.01.034.
75. Ahmad M., Kasukurthi N., Pande H. Deep Learning for Weak Supervision of Diabetic Retinopathy Abnormalities // IEEE 16th Intern. Sympos. on Biomedical Imaging (ISBI 2019). Venice: IEEE, 2019. P. 573–577. DOI: 10.1109/ISBI.2019.8759417.
76. Messidor-2 // ADCIS URL: <https://www.adcis.net/en/third-party/messidor2/> (дата обращения: 13.04.2023).
77. Costa P., Araújo T., Aresta G. et al. EyeWes: Weakly Supervised Pre-trained Convolutional Neural Networks for Diabetic Retinopathy Detection // 16th Intern. Conf. on Machine Vision Applications (MVA). Tokyo: IEEE, 2019. P. 1–6. DOI: 10.23919/MVA.2019.8757991.
78. Decencière E., Zhang X., Cazuguel G. et al. Feedback on a Publicly Distributed Image Database: the Messidor database // Image Analysis & Stereology. 2014. V. 33. No. 3. P. 231–234. DOI: 10.5566/ias.1155.
79. Jiang H. et al. An Interpretable Ensemble Deep Learning Model for Diabetic Retinopathy Disease Classification // 41st Annual Intern. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). Berlin: IEEE, 2019. P. 2045–2048. DOI: 10.1109/EMBC.2019.8857160.
80. Kumar D., Taylor G. W., Wong A. Discovery Radiomics with CLEAR-DR: Interpretable Computer Aided Diagnosis of Diabetic Retinopathy // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 25891–25896. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2893635.
81. Diabetic Retinopathy Detection // Kaggle URL: <https://www.kaggle.com/c/diabetic-retinopathy-detection> (дата обращения: 13.04.2023).
82. Perdomo O., Rios H., Rodríguez F. J. et al. Classification of Diabetes-related Retinal Diseases Using a Deep Learning Approach in Optical Coherence Tomography // Computer Methods and Programs in Biomedicine. 2019. V. 178. P. 181–189. DOI: j.cmpb.2019.06.016.
83. Farsiu S., Chiu S. J., O'Connell R. V. et al. Quantitative Classification of Eyes With and Without Intermediate Age-related Macular Degeneration Using Optical Coherence Tomography // Ophthalmology. 2014. V. 121. No. 1. P. 162–172. DOI: 10.1016/j.ophtha.2013.07.013.
84. Araújo T., Aresta G., Mendonça L. et al. DR| GRADUATE: Uncertainty-aware Deep Learning-based Diabetic Retinopathy Grading in Eye Fundus Images // Medical Image Analysis. 2020. V. 63. P. 101715. DOI: 10.1016/j.media.2020.101715.
85. Porwal P., Pachade S., Kamble R. et al. Indian Diabetic Retinopathy Image Dataset (IDRiD): a Database for Diabetic Retinopathy Screening Research // Data. 2018. V. 3. No. 3. P. 25. DOI: 10.3390/data3030025.
86. Takahashi H., Tampo H., Arai Y. et al. Applying Artificial Intelligence to Disease Staging: Deep learning for Improved Staging of Diabetic Retinopathy // PloS One. 2017. V. 12. No. 6. P. e0179790. DOI: 10.1371/journal.pone.0179790.
87. Narayanan B. N., Hardie R. C., De Silva M. S. et al. Hybrid Machine Learning Architecture for Automated Detection and Grading of Retinal Images for Diabetic Retinopathy // J. Medical Imaging. 2020. V. 7. No. 3. P. 034501–034501. DOI: 10.1117/1.JMI.7.3.034501.
88. Tu Z., Gao S., Zhou K. et al. SUNet: A Lesion Regularized Model for Simultaneous Diabetic Retinopathy and Diabetic Macular Edema Grading // IEEE 17th Inter. Sympos. on Biomedical Imaging (ISBI). Iowa City: IEEE, 2020. P. 1378–1382. DOI: 10.1109/ISBI45749.2020.9098673.
89. Niu Y., Gu L., Zhao Y. et al. Explainable Diabetic Retinopathy Detection and Retinal Image Generation // IEEE J. Biomedical and Health Informatics. 2021. V. 26. No. 1. P. 44–55. DOI: 10.1109/JBHI.2021.3110593.

90. *Wei Q., Li X., Yu W.* et al. Learn to Segment Retinal Lesions and Beyond // 25th Intern. Conf. on Pattern Recognition (ICPR). Milano: IEEE, 2021. P. 7403—7410. DOI: 10.1109/ICPR48806.2021.9412088.
91. *Zhou Y., Wang B., Huang L.* et al. A Benchmark for Studying Diabetic Retinopathy: Segmentation, Grading, and Transferability // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2020. V. 40. No. 3. P. 818—828. DOI: 10.1109/TMI.2020.3037771.
92. *Alghamdi H. S.* Towards Explainable Deep Neural Networks for the Automatic Detection of Diabetic Retinopathy // Applied Sciences. 2022. V. 12. No. 19. P. 9435. DOI: 10.3390/app12199435.
93. APTOS: Eye Preprocessing in Diabetic Retinopathy // Kaggle URL: <https://www.kaggle.com/code/ratthachat/aptos-eye-preprocessing-in-diabetic-retinopathy/notebook> (дата обращения: 13.04.2023).
94. *Jiang H., Yang K., Gao M.* et al. An Interpretable Ensemble Deep Learning Model for Diabetic Retinopathy Disease Classification // 41st Annual Intern. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). Berlin: IEEE, 2019. P. 2045—2048.
95. *Miró-Nicolau M., Moyà-Alcover G., Jaume-i-Capó A.* Evaluating Explainable Artificial Intelligence for X-ray Image Analysis // Applied Sciences. 2022. V. 12. No. 9. P. 4459. DOI: 10.3390/app12094459.
96. *Weinreb R. N., Aung T., Medeiros F. A.* The Pathophysiology and Treatment of Glaucoma: A Review // Jama. 2014. V. 311. No. 18. P. 1901—1911. DOI: 10.1001/jama.2014.3192.
97. Клинические рекомендации. Глаукома первичная открытоугольная // Рубрикатор клинических рекомендаций URL: https://cr.minzdrav.gov.ru/recomend/96_1 (дата обращения: 06.04.2023).
98. *Малишевская Т. Н., Косакян С. М., Егоров Д. Б.* и др. Региональный регистр пациентов с глаукомой. Методологические аспекты построения, возможности использования в клинической практике // Российский офтальмологический журнал. 2020. Т. 13. № 4. С. 7—35. DOI: doi.org/10.21516/2072-0076-2020-13-4-supplement-7-35.
99. *Мовсисян А. Б., Куроедов А. В., Архаров М. А.* и др. Эпидемиологический анализ заболеваемости и распространенности первичной открытоугольной глаукомы в Российской Федерации // Клиническая офтальмология. 2022. Т. 22(1). С. 3—10. DOI: 10.32364/2311-7729-2022-22-1-3-10.
100. *Tham Y. C., Li X., Wong T. Y.* et al. Global Prevalence of Glaucoma and Projections of Glaucoma Burden Through 2040: A Systematic Review and Meta-analysis // Ophthalmology. 2014. V. 121. No. 11. P. 2081—2090. DOI: 10.1016/j.ophtha.2014.05.013.
101. *Gallo Afflitto G., Aiello F., Cesareo M.* et al. Primary Open Angle Glaucoma Prevalence in Europe: A Systematic Review and Meta-Analysis // J. Glaucoma. 2022. V. 31. No. 10. P. 783—788. DOI: 10.1111/j.1755-3768.2022.0718.
102. *Mahum R., Rehman S. U., Okon O. D.* et al. A Novel Hybrid Approach Based on Deep CNN to Detect Glaucoma Using Fundus Imaging // Electronics. 2021. V. 11. No. 1. P. 26. DOI: 10.3390/electronics11010026.
103. *Thompson A. C., Jammal A. A., Medeiros F. A.* A Review of Deep Learning for Screening, Diagnosis, and Detection of Glaucoma Progression // Translational Vision Science & Technology. 2020. V. 9. No. 2. P. 42—42. DOI: 10.1167/tvst.9.2.42.
104. *Barros D., Moura J. C.C., Freire C. R.* et al. Machine Learning Applied to Retinal Image Processing for Glaucoma Detection: Review and Perspective // Biomedical Engineering Online. 2020. V. 19. No. 1. P. 1—21. DOI: 10.1186/s12938-020-00767-2.
105. *Jin K., Ye J.* Artificial Intelligence and Deep Learning in Ophthalmology: Current Status and Future Perspectives // Advances in Ophthalmology Practice and Research. 2022. P. 100078. DOI: 10.1016/j.aopr.2022.100078.
106. *Guergueb T., Akhloufi M. A.* A Review of Deep Learning Techniques for Glaucoma Detection // SN Computer Science. 2023. V. 4. No. 3. P. 274. DOI: 10.1007/s42979-023-01734-z.
107. *Alawad M., Aljouie A., Alamri S.* et al. Machine Learning and Deep Learning Techniques for optic Disc and Cup Segmentation — A Review // Clinical Ophthalmology. 2022. P. 747—764. DOI: 10.2147/OPTH.S348479.
108. *Ran A. R., Tham C. C., Chan P. P.* et al. Deep Learning in Glaucoma with Optical Coherence Tomography: A Review // Eye. 2021. V. 35. No. 1. P. 188—201. DOI: 10.1038/s41433-020-01191-5.
109. *Raja H., Akram M. U., Hassan T.* et al. Glaucoma Detection Using Optical Coherence Tomography Images: A Systematic Review of Clinical and Automated Studies // IETE J. Research. 2022. P. 1—21. DOI: 10.1080/03772063.2022.2043783.
110. *Perdomo Charry O. J., González F. A.* A Systematic Review of Deep Learning Methods Applied to Ocular Images // Ciencia e Ingeniería Neogranadina. 2020. V. 30. No. 1. P. 9—26. DOI: 10.18359/rcin.4242.
111. *Li L., Xu M., Liu H.* et al. A Large-scale Database and a CNN Model for Attention-based Glaucoma Detection // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2019. V. 39. No. 2. P. 413—424. DOI: 10.1109/TMI.2019.2927226.
112. *Li L., Mai X., Xiaofei W.* et al. Attention Based Glaucoma Detection: a Large-Scale Database and CNN Model // Proc. IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach, 2019. P. 10571—10580 (LAG Dataset).

113. *Kim M., Han J. C., Hyun S. H.* et al. Medinoid: Computer-aided Diagnosis and Localization of Glaucoma Using Deep Learning // *Applied Sciences*. 2019. V. 9. No. 15. P. 3064. DOI: 10.3390/app9153064.
114. *Liao W. M., Zou B. J., Zhao R. C.* et al. Clinical Interpretable Deep Learning Model for Glaucoma Diagnosis // *IEEE J. Biomedical and Health Informatics*. 2019. V. 24. No. 5. P. 1405—1412. DOI: 10.1109/JBHI.2019.2949075.
115. Glaucoma Fundus Imaging Datasets // Kaggle URL: <https://www.kaggle.com/datasets/arnavjain1/glaucoma-datasets> (дата обращения: 13.04.2023).
116. *Thakoor K. A., Li X., Tsamis E.* et al. Enhancing the Accuracy of Glaucoma Detection from OCT Probability Maps Using Convolutional Neural Networks // 41st Annual Intern. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). Berlin: IEEE, 2019. P. 2036—2040. DOI: 10.1109/EMBC.2019.8856899.
117. *Wang X., Xu M., Li L.* et al. Pathology-aware Deep Network Visualization and its Application in Glaucoma Image Synthesis // *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI 2019): 22nd Intern. Conf., Proceedings*. Shenzhen, I 22. China: Springer International Publishing, 2019. P. 423—431. DOI:10.1007/978-3-030-32239-7_47.
118. *Martins J., Cardoso J. S., Soares F.* Offline Computer-aided Diagnosis for Glaucoma Detection Using Fundus Images Targeted at Mobile Devices // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. V. 192. P. 105341. DOI: j.cmpb.2020.105341.
119. *Wang X., Chen H., Ran A. R.* et al. Towards Multi-center Glaucoma OCT Image Screening with Semi-Supervised Joint Structure and Function Multi-task Learning // *Medical Image Analysis*. 2020. V. 63. P. 101695. DOI: j.media.2020.101695.
120. *García G., del Amor R., Colomer A.* et al. Glaucoma Detection from Raw Circumpapillary Oct Images Using Fully Convolutional Neural Networks // *IEEE Intern. Conf. on Image Processing (ICIP)*. Abu Dhabi: IEEE, 2020. P. 2526—2530. DOI: 10.1109/ICIP40778.2020.9190916.
121. *Zhao R., Li S.* Multi-indices Quantification of Optic Nerve Head in Fundus Image via Multitask Collaborative Learning // *Medical Image Analysis*. 2020. V. 60. P. 101593. DOI: 10.1016/j.media.2019.101593.
122. *Huazhu F., Fei L., Orlando J. I.* et al. Refuge: Retinal Fundus Glaucoma Challenge. *IEEE Dataport*. 2019. DOI: 10.21227/tz6e-r977.
123. *Apon T. S., Hasan M. M., Islam A.* et al. Demystifying Deep Learning Models for Retinal OCT Disease Classification using Explainable AI // *IEEE Asia-Pacific Conference on Computer Science and Data Engineering (CSDE)*. Brisbane: IEEE, 2021. P. 1—6. DOI: 10.1109/CSDE53843.2021.9718400.
124. *Chayan T I., Islam A., Rahman E.* et al. Explainable AI based Glaucoma Detection using Transfer Learning and LIME // *arXiv preprint arXiv:2210.03332*. 2022.
125. *Deperlioglu O., Kose U., Gupta D.* et al. Explainable Framework for Glaucoma Diagnosis by Image Processing and Convolutional Neural Network Synergy: Analysis with Doctor Evaluation // *Future Generation Computer Systems*. 2022. V. 129. P. 152—169. DOI: 10.1016/j.future.2021.11.018.
126. *Zhang Z., Yin F. S., Liu J.* et al. Origa-light: An Online Retinal Fundus Image Database for Glaucoma Analysis and Research // *Annual Intern. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology*. Buenos Aires: IEEE, 2010. P. 3065—3068. DOI: 10.1109/IEMBS.2010.5626137.
127. *Kamal M. S., Dey N., Chowdhury L.* et al. Explainable AI for Glaucoma Prediction Analysis to Understand Risk Factors in Treatment Planning // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2022. V. 71. P. 1—9. DOI: 10.1109/TIM.2022.3171613.
128. Glaucoma Detection // Kaggle URL: https://www.kaggle.com/datasets/sshikamaru/glaucomadetection?select=Fundus_Train_Val_Data (дата обращения: 13.04.2023).
129. *Quellec G., Lamard M., Conze P. H.* et al. Automatic Detection of Rare Pathologies in Fundus Photographs Using Few-shot Learning // *Medical Image Analysis*. 2020. V. 61. P. 101660. DOI: 10.1016/j.media.2020.101660.
130. *Massin P., Chabouis A., Erginay A.* et al. OPHDIAT©: A Telemedical Network Screening System for Diabetic Retinopathy in the Île-de-France // *Diabetes & Metabolism*. 2008. V. 34. No. 3. P. 227—234. DOI: 10.1016/j.diabet.2007.12.006.
131. *Jang Y., Son J., Park K. H.* et al. Laterality Classification of Fundus Images Using Interpretable Deep Neural Network // *J. Digital Imaging*. 2018. V. 31. P. 923—928. DOI: 10.1007/s10278-018-0099-2.
132. *Shen Y., Sheng B., Fang R.* et al. Domain-invariant Interpretable Fundus Image Quality Assessment // *Medical Image Analysis*. 2020. V. 61. P. 101654. DOI: 10.1016/j.media.2020.101654.
133. *Wang R., Fan D., Lv B.* et al. OCT Image Quality Evaluation Based on Deep and Shallow Features Fusion Network // *IEEE 17th Intern. Sympos. on Biomedical Imaging (ISBI)*. Iowa City: IEEE, 2020. P. 1561—1564. DOI: 10.1109/ISBI45749.2020.9098635.
134. *Zhou K., Gao S., Cheng J.* et al. Sparse-gan Sparsity-constrained Generative Adversarial Network for Anomaly Detection in Retinal Oct Image // *IEEE 17th Intern. Sympos. on Biomedical Imaging (ISBI)*. Iowa City: IEEE, 2020. P. 1227—1231. DOI: 10.1109/ISBI45749.2020.9098374.
135. *Singh A., Jothi Balaji J., Rasheed M. A.* et al. Evaluation of Explainable Deep Learning Methods for Ophthalmic Diagnosis // *Clinical Ophthalmology*. 2021. P. 2573—2581. DOI: 10.2147/OPTH.S312236.

136. *Kermary D., Zhang K., Goldbaum M.* et al. Labeled Optical Coherence Tomography (oct) and Chest X-ray Images for Classification // *Mendeley Data*. 2018. V. 2. No. 2. P. 651. DOI: 10.17632/rscbjbr9sj.
137. *Montavon G., Lapuschkin S., Binder A.* et al. Explaining Nonlinear Classification Decisions with Deep Taylor Decomposition // *Pattern Recognition*. 2017. V. 65. P. 211—222. DOI: 10.1016/j.patcog.2016.11.008.
138. *Yang H. L., Kim J. J., Kim J. H.* et al. Weakly Supervised Lesion Localization for Age-related Macular Degeneration Detection Using Optical Coherence Tomography Images // *PloS One*. 2019. V. 14. No. 4. P. e0215076. DOI: 10.1371/journal.pone.0215076.
139. *Meng Q., Hashimoto Y., Satoh S.* How to Extract More Information with Less Burden: Fundus Image Classification and Retinal Disease Localization with Ophthalmologist Intervention // *IEEE J. Biomedical and Health Informatics*. 2020. V. 24. No. 12. P. 3351—3361. DOI: 10.1109/JBHI.2020.3011805.
140. *Tan T. F., Dai P., Zhang X.* et al. Explainable artificial intelligence in ophthalmology // *Current Opinion in Ophthalmology*. 2023. V. 34. No. 5. P. 422—430. DOI: 10.1097/ICU.0000000000000983.