

ДВУХКАНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНЫМ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

© 2025 г. Н. А. Ильина^a, *, Ю. Э. Плешивцева^a, **, Э. Я. Рапопорт^a, ***

^aСамарский государственный технический университет, Самара, Россия

*e-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru

**e-mail: yulia_pl@mail.ru

***e-mail: edgar.raopoort@mail.ru

Поступила в редакцию 04.09.2024 г.

После доработки 20.10.2024 г.

Принята к публикации 13.01.2025 г.

Предлагается конструктивная технология решения задач двухканального управления двумя взаимосвязанными через граничные условия неоднородными системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации по критерию энергосбережения при заданной точности равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемых величин к требуемому состоянию. Разработанная методика использует процедуру параметризации искомых управляемых воздействий на конечномерном подмножестве бесконечного числа финишных значений сопряженных переменных и последующую процедуру точной редукции к параметрической задаче полубесконечной оптимизации, которая решается по обобщаемой на исследуемую ситуацию схеме предложенного ранее альтернанского метода. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов с сосредоточенными управляемыми воздействиями для каждого из объектов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию с нестационарными коэффициентами передачи. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример оптимизации процесса индукционного нагрева двух неограниченных пластин в условиях идеального теплового контакта на их граничных поверхностях.

Ключевые слова: взаимосвязанные системы с распределенными параметрами, равномерная оптимизация, двухканальное управление, минимизация энергопотребления, альтернанский метод, синтез оптимальных регуляторов

DOI: 10.31857/S0002338825010036 EDN: AGWMAD

DUAL-CHANNEL CONTROL WITH MINIMUM ENERGY CONSUMPTION IN LINEAR-QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEMS OF INTERCONNECTED HETEROGENEOUS SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

N. A. Ilina^a, *, Yu. E. Pleshivtseva^a, **, E. Ya. Rapoport^a, ***

^aSamara State Technical University, Samara, Russia

*e-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru

** e-mail: yulia_pl@mail.ru

***e-mail: edgar.raopoort@mail.ru

A constructive technology for solving problems of dual-channel control of two heterogeneous systems interconnected by boundary conditions with distributed parameters in linear-quadratic optimization problems

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00180), <https://rscf.ru/project/22-29-00180/>, ФГБОУ ВО “Самарский государственный технический университет”.

by the criterion of energy saving is proposed. The resulting spatial distribution of controlled variables is approximated with given uniform accuracy to the desired state. The developed technique initially employs a procedure of parameterization of the desired control actions on a finite-dimensional subset of an infinite number of final values of conjugate variables. Subsequent procedure is applied for exact reduction to a parametric problem of semi-infinite optimization, which is solved according to the scheme of the previously proposed alternance method, which has been generalized to the situation under study. It is demonstrated that the equations of optimal controllers with lumped control actions for each of the objects are reduced to linear feedback algorithms on the measured state with non-stationary transfer coefficients. An illustrative example of optimization of the process of induction heating of two unbounded plates under conditions of ideal thermal contact on their boundary surfaces is presented, which is of independent interest.

Keywords: interconnected systems with distributed parameters, uniform optimization, dual-channel control, minimum energy consumption, alternance method, synthesis of optimal controllers

Введение. Целый ряд представляющих теоретический интерес и актуальных для приложений задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределенными параметрами (СРП) формулируется в условиях использования векторных управляющих воздействий (ВУВ) с целью повышения эффективности оптимизируемых процессов по выбранному критерию качества. При определении воздействия на объект по каждой из компонент ВУВ в отдельности в качестве соответствующего канала управления возникают при использовании ВУВ задачи многоканального управления (ЗМУ). Сказанное относится, в частности, к ситуациям с применением совокупности различных сосредоточенных внутренних или граничных воздействий на входе объекта, реализуемых одновременно или со сдвигом во времени (в системах ступенчатого управления технологическими комплексами) [1–4].

Отдельный класс наиболее сложных и малоисследованных ЗМУ СРП возникает для взаимосвязанных физически неоднородных СРП с различными управляющими воздействиями для каждого из объектов, нашедших широкое практическое применение в самых различных предметных областях [5–9].

Эффективный подход к ЗОУ СРП с многоканальным управлением аналогично задачам со скалярными управляющими воздействиями связан с заданием в бесконечномерном фазовом пространстве СРП целевого множества, которое отвечает достижимым значением допусков на отклонение от требуемого конечного состояния объекта, оцениваемых в равномерной метрике на множестве пространственных аргументов управляемой величины [10–13].

Последующее алгоритмически точное решение ЗМУ СРП в подобной постановке может быть получено по модифицированной схеме конструктивного альтернансного метода параметрической оптимизации [10–12], отличающейся существенным усложнением вычислительной технологии по сравнению с задачами одноканального управления [13].

Некоторые задачи оптимального по быстродействию управления СРП с векторными управляющими воздействиями исследовались в работах [13, 14]. В настоящей работе альтернансный метод распространяется на представляющую самостоятельный интерес задачу двухканального управления с минимальным расходом энергии системой двух взаимосвязанных граничными условиями объектов с распределенными параметрами. Приводится типичный для приложений пример оптимизации по критерию энергопотребления процесса управления нестационарными температурными полями двух физически неоднородных пластин в условиях идеального теплового контакта на их граничных поверхностях.

1. Постановка задачи. Пусть управляемые величины $Q_m(x_m, t)$, $m = 1, 2$, системы двух взаимосвязанных объектов с распределенными параметрами описываются в зависимости от времени $t \in [0, t^*]$ и пространственных координат $x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]$ системой линейных неоднородных пространственно одномерных уравнений в частных производных параболического типа с постоянными во времени коэффициентами [12, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial t} &= a_1(x_1) \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1^2} + b_1(x_1) \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + c_1(x_1) Q_1 + v_1(t) F_1(x_1), \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} &= a_2(x_2) \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_2^2} + b_2(x_2) \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + c_2(x_2) Q_2 + v_2(t) F_2(x_2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

с заданными начальными состояниями:

$$Q_1(x_1, 0) = f_1(x_1); Q_2(x_2, 0) = f_2(x_2), \quad (1.2)$$

границными условиями:

$$\begin{aligned} \beta_{j1} \frac{\partial Q_1(x_{j1}, t)}{\partial x_1} + \alpha_{j1} Q_1(x_{j1}, t) &= g_{j1}(t) + L_j^{(1)}(t), \\ \beta_{j2} \frac{\partial Q_2(x_{j2}, t)}{\partial x_2} + \alpha_{j2} Q_2(x_{j2}, t) &= g_{j2}(t) + L_j^{(2)}(t), \quad j = 0, 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и векторными внутренними $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ или граничными $g_m(t) = (g_{0m}(t), g_{1m}(t))$ входными воздействиями, компоненты которых или сами векторы $v(t)$ и $g_m(t)$ используются в качестве сосредоточенных управлений.

Всюду далее исключается для простоты случай совместного применения в этой роли v_m и g_m , и предполагается возможность реализации только одного из четырех вариантов векторного граничного управления $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ с двумя компонентами вида $g_{jm}(t)$ в (1.3). Здесь $\alpha_{jm} = \text{const} \geq 0$, $\beta_{jm} = \text{const} > 0$; дифференциальные операторы в правых частях (1.1) самосопряженные; $F_m(x_m), f_m(x_m), a_m(x_m), b_m(x_m), c_m(x_m)$ являются известными достаточно гладкими функциями своих аргументов, причем $a_m(x_m) > 0$. Операторы $L_j^{(m)}(t)$, $m = 1, 2$, в (1.3):

$$L_j^{(1)}(t) = h_j^{(2)} L_{j2}^{(1)}(t) \text{ и } L_j^{(2)}(t) = h_j^{(1)} L_{j1}^{(2)}(t), \quad j \in \{0, 1\}, \quad (1.4)$$

учитывают соответственно зависимости $Q_1(x_{j1}, t)$ от $Q_2(x_{j2}, t)$ и $Q_2(x_{j2}, t)$ от $Q_1(x_{j1}, t)$, обусловленные взаимосвязями граничных условий в (1.3) при $m = 1, 2$, в форме взвешенных с коэффициентами $h_j^{(2)}$ и $h_j^{(1)}$ реакций $L_{j2}^{(1)}(t)$, $L_{j1}^{(2)}(t)$ "сопрягающих" (переходных [5]) распределенных блоков на входные воздействия соответственно по Q_2 и Q_1 :

$$\begin{aligned} L_{j2}^{(1)}(t) &= \int_0^t \int_{x_{02}}^{x_{12}} G_{j2}^{(1)}(x_{j1}, y, t - \tau) Q_2(y, \tau) dy d\tau, \\ L_{j1}^{(2)}(t) &= \int_0^t \int_{x_{01}}^{x_{11}} G_{j1}^{(2)}(x_{j2}, y, t - \tau) Q_1(y, \tau) dy d\tau, \quad j = 0 \text{ или } (и) \quad j = 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

и выступают в роли аддитивных дополнений к граничным управлениям в (1.3) [5]. В последних выражениях $G_{j2}^{(1)}$, $G_{j1}^{(2)}$ – функции Грина каждого из таких блоков. Допустимые значения управляемых воздействий, рассматриваемых в классе кусочно-непрерывных функций, не стесняются никакими дополнительными ограничениями.

За фиксируемое заранее время t^* требуется обеспечить приближение $Q_m(x_m, t^*)$ к заданным пространственным распределениям $Q_m^{**}(x)$ с оцениваемой в равномерной метрике допустимой точностью ε_m , согласно соотношениям

$$\max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} |Q_m(x_m, t^*) - Q_m^{**}(x_m)| \leq \varepsilon_m, \quad m = 1, 2. \quad (1.6)$$

Пусть качество процесса управления объектом (1.1)–(1.5) оценивается интегральным функционалом

$$I = \int_0^{t^*} (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \rightarrow \min_{u_1, u_2} \quad (1.7)$$

в типичных ситуациях характеризующим расход энергии на процесс управления [15–17]. Здесь и всюду далее

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)); \quad u(t) = v(t) \text{ или } u(t) = g(t) \quad (1.8)$$

при рассмотрении внутренних или граничных входных воздействий только в роли управлений соответственно в (1.1) или (1.3).

Применение к уравнениям (1.1) конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу x_m с ядром, равным собственным функциям $\varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m)$, $n=1, 2, \dots$, начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), где μ_{mn}^2 – собственные числа [18], приводит к описанию рассматриваемой СРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_{mn}(t)$ разложения $Q_m(x_m, t)$ в бесконечный сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r_m(x_m)$ системе $\varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m)$ [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{mn}}{dt} = & -\mu_{mn}^2 \bar{Q}_{mn} + \bar{F}_{mn}(\mu_{mn}) v_m(t) + \frac{a_m(x_{1m})}{\beta_{1m}} r_m(x_{1m}) \varphi_{mn}(x_{1m}) (g_{1m}(t) + L_1^{(m)}) - \\ & - \frac{a_m(x_{0m})}{\beta_{0m}} r_m(x_{0m}) \varphi_{mn}(x_{0m}) (g_{0m}(t) + L_0^{(m)}), \quad \bar{Q}_{mn}(0) = \bar{f}_{mn}(\mu_{mn}), \quad n=1, 2, \dots, \quad m=1, 2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$Q_m(x_m, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{mn}(t) \varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m). \quad (1.10)$$

Здесь граничные условия (1.3) учитываются в правых частях уравнений (1.9) по известным правилам метода конечных интегральных преобразований (КИП); $r_m(x_{jm})$ – значения весовых функций КИП; $\bar{F}_{mn}(\mu_{mn}), \bar{f}_{mn}(\mu_{mn})$ – моды разложения в ряды по $\varphi_{mn}(t, x)$ вида (1.10) функций $F_m(x_m)$ в (1.1) и $f_m(x_m)$ в (1.2).

Применительно к описанию СРП (1.1)–(1.3) счетно-мерной системой уравнений (1.9), (1.10) задача сводится к отысканию оптимального векторного управления $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ в (1.8), обеспечивающего выполнение требований (1.6) при минимальном значении функционала качества (1.7).

2. Оптимальное программное управление. 2.1. Структура оптимального управления. Стандартная процедура принципа максимума Понтрягина, распространяемого на сформулированную бесконечномерную задачу оптимизации для объекта (1.9), (1.10) с заданным целевым множеством конечных состояний (1.6) [11, 19], определяет аналогично скалярному варианту [20] векторное программное оптимальное управление $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ для каждой из его компонент в форме равномерно сходящегося ряда бесконечной взвешенной суммы сопряженных переменных $\psi_{mn}^*(t)$, представляемых в экспоненциальной форме:

$$\psi_{mn}^*(t) = \psi_{mn}(t^*) e^{-\mu_{mn}^2(t^* - t)}, \quad m=1, 2; \quad n=1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

с точностью до заранее неизвестных весовых коэффициентов, в роли которых фигурируют конечные значения $\psi_{mn}(t^*)$:

$$u_m^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} \psi_{mn}^*(t^*) e^{-\mu_{mn}^2(t^* - t)}, \quad m=1, 2. \quad (2.2)$$

Здесь k_{mn} – множители при управлении $v_m(t)$ или $g_m(t)$ в (1.9) соответственно при $u_m(t) = v_m(t)$ или $u_m(t) = g_m(t)$. Значения $\psi_{mn}^*(t^*)$, $n=1, 2, \dots$, должны быть найдены из условий достижения целевого множества (1.6). Именно бесконечная размерность этих векторов приводит в двухточечной схеме, соответствующей значениям $\varepsilon_m = 0$ в (1.6), к трудноразрешимой проблеме определения $u^*(t)$ в форме (2.2) [21]. Заметим, что непосредственное использование в целях отыскания $\psi_m^*(t) = (\psi_{mn}^*(t))$, $n=1, 2, \dots$, классических условий трансверсальности становится невозможным при негладкой границе целевого множества (1.6) в конечной точке оптимального процесса [3].

2.2. Последовательная параметризация управляющих воздействий. Применительно к исследуемой задаче двухканального управления двумя объектами (1.1)–

(1.3) может быть использована предложенная в работе [22] процедура последовательной параметризации каждого из управляющих воздействий $u_s^*(t)$, $s=1,2$, в (2.2) на конечномерных подмножествах величин $\psi_s(t^*) = (\psi_{sn}(t^*))$, $n=1,2,\dots$, формируемых в виде N_s -мерных векторов $\psi_s^{(N_s)} = (\tilde{\psi}_{sn})$, $n=\overline{1, N_s}$, финишных значений $\tilde{\psi}_{sn} = \psi_{sn}(t^*)$ N_s первых сопряженных функций вида (2.1) при равных нулю остальных величинах $\psi_{sn}(t^*)$ для всех $n > N_s$:

$$\psi_s^{(N_s)} = \left(\psi_{sn}(t^*) \right) = (\tilde{\psi}_{sn}), \quad n = \overline{1, N_s}; \quad N_s \geq 1; \quad \psi_{sn}(t^*) = 0, \quad n > N_s, \quad s = 1, 2. \quad (2.3)$$

Параметризованное подобным образом оптимальное управление (2.2) описывается уже конечной суммой экспонент в зависимости от соответствующего оптимальному процессу управления вектора $\psi_{s*} = (\tilde{\psi}_{sn}^*)$ параметров $\tilde{\psi}_{sn}^*, s = 1, 2; n = \overline{1, N_s}$:

$$u_s^*(\psi_{s*}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_s} k_{sn} \tilde{\psi}_{sn}^* e^{-\mu_{sn}^2 (t^* - t)}, \quad s = 1, 2. \quad (2.4)$$

Согласно (2.3), $\psi_s^{(N_{s1})} = \psi_s^{(N_{s2})}$ при $N_{s1} > N_{s2}$, если составляющие $\psi_{sn}(t^*)$ вектора $\psi_s^{(N_{s1})}$ оказываются равными нулю для всех $n = \overline{N_{s2} + 1, N_{s1}}$. Отсюда следует на основании (2.3), что минимально достижимые в классе управлений (2.4) значения

$$\varepsilon_{m \min}^{(N_1, N_2)} = \min_{\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}} \left[\max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} |Q(x_m, t^*) - Q_m^{**}(x_m)| \right], \quad m = 1, 2, \quad (2.5)$$

ошибки равномерного приближения $Q_m(x_m, t^*)$ к $Q_m^{**}(x_m)$ не возрастают с ростом размерности $N_1 + N_2$ вектора параметров $\psi^{(N_1 + N_2)} = (\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)})$. Как показано в работе [23], эти величины монотонно убывают:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m \min}^{(1,1)} &> \varepsilon_{m \ min}^{(2,2)} > \dots > \varepsilon_{m \ min}^{(\xi-1, \xi-1)} > \max \left(\varepsilon_{m \ min}^{(\xi-1, \xi)}, \varepsilon_{m \ min}^{(\xi, \xi-1)} \right) \geq \\ &\geq \min \left(\varepsilon_{m \ min}^{(\xi-1, \xi)}, \varepsilon_{m \ min}^{(\xi, \xi-1)} \right) > \varepsilon_{m \ min}^{(\xi, \xi)} > \dots > \varepsilon_{m \ min}^{(\rho_m, \rho_m)} = \varepsilon_{m \ inf} \geq 0, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

характеризуя сужающееся к $Q_m^{**}(x_m)$ с возрастанием $\xi = \overline{1, \rho_m}$ семейство целевых множеств в (1.6) при $\varepsilon_m = \varepsilon_{m \ min}^{(\xi, \xi)}$. Здесь точная нижняя грань $\varepsilon_{m \ inf}$ в (2.6) оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{m \ min}^{(\rho_m, \rho_m)}$, где $\rho_m = \infty$ при $\varepsilon_{m \ inf} = 0$ и $\rho_m < \infty$ при $\varepsilon_{m \ inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q_m(x_m)$ объектов [10]. Неравенства (2.6) как раз создают возможность обеспечения требуемой точности ε_m достижения $Q_m^{**}(x_m)$ в случае $\varepsilon_m \geq \varepsilon_{m \ inf}$ при конечном числе N_1 и N_2 компонент векторов параметров $\psi_1^{(N_1)}$ и $\psi_2^{(N_2)}$ в (2.3), принципиально упрощая тем самым рассматриваемую ЗОУ СРП. В случае, когда $\varepsilon_m < \varepsilon_{m \ inf}$ в (1.6), решение этой задачи не существует.

Аналогично задаче с одноканальным управлением одним объектом [10, 22] можно показать, что числа N_1^0, N_2^0 компонент векторов параметров $\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}$ в (2.3), характеризующих оптимальное управление $u_s^*(t)$ в (2.4), определяются по месту в цепочке неравенств (2.6) заданных в (1.6) величин ε_m [13]:

$$\begin{aligned} N_1^0 &= N_2^0 = w, \text{ если } \varepsilon_{m \ min}^{(w,w)} \leq \varepsilon_m < \min \left(\varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w)}, \varepsilon_{m \ min}^{(w,w-1)} \right), \\ N_1^0 &= w; N_2^0 = w-1, \text{ если } \varepsilon_{m \ min}^{(w,w-1)} \leq \varepsilon_m < \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w)} \text{ или } \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w)} < \varepsilon_{m \ min}^{(w,w-1)} \leq \varepsilon_m < \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w-1)}, \\ N_1^0 &= w-1; N_2^0 = w, \text{ если } \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w)} \leq \varepsilon_m < \varepsilon_{m \ min}^{(w,w-1)} \text{ или } \varepsilon_{m \ min}^{(w,w-1)} < \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w)} \leq \varepsilon_m < \varepsilon_{m \ min}^{(w-1,w-1)}, \\ &\quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Дальнейшая проблема сводится к фактическому определению векторов $\psi_1^{(N_1^0)}, \psi_2^{(N_2^0)}$ из условий достижения заданных величин ε_m в (1.6).

2.3. Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. Интегрирование уравнений модели объекта (1.9) с $\psi_s^{(N_s)}$ -параметризованным управлением вида (2.4) и подстановка $u_s^*(t)$ в форме (2.4) в (1.7) приводят к представлению конечных состояний $Q_m(x_m, t^*)$, описываемых разложениями в ряды (1.10), и критерия оптимальности (1.7) в форме явных зависимостей соответственно $Q_m(x_m, \psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)})$ и $I(\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)})$ от своих аргументов.

В результате осуществляется точная редукция исходной ЗОУ ОРП к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [10–12]:

$$I(\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}) \rightarrow \min_{\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}}, \quad (2.8)$$

$$\Phi_m(\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}) = \max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} \left| Q_m(x_m, \psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}) - Q_m^{**}(x_m) \right| \leq \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \quad (2.9)$$

на экстремум функции (2.8) конечного числа $N_1 + N_2$ переменных $\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}$ в (2.3) с бесконечным числом диктуемых требованиями (1.6) ограничений для всех $x_m \in [x_{0m}, x_{1m}], m = 1, 2$, эквивалентных двум ограничениям на функции максимума Φ_m в (2.9).

Заметим, что получение аналитических решений взаимосвязанной операторами $L_j^{(m)}$ в (1.3) системы уравнений (1.9) с целью определения явного вида функций $Q_m(x_m, \psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)})$ для их использования в (2.9) оказывается существенно более сложной процедурой, чем в задачах управления одним объектом, связанный с необходимостью преодоления ряда вычислительных затруднений [24].

Решения ψ_{1*}, ψ_{2*} ЗПО (2.8), (2.9), где N_1^0, N_2^0 выбираются по правилам (2.7), может быть получено по схеме альтернанского метода [10–12], базирующемся на специальных альтернанских свойствах ψ_{1*}, ψ_{2*} , согласно которым в условиях малостеснительных допущений в некоторых точках $x_{im}^0 \in [x_{0m}, x_{1m}], i = 1, R_m^0, m = 1, 2$, достигаются предельно допустимые значения $\Phi_m(\psi_{1*}, \psi_{2*})$ в (2.9), равные ε_m :

$$\left| Q_m(x_{im}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**}(x_{im}^0) \right| = \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \quad i = 1, R_m^0. \quad (2.10)$$

Число $R_1^0 + R_2^0$ этих точек оказывается равным числу всех искомых параметров оптимального процесса, включая все $N_1^0 + N_2^0$ компоненты векторов ψ_{1*} и ψ_{2*} в (2.3) при заведомо фиксируемых величинах ε_m и наряду с ними априори неизвестные величины минимакса в (2.6), если с ними по исходным требованиям должны совпадать значения $\varepsilon_m, m \in \{1, 2\}$ в (1.6):

$$R_m^0 = \begin{cases} N_m^0, & \text{если } \varepsilon_{m \min}^{(N_1^0, N_2^0)} < \varepsilon_m; \\ N_m^0 + 1, & \text{если } \varepsilon_{m \min}^{(N_1^0, N_2^0)} = \varepsilon_m, \quad m = 1, 2. \end{cases} \quad (2.11)$$

При наличии диктуемой закономерностями предметной области необходимой дополнительной информации о характере зависимостей разности $Q_m(x_m, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**}(x_m)$ от пространственных переменных x_m на интервалах $[x_{0m}, x_{1m}]$, позволяющей идентифицировать значения x_{im}^0 для всех $i = 1, R_m^0$ и знаки отклонений $Q_m(x_{im}, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**}(x_{im})$ в этих точках, обеспечивается редукция равенств (2.10), составляемых для абсолютных величин указанных отклонений, к разрешаемой стандартными численными методами системе $R_1^0 + R_{11}^0 + R_2^0 + R_{21}^0$ уравнений для самих разностей:

$$Q_m(x_{im}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**}(x_{im}^0) = \pm \varepsilon_m, \quad i = 1, R_m^0, \quad m = 1, 2, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial Q_m(x_{ivm}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{\partial x_m} - \frac{\partial Q_m^{**}(x_{ivm}^0)}{\partial x_m} = 0, \quad x_{ivm}^0 \in \text{int}[x_{0m}, x_{1m}], \quad v = 1, R_{m1}^0, \quad R_{m1}^0 \leq R_m^0, \quad x_{ivm}^0 \in \{x_{im}^0\} \quad (2.13)$$

относительно $R_1^0 + R_{11}^0 + R_2^0 + R_{21}^0$ неизвестных ψ_{1*}, ψ_{2*} ; $x_{iv1}^0, v = \overline{1, R_{11}^0}; x_{iv2}^0, v = \overline{1, R_{21}^0}$ и $\varepsilon_m^{(N_1^0, N_2^0)}$, $m \in \{1, 2\}$, если $\varepsilon_m = \varepsilon_{m\min}^{(N_1^0, N_2^0)}$ в (2.12). Здесь каждой точке x_{ivm}^0 однозначным образом соответствует свой знак ε_m в (2.12), а равенства (2.13) представляют собой условия существования экстремума зависимостей $Q_m(x_m, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**}(x_m)$ во внутренних точках x_{ivm}^0 отрезков $[x_{0m}, x_{1m}]$ с максимальными отклонениями ε_m конечного состояния объекта от требуемого.

Подобно задаче одноканального управления одним объектом [20] сначала требуется решить ряд ЗПО (2.8), (2.9), сводимых к системам уравнений (2.12), (2.13), полагая ε_m равными σ -му члену ряда неравенств (2.6) для последовательно возрастающих значений $\sigma = 1, 2, \dots, \sigma_m$. На каждом шаге этой процедуры находятся заведомо неизвестные величины минимаксов в (2.6), позволяющие при некотором $\sigma = \sigma_m$ определить место изначально заданных допустимых отклонений ε_m в этой цепочке неравенств, если $\varepsilon_m \geq \varepsilon_{m\min}$, с целью последующего выбора N_1^0, N_2^0 по правилам (2.7). В случае, когда по исходным требованиям ε_m должны быть равны $\varepsilon_{m\min}^{(N_1^0, N_2^0)}$ для $m \in \{1, 2\}$, рассматриваемая задача оказывается уже решенной на этом этапе вычислительной технологии. В условиях $\varepsilon_m > \varepsilon_{m\min}^{(N_1^0, N_2^0)}$, $m = 1$ и(или) $m = 2$, система уравнений (2.12), (2.13) решается для найденных N_1^0, N_2^0 при известных значениях ε_m .

3. Синтез оптимального управления. Интегрирование системы уравнений (1.9) модально-го описания взаимосвязанной СРП (1.1)–(1.3) с параметризованным оптимальным управлением (2.4), параметры которого ψ_{1*}, ψ_{2*} находятся путем решения ЗПО (2.8), (2.9), позволяет найти $L_j^{(m)}(t)$, $m = 1, 2$, в (1.3)–(1.5) в форме явных функций времени $\eta_j^{(1)}(x_{j1}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, t)$, $\eta_j^{(2)}(x_{j2}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, t)$. Последующая подстановка этих функций в (1.3) при заведомо выбранном $j = 0$ или $j = 1$ приводит к возможности рассмотрения СРП (1.1)–(1.3) в качестве двух автономных независимых друг от друга объектов управления для $m = 1$ и $m = 2$ с раздельным их бесконечномерным модальным представлением в оптимальном процессе следующего вида вместо (1.9), согласно (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{1n}^*}{dt} &= -\mu_{1n}^2 \bar{Q}_{1n}^* + \frac{1}{2} k_{1n} u_1^*(\psi_{1*}, t) + k_{1n}^{(1)} \eta_j^{(1)}(x_{j1}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, t), \\ \bar{Q}_{1n}(0) &= \bar{f}_{1n}(\mu_{1n}), n = 1, 2, \dots, j \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{2n}^*}{dt} &= -\mu_{2n}^2 \bar{Q}_{2n}^* + \frac{1}{2} k_{2n} u_2^*(\psi_{2*}, t) + k_{2n}^{(1)} \eta_j^{(2)}(x_{j2}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, t), \\ \bar{Q}_{2n}(0) &= \bar{f}_{2n}(\mu_{2n}), n = 1, 2, \dots, j \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $k_{sn}^{(1)}, s = 1, 2$ – множители при $L_j^{(m)}$ в (1.9), совпадающие с k_{mn} в (2.2), если $u_s = g_s$.

Ограничимся всюду далее возможностью описания бесконечномерных объектов (3.1), (3.2) с любой требуемой точностью “укороченной” системой достаточно большого конечного числа $M < \infty$ первых уравнений в (3.1), (3.2) [25, 26]. Для каждой из автономных СРП (3.1), (3.2) при $n = 1, M$ задача аналитического конструирования оптимального регулятора может быть решена путем, аналогичным задаче синтеза при одноканальном управлении одним объектом [27].

При рассмотрении процесса управления в обратном времени $\tau = t^* - t$ укороченные системы уравнений (3.1), (3.2) с “начальными” величинами $\bar{Q}_{sn}(\tau)|_{\tau=0}$, совпадающими с их конечными значениями $\bar{Q}_{sn}(t^*)$, $s = 1, 2$, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{sn}^*}{d\tau} &= \mu_{sn}^2 \bar{Q}_{sn}^* - \frac{1}{2} k_{sn} u_s^*(\psi_{s*}, \tau) - k_{sn}^{(1)} \eta_j^{(s)}(x_{js}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, \tau), \\ \bar{Q}_{sn}^*(0) &= \bar{Q}_{sn}^*(t^*), n = \overline{1, M}, s = 1, 2, j \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Интегрирование уравнений (3.3) с управлением $u_s^*(\tau)$ в виде (2.4) приводит к явной форме представления их решений в зависимости от t , параметров $\tilde{\psi}_{sn}^*$ и конечного состояния объекта $\bar{Q}_n^*(t^*)$, $n = \overline{1, M}$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{sn}^*(\mu_{sn}, t) &= \bar{Q}_{sn}^*(t^*) e^{\mu_{sn}^2(t^* - t)} - \frac{1}{2} k_{sn} \sum_{i=1}^{N_s^0} \frac{k_{si} \tilde{\psi}_{si}^*}{\mu_{sn}^2 + \mu_{si}^2} \left(e^{\mu_{sn}^2(t^* - t)} - e^{-\mu_{si}^2(t^* - t)} \right) - \\ &- k_{sn}^{(1)} \int_0^{t^* - t} e^{\mu_{sn}^2(t^* - t - \tau)} \eta_j^{(s)}(x_{js}, \psi_{1*}, \psi_{2*}, \tau) d\tau, \quad n = \overline{1, M}; \quad s = 1, 2, \quad j \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Полагая здесь, согласно (2.3), для конечного значения $\psi_s^*(t^*)$ вектора сопряженных переменных:

$$\psi_s^*(t^*) = (\psi_{sn}^*(t^*)), \quad n = \overline{1, M}; \quad \psi_{sn}^*(t^*) = (\tilde{\psi}_{sn}), \quad n = \overline{1, N_s^0}; \quad \psi_{sn}^*(t^*) = 0, \quad n = \overline{N_s^0 + 1, M}, \quad (3.5)$$

и $\bar{Q}_s^*(t) = (\bar{Q}_{sn}^*(\mu_{sn}, t))$, $n = \overline{1, M}$, представим равенства (3.4) в векторно-матричной форме:

$$\bar{Q}_s^*(t) = B_s(t^* - t) \bar{Q}_s^*(t^*) + B_{ls}(t^* - t) \psi_s^*(t^*) - (k_{sn}^{(1)} H_{sn}(t^* - t)), \quad n = \overline{1, M}, \quad (3.6)$$

где $M \times M$ -матрицы

$$B_s(t^* - t) = \text{diag} \left[e^{\mu_{sn}^2(t^* - t)} \right]; \quad B_{ls}(t^* - t) = \left[\frac{k_{sn} k_{si}}{2(\mu_{sn}^2 + \mu_{si}^2)} \left(e^{-\mu_{si}^2(t^* - t)} - e^{\mu_{sn}^2(t^* - t)} \right) \right], \quad n, i = \overline{1, M}, \quad (3.7)$$

и $H_{sn}(t^* - t)$ — значение последнего интеграла в (3.4). Согласно (2.1), здесь

$$\psi_s^*(t^*) = B_s(t^* - t) \psi_s^*(t), \quad \psi_s^*(t) = (\psi_{sn}^*(t)), \quad n = \overline{1, M}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.6), найдем искомую зависимость $\psi_s^*(t)$ от $\bar{Q}_s^*(t)$ для $0 \leq t < t^*$:

$$\psi_s^*(t) = A_s(t^* - t) \bar{Q}_s^*(t) - A_{ls}(t^* - t) \bar{Q}_s^*(t^*) + A_s(t^* - t) K_s^{(1)} H_s(t^* - t), \quad (3.9)$$

где

$$A_s(t^* - t) = [B_{ls} B_s]^{-1}, \quad A_{ls}(t^* - t) = A_s B_s, \quad K_s^{(1)} H_s(t^* - t) = (k_{sn}^{(1)} H_{sn}(t^* - t)), \quad n = \overline{1, M}, \quad (3.10)$$

и $\bar{Q}_s^*(t^*)$ определяется по результатам решения задачи программного управления при начальном состоянии, фиксируемом наблюдением значений $\bar{Q}_s(0)$. Последующая подстановка (3.9) в уравнение (2.4) для программного управляющего воздействия приводит с учетом соотношений (2.1), (3.5) к линейному закону синтеза оптимальных регуляторов с нестационарными коэффициентами обратных связей для каждого из объектов СРП (1.1)–(1.3) при $m=1$ и $m=2$:

$$\begin{aligned} u_s^*(\bar{Q}_s, t) &= \frac{1}{2} K_s \psi_s^*(t) = \frac{1}{2} K_s A_s(t^* - t) \bar{Q}_s(t) - \frac{1}{2} K_s A_{ls}(t^* - t) \bar{Q}_s(t^*) + \\ &+ A_s(t^* - t) K_s^{(1)} H_s(t^* - t), \\ K_s &= (k_{sn}), \quad s = 1, 2, \quad n = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь матрицы A_s , A_{ls} представляются, согласно (3.7), (3.10), известными функциями времени. Нетрудно показать, что при нулевой матрице B_{ls} в условиях $t=t^*$ сохраняется непрерывное приближение $u_s^*(\bar{Q}_s, t)$ к $u_s^*(\bar{Q}_s, t^*)$, непосредственно определяемому по алгоритму (2.4).

Переход в (3.11) к измеряемому выходу объекта $Q_{su}(x_{su}, t) = (Q_{su}(x_{sui}, t))$ в l_s точках $x_{sui} \in [x_{os}, x_{1s}]$, $i = \overline{1, l_s}$, задается, согласно (1.10), векторно-матричным уравнением наблюдения:

$$Q_{su}(x_{su}, t) = \varphi_{su} \bar{Q}_s(t), \quad \varphi_{su} = [\varphi_{sn}(\mu_{sn}, x_{sui})], \quad n = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, l_s}, \quad s = 1, 2. \quad (3.12)$$

В условиях $l_s < M$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}_s(t)$ по значениям $Q_{su}(x_{su}, t)$ требуется построение наблюдателя состояния полного или пониженного порядка [4]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта можно ограничиться учетом только N_s^0 первых составляющих $\bar{Q}_s(t)$ в (3.1), (3.2), то $\bar{Q}_s(t)$ непосредственно находится решением системы уравнений (3.12) при $\bar{l}_s = N_s^0 = M$:

$$\bar{Q}_s(t) = \varphi_{su}^{-1} Q_{su}(x_{su}, t). \quad (3.13)$$

Подстановка (3.13) в (3.11) приводит к линейному алгоритму оптимального управления по наблюдаемому выходу объекта:

$$u_s^*(Q_{su}, t) = \frac{1}{2} K_s A_s(t^* - t) \varphi_{su}^{-1} Q_{su}(x_{su}, t) - \frac{1}{2} K_s A_{ls}(t^* - t) \bar{Q}_s^*(t^*) + A_s(t^* - t) K_s^{(1)} H_s(t^* - t). \quad (3.14)$$

4. Оптимальное управление взаимосвязанными граничными условиями неоднородными температурными полями неограниченных пластин. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу двухканального оптимального по энергопотреблению управления температурным полем физически неоднородной системы, образуемой при индукционном нагреве двух металлических пластин с различными физическими свойствами в условиях идеального теплового контакта на их соприкасающихся поверхностях. Подобные системы являются базовым элементом различных многослойных структур и конструкций, нашедших широкое применение в технологической теплофизике [24, 28, 29].

4.1. Математические модели первого приближения. Пусть взаимосвязанные температурные поля $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ такой системы описываются линейными одномерными неоднородными уравнениями теплопроводности вида (1.1) для двух неограниченных пластин [24]:

$$\frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{c_1 \gamma_1} W_1(x_1) u_1(t), \quad x_1 \in (0, R_1), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + \frac{1}{c_2 \gamma_2} W_2(x_2) u_2(t), \quad x_2 \in (0, R_2), \quad t > 0, \quad (4.2)$$

с заданными начальными состояниями:

$$Q_1(x_1, 0) = 0; \quad Q_2(x_2, 0) = 0, \quad (4.3)$$

граничными условиями:

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(R_1, t)}{\partial x_1} = q_1 = \text{const} < 0; \quad \lambda_2 \frac{\partial Q_2(R_2, t)}{\partial x_2} = q_2 = \text{const} < 0, \quad (4.4)$$

условиями сопряжения на границах $x_1 = x_2 = 0$ вида (1.3)–(1.5):

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(0, t)}{\partial x_1} = L_0^{(1)} = h_0^{(2)} L_{02}^{(1)} \int_0^{R_2} \int_0^t G_{02}^{(1)}(0, y, t - \tau) Q_2(y, \tau) dy d\tau, \quad (4.5)$$

$$Q_2(0, t) = L_0^{(2)} = h_0^{(1)} L_{01}^{(2)} = \int_0^t \int_0^{R_1} G_{01}^{(2)}(0, y, t - \tau) Q_1(y, \tau) dy d\tau \quad (4.6)$$

и внутренними сосредоточенными, нестесняемыми дополнительными ограничениями кусочно-непрерывными управляющими воздействиями $u_1(t)$, $u_2(t)$ по мощности электромагнитных источников тепла при заданном характере $W_1(x_1)$, $W_2(x_2)$ их пространственного распределения в процессе индукционного нагрева [3, 30]. Здесь a_1 , a_2 , λ_1 , λ_2 , c_1 , c_2 , γ_1 , γ_2 – заданные отличающиеся друг от друга в (4.1) и (4.2) теплофизические постоянные. В условиях идеального теплового контакта [24] в (4.5), (4.6)

$$L_0^{(1)} = \lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2}; \quad (4.7)$$

$$L_0^{(2)} = Q_1(0, t), \quad (4.8)$$

и тогда $L_0^{(1)}$, $L_0^{(2)}$ представимы в общей форме (4.5), (4.6) с функциями Грина переходных блоков [9]:

$$G_{02}^{(1)}(0, y, t - \tau) = -\lambda_2 \delta'(y) \delta(t - \tau); \quad G_{01}^{(2)}(0, y, t - \tau) = \delta(y) \delta(t - \tau),$$

где δ и δ' – дельта-функции и их производные пространственного и временного аргументов.

Условие сопряжения (4.5), (4.7) может быть записано в следующей форме:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial Q_1(0, t)}{\partial x_1} = q^*(t), \\ -\lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} = q^*(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

где $q^*(t)$ – некоторая заведомо неизвестная функция времени, которая может рассматриваться в роли граничных условий на границах соответственно первой и второй пластин в точках их контакта $x_1 = x_2 = 0$. В таком случае, если считать эту функцию заданной, взаимосвязанная СРП (4.1)–(4.8) формально разделяется на два автономных объекта управления, описываемых независимыми друг от друга начально-краевыми задачами при граничных условиях 2-го рода [24]:

$$\frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{c_1 \gamma_1} W_1(x_1) u_1(t), \quad x_1 \in (0, R_1), \quad t > 0, \quad (4.10)$$

$$Q_1(x_1, 0) = 0; \quad \lambda_1 \frac{\partial Q_1(R_1, t)}{\partial x_1} = q_1; \quad -\lambda_1 \frac{\partial Q_1(0, t)}{\partial x_1} = q^*(t),$$

$$\frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + \frac{1}{c_2 \gamma_2} W_2(x_2) u_2(t), \quad x_2 \in (0, R_2), \quad t > 0, \quad (4.11)$$

$$Q_2(x_2, 0) = 0; \quad \lambda_2 \frac{\partial Q_2(R_2, t)}{\partial x_2} = q_2; \quad -\lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} = q^*(t).$$

Второе условие сопряжения (4.6), (4.8) будет использовано в дальнейшем для фактического определения $q^*(t)$.

Применение метода конечных интегральных преобразований с весовой функцией $r_m(x_m) = 1/a_m$ к уравнениям (4.10), (4.11) приводит, подобно (1.9), к их модальному описанию следующего вида [9]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{mn}}{dt} &= -\mu_{mn}^2 \bar{Q}_{mn} + \frac{1}{c_m \gamma_m} \bar{W}_{mn} u_m(t) + \frac{q_m}{\lambda_m} \varphi_{mn}(\mu_{mn}, R_m) + \frac{q^*(t)}{\lambda_m} \varphi_{mn}(\mu_{mn}, 0), \\ \bar{Q}_{mn}(x_m, 0) &= 0, \quad m = 1, 2, \quad n = \overline{0, M}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

с последующим представлением $Q_m(x_m, t)$, $m = 1, 2$, в форме суммы M первых членов бесконечного ряда вида (1.10):

$$Q_m(x_m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_{mn}(t) \varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m). \quad (4.13)$$

Здесь

$$\varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m) = \frac{1}{E_{mn}} \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right); \quad \mu_{mn} = \frac{\sqrt{a_m}}{R_m} \pi n; \quad E_{mn} = \begin{cases} \sqrt{\frac{R_m}{a_m}}, & n = 0, \\ \sqrt{\frac{R_m}{2a_m}}, & n \geq 1, \end{cases} \quad (4.14)$$

\bar{W}_{mn} — моды функций $W_m(x_m)$ в (4.10), (4.11) [9]:

$$\bar{W}_{mn} = \frac{1}{a_m E_{mn}} \int_0^{R_m} W_m(x_m) \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right) dx_m,$$

где при индукционном нагреве пластины

$$W_m(x_m) = \sqrt{2\zeta_m} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2\zeta_m} \frac{x_m}{R_m}\right) - \cos\left(\sqrt{2\zeta_m} \frac{x_m}{R_m}\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{2\zeta_m}\right) - \sin\left(\sqrt{2\zeta_m}\right)}$$

и ζ_m — характерный параметр, определяемый глубиной проникновения тока в металл [3, 30].

В соответствии с (1.6)–(1.9) в рассматриваемом примере требуется найти оптимальное векторное управление $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ объектом (4.12) по мощности электромагнитных источников тепла, обеспечивающее за фиксируемое заранее время t^* требуемую точность равномерного приближения конечного температурного распределения к заданному состоянию $Q_m^{**} = \text{const}$:

$$\max_{x_m \in [0, R_m]} |Q_m(x_m, t^*) - Q_m^{**}| \leq \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \quad (4.15)$$

при минимальном значении критерия оптимальности (1.7).

4.2. Температурное поле при оптимальном программном управлении с заданным граничным воздействием $q^*(t)$. Ограничимся далее, подобно [3, 30], типичным для приложений случаем, при котором в (4.15) задаются минимально достижимые значения минимакса $\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$ в цепочке неравенств (2.6), полагая в (4.15)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}. \quad (4.16)$$

Этому случаю соответствует двухпараметрическая процедура $\psi_s^{(N_s)}$ -параметризации управляющих воздействий (2.3) при $N_s = N_s^0 = 2$, $s = 1, 2$, согласно (2.7), с параметрическим представлением оптимальных программных управлений в форме (2.4):

$$u_s^*(\psi_{s*}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 \bar{W}_{sn}(\mu_{sn}) \tilde{\psi}_{sn}^* e^{-\mu_{sn}^2(t^* - t)}, \quad s = 1, 2. \quad (4.17)$$

В такой ситуации при достаточно просто реализуемой структуре $u_s^*(\psi_{s*}, t)$ в виде суммы двух экспонент (4.17) достигается, как правило, достаточно высокая точность $\varepsilon_{s\min}^{(2,2)}$ равномерного приближения $Q_m(x_m, t^*)$ к Q_m^{**} , отвечающая технологическим требованиям широкого круга инженерных приложений [3, 30].

Интегрирование уравнений (4.12) с параметризованным управлением (4.17) приводит к следующим выражениям для температурных состояний $Q_1(x_1, t)$, $Q_2(x_2, t)$, описываемых их разложениями в ряды (4.13) по собственным функциям (4.14) в форме явных зависимостей $Q_m(x_m, t, q^*)$, $m = 1, 2$, от $q^*(t)$ и векторов параметров $\psi_{1*} = (\tilde{\psi}_{10}^*, \tilde{\psi}_{11}^*)$, $\psi_{2*} = (\tilde{\psi}_{20}^*, \tilde{\psi}_{21}^*)$ [9]:

$$\begin{aligned}
 Q_m(x_m, t, q^*) = & K_m \left\{ \int_0^t q^*(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^M \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right) \int_0^t q^*(\tau) e^{-\mu_{mn}^2(t-\tau)} d\tau \right\} + \\
 & + K_m q_m \left\{ t + \frac{\pi^2}{2\mu_{m1}^2} \left(\left(\frac{x_m}{R_m} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\pi^2}{\mu_{m1}^2} \sum_{n=1}^M \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right) \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\mu_{mn}^2 t} \right\} + \\
 & + K_m \left\{ \frac{\bar{W}_{m0}^0}{2} \left[\tilde{\psi}_{m0}^* \bar{W}_{m0}^0 t + \frac{\tilde{\psi}_{m1}^* \bar{W}_{m1}^0}{\mu_{m1}^2} \left(e^{-\mu_{m1}^2(t^*-t)} - e^{-\mu_{m1}^2 t^*} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=1}^M \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right) \frac{\bar{W}_{mn}^0}{2} \left[\frac{\tilde{\psi}_{m0}^* \bar{W}_{m0}^0}{\mu_{mn}^2} \left(1 - e^{-\mu_{mn}^2 t} \right) + \frac{\tilde{\psi}_{m1}^* \bar{W}_{m1}^0}{\mu_{mn}^2 + \mu_{m1}^2} \left(e^{-\mu_{m1}^2(t^*-t)} - e^{-(\mu_{m1}^2 t^* + \mu_{mn}^2 t)} \right) \right] \right\}, \quad (4.18) \\
 x_m \in [0, R_m], m = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$K_m = \frac{1}{c_m \gamma_m R_m}, \bar{W}_{mn}^0 = \int_0^{R_m} W_m(x) \cos\left(\pi n \frac{x_m}{R_m}\right) dx_m.$$

При описании температурных состояний Q_1 и Q_2 , взаимосвязанных общим граничным воздействием q^* , в форме (4.18), согласно [9], программное оптимальное управление (4.17) приводится к виду:

$$\tilde{u}_s^*(\psi_{s*}, t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^1 \bar{W}_{sn}^0 \tilde{\psi}_{sn}^* e^{-\mu_{sn}^2(t^*-t)} \right], s = 1, 2. \quad (4.19)$$

4.3. Определение граничного воздействия $q^*(t)$. Второе условие сопряжения

$$Q(0, t) = Q_2(0, t)$$

в (4.6), (4.8) приводит к равенству температурных состояний $Q_1 = Q_2$, описываемых, согласно выражениям (4.18), в точках $x_1 = x_2 = 0$, которое можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $q^*(t)$.

Ограничивааясь для поиска первых приближений $q^*(t)$ только первыми членами рядов в (4.18), получим его решение $q^*(p)$ в изображениях Лапласа с использованием теоремы Бореля операционного исчисления в виде суммы простых дробей с единичными числителями и полиномами первой или второй степени в знаменателе, что приводит в итоге к представлению $q^*(p)$ в форме дробно-рациональной функции комплексной переменной p :

$$q^*(p, \psi_{1*}, \psi_{2*}) = \frac{D_1(p, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{D(p, \psi_{1*}, \psi_{2*})},$$

где D_1 и D – многочлены четвертой и пятой степеней, коэффициенты которых являются известными линейными функциями ψ_{1*} , ψ_{2*} , определяемыми в соответствии со структурой выражений (4.18).

Последующий переход к оригиналу по теореме разложения приводит к приближенному представлению искомой функции в следующем виде:

$$\begin{aligned}
-q^*(t, \psi_{1*}, \psi_{2*}) \approx & \sum_{i=1}^3 \frac{D_1(p_i, \psi_{1*}, \psi_{2*}) e^{p_i t}}{D'(p_i, \psi_{1*}, \psi_{2*})} = \sigma_1(\psi_{1*}, \psi_{2*}) - \\
& - \sigma_2(\psi_{1*}, \psi_{2*}) e^{\mu_{11}^2 t} + \sigma_3(\psi_{1*}, \psi_{2*}) e^{\mu_{21}^2 t}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \mu_{11}^2, \quad p_3 = \mu_{21}^2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

в пренебрежении двумя экспонентами с отрицательными показателями степени. Здесь

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\psi_{1*}, \psi_{2*}) &= \frac{\mu_{11}^2 \mu_{21}^2}{a \alpha_1 \alpha_2} \left(K_2 q_2 - K_1 q_1 + K_2 \frac{(\bar{W}_{20}^0)^2}{2} \tilde{\psi}_{20}^* - K_1 \frac{(\bar{W}_{10}^0)^2}{2} \tilde{\psi}_{10}^* \right), \\
\sigma_2(\psi_{1*}, \psi_{2*}) &= \frac{\mu_{11}^2 (\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2)}{a (\mu_{11}^2 + \alpha_1) (\mu_{21}^2 + \alpha_2)} \left(K_1 \bar{W}_{11}^0 \tilde{\psi}_{11}^* e^{-\mu_{11}^2 t^*} \right) \left(\bar{W}_{10}^0 + \bar{W}_{11}^0 \right), \\
\sigma_3(\psi_{1*}, \psi_{2*}) &= \frac{\mu_{21}^2 (\mu_{21}^2 + \mu_{11}^2)}{a (\mu_{21}^2 + \alpha_1) (\mu_{21}^2 + \alpha_2)} \left(K_2 \bar{W}_{21}^0 \tilde{\psi}_{21}^* e^{-\mu_{21}^2 t^*} \right) \left(\bar{W}_{20}^0 + \bar{W}_{21}^0 \right),
\end{aligned}$$

где

$$a = 3(K_2 - K_1); \quad \alpha_1 = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}; \quad \alpha_2 = \frac{b}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$b = (K_2 - K_1)(\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2) + 2K_2 \mu_{11}^2 - 2K_1 \mu_{21}^2; \quad c = (K_2 - K_1) \mu_{11}^2 \mu_{21}^2.$$

Подстановка (4.20) в (4.18) позволяет исключить зависимость Q_1 и Q_2 от $q^*(t)$. При $t = t^*$ соответствующие конечные температурные состояния, описываемые, согласно (4.18), (4.20), представляются после выполнения операций интегрирования в (4.18) в форме явных функций $Q_1(x_1, \psi_{1*}, \psi_{2*})$ и $Q_2(x_2, \psi_{1*}, \psi_{2*})$ только своих аргументов:

$$\begin{aligned}
Q_1(x_1, \psi_{1*}, \psi_{2*}) = & -K_1 \left\{ \sigma_1 t^* - \frac{\sigma_2}{\mu_{11}^2} (e^{\mu_{11}^2 t^*} - 1) + \frac{\sigma_3}{\mu_{21}^2} (e^{\mu_{21}^2 t^*} - 1) + 2 \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_1}{R_1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{\sigma_1}{\mu_{1n}^2} (1 - e^{-\mu_{1n}^2 t^*}) - \frac{\sigma_2}{\mu_{11}^2 + \mu_{1n}^2} (e^{\mu_{11}^2 t^*} - e^{-\mu_{1n}^2 t^*}) + \frac{\sigma_3}{\mu_{21}^2 + \mu_{1n}^2} (e^{\mu_{21}^2 t^*} - e^{-\mu_{1n}^2 t^*}) \right] \right\} + \\
& + K_1 q_1 \left\{ t^* + \frac{\pi^2}{2 \mu_{11}^2} \left(\left(\frac{x_1}{R_1} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{2 \pi^2}{\mu_{11}^2} \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_1}{R_1} \right) \cdot \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\mu_{1n}^2 t^*} \right\} + \\
& + K_1 \left\{ \frac{\bar{W}_{10}^0}{2} \left[\tilde{\psi}_{10}^* \bar{W}_{10}^0 t^* + \frac{\tilde{\psi}_{11}^* \bar{W}_{11}^0}{\mu_{11}^2} (1 - e^{-\mu_{11}^2 t^*}) \right] + \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_1}{R_1} \right) \frac{\bar{W}_{1n}^0}{2} \left[\frac{\tilde{\psi}_{10}^* \bar{W}_{10}^0}{\mu_{1n}^2} (1 - e^{-\mu_{1n}^2 t^*}) + \frac{\tilde{\psi}_{11}^* \bar{W}_{11}^0}{\mu_{11}^2 + \mu_{1n}^2} (1 - e^{-(\mu_{11}^2 + \mu_{1n}^2) t^*}) \right] \left. \right\}; \\
Q_2(x_2, \psi_{1*}, \psi_{2*}) = & -K_2 \left\{ \sigma_1 t^* - \frac{\sigma_2}{\mu_{11}^2} (e^{\mu_{11}^2 t^*} - 1) + \frac{\sigma_3}{\mu_{21}^2} (e^{\mu_{21}^2 t^*} - 1) + 2 \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_2}{R_2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{\sigma_1}{\mu_{2n}^2} (1 - e^{-\mu_{2n}^2 t^*}) - \frac{\sigma_2}{\mu_{11}^2 + \mu_{2n}^2} (e^{\mu_{11}^2 t^*} - e^{-\mu_{2n}^2 t^*}) + \frac{\sigma_3}{\mu_{21}^2 + \mu_{2n}^2} (e^{\mu_{21}^2 t^*} - e^{-\mu_{2n}^2 t^*}) \right] \right\} +
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& + K_2 q_2 \left\{ t^* + \frac{\pi^2}{2\mu_{21}^2} \left(\left(\frac{x_2}{R_2} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\pi^2}{\mu_{21}^2} \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_2}{R_2} \right) \cdot \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\mu_{2n}^2 t^*} \right\} + \\
& + K_2 \left\{ \frac{\bar{W}_{20}^0}{2} \left[\tilde{\psi}_{20}^* \bar{W}_{20}^0 t^* + \frac{\tilde{\psi}_{21}^* \bar{W}_{21}^0}{\mu_{21}^2} \left(1 - e^{-\mu_{21}^2 t^*} \right) \right] + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{n=1}^M \cos \left(\pi n \frac{x_2}{R_2} \right) \frac{\bar{W}_{2n}^0}{2} \left[\frac{\tilde{\psi}_{20}^* \bar{W}_{20}^0}{\mu_{2n}^2} \left(1 - e^{-\mu_{2n}^2 t^*} \right) + \frac{\tilde{\psi}_{21}^* \bar{W}_{21}^0}{\mu_{21}^2 + \mu_{2n}^2} \left(1 - e^{-(\mu_{21}^2 + \mu_{2n}^2) t^*} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4. Решение задачи программного управления. Теперь решение ЗПО (2.8), (2.9) сводится к выполнению равенств (2.10) в условиях (2.7), (2.11) с подстановкой $Q_m(x_m, \psi_{1*}, \psi_{2*})$, согласно (4.21), (4.22). В силу альтернативных свойств (2.11) при $R_m^0 = N_m^0 + 1 = 3$ в случае $\varepsilon_m = \varepsilon_{m\min}^{(2,2)}$, $m = 1, 2$, и физических закономерностей, определяющих форму кривых пространственного распределения температурных полей обеих пластин в концепции оптимального процесса индукционного нагрева [3, 30], осуществляется редукция равенств (2.10) к двум различным вариантам уравнений (2.12), (2.13) для каждой пластины, представляемых в заранее фиксируемой форме по выбору знака ε_m в (2.12) (см. далее рис. 1):

$$\begin{aligned}
Q_m(0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= -\varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \\
Q_m(x_m^0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= \varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \\
Q_m(R_m, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= -\varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \quad m = 1 \text{ или(и) } m = 2, \\
\frac{\partial Q_m(x_m^0, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{\partial x_m} &= 0,
\end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
Q_m(x_{1m}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= -\varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \\
Q_m(x_{2m}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= \varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \\
Q_m(R_m, \psi_{1*}, \psi_{2*}) - Q_m^{**} &= -\varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, \quad m = 1 \text{ или(и) } m = 2, \\
\frac{\partial Q_m(x_{1m}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{\partial x_m} &= \frac{\partial Q_m(x_{2m}^0, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{\partial x_m} = 0.
\end{aligned} \quad (4.24)$$

Совместное рассмотрение равенств (4.23), (4.24) приводит в итоге к следующим возможным вариантам расчетных систем уравнений вида (2.12), (2.13):

система 8 уравнений (4.23) при $m = 1, 2$ относительно 8 неизвестных $\tilde{\psi}_{m0}^*, \tilde{\psi}_{m1}^*, \varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, x_m^0$;

система 10 уравнений (4.24) при $m = 1, 2$ относительно 10 неизвестных $\tilde{\psi}_{m0}^*, \tilde{\psi}_{m1}^*, \varepsilon_{m\min}^{(2,2)}, x_{1m}^0, x_{2m}^0$;

система 9 уравнений (4.23) для $m = 1$ и (4.24) для $m = 2$ относительно 9 неизвестных $\tilde{\psi}_{10}^*, \tilde{\psi}_{11}^*, \tilde{\psi}_{20}^*, \tilde{\psi}_{21}^*, \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}, x_1^0, x_{12}^0, x_{22}^0$;

система 9 уравнений (4.23) для $m = 2$ и (4.24) для $m = 1$ относительно 9 неизвестных $\tilde{\psi}_{10}^*, \tilde{\psi}_{11}^*, \tilde{\psi}_{20}^*, \tilde{\psi}_{21}^*, \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}, x_2^0, x_{11}^0, x_{21}^0$.

Применительно к конкретным параметрическим характеристикам рассматриваемого объекта (4.10), (4.11) или оказывается разрешимой одна из этих систем уравнений, или из реализуемых указанных вариантов выбирается тот из них, на решениях которого достигается минимальная величина критерия оптимальности в (2.8). Последующая подстановка найденных величин ψ_{1*}, ψ_{2*} в (4.17) окончательно определяет искомое программное управление (4.19).

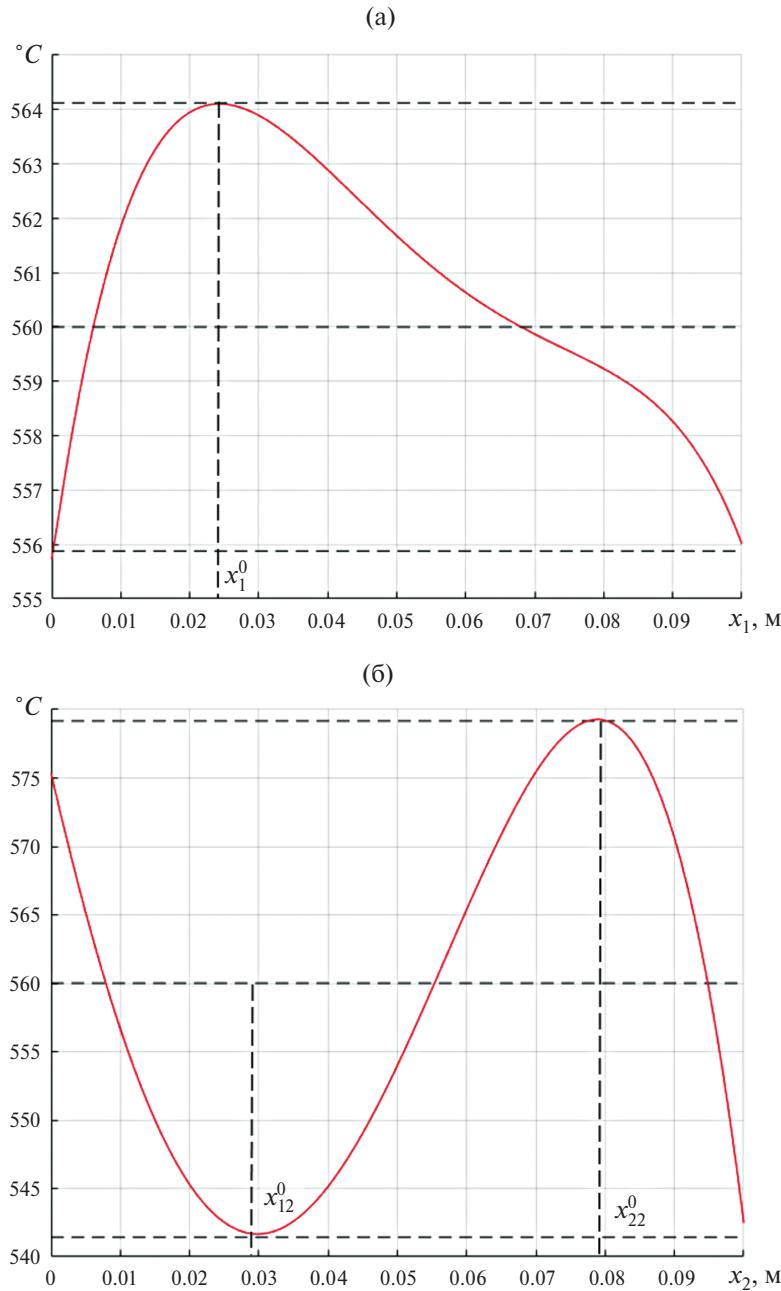


Рис. 1. Конечные температурные состояния в оптимальном процессе двухканального управления индукционным нагревом: $a - Q_1(x_1, \psi_{1*}, \psi_{2*})$, $\delta - Q_2(x_2, \psi_{1*}, \psi_{2*})$.

4.5. Синтез оптимального регулятора. Подстановка (4.20) в (4.12) определяет модальное описание объектов управления (4.10) и (4.11) несвязанной системой уравнений вида (3.1), (3.2), где в роли функций $\eta_j^{(1)}$ и $\eta_j^{(2)}$ фигурирует взвешенная сумма q_m и найденного, согласно (4.20), граничного воздействия $q^*(t, \psi_{1*}, \psi_{2*})$. Процедура аналитического конструирования оптимальных регуляторов, осуществляемая по схеме (3.3)–(3.14) с программным управлением \tilde{u}_s^* в (4.19), приводит для рассматриваемого примера при $N_1^0 = N_2^0 = 2$ к линейным законам $\tilde{u}_s^*(\bar{Q}_s, t)$, $\tilde{u}_s^*(Q_{su}, t)$ обратной связи (3.11), (3.14), где в соответствии с (4.12)

$$k_{mn}^{(1)} H_{mn}(t^* - t) = \int_0^{t^* - t} \left[\frac{q_m}{\lambda_m} \varphi_{mn}(\mu_{mn}, R_m) + \frac{q^*(\tau, \psi_{1*}, \psi_{2*})}{\lambda_m} \varphi_{mn}(\mu_{mn}, 0) \right] e^{\mu_{mn}^2(t^* - t - \tau)} d\tau, \quad (4.25)$$

$$m = 1, 2; n = \overline{0, M}.$$

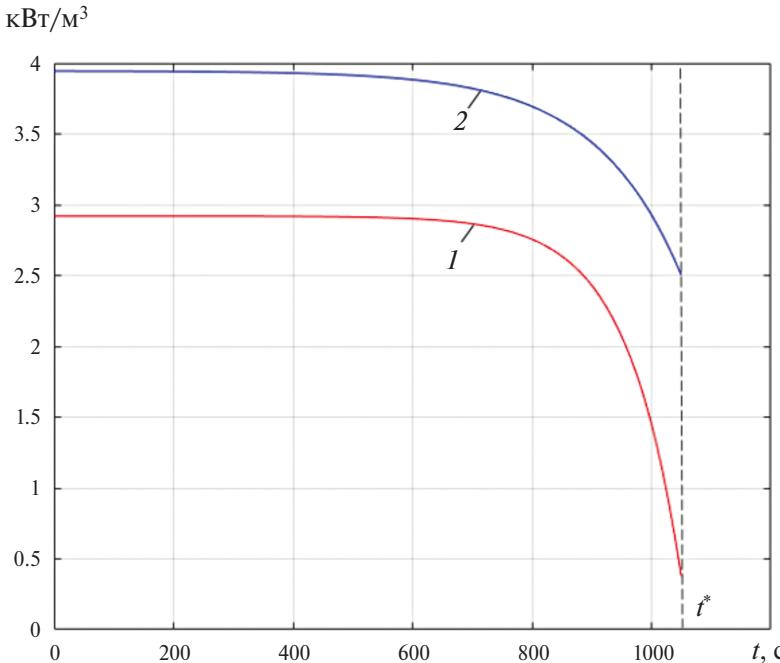


Рис. 2. Поведение управляемых воздействий в зависимости от изменяющихся во времени сигналов обратной связи: $1 - \tilde{u}_1(Q_{mu}, t) \times 10^{-3}$, $2 - \tilde{u}_2(Q_{mu}, t) \times 10^{-3}$.

Здесь следует подставить $q^*(\tau, \psi_{1*}, \psi_{2*})$ в виде (4.20).

Некоторые расчетные результаты, полученные при индукционном нагреве двух физически неоднородных пластин из стальных сплавов для $K_1 = 2.09 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{град}/(\text{Вт} \cdot \text{с})$, $K_2 = 2.34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{град}/(\text{Вт} \cdot \text{с})$, $R_1 = R_2 = 0.1 \text{ м}$, $\zeta = 4$, $q_1 = -60 \text{ Вт}/\text{м}^2$, $q_2 = -300 \text{ Вт}/\text{м}^2$, $Q_1 = Q_2 = 560 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $t^* = 1050 \text{ с}$, представлены на рис. 1, 2.

На рис. 1 показаны распределения температуры по толщине пластин в конце оптимального по энергопотреблению процесса нагрева, найденные при решении $\tilde{\psi}_{10}^* = 5.83 \cdot 10^7$, $\tilde{\psi}_{11}^* = 6.62 \cdot 10^7$, $\tilde{\psi}_{20}^* = 7.88 \cdot 10^7$, $\tilde{\psi}_{21}^* = 3.76 \cdot 10^7$, $\varepsilon_{1\min}^{(2,2)} = 4.12 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $\varepsilon_{2\min}^{(2,2)} = 19.17 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $x_1^0 = 0.024 \text{ м}$, $x_{12}^0 = 0.03 \text{ м}$, $x_{22}^0 = 0.08 \text{ м}$ указанного в разд. 4.4 варианта 3 компоновки расчетной системы уравнений альтернанского метода. Рис. 2 иллюстрирует поведение управляемых воздействий $\tilde{u}_m^*(Q_{mu}, t)$, $m = 1, 2$, изменяющихся во времени по алгоритму (3.14), (4.25) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи $Q_{mu}(x_{mu}, t) = (Q_{mu}(x_{mu1}, t), Q_{mu}(x_{mu2}, t))$, $i = 1, 2$, в точках $x_{mu1} = 0$, $x_{mu2} = R_m$, $m = 1, 2$.

Заключение. Предлагаемый метод решения задачи двухканального управления с минимальным энергопотреблением взаимосвязанными граничными условиями параболическими системами с распределенными параметрами разработан применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Используемый способ вычисления программных управляемых воздействий реализуется применением альтернанского метода параметрической оптимизации на конечномерном множестве финишных значений сопряженных переменных. Полученные уравнения оптимальных регуляторов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по наблюдаемым переменным с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами передачи. Приведен представляющий самостоятельный интерес пример двухканальной оптимизации процесса нагрева двух неограниченных пластин в условиях идеального теплового контакта на их граничных поверхностях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маковский В.А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. М.: Металлургия, 1971.
2. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
3. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993.

4. *Рапонорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.
5. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977.
6. *Бегимов И., Бутковский А.Г., Рожанский В.Л.* Структурное представление физически неоднородных систем // АиТ. 1982. № 9. С. 25–35.
7. *Бегимов И., Бутковский А.Г., Рожанский В.Л.* Структурное представление двумерных неоднородных систем с распределенными параметрами // АиТ. 1984. № 5. С. 5–16.
8. *Демиденко Н.Д.* Управляемые распределенные системы. Новосибирск: Наука, 1999.
9. *Рапонорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
10. *Рапонорт Э.Я.* Альтернанский метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
11. *Рапонорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
12. *Рапонорт Э.Я., Плещивцева Ю.Э.* Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021.
13. *Рапонорт Э.Я.* Метод параметрической оптимизации в задачах многоканального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 47–61.
14. *Ilina N.* Parametric Optimization of Nonstationary Heat Conductivity Processes with Two Control Actions // XXI Intern. Conf. Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara, Russia, 2019. P. 271–276.
15. *Атанас М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
16. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
17. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Лань, 2017.
18. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1986.
19. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Мат. сб. (новая серия). 1964. Т. 64 (106). № 1. С. 79–101.
20. *Плещивцева Ю.Э., Рапонорт Э.Я.* Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 42–57.
21. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
22. *Плещивцева Ю.Э., Рапонорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
23. *Рапонорт Э.Я.* Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами // Вестн. Саратовского гос. техн.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26. № 3. С. 419–445.
24. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001.
25. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
26. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн.ун-т, 1997.
27. *Рапонорт Э.Я., Плещивцева Ю.Э.* Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределенными параметрами // Автометрия. 2021. Т. 57. № 4. С. 17–28.
28. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003.
29. *Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г.* Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. Т.1. М.: Физматлит, 2008.
30. *Рапонорт Э.Я., Плещивцева Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.