

УДК 519.2

СОПОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО И ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ И ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ДРОБНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2024 г. О. С. Амосов^{a, *}, С. Г. Амосова^{a, **}

^aФГБУН ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*e-mail: osa18@yandex.ru

**e-mail: amosovasg@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.

После доработки 25.07.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Представлены дискретные линейный и обобщенный фильтры Калмана целого и дробного порядков для оценивания состояния и неизвестных параметров линейных и нелинейных дискретных систем дробного порядка. Дано сопоставление традиционного и дробного фильтров Калмана. Рассмотрены особенности и достоинства дробного алгоритма, которые проиллюстрированы на примерах использования дискретных линейного и обобщенного фильтров Калмана.

Ключевые слова: дискретные линейный и обобщенный фильтры Калмана, дробный порядок уравнения, дискретная система, оценивание состояния и параметров, точность

DOI: 10.31857/S0002338824050022, EDN: TEMFDR

COMPARISON OF LINEAR AND EXTENDED KALMAN FILTERS OF INTEGER AND FRACTIONAL ORDERS FOR ESTIMATION THE STATE AND PARAMETERS OF DISCRETE FRACTIONAL DYNAMIC SYSTEMS

O. S. Amosov^{a, *}, S. G. Amosova^{a, **}

^aV.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

*e-mail: osa18@yandex.ru

**e-mail: amosovasg@yandex.ru

Discrete linear and extended Kalman filters of integer and fractional orders are presented for estimating the state and unknown parameters of linear and nonlinear discrete fractional order systems. A comparison of traditional and fractional Kalman filters is given. The features and advantages of the fractional algorithm are considered, which are illustrated with examples of using discrete linear and extended Kalman filters.

Keywords: discrete linear and extended Kalman filters, fractional order of the equation, discrete system, state and parameter estimation, accuracy

0. Введение. Создание современных высокоточных систем гражданского и военного назначения требует разработки более точных моделей динамики систем и измерений, прогнозных моделей для управления. Одним из способов повышения адекватности математических моделей исследуемых объектов является применение теории дробного исчисления (fractional calculus) в отраслях человеческой деятельности, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. В основе дробного исчисления или исчисления нецелых порядков лежат понятия производной и интеграла нецелых порядков [1–3].

Анализ недавних публикаций показывает, что современные исследования дробного исчисления ведутся в направлениях развития математических методов; математических и физических моделей явлений реального мира; численных схем решения физических, инженерных и других задач, а также применения в многочисленных приложениях [3–44].

0.1 Развитие математических методов. В 1993 г. впервые была предложена концепция интеграла и дифференциала переменного порядка (variable-order (VO)), а также некоторые основные свойства [4]. Авторы [5] обобщили результаты исследования дробных операторов переменного порядка, а затем исследовали определения дробных операторов переменного порядка в различных формах. После этого были дополнительно изучены некоторые новые расширения и ценные возможности применения моделей дробных дифференциальных уравнений переменного порядка (fractional differential equations (FDE)) [6]. В [7] был предложен метод оптимизации параметров пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора дробно-переменного порядка для линейных динамических систем при различных начальных условиях. В работах [8, 9] рассмотрены свойства нового класса фрактальных функций, не дифференцируемых в классическом смысле, но имеющих в каждой точке непрерывные производные типа Вейля переменного порядка. Такими производными обладают, например, классические фрактальные функции Вейерштрасса, Такаджи, Безиковича. Необходимость использования таких фрактальных функций возникает при построении управляющей функции в задачах управления распределенными системами. В [10] приводится задача оптимального управления для модельной системы, которая описывается одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением, представляющим собой обобщение волнового уравнения на случай, когда производная по времени имеет дробный порядок и понимается в смысле Капуто. Изучены краевые задачи для одномерного интегродифференциального уравнения соболевского типа с граничными условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков [11]. Для развития метода обобщенных степенных рядов для задач, связанных как с дробными, так и с целыми производными, авторы [12] исследуют влияние на решение трех параметров: коэффициент возмущения, коэффициент задержки и коэффициент дробного порядка. Для решения пространственно-временных дробных уравнений Шредингера в работе [13] предлагается линеаризованная быстрая схема с шагом по времени высокого порядка. Результаты доказываются с помощью дробных неравенств Соболева для ограниченных численных решений.

0.2 Синтез новых численных методов. В [14] продемонстрированы проблемы с переменной памятью, относящиеся к статистическим и динамическим системам, где фрактальная размерность меняется со временем и координатой. В целом, численные методы используются как эффективные развитые методы численной аппроксимации дробных дифференциальных уравнений переменного порядка (VO-FDE) [15, 16]. Например, в [17] исследована устойчивость и сходимость нового явного конечно-разностного приближения для нелинейного уравнения дробной диффузии переменного порядка. В [18] было доказано существование решения дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [19] разработан экспоненциально точный метод дробной спектральной коллокации для решения линейных/нелинейных дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [20] представлен новый неявный численный метод для плавного решения двумерного (2D) уравнения дробной перколяции переменного порядка. В [21] предложены формулы аппроксимации второго порядка для дробной производной по времени переменного порядка для описания аномальной диффузии и распространения волн. Впоследствии в [22] был разработан численный метод высокого порядка для дробных дифференциальных уравнений переменного порядка в свете численного приближения второго порядка.

В [23] получены и проанализированы две временные схемы второго порядка для временно-многочленного уравнения дробной диффузии-волны, основанные на методе уменьшения порядка. Средневзвешенное значение на двух временных уровнях применяется к дискретизации пространственной производной, в которой весовой коэффициент соответствует оптимальной точке для дискретизации по времени.

0.3 Использование в разных областях науки и техники для моделирования явлений. В последние годы применение динамических систем дробного порядка играет жизненно важную роль в реальных приложениях, включая, например, аффинное шифрование с помощью даты рождения отправителя и получателя [24], дробное интегральное управление со скользящим режимом [25], модифицированный Дуффинг дробного порядка системы [26], хаотическую систему Королевской Кобры дробного порядка [27], цифровую криптографию [28]. Следовательно, исследуются динамические системы дробного порядка, которые имеют большой потенциал применения в реальных инженерных областях.

В некоторых дробных динамических системах переменного порядка функцией определенных переменных является температура, концентрация, плотность и т.д. Например, в [29] было обнаружено, что дифференциальный порядок релаксации белков представляет собой функцию температуры. В работе [30] авторы тщательно исследовали динамическое поведение, которое выступает хаотичным свойством систем Даффинга дробного порядка. В [31] была предложена 5D-гиперхаотическая система дробного порядка, основанная на гиперхаотической системе Лоренца. В настоящее время в центре внимания научных исследований находятся нелинейные динамические системы дробного порядка и синхронизация дробно-хаотических систем переменного порядка.

В работе [32] проведен обзор литературы и выводов в области первичных определений дробных дифференциальных уравнений переменного порядка, их моделей, численных методов и приложений. Приводится краткое описание различных физических моделей и типичных применений дробных дифференциальных уравнений переменного порядка. В [33] рассматривается новый подход к устойчивости системы управления дробного порядка. В данной работе поведение динамической системы смоделировано с помощью дифференциальных уравнений, включающих дробные производные. Применяя преобразования Лапласа к таким уравнениям и предполагая нулевые начальные условия, появляются передаточные функции без целых степеней переменной преобразования Лапласа. Применение дробного исчисления в нефтяном машиностроении отражено в модели дробной диффузии по времени производной переменного порядка для гетерогенных пористых сред [34]. Использование дробного исчисления во многих других отраслях физики и техники представлено в публикациях [35–39], а также показано в медицине [40]. В работе [40] описана новая модель туберкулеза с несколькими штаммами с помощью дробной производной переменного порядка как расширение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

В последнее время модель дробной производной случайного порядка обычно применяется для описания явлений релаксации, затухания и диффузии системы. В реальных приложениях физические системы страдают от некоторых шумов, включая флуктуации поля внешнего давления в аномальной диффузионной системе или нестабильное температурное поле при рассеянии энергии [41]. Подобные шумы неизбежно вызывают колебания всей системы. Следовательно, модель дробной производной случайного порядка является предпочтительным выбором для изображения этого типа флуктуационного процесса. При анализе реальных инженерных задач модель дробной производной случайного порядка может использоваться количественно для оценки и описания колебаний системы. Указывается, что некоторые возможные приложения включают прогнозирование загрязнения окружающей среды, оценку инженерных рисков, анализ устойчивости системы и т.д. [42].

Авторами [43] разработан метод конечных разностей высшего порядка для решения сингулярно возмущенных задач конвекции-диффузии с переменными коэффициентами, включающий производную по времени дробного порядка с порядком $\alpha \in (0, 1)$. В работе [44] на основе уравнения конвекции-диффузии дробного порядка по времени создали численную модель испарения капель в различных средах. Среди протестированных – уравнение конвекции-диффузии 0.1-го порядка, оно показало наилучший корректирующий эффект на модель испарения. Это уравнение повысило точность расчета и оказало хороший корректирующий эффект как для статического испарения, так и для испарения капель, падающих на плоские и криволинейные поверхности.

Таким образом, из представленных работ видно, что в настоящее время растет число применений дробного исчисления в фундаментальных законах естествознания [3–7, 11–13, 15, 16, 18, 20, 22], автоматическом управлении [8–10, 33], обработке сигналов [41], физике [14, 17, 19, 21, 23, 35–39, 42–44], электронике [24–28], механике [30, 31, 34], биологии [29], медицине [40] и других областях.

Дробные дифференциальные уравнения переменного порядка успешно используются для исследования динамики, зависящей от времени и/или пространства. При создании современных динамических систем разработчикам приходится решать задачу оценивания состояния и идентификации их параметров. Для решения указанной задачи эффективны методы нелинейной оптимальной фильтрации, среди которых наиболее широко на практике применяются фильтры калмановского типа [45–49]. При этом для оценки состояния и параметров динамических систем дробного порядка существуют различные модификации фильтров Калмана (ФК) дробного порядка для линейных и нелинейных дробных динамических систем [49–53]. К их числу относятся дробные линейный (ДЛФК), обобщенный (ДОФК), ансамблевый и адаптивный ФК. Однако в указанных публикациях рассмотрены алгоритмы дробной филь-

трации калмановского типа, но не дается сравнительная оценка возможностей, преимуществ и недостатков дробных и целочисленных алгоритмов.

Учет фрактальных свойств процессов позволяет добиться успеха при создании более качественных математических моделей систем и датчиков, в основе которых лежат марковские процессы порядка выше первого. Выявление и исследование фрактальных свойств процессов и объектов в разных предметных областях было выполнено и в наших работах. К их числу относятся: измерительные системы и датчики, навигация и управление движением, телекоммуникационные системы и сети, дефектоскопия [54–57]. При создании более качественных математических моделей систем и датчиков предлагается учитывать фрактальные свойства и динамику процессов, основанную на исчислении дробного порядка, что усложняет алгоритмы фильтрации, которые должны функционировать в режиме реального времени. Это происходит в силу того, что алгоритмы оценивания должны использовать оценки не только предпоследнего, но и всех предыдущих шагов фильтрации, поскольку уравнения состояния дробных динамических систем определяются марковскими процессами высшего порядка [58, 59]. В случае применения математической модели системы дробного порядка, наряду с оценкой переменных состояния и неизвестных параметров, необходимо идентифицировать и сам порядок системы.

Таким образом, в разд. 0.1 представлен обзор недавних результатов исследования непрерывных систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного и переменного порядка, а в разд. 0.2 — численные схемы для их решения, приводящие к дискретным моделям систем.

Предлагаемая статья посвящена анализу особенностей и возможностей применения дискретных фильтров калмановского типа дробного порядка для линейных и нелинейных задач оценивания. Дается сопоставление дискретных ФК целочисленного и дробного порядков по точности оценивания состояния и параметров системы, что проиллюстрировано на примерах использования ДЛФК и ДОФК.

1. Постановка и решение линейной задачи оценивания. В табл. 1 приведена постановка задачи оценивания состояния дискретной линейной динамической системы размерности n с вектором состояния $\mathbf{x}_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i})^T$, где $i = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время, с применением математических моделей как целого порядка один [45–48], так и дробного порядков [49, 50, 58, 59]. Следует отметить, что в публикации [49] приведены доказательства, что ДЛФК минимизирует среднеквадратический критерий, представленный в табл. 1.

Таблица 1. Постановка задачи фильтрации

Математическая модель	Дискретная линейная стохастическая система целого порядка	Дискретная линейная стохастическая система дробного порядка
Уравнение для вектора состояния	$\Delta^1 \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I},$ $\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i$	$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i,$ $\mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j},$ $\Gamma_j = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ j \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \mu_n \\ j \end{pmatrix} \right],$ $\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta^{\mu_1} x_{1,i} & \dots & \Delta^{\mu_n} x_{n,i} \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$
	$x_i = \Delta^1 x_i + x_{i-1} = ax_{i-1} + w_i$	$\Delta^\mu x_i = (a - 1)x_{i-1} + w_i,$ $x_i = \Delta^\mu x_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} x_{i-j}$
Измерения	$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i$	
	$y_i = x_i + v_i$	

Окончание таблицы 1

Математическая модель	Дискретная линейная стохастическая система целого порядка	Дискретная линейная стохастическая система дробного порядка
Начальные условия	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$	
	$x_0 \in \mathbb{R}^1, P_0 = \sigma_0^2$	
Порождающие шумы	$\bar{\mathbf{w}}_i = 0, E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$	
	$\bar{w}_i = 0, E\{w_i w_j\} = Q$	
Шумы измерения	$\bar{\mathbf{v}}_i = 0, E\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$	
	$\bar{v}_i = 0, E\{v_i v_j\} = R = \sigma_v^2$	
Взаимная корреляция	$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i \mathbf{v}_j^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_j^T\} = 0$	
	$E\{x_0 w_i\} = 0; E\{w_i v_j\} = 0; E\{x_0 v_j\} = 0$	
Матрицы	$\Phi_i, \Phi_{di} - n \times n, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I}, \mathbf{Q}_i - p \times p, \mathbf{H}_i - m \times n, \mathbf{R}_i - m \times m,$ $\mathbf{I} - \text{единичная матрица}$	
	$\Phi_i = a, \Phi_{di} = a - 1, \mathbf{Q}_i = Q, \mathbf{H}_i = 1, \mathbf{R}_i = R$	
Минимизируемый критерий	$J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)), \mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T)^T$	
	$J_i = E_{x_i, y_i} [(x_i - \hat{x}_i(y_i))^2], \mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)^T$	

Для удобства иллюстрации материала в данной и в последующих таблицах под штриховой линией приведены примеры для скалярной системы. В этом разделе в качестве примера рассмотрена задача оценки скалярной переменной состояния x_i , $x_i = ax_{i-1} + w_i$ по зашумленным измерениям y_i вида $y_i = x_i + v_i$. Заметим, что в данном примере $\Phi_i = a$, $\Phi_{di} = a - 1$.

Для математического описания дискретных систем дробного порядка конечная разность первого порядка $\Delta^1 \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$ обобщена на разность $\Delta^\mu \mathbf{x}_i$ любого нецелого порядка $\mu > 0$ в соответствии со следующим определением разности дробного порядка Грюнвальда-Летникова [49, 59]:

$$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \frac{1}{h^\mu} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j} = \frac{1}{h^\mu} \left[\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j} \right], \mathbf{x}_i = h^\mu \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \mathbf{x}_{i-j},$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ — порядок дробной разности, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, h — интервал дискретизации, который принимается в дальнейшем равным 1 и i — номер отсчета, для которого вычисляется разность. Дробный биномиальный коэффициент $\binom{\mu}{j}$ может быть получен из выражения

$$\binom{\mu}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-j+1)}{j!} & j > 0. \end{cases}$$

В случае, когда рассматривается система из n уравнений различных дробных порядков $\mu_1, \dots, \mu_n$ относительно переменных $x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$, имеем

$$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j},$$

$$\Gamma_j = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ j \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \mu_n \\ j \end{pmatrix} \right]; \quad \Delta^\mu \mathbf{x}_i = \left[\Delta^{\mu_1} x_{1,i} \quad \dots \quad \Delta^{\mu_n} x_{n,i} \right]^T, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи оценивания с использованием дискретных линейных фильтров Калмана целого [45–48] и дробного [49, 58] порядков дано в табл. 2.

Таблица 2. Соотношения для алгоритма дискретного ЛФК

Математическая модель	ЛФК	ДЛФК
Прогноз	$\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^1 \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i-1}$	$\Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_{di} \hat{\mathbf{x}}_{i-1},$ $\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \hat{\mathbf{x}}_{i-j}$
	$\hat{x}_{i/i-1} = a \hat{x}_{i-1}$	$\Delta^\mu \hat{x}_{i/i-1} = (a-1) \hat{x}_{i-1},$ $\hat{x}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{x}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \hat{x}_{i-j}$
Матрица ковариаций ошибок прогноза	$\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_i \mathbf{P}_{i-1} \Phi_i^T + \mathbf{Q}_i$	$\mathbf{P}_{i/i-1} = (\Phi_{di} + \Gamma_1) \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_{di} + \Gamma_1)^T + \mathbf{Q}_i$ $+ \sum_{j=2}^i \Gamma_j \mathbf{P}_{i-j} \Gamma_j^T$
	$p_{i/i-1} = a^2 p_{i-1} + Q$	$p_{i/i-1} = (a-1+\mu)^2 p_{i-1} + Q + \sum_{j=2}^i \binom{\mu}{j}^2 p_{i-j}$
Коэффициент усиления	$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$	
	$k_i = p_{i/i-1} (p_{i/i-1} + R)^{-1}$	
Оценка	$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1})$	
	$\hat{x}_i = \hat{x}_{i/i-1} + k_i (y_i - \hat{x}_{i/i-1})$	
Матрица ковариаций ошибок оценивания	$\mathbf{P}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_{i/i-1}$	
	$p_i = (1 - k_i) p_{i/i-1}$	

1.1. С о п о с т а в л е н и е ф и л ь т р о в. Уравнения состояния для динамической системы целого порядка описывают марковские последовательности или, более точно, марковские последовательности первого порядка. Сравнение уравнений для вектора состояния целого и дробного порядков табл. 1 показывает, что последние описывают марковские последовательности более высокого порядка, которые обладают краткосрочной и долгосрочной памятью. Как следствие использование математической модели дискретной динамической

системы дробного порядка приводит к тому, что при расчете оценки прогноза и матрицы ковариаций ошибок прогноза для дробного фильтра табл. 2 применяются значения оценки и матрицы ковариаций ошибок оценивания не только с последнего предыдущего шага, как в случае традиционного ФК целого порядка, но и со всех предыдущих шагов. Это свойство справедливо, когда $\mu_k \neq 1, k = 1, n$.

Сравнение формул в левой и правой частях табл. 2 для ФК показывает, что при $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$ выражения для линейного ФК (ЛФК) и ДЛФК совпадают. Другими словами, ЛФК является частным случаем ДЛФК. Следует ожидать, что в общем случае, когда реальные процессы в исследуемой системе являются марковскими последовательностями высшего порядка, их использование для построения ФК дробного порядка позволит достичь более высокую точность оценивания состояния системы. Существенно отметить, что для оптимального ДЛФК число значений учитываемых оценок и значений матрицы ковариаций ошибок оценивания равно числу шагов дискретизации i . Для практической реализации ДЛФК естественным приемом служит ограничение числа слагаемых для вычисления оценки и матрицы ковариаций, которое будет определять субоптимальное решение. Число слагаемых на практике определяется требованиями обеспечения необходимой точности решения и быстродействия алгоритма. В практических реализациях количество элементов в суммах для уравнений прогноза оценки и матрицы ковариаций ошибок прогноза дискретной линейной стохастической системы дробного порядка должно быть ограничено заранее заданным значением d (табл. 1).

Сказанное выше подтверждается следующим иллюстрирующим примером оценивания, характерным для обработки данных.

1.2. П р и м е р. Для модели скалярной системы (формулы приведены в табл. 1 под штриховой линией) проведено оценивание для различных значений $\mu = \mu_1: 0.5; 1; 1.6$. $\sigma_0 = 10$, $\sigma_w = 3$, $\sigma_v = 5$, $a = 1$ (см. рис. 1).

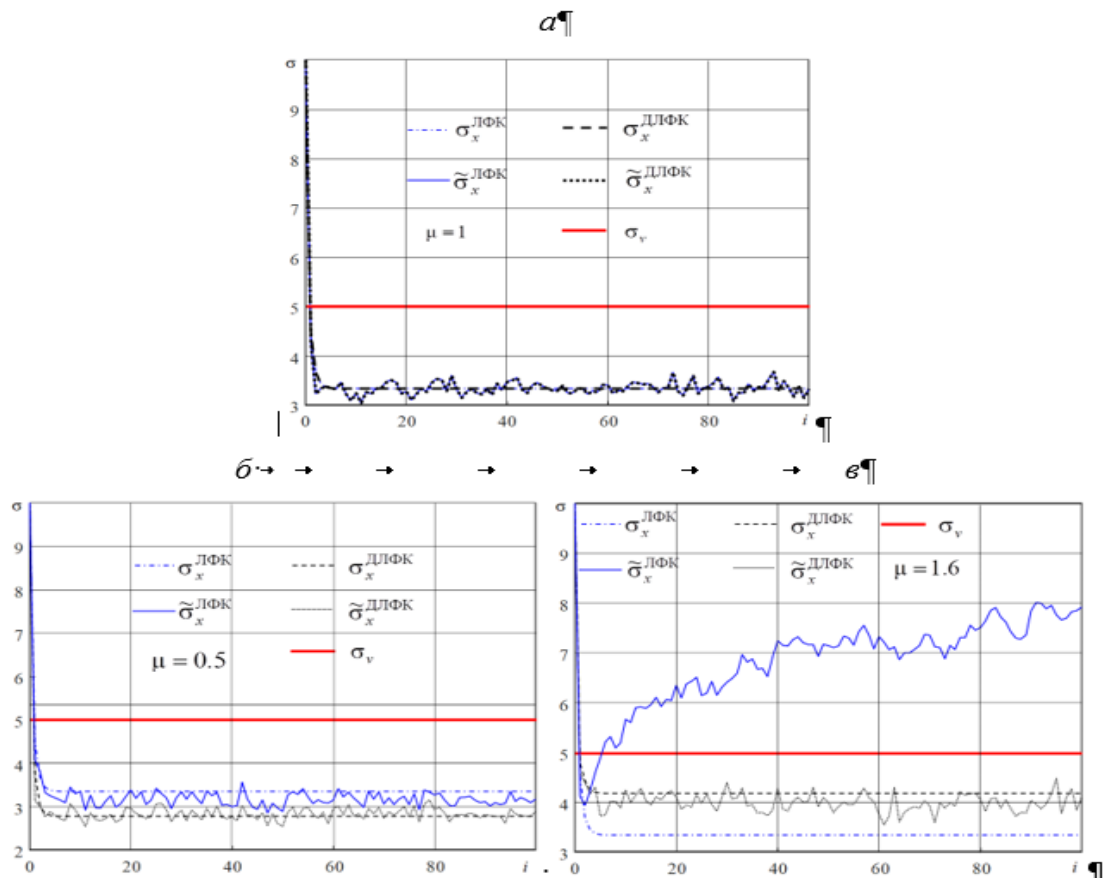


Рис. 1. Оценивание процесса X_i с различными значениями порядка μ :
а – при $\mu = 1$, б – при $\mu = 0.5$, в – при $\mu = 1.6$.

Для указанных μ представлены 1) расчетные среднеквадратические отклонения (СКО) ошибок оценивания $\sigma_{x_i}^{\text{ЛФК}}$ и $\sigma_{x_i}^{\text{ДЛФК}}$, соответствующие дисперсиям ошибок оптимального оценивания ЛФК и ДЛФК; 2) выборочные СКО ошибок оценивания, вычисляемые следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_i^{\eta} \approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (e_i^{\eta(j)})^2}, e_i^{\eta(j)} = \hat{x}_i^{\eta(j)}(y_i^{(j)}) - x_i^{(j)}, \eta = \text{ЛФК, ДЛФК}, L = 300.$$

Параметр $\mu = 1$. При $\mu = 1$ ЛФК совпадает с ДЛФК. Традиционный ФК позволяет получить оптимальное решение только для этого значения μ и не является оптимальным при других значениях μ . Результаты моделирования показали совпадение всех расчетных и действительных характеристик точности представленных линейных алгоритмов дискретных ЛФК и ДЛФК при $\mu = 1$, что видно на рис. 1. В общем случае, когда $\mu \neq 1$ оптимальная оценка и матрица ковариации для ошибки оценивания определяются с помощью выражений для ФК дробного порядка.

Параметр $\mu = 0.5$. При этом μ с помощью ДЛФК может быть достигнута более высокая точность оценивания, в отличие от ЛФК.

Параметр $\mu = 1.6$. При этом μ с течением времени для ЛФК, в отличие от ДЛФК, наблюдается заметный рост ошибки оценивания.

Для $\mu = 0.5$ и 1.6 наблюдается совпадение расчетной и действительной характеристик для ДЛФК и несовпадение расчетной и действительной характеристик для ЛФК целого порядка.

При сопоставлении приведенных результатов, полученных ЛФК и ДЛФК, необходимо учитывать тот факт, что моделирование проводится в условиях согласованных настроек расчетной и действительной моделей для ДЛФК, в то время как для ЛФК это условие не выполняется.

На рис. 2 для $\mu = 0.5$ и 1.6 отдельно представлены результаты работы дробных ФК с ограничением количества учитываемых оценок и значений матрицы ковариаций числом d . Если для $\mu = 0.5$ достаточно для достижения точности, близкой к оптимальному ДЛФК, выбрать $d \leq 5$, то в случае $\mu = 1.6$ необходимо выбрать $d \geq 7$.

2. Постановка и решение нелинейной задачи оценивания. В табл. 3 приведена постановка задачи оценивания состояния нелинейной динамической системы с использованием математических моделей целого [45–48] и дробного [49, 58, 59] порядков. Решение задачи оценивания с помощью обобщенных ФК (ОФК) целого [45–48] и дробного [49, 58, 59] порядков дано в табл. 4.

В качестве примера рассмотрена задача совместной оценки скалярной переменной состояния x_i и неизвестного параметра a , $x_i = ax_{i-1} + w_i$ по зашумленным измерениям y_i вида

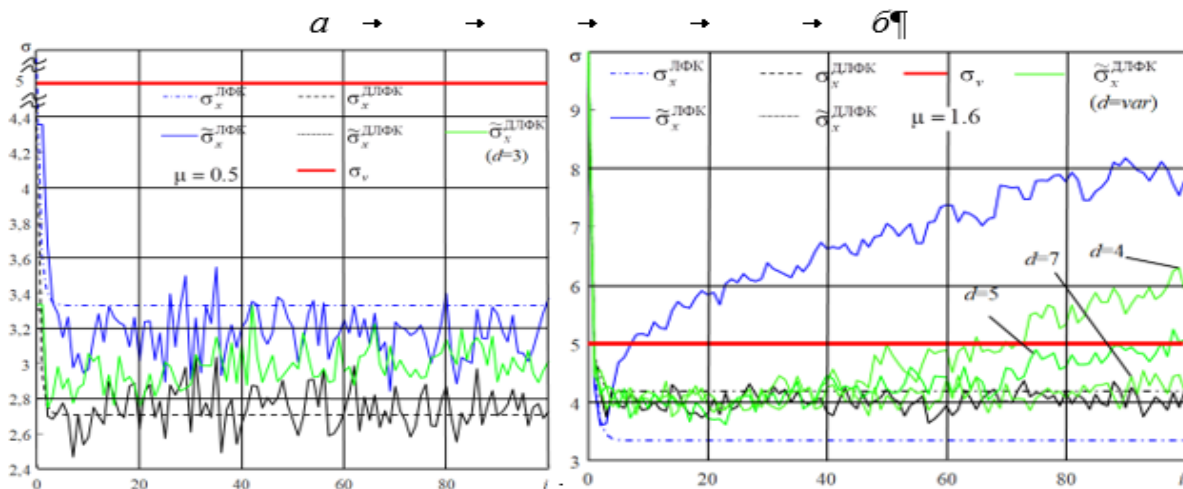


Рис. 2. Оценивание процесса x_i с различными значениями порядка μ и параметра d :
а – при $\mu = 0.5$, б – при $\mu = 1.6$

Таблица 3. Постановка нелинейной задачи фильтрации

Математическая модель	Дискретная нелинейная стохастическая система целого порядка	Дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка
Уравнение для вектора состояния	$\Delta^1 \mathbf{x}_i = \Phi_{di} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \Phi_{di} = \Phi_i - \mathbf{I},$ $\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i$	$\Delta^\mu \mathbf{x}_i = \Phi_{di}(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{w}_i,$ $\mathbf{x}_i = \Delta^\mu \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \mathbf{x}_{i-j}$
	$\begin{bmatrix} x_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_i} \\ w_{a_i} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{x_i} \\ w_{a_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} x_{i-j} \\ -1a_{i-1} \end{bmatrix}$
Измерения	$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i$	
	$y_i = x_i + v_i$	
Начальные условия	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$	
	$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 \\ 0 & P_{a_0} \end{bmatrix}$	
Порождающие шумы	$\bar{\mathbf{w}}_i = 0, \quad E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i$	
	$\bar{\mathbf{w}}_i = \begin{bmatrix} \bar{w}_{x_i} \\ \bar{w}_{a_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ 0 & Q_a \end{bmatrix}$	
Шумы измерения	$\bar{\mathbf{v}}_i = 0, \quad E\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$	
	$\bar{v}_i = 0, \quad E\{v_i v_i\} = R = \sigma_v^2$	
Взаимная корреляция	$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_i^T\} = 0$	
	$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_i^T\} = 0; E\{\mathbf{w}_i v_i\} = 0; E\{\mathbf{x}_0 v_i\} = 0$	
Функции, матрицы	$\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}), \Phi_{di}(\mathbf{x}_{i-1}), \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) - n \text{ и } m \text{ - мерные нелинейные вектор- функции,}$ $\mathbf{Q}_i - p \times p, \mathbf{R}_i - m \times m,$ $\Phi_i^x \equiv \Phi_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[\frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}}, \quad \Phi_{di}^x \equiv \Phi_{di}^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \left[\frac{\partial \Phi_{di}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} - n \times n,$ $\mathbf{H}_i^x \equiv \mathbf{H}_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \left[\frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}} - m \times n$	
	$\Phi_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{di} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1)x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{i-1} & \hat{x}_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{di}^x(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} - 1) & \hat{x}_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$ $\mathbf{H}_i^x(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	

Окончание таблицы 3

Математическая модель	Дискретная нелинейная стохастическая система целого порядка	Дискретная нелинейная стохастическая система дробного порядка
Минимизируемый критерий	$J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)), \mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T)^T$ $J_i = E_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}_i)), \mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)^T$	

Таблица 4. Соотношения для алгоритма ОФК

Решение задачи фильтрации		
Математическая модель	ОФК	ДОФК
Прогноз	$\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^1 \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_{i-1} = \Phi_i(\hat{\mathbf{x}}_{i-1})$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} \hat{x}_{i-1}) \\ \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix}$	$\Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_{di}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}), \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Delta^\mu \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} - \sum_{j=1}^i (-1)^j \Gamma_j \hat{\mathbf{x}}_{i-j}$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{a}_{i-1} - 1) \hat{x}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{\mu}{j} \hat{x}_{i-j} \\ -1 \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix}$
Матрица ковариаций ошибок прогноза	$\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_i^x \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_i^x)^T + \mathbf{Q}_i$	$\mathbf{P}_{i/i-1} = (\Phi_{di}^x + \Gamma_1) \mathbf{P}_{i-1} (\Phi_{di}^x + \Gamma_1)^T + \mathbf{Q}_i +$ $+ \sum_{j=2}^i \Gamma_j \mathbf{P}_{i-j} \Gamma_j^T$ $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma_j = \begin{bmatrix} \gamma_j^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma_j^1 = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-j+1)}{j!}, j = \overline{2, i}$
Коэффициент усиления	$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} (\mathbf{H}_i^x)^T (\mathbf{H}_i^x \mathbf{P}_{i/i-1} (\mathbf{H}_i^x)^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$	
Оценка	$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i [\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i(\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1})]$ $\begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1} \\ \hat{a}_{i/i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,i} \\ k_{2,i} \end{bmatrix} (y_i - \hat{x}_{i/i-1})$	
Матрица ковариаций ошибок оценивания	$\mathbf{P}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i^x) \mathbf{P}_{i/i-1}$	

$y_i = x_i + v_i$. Такая задача совместного оценивания состояния и идентификации является нелинейной [59], и для ее решения необходимо применение ОФК, если выбраны для решения алгоритмы калмановского типа. В данном примере

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} a_{i-1} x_{i-1} \\ a_{i-1} \end{bmatrix}, \Phi_{di} = \begin{bmatrix} (a_{i-1} - 1) x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

а параметры ДОФК, следующие:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, R = 25.$$

2.1. Сопоставление фильтров. Выводы, которые были сделаны при сопоставлении ЛФК целого и дробного порядков в разд. 1.1, справедливы и для случая ОФК целого и дробного порядков, представленного в табл. 4. ОФК является частным случаем ДОФК.

Для иллюстрирующего примера системы проведено совместное оценивание и дано сравнение результатов для ОФК целого и дробного порядков для различных значений порядка $\mu = \mu_1 : 0.5; 1; 1.6$. Результаты совместной оценки показаны на рис. 3, 4.

При $\mu = 1$ ОФК совпадает с ДОФК. ОФК позволяет получить оптимальное решение только для этого значения μ и не является оптимальным при других значениях μ . В общем случае, когда $\mu \neq 1$, оптимальная оценка и матрица ковариации для ошибки оценивания определяются с помощью выражений для ОФК дробного порядка.

При $\mu = 0.5$ точность оценки неизвестного параметра a_i с помощью ДОФК выше, чем для традиционного ОФК. Точности оценки координат для сравниваемых фильтров близки.

При $\mu = 1.6$ точности оценки параметра a_i для обоих фильтров близки. Точность оценки координаты у ДОФК заметно выше, чем у ОФК целого порядка.

Как и для ЛФК для расширенного ФК в практических реализациях количество элементов в суммах для уравнений прогноза оценки и матрицы ковариаций ошибок прогноза дискрет-

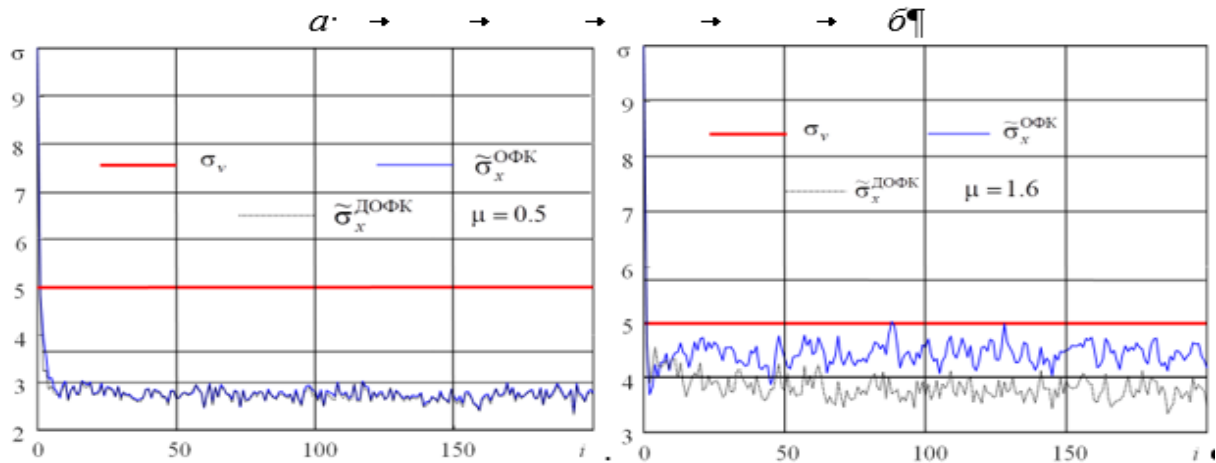


Рис. 3. Оценивание переменной состояния x : а – при $\mu = 0.5$, б – при $\mu = 1.6$.

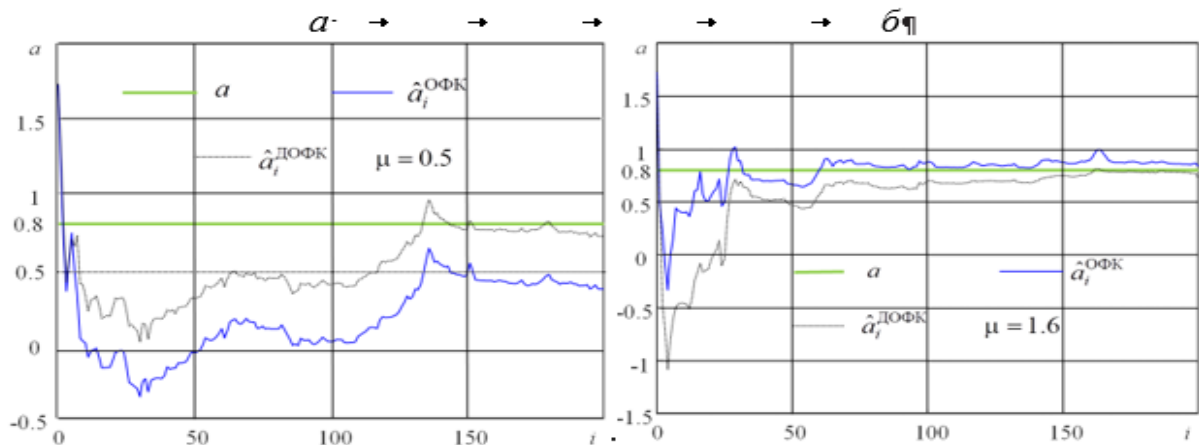


Рис. 4. Оценивание параметра a : а – при $\mu = 0.5$, б – при $\mu = 1.6$.

ной нелинейной стохастической системы дробного порядка в табл. 4 должно быть ограничено заранее заданным значением d .

Заключение. Рассмотрены математические модели дискретных динамических систем дробного порядка с использованием разности дробного порядка Грюнвальда-Летникова. Приведены постановка и решение задачи оценивания состояния дискретных динамических систем целого и дробного порядков с помощью ЛФК и ОФК. Представлены дискретные фильтры калмановского типа дробного порядка для оценивания состояния и параметров линейных и нелинейных дискретных систем дробного порядка. Дано сопоставление дискретных ФК целочисленного и дробного порядков. Рассмотрены особенности и достоинства дробного алгоритма, которые проиллюстрированы на примерах использования ЛФК и ОФК. Сформулирована оценка точности алгоритмов калмановского типа дробного порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. Вып.1. С. 1–68.
2. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. Acad. Press., 1974.
3. Васильев В.В., Симаков Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008.
4. Samko S.G., Ross B. Integration and Differentiation to a Variable Fractional Order // Integr. Transf. Spec. Funct. 1993. V. 1. No 4. P. 277–300.
5. Lorenzo C.F., Hartley T.T. Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus // Crit. Rev. Biomed. Eng. 2007. V. 35. No 6. P. 477–553.
6. Coimbra C.F.M. Mechanics with Variable-order Differential Operators // Ann. Der Phys. 2003. V. 12. No (11–12). P. 692–703.
7. Dabiri A., Moghaddam B.P., Machado J.A.T. Optimal Variable-order Fractional PID Controllers for Dynamical Systems // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 339. P. 40–48.
8. Агаджанов А.Н. Фрактальные функции с непрерывными производными типа Вейля переменного порядка в задачах управления распределенными системами // ДАН. 2017. Т. 473. № 1. С. 7–11.
9. Agadzhanov A.N. Fractal and Infinitely Differentiable Functions in Compactly Supported Control Problems for Hyperbolic Distributed Systems // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No 1. P. 98–101.
10. Постнов С.С. Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением // Владикавказский математический журн. 2022. Т. 24. Вып. 3. С. 108–119.
11. Бештоков М.Х. Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26. № 4. С. 607–629.
12. Irwaq I.A., Alquran M., Ali M., Jaradat I., Noorani M.S.M. Attractive New Fractional-integer Power Series Method for Solving Singularly Perturbed Differential Equations Involving Mixed Fractional and Integer Derivatives // Results in Physics. 2021. V. 20. No 103780.
13. Yuan W., Zhang Ch., Li D. Linearized Fast Time-stepping Schemes for Time-space Fractional Schrodinger Equations // Physica D. 2023. V. 454. No 133865.
14. Kobelev Y.L., Kobelev L.Y., Klimontovich Y.L. Anomalous Diffusion with Time-and Coordinate-dependent Memory // Dokl. Phys. 2003. V. 48. No 6. P. 264–268.
15. Chen Y., Wei Y., Liu D., Yu H. Numerical Solution for a Class of Nonlinear Variable Order Fractional Differential Equations with Legendre Wavelets // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 83–88.
16. Shen S., Liu F., Chen J., Turner I., Anh V. Numerical Techniques for the Variable Order Time Fractional Diffusion Equation. Appl. Math. Comput. 2011. V. 218. No 22. P. 10861–10870.
17. Lin R., Liu F., Anh V., Turner I. Stability and Convergence of a New Explicit Finite-difference Approximation for the Variable-order Nonlinear Fractional Diffusion Equation // Appl. Math. Comput. 2009. V. 212. No 2. P. 435–445.
18. Razminia A., Dizaji A.F., Majd V.J. Solution Existence for Nonautonomous Variable-order Fractional Differential Equations // Math. Comput. Model. 2012. V. 55. No 3. P. 1106–1117.
19. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Spectral Collocation Methods for Linear and Nonlinear Variable Order FPDEs // J. Comput. Phys. 2015. V. 293. No C. P. 312–338.
20. Chen S., Liu F., Burrage K. Numerical Simulation of a New Twodimensional Variable-order Fractional Percolation Equation in Nonhomogeneous Porous Media // Comput. Math. Appl. 2014. V. 68. No 12. P. 2133–2141.
21. Zhao X., Sun Z., Karniadakis G.E. Second-order Approximations for Variable Order Fractional Derivatives: Algorithms and Applications // J. Comput. Phys. 2015. V. 293. P. 184–200.
22. Cao J., Qiu Y. A High Order Numerical Scheme for Variable Order Fractional Ordinary Differential Equation // Appl. Math. Lett. 2016. V. 61. P. 88–94.
23. Sun H., Zhao X., Sun Zh. The Temporal Second Order Difference Schemes Based on the Interpolation Approximation for the Time Multi-term Fractional Wave Equation // J. Scientific Computing. 2019. V. 78. P. 467–498.
24. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Fast Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic and Reverse Chaotic Systems with its Application to an Affine Cipher Using Date of Birth (DOB) // Nonlinear Dynam. 2015. V. 80. No 4. P. 1883–1897.

25. Balasubramaniam P., Muthukumar P., Ratnavelu K. Theoretical and Practical Applications of Fuzzy Fractional Integral Sliding Mode Control for Fractional-order Dynamical System // *Nonlinear Dynam.* 2015. V. 80. No 1–2. P. 249–267.
26. Ge Z., Ou C. Chaos Synchronization of Fractional Order Modified Duffing Systems with Parameters Excited by a Chaotic Signal // *Chaos Soliton. Fract.* 2008. V. 35. No 4. P. 705–717.
27. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Synchronization and an Application of a Novel Fractional Order King Cobra Chaotic System // *Chaos.* 2014. V. 24. No 3033105.
28. Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K. Synchronization of a Novel Fractional Order Stretch-twist-fold (STF) Flow Chaotic System and its Application to a New Authenticated Encryption Scheme (AES) // *Nonlinear Dynam.* 2014. V. 77. No 4. P. 1547–1559.
29. Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. A Fractional Calculus Approach to Self-similar Protein Dynamics // *Biophys. J.* 1995. V. 68. No 1. P. 46–53.
30. He G., Luo M. Dynamic Behavior of Fractional Order Duffing Chaotic System and its Synchronization Via Singly Active Control // *Appl. Math. Mech.* 2012. V. 33. No 5. P. 567–582.
31. Wang S., Wu R. Dynamic Analysis of a 5D Fractional-order Hyperchaotic System // *Inter. J. Control Autom. Syst.* 2017. V. 15. No 3. P. 1003–1010.
32. Sun H.G., Chang A., Zhang Y., Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods And Applications // *Fractional Calculus & Applied Analysis.* 2019. V. 22. No. 1.
33. Kumar P., Chaudhary S.K. Analysis of Fractional Order Control System with Performance and Stability // *Intern. J. Eng. Sci. Tech.* 2017. V. 9. No 5. P. 408–416.
34. Obembe A.D., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Variable-order Derivative Time Fractional Diffusion Model for Heterogeneous Porous Media // *J. Petrol. Sci. Eng.* 2017. V. 152. P. 391–405.
35. Awotunde A.A., Ghanam R.A., Tatar N.E. Artificial Boundary Condition for a Modified Fractional Diffusion Problem. Bound // *Value Probl.* 2015. No 1. P. 20.
36. Cai W., Chen W., Fang J., Holm S. A Survey on Fractional Derivative Modeling of Power-law Frequency-dependent Viscous Dissipative and Scattering Attenuation in Acoustic Wave Propagation // *Appl. Mech. Rev.* 2018. V. 70. No 3. 030802.
37. Jiang S., Zhang J., Qian Z., Zhang Z. Fast Evaluation of the Caputo Fractional Derivative and its Applications to Fractional Diffusion Equations. *Commun. Comput // Phys.* 2017. V. 21. No 3. P. 650–678.
38. Povstenko Y., Klekot J. The Dirichlet Problem for the Time-fractional Advection-diffusion Equation in a Line Segment // *Bound. Value Probl.* 2016. No 1. P. 89.
39. Zhang L., Li S. Regularity of Weak Solutions of the Cauchy Problem to a Fractional Porous Medium Equation // *Bound. Value Probl.* 2015. No 1. P. 1–6.
40. Sweilam N.H., Al-Mekhlafi S.M. Numerical Study for Multi-strain Tuberculosis (TB) Model of Variable-order Fractional Derivatives // *J. Adv. Res.* 2016. V. 7. No 2. P. 271–283.
41. Sun H.G., Chen Y., Chen W. Random-order Fractional Differential Equation Models // *Signal Process.* 2011. V. 91. No 3. P. 525–530.
42. Sun H.G., Chen W., Sheng H., Chen Y. On Mean Square Displacement Behaviors of Anomalous Diffusions with Variable and Random Orders // *Phys. Lett.* 2010. V. 374. No 7. P. 906–910.
43. Sahoo S.K., Gupta V., Dubey Sh. A Robust Higher-order Finite Difference Technique for a Time-fractional Singularly Perturbed Problem // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2024. V. 215. P. 43–68.
44. Xu Q., Ma X., Cheng Z., Xiao X., Ma Zh. Numerical Simulation of Conduction Problem with Evaporation Based on a SPH Model Improved by a Fractional Order Convection-diffusion Equation // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2023. V. 155. P. 668–681.
45. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправ. и доп. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
46. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Изд. 3-е, исправ. и доп. Ч. 2. Введение в теорию фильтрации. Санкт-Петербург: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
47. Stepanov O.A., Amosov O.S., Toropov A.V. Comparison of Kalman-type Algorithms in Nonlinear Navigation Problems for Autonomous Vehicles // *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline).* 2007. V. 6. Pt 1. P. 493–498.
48. Haykin S. Kalman Filtering and Neural Networks. N. Y.: John Wiley&Sons. Inc., 2001.
49. Sierociuk D., Dzieliński A. Fractional Kalman Filter Algorithm for the States, Parameters and Order of Fractional System Estimation // *Intern. J. Applied Mathematics and Computer Science.* 2006. V. 16. Iss. 1. P. 129–149.
50. Sierociuk D., Macias M. Triple Estimation of Fractional Variable Order, Parameters, and State Variables Based on the Unscented Fractional Order Kalman Filter // *Sensors.* 2021. V. 21. P. 8159.
<https://doi.org/10.3390/s21238159>.
51. Xue G., Xu Y., Guo J., Zhao W. The Fractional Kalman Filter-Based Asynchronous Multirate Sensor Information Fusion // *Hindawi Complexity.* Dec. 2018. V. 2018. Article ID1450353. 10 p.
<https://doi.org/10.1155/2018/1450353>.
52. Cui Ch., Zhang L., Yan G., Sun X. Track Fusion Fractional Kalman Filter // 41st Chinese Control Conference (CCC). Hefei, China, 2022. No 22507536. P. 6.

53. *Tripathi R.P., Singh A.K., Gangwar P.* Innovation-based Fractional Order Adaptive Kalman Filter // J. Electrical Engineering. 2020. V. 71. No 1. P. 60–64.
54. *Amosov O.S., Amosova S.G.* Peculiarities and Applications of Stochastic Processes with Fractal Properties // Sensors. 2021. V. 21. Iss. 17. № 5960.
<https://doi.org/10.3390/s21175960>.
55. *Amosov O.S.* Peculiarities of Stochastic Processes with Fractal Properties and Their Applications in Problems of Navigation Information Processing // 25th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS2018). Proceedings. Saint Petersburg, 2018. P. 1–5.
<https://doi.org/10.23919/ICINS.2018.8405867>.
56. *Amosov O.S., Baena S.G.* Wavelet Based Filtering of Mobile Object Fractional Trajectory Parameters // 13th IEEE Intern. Conf. on Control and Automation (ICCA). Ohrid, 2017. № 8003045. P. 118–123.
<https://doi.org/10.1109/ICCA.2017.8003045>.
57. *Амосов О.С., Баена С.Г.* Выявление и оценивание динамических процессов с фрактальной структурой применительно к задачам обработки навигационной информации // XIX конф. молодых ученых с международным участием. Навигация и управление движением. Санкт-Петербург: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 124–126.
58. *Амосов О.С., Амосова С.Г.* Оценивание состояния и параметров дробных динамических систем с использованием дробных фильтров калмановского типа // Матер. XXXIII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. 15-я мультиконф. по проблемам управления. Санкт-Петербург: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 96–99.
59. *Амосов О.С., Амосова С.Г.* Дробные фильтры калмановского типа для оценивания состояния, параметров и порядка дробной динамической системы в задачах обработки навигационной информации // Юбилейная XXX Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. Санкт-Петербург: «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2023. С. 139–142.