ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 4, с. 148–153

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 519.8, 510.71, 510.22

МЯГКИЕ МНОЖЕСТВА (ОБЗОР)

© 2024 г. В. Н. Бобылев[a], *, Е. К. Егорова[a], **, В. Ю. Леонов[a], ***
[a]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
*e-mail: vbobylev@frccsc.ru
**e-mail: eegorova@frccsc.ru
***e-mail: vleonov@frccsc.ru

Поступила в редакцию 29.02.2024 г.
После доработки 25.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматриваются так называемые мягкие множества. По сути дела, речь идет об обобщении нечетких множеств Л. Заде, которые формируют, в частности, математический аппарат искусственного интеллекта. С другой стороны, отказ от понятия инфинитезимальности зарождает основы нового математического анализа. Впоследствии появилось много статей по мягким множествам, организовывались конференции, имеются публикации о приложениях в различных областях. Приведены основные определения и термины теории мягких множеств, даны ссылки на практические приложения данной теории.

Ключевые слова: мягкие множества, операции над мягкими множествами, мягкий предел, мягкий интеграл, мягкий дифференциал, рациональный анализ.

DOI: 10.31857/S0002338824040102 **EDN:** UDWLOK

A SOFT SETS REVIEW

V. N. Bobylev[a],*, E. K. Egorova[a], **, V. Yu. Leonov[a], ***
[a]Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
*e-mail: vbobylev@frccsc.ru
**e-mail: eegorova@frccsc.ru
***e-mail: vleonov@frccsc.ru

In this review we consider the so-called soft sets. In fact, it is a generalization of L. Zadeh’s fuzzy sets, which form the mathematical apparatus of artificial intelligence. On the other hand, the rejection of the notion of infinitesimality originates the foundations of a new mathematical analysis. Subsequently, many papers on soft sets have appeared, conferences have been organized, and there are publications on applications in various fields. The paper gives the basic definitions and terms of soft sets theory, and references to its practical applications.

Keywords: Soft Set, Soft Sets Operations, Soft Limit, Soft Integral, Soft Differential, Rational Analysis.

Введение. С развитием вычислительной техники и выделением таких областей, как теория игр, теория принятия решений, теория оптимизации, появилась потребность в расширении аппарата классической теории множеств. Применение данных теорий на практике связано с использованием данных, содержащих разного рода неопределенности. Классическая теория множеств подразумевает определение для элементов универсального множества функции принадлежности, которая принимает значение из множества $\{0,1\}$ в зависимости от того, принадлежит рассматриваемый элемент множеству или нет. Расширить понятие функции принадлежности предложил Л. Заде в 1965 г. [1]. В нечетком множестве функция может принимать значение из замкнутого интервала $[0,1]$.

В дальнейшем появились несколько десятков различных обобщений и вариаций понятия нечеткого множества. Одним из таких расширений стали мягкие множества — термин, впервые введенный Д. А. Молодцовым (1948–2020) в [2]. Его подход отличается от подхода Заде, но, как показано в [2], нечеткие множества являются одним из представлений мягких множеств.

Цель статьи – ознакомление читателей с аппаратом данной теории, который находит свое применение во многих областях.

1. Основные определения. Мягкие множества были введены Д.А. Молодцовым для разрешения непределенностей в задачах теории игр. В первых публикациях в данной области [3–5] было показано, что устойчивости в играх с передачей информации можно добиться введением параметризующего множества для описания решения, которое получило название *принцип оптимальности* [3].

Определение 1 [3]. Под принципом оптимальности понимается отображение

$$R : m \to 2^C,$$

где m – модель операции, C-множество выборов оперирующей стороны, в общем случае зависящее от m. Позднее идея такого множества была обобщена и получила название *мягкое множество.*

Определение 2 [2]. Пара (S, A) называется мягким множеством над U, если S – отображение из A в множество всех подмножеств U, т.е. $S : A \to 2^U$.

Определение 3 [6]. Пару (F, A) будем называть мягким отображением (мягкой функцией) из M в U (где M – множество моделей), если F является отображением из множества $M \times A$ в множество подмножеств универсального множества U, т. е. $F : M \times A \to 2^U$.

Наиболее цитируемая работа [2], обобщающая полученные результаты, вышла в 1999 г. Она была опубликована на английском языке и положила начало широкому распространению аппарата теории мягких множеств для решения различных задач. Кроме определения мягких множеств и операций над ними в статье вводится понятие мягкой функции и рассматриваются свойства таких функций. Предлагается использование мягких функций в качестве функций выбора в задачах, связанных с неопределенностью стратегий в исследовании игр и теории операций, что должно упростить решение задачи в условиях расплывчатой и неопределенной информации. В [7] функция выбора определяется как

$$R : 2^P \times E \to 2^P,$$

где E – множество параметров ε, P – множество ситуаций, 2^P – множество всех подмножеств множества P, т. е. если $X \subseteq P$ – допустимое подмножество ситуаций, то $R(X, \varepsilon)$ множество – ε-птимальных ситуаций. При наличии неопределенных факторов мягкое множество стратегий задается следующим способом:

$$Q(C, \varepsilon) = \left\{ c \in C \middle| \pi(c) \in R(\pi(c), \varepsilon) \right\},$$

где C – множество стратегий лица принимающего решение, $\pi : C \to \mathcal{P}(P)$. Определяется понятие гладкость, являющееся аналогом непрерывности функции. (По утверждению автора, каждая мягкая функция порождает свою топологию и переход к мягкой функции делает проблему устойчивой.) Обычно под устойчивостью функции понимается малое изменение значения функции при малом изменении значения ее аргумента. Но отсутствие устойчивости характерно для многих явлений в физике, экономике и других областях. Непрерывность мягких отображений, аналогично классической непрерывности отображений, позволяет обосновывать замену задачи поиска решений по приближенной информации и применение приближенных численных методов.

Но следует отметить, что быстрое развитие аппарата теории мягких множеств повлекло за собой некоторые сложности с корректным описанием операций над мягкими множествами. Изначально операции с мягкими множествами были определены как

$$\Theta\big((S', A), (S'', B)\big) = (S, A \times B),$$

где $S(\alpha, \beta) = \Theta\big(S'(\alpha), S''(\beta)\big)$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$. При этом получается результирующее мягкое множество, параметризованное парой параметров α, β. Различные их виды вводились в [8–10]. Но некоторые утверждения, приведенные в [9], оказываются неверны [10, 11]. Поэтому в [10] вводятся новые понятия: ограниченное объединение, ограниченное пересечение и др., причем показывается, что для новых понятий законы де Моргана справедливы.

Возвращение к этой теме и определение того, какие операции над мягкими множествами являются корректными, было предпринято Молодцовым в [12].

Определение 4 [12]. Если задано мягкое множество (S, A), то задано семейство $\mathfrak{S}(S,A)=\{S(a)|a\in A\}$. Два мягких множества ($S$, A), (S', A'), определенных над универсальным множеством X называются эквивалентными тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}(S,A)=\mathfrak{S}(S',A')$. Эквивалентные мягкие множества запишем как $(S,A)\cong(S',A')$.

Сформулировано понятие корректности операций над мягкими множествами.

Определение 5 [12]. Унарная операция Ф азывается корректной, если для любой пары эквивалентных мягких множеств (S, A), (S', A'), заданных над универсальным множеством U, выполнено $\Phi(S,A)\cong\Phi(S',A')$.

Определение 6 [12]. Бинарная операция Θ называется корректной, если для любой четверки попарно эквивалентных мягких множеств $(S,A)\cong(S',A')$, $(T,B)\cong(T',B')$, заданных над универсальным множеством U, выполнено

$$\Theta((S,A),(T,B))\cong\Theta((S',A',),(T',B')).$$

2. Мягкий анализ. На основе мягких множеств разработан мягкий анализ. В [2] предпринимается попытка сформулировать аппарат анализа, основанный на теории мягких множеств: мягкие верхний и нижний пределы, мягкое приближение (аналог дифференциала), мягкие аналоги интеграла. Особый интерес представляет доказательство идентичности мягких аналогов интеграла по Риману и по Перрону.

Определение 7 [2]. Мягким верхним (ε,τ)-пределом функции f в точке x называется множество

$$\overline{\text{Softlimit}}[f,\varepsilon,\tau](x)=\{v\in\mathbb{R}|f(y)\le v+\varepsilon,\forall y\in\tau(x)\},$$

а мягким нижним (ε,τ)-пределом функции f в точке x — множество

$$\underline{\text{Softlimit}}[f,\varepsilon,\tau](x)=\{v\in\mathbb{R}|f(y)\ge v-\varepsilon,\forall y\in\tau(x)\}.$$

Множество

$$\text{Softlimit}[f,\alpha,\beta,\tau](x)=\{v\in\mathbb{R}|v-\alpha\le f(y)\le v+\beta,\forall y\in\tau(x)\}$$

называется мягким (α, β, τ)-пределом функции f в точке x.

Определение 8 [2]. Множество

$$\bar{D}[f,\alpha,\beta,\tau](x)=\{v\in\mathbb{R}|f(y)\le f(x)+(v+\alpha(x))(y-x)+\beta(x),\forall y\in\tau(x)\}$$

называется верхним (α, β, τ)-приближением функции f в точке x, а множество

$$\underline{D}[f,\alpha,\beta,\tau](x)=\{v\in\mathbb{R}|f(y)\ge f(x)+(v-\alpha(x))(y-x)-\beta(x),\forall y\in\tau(x)\}$$

— нижним (α, β, τ)-пределом функции f в точке x.

Набор верхних и нижних (α, β, τ)-приближений образует верхние и нижние мягкие приближения. Под мягким приближением D подразумевается пересечение верних и нижних мягких приближений:

$$D[f,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tau]=\bar{D}[f,\alpha,\beta,\tau](x)\cap\underline{D}[f,\gamma,\delta,\tau](x).$$

В дальнейшем разработанный аппарат анализа был применен для формулировки оптимизационных задач [13].

3. Рациональный анализ. Обобщением полученных результатов в области мягкого анализа является серия работ, посвященная началам рационального анализа. Так как при численном решении задач найденные значения являются лишь приближениями к иррациональностям, то логичным шагом стало использование мягких множеств — аппарата, предназначенного для работы с неопределенностями, — для построения анализа на базе рациональных чисел.

Так, в работе [14] вводится понятие рационального числа.

Определение 9 [14]. Мягким рациональным числом называется пара (S, A), где S — отображение $S:A\to2^{\mathbb{Q}}$.

Как отмечено еще в [2], каждое мягкое отображение описывает свою собственную топологию. Далее последовательно даются определения в терминах мягких множеств верхней и нижней граней множества рациональных чисел, минимального и максимального элементов, окрестности множества. На этой основе формулируется понятие мягкого предела рациональной функции и мягкой непрерывности.

Определение 10 [14]. Отображение $\tau : \mathbb{Q} \to 2^{\mathbb{Q}}$, для которых $Dom(\tau) = \mathbb{Q}$, называется отображением близости. Значение отображения близости интерпретируется как множество точек, τ-близких к точке *x*. Множество отображений близости обозначается $\mathbb{P} = \left\{\tau | \tau \in \left(\mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Q}}\right)\right\}$.

Определение 11 [14]. Обратное отображение $\tau^{\leftarrow} : \mathbb{Q} \to 2^{\mathbb{Q}}$ определяется как

$$\tau^{\leftarrow}(y) = \left\{x \in \mathbb{Q} | y \in \tau(x)\right\}.$$

Определение 12 [14]. Рассмотрим функцию $f \in \Phi$ с областью определения $Dom(f) \subseteq \mathbb{Q}$ и μ, τ – отображения близости. Число $y \in \mathbb{Q}$ называется мягким (τ,μ)-пределом функции *f* в точке $x \in \mathbb{Q}$, если $f \circ \tau(x) \subseteq \mu(y)$.

Определение 13 [14]. Функция f называется (τ,μ)-непрерывной в точке $x \in Dom(f)$, если справедливо включение $f \circ \tau(x) \subseteq \mu \circ f(x)$.

Определение 14 [14]. Функция f называется (τ,π)-непрерывной на множестве $X \subseteq Dom(f)$, если для любого $x \in X$ верно включение $f \circ \tau(x) \subseteq \pi[x] \circ f(x)$, где π – мягкое отображение близости $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$. Для того, чтобы отличить аргумент-параметр от аргумента-точки, в дальнейшем он будет указываться в квадратных скобках.

Дальнейшее развитие рационального анализа продолжилось в [15], где предлагаются два подхода к построению мягкой производной рациональной функции.

Первый способ основан на идее, что производная функции *f* в точке *x* должна характеризовать скорость изменения функции на множестве $\tau(x)$. Вторая идея заключается в подходе к производной как к угловому коэффициенту линейной функции, приближающей исходную функцию. Свойства полученных мягких производных и дифференциалов рассматриваются применительно к лемме Ферма о локальном экстремуме и показывается, что мягкий аналог леммы устойчив к возмущениям. Также в этой работе вводится понятие мягкого интеграла.

Определение 15 [14]. Последовательность чисел $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $n > 1$, называется τ-путем, если для любых $i = 1,\ldots,n-1$ выполнено $x_{i+1} \in \tau(x_i)$. Множество τ-путей с начальной точкой x и конечной точкой y обозначается $Path\,(x,y,\tau)$.

Определение 16 [15]. Множество

$$\mathcal{I}_x^y[\varphi,\tau,\mu] = \bigcap_{z \in Path(x,y,\tau)} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i)\mu^{\leftarrow}[z_i](\varphi(z_i))$$

называется (τ,μ)-интегралом функции φ от x до y.

Для (μ,τ)-интеграла сформулированы достаточные условия существования и рассматриваются аналоги некоторых свойств, в частности свойства дифференцируемости.

Последней работой по данной тематике стала [16], в которой определен градиент функции в многомерном случае. При помощи мягкого градиента формулируются условия для приближенного локального экстремума. При использовании мягкого градиента предлагается построить различные аналоги производной классического анализа, например производной по направлению. При этом показано, что задача численного нахождения мягкого градиента сводится к решению конечной системы линейных неравенств.

4. Мягкие дифференциальные уравнения. Еще одним приложением стала формулировка мягких аналогов определенных дифференциальных уравнений первого порядка [17], разрешенных относительно производной. Для одного из типов уравнений приводится соответствующее мягкое интегральное уравнение. Находится решение мягкой задачи Коши для вещественной и интервальной функций.

Определение 17 [17]. Множество

$$\mathcal{D}[y,x;h,\varepsilon] = \left\{v \in E | y(x) + v\Delta x - \varepsilon \le y(x+\Delta x) \le y(x) + v\Delta x + \varepsilon, \forall \Delta x \in (0,h(x))\right\}$$

называется (h,ε)-приближенным дифференциалом функции y в точке x. Здесь h, ε – вещественные функции, которые играют роль параметров, описывающих приближенное понятие. Функция h определяет близкие к x справа точки, а функция ε – точность аппроксимации. При фиксированных значениях y и x приближенный дифференциал можно рассматривать как мягкое множество над вещественной прямой.

По аналогии с обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной, строятся два типа мягких дифференциальных уравнений.

Определение 18 [17]. Мягкое дифференциальное уравнение типа A имеет вид

$$f(x,y) \subseteq \mathcal{D}[y,x;h,\varepsilon].$$

Здесь f – функция двух вещественных аргументов, значениями которой являются подмножества вещественной оси, в частности вещественные числа.

Определение 19 [17]. Мягкое дифференциальное уравнение типа B записывается как

$$f(x,y) \supseteq \mathcal{D}[y,x;h,\varepsilon].$$

Здесь f – функция двух вещественных аргументов, значениями которой являются подмножества вещественной оси.

Для задачи исследуется вопрос существования мягких решений, изучается зависимость решения от начальных условий. При рассмотрении мягкой задачи Коши определяется и соответствующее интегральное уравнение. Показано, что достаточные условия существования решения мягкой задачи Коши также являются достаточными условиями существования мягкого интегрального уравнения.

5. Обобщения и применение мягких множеств. Подробное обсуждение моделей поведения человека и формулировки математических постановок задач с использованием принципа оптимальности приведено в [7]. Рассматриваются задачи на максимум в случае независимых и связанных ограничений, на поиск равновесия, задачи оптимизации в игровой обстановке, иерархические игры. Автор отмечает, что сведение сложных задач вариационного типа к экстремальным задачам на исходных множествах удалось при единственном предположении об ограниченности целевых функций, не потребовалось ни непрерывности, ни компактности, ни дополнительных условий регулярности. Отдельно постановка задачи на максимин приводится в [6]. В работе рассматриваются способы ослабления условий устойчивости таких задач. Примечательно, что устойчивость мягкого отображения не требует ограничения на непрерывность или полунепрерывность функций модели.

Предложения по применению аппарата теории мягких множеств в задачах теории принятия решений [18] и дальнейшее рассмотрение мягких множеств в области алгебры [19–22] позволили развить методы многокритериального принятия решений, которые используются в медицинских целях для постановки диагнозов.

В [23] предложена концепция нейросети на основе мягких множеств, а также мягких нечетких множеств.

Заключение. Несмотря на то, что теория мягких множеств создавалась как инструмент для решения задач теории игр и в основном применяется при решении оптимизационных задач, ее потенциал намного шире. Это, в частности, показывает разработанный на базе мягких множеств аппарат рационального анализа. Главной тенденцией в области оптимизации выступает дальнейшая модификация мягких множеств и появление гибридных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets // Inf. Control. 1965. V. 8. № 3. P. 338–353. ISSN 0019-9958. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
2. *Molodtsov D.A.* Soft Set Theory – First Results // Computers & Mathematics with Applications. 1999. V. 37. № 4/5. P. 19–31. ISSN 0898-1221, 1873-7668. https://doi.org/10.1016/s0898-1221(99)00056-5.
3. *Молодцов Д.А.* Устойчивость и регуляризация принципов оптимальности // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20. № 5. С. 25–38. ISSN 0041-5553. https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90086-5.
4. *Молодцов Д.А.* Аппроксимация принципов оптимальности в задаче нахождения кратного максмина // Докл. АН СССР. 1985. Т. 32. С. 426–428. ISSN 0197-6788.
5. *Молодцов Д.А.* Структура регуляризующих принципов оптимальности // Докл. АН СССР. 1985. Т. 32. С. 82—85. ISSN 0197-6788.
6. *Молодцов Д.А., Ковков Д.В.* Устойчивость и аппроксимация максиминных задач // АиТ. 2014. Т. 75. № 3. С. 447–457. ISSN 0005-1179, 1608-3032. https://doi.org/ 10.1134/S0005117914030035.
7. *Молодцов Д.А.* Принципы оптимальности как математическая модель поведения человека // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 5. С. 29–48. ISSN 0234-0879.
8. *Ma Z.M., Yang W., Hu B.Q.* Soft Set Theory Based on Its Extension // Fuzzy Information and Engineering. 2010. V. 2. № 4. P. 423–432. ISSN 1616-8658. https://doi.org/10.1007/s12543-010-0060-7.

9. *Maji P.K., Biswas R., Roy A.R.* Soft Set Theory // Computers & Mathematics with Applications. 2003. V. 45. № 4. P. 555–562.
ISSN 0898-1221. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00016-6.
10. *Ali M.I., Feng F., Liu X., Min W.K., Shabir M.* On Some New Operations in Soft Set Theory // Computers & Mathematics with Applications. 2009. V. 57. № 9. P. 1547–1553.
ISSN 0898-1221, 1873-7668. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.11.009.
11. *Yang C.F.* A Note on "Soft Set Theory" [Comput. Math. Appl. 45 (4–5) (2003) 555–562] // Computers & Mathematics with Applications. 2008. V. 56. № 7. P. 1899–1900.
ISSN 0898-1221. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.03.019.
12. *Молодцов Д.А.* Структура мягких множеств // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2017. Т. 12. № 1. С. 5–18. ISSN 1819-4362.
13. *Kovkov D.V., Kolbanov V.M., Molodtsov D.A.* Soft Sets Theory-based Optimization // J. Computer and Systems Sciences International. 2007. V. 46. № 6. P. 872–880.
ISSN 1064-2307, 1555-6530. https://doi.org/10.1134/S1064230707060032.
14. *Молодцов Д.А.* Начала рационального анализа – непрерывность функций // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2019. Т. 2. С. 126–141.
ISSN 18194362. https://doi.org/10.26456/fssc57.
15. *Молодцов Д.А.* Начала рационального анализа – производные и интегралы // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2020. Т. 15. № 1. С. 5–25.
ISSN 1819-4362. https://doi.org/10.26456/fssc70.
16. *Acharjee S., Molodtsov D.A.* Soft Rational Line Integral // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2021. V. 31. № 4. P. 578–596.
ISSN 2076-5959, 1994-9197. https://doi.org/10.35634/vm210404.
17. *Молодцов Д.А.* Мягкое дифференциальное уравнение // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1116–1128. ISSN 0965-5425.
18. *Maji P.K., Roy A.R., Biswas R.* An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem // Computers & Mathematics with Applications. 2002. V. 44. № 8. P. 1077–1083.
ISSN 0898-1221. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00216-X.
19. *Aktas H., Cagman N.* Soft Sets and Soft Groups // Information Sciences. 2007. V. 177. № 13. P. 2726–2735.
ISSN 0020-0255, 1872-6291. https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.12.008.
20. *Park C.H., Jun Y.B., Ozturk M.A.* Soft WS-algebras // Communications of the Korean Mathematical Society. 2008. V. 23. № 3. P. 313–324.
ISSN 1225-1763. https://doi.org/10.4134/CKMS.2008.23.3.313 ; Publisher: Korean Mathematical Society.
21. *Jun Y.B., Park C.H.* Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-algebras // Information Sciences. 2008. V. 178. № 11. P. 2466– 2475.
ISSN 0020-0255. https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.01.017.
22. *Ma X., Zhan J., Xu Y.* Lattice Implication Algebras Based on Soft Set Theory // Computational Intelligence. World Scientific, 2010. P. 535–540.
ISBN 978-981-4324-69-4. https://doi.org/10.1142/9789814324700 0080.
23. *Liu Z., Alcantud J.C.R., Qin K., Xiong L.* The Soft Sets and Fuzzy Sets-Based Neural Networks and Application // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 41615–41625.
https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2976731.