

УДК 519.85

МЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УЗЛОВЫХ МУЛЬТИПОТОКОВ В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЕ

© 2024 г. Ю. Е. Малашенко¹, И.А. Назарова¹, *

¹Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.03.2024 г.

После доработки 21.03.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

В рамках вычислительных экспериментов анализируются монопольные и предельные режимы управления многопользовательской сетью при передаче потоков по кратчайшим маршрутам. Предложены метод аппроксимации множества допустимых межузловых потоков и процедура получения многопараметрических оценок показателей функционирования системы. В предельном режиме полностью загружаются все ребра сети и достигается максимально возможный суммарный межузловой поток. В монопольном режиме распределение потоков из каждого узла осуществляется без учета остальных корреспондентов. Найденные значения позволяют определить допустимые нагрузки и удельные затраты при передаче потока. На основе рассчитанных исходящих узловых мультипотоков строится аппроксимация множества допустимых межузловых потоков. Приводятся различные способы графического представления результатов экспериментов и отображения метрических оценок. Исследуются сети с различными структурными особенностями и одинаковой суммарной пропускной способностью.

Ключевые слова: многопродуктовая потоковая модель, распределение мультипотока при перегрузке, допустимые межузловые потоки

DOI: 10.31857/S0002338824030145 EDN: UPKZWY

METRIC ESTIMATES OF NODAL MULTIFLOWS IN A MULTIUSER NETWORK SYSTEM

Yu. E. Malashenko, I. A. Nazarova *

Federal Research Center "Computer Science and Control",

Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Within the framework of computational experiments, burst and limiting modes of multiuser network control are analysed when flows are transmitted along the shortest routes. A method of approximating the set of admissible inter-node flows and a procedure for obtaining multi-parametric estimates of the system performance are proposed. In the limiting mode, all edges of the network are fully loaded and the maximum possible total inter-node flow is achieved. In the burst mode, the distribution of flows from each node is carried out without taking into account the other correspondents. The found values allow us to determine the allowable loads and specific costs of flow transmission. On the basis of the calculated outgoing node multiflows, an approximation of the set of allowable inter-node flows is constructed. Different ways of graphical representation of experimental results and display of metric estimates are given. Networks with different structural features and the same total capacity are investigated.

Keywords: multiproduct flow model, multiflow distribution under congestion, feasible inter-node flows

Введение. В рамках вычислительных экспериментов продолжено изучение различных режимов управления сетевой телекоммуникационной системой [1–3]. В данной работе основное внимание уделено получению метрических оценок множества допустимых межузловых потоков. Для расчета представительных показателей функционирования многопользовательской сети используются векторы исходящих узловых мультипотоков [3].

В процессе анализа множества допустимых потоков рассматриваются монопольные и предельные режимы управления сетью. В монопольном режиме формируются допустимые векторы исходящих узловых мультипотоков, передаваемых из заданной вершины без учета остальных корреспондентов сети. Сделан упор на анализе величин исходящих узловых потоков, когда нагрузка на систему выше нормативных ограничений.

В предельном режиме для каждого узла-источника оцениваются требуемые затраты ресурсов при передаче всех исходящих из него межузловых потоков. При этом пропускная способность ребер трактуется как ресурс, который распределяется между потоками разных видов при передаче в сети. Для каждого узла-источника при передаче всех исходящих из него межузловых потоков определяются необходимые затраты ресурсов. На финальных итерациях достигается полная загрузка сети и максимальный суммарный межузловой поток. По построению полученные оценки ограничивают исходящие узловые мультипотoki при одновременной передаче в сети потоков из других узлов, если условия совместной передачи на остальные виды потоков не нарушаются.

Предложенные методы моделирования для каждого вектора исходящего узлового мультипотока дают возможность вычислить максимальное суммарное значение допустимых межузловых потоков, оценить удельные затраты ресурсов при передаче потока, а также сформировать структурный внутренний каркас и построить аппроксимацию множества допустимых межузловых потоков. Анализ результатов позволяет найти различия в распределении ресурсов при использовании указанных режимов управления и оценить передаваемые потоки в ситуациях, когда внешняя нагрузка превышает нормативные ограничения.

С помощью диаграмм, построенных на основании метрических оценок, выявлены особенности множества допустимых потоков. В частности, предложено аналитическое представление части множества допустимых потоков. Графическое представление результатов экспериментов можно также рассматривать как описание функциональных возможностей сети при предельных внешних нагрузках.

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и двоянные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет смежные вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} . Для каждой вершины v_n формируется список $K(n)$ номеров инцидентных ей ребер: $K(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{k_1, k_2, \dots, k_{a(n)}\}$, где $a(n)$ — число инцидентных ребер для v_n .

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, непересекающихся и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Для каждой вершины $v_n \in V$, определяется подмножество $P(v_n)$ всех пар-корреспондентов, для которых вершина v_n служит узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m \mid s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

а для каждого $P(v_n)$ — список номеров $M(n)$ пар p_m , входящих в подмножество $P(v_n)$:

$$M(n) = \{m_1(n), m_2(n), \dots, m_{N-1}(n)\}.$$

Обозначим через z_m величину *межузлового* потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ — поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0$, $m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает

узел v_n ; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n)$, $T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n , и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , — *входящей* для v_n , и ее номер $k+E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей*, и номер $k+E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида, проходящему от источника s_m к приемнику t_m пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k — суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_E)$ — положительные числа $d_k > 0$. Вектор $\mathbf{d}$ определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}.$$

2. Равные межузловые потоки. Для анализа множества $\mathbf{Z}(\mathbf{d})$, получения метрических оценок [4] и построения аппроксимирующих представительных показателей [5] функционирования используются межузловые потоки. При проведении вычислительных экспериментов предполагается, что поток одного вида передается одновременно по всем маршрутам, содержащим минимальное число ребер (далее — MER-маршруты, от англ. minimum edge route). Для оценки величины “расщепленного” потока для каждой пары узлов $p_m = (s_m, t_m)$ в сети $G(1)$ формируется набор $H_m(1)$ путей, которые далее рассматриваются как MER-маршруты передачи m -го вида потока:

$$H_m(1) = \{h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1)\},$$

где $h_m^j(1)$ — список номеров дуг в j -м пути в сети $G(1)$ между узлами s_m и t_m ; $\mu_m(1)$ — число ребер в MER-маршруте $h_m^j(1)$, а $J_m(1)$ — число MER-маршрутов для m -й пары.

Для каждой пары $p_m \in P$ по всем MER-маршрутам из $H_m(1)$ передается единичный межузловой поток z_m и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определяются дуговые потоки для пары p_m :

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (2.1)$$

Межузловой поток по MER-маршрутам (далее — MER-поток) $z_m^0(1)$ между узлами s_m и t_m вычисляется по формулам (1.1) и (2.1). Рассчитываются нормирующий коэффициент

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0 x_{mk}^0(1), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}.$$

При передаче всех потоков x_{mk}^0 по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице для всех $p_m \in P$.

Распределение совместно допустимых межузловых потоков последовательно определяется на основе MER-маршрутов и дуговых потоков x_{mk}^0 .

Задача 1. Найти $\tilde{\alpha} = \max_{\alpha} \alpha$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \leq d_k(1), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи 1 для всех $p_m \in P$ вычисляется вектор $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$, все компоненты которого равны $\tilde{\alpha}$, т.е.

$$\tilde{z}_m = \tilde{\alpha}, \quad m = \overline{1, M}, \quad \tilde{x}_{mk} = \tilde{\alpha} x_{mk}^0, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}.$$

При проведении эксперимента векторы $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$ формируются на основе найденных распределений совместно допустимых межузловых потоков $\tilde{z}_m$, $p_m \in P$, передаваемых одновременно. Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для полученного допустимого межузлового потока $\tilde{z}_m$ и соответствующих значений дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$, $k = \overline{1, 2E}$, величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{k=1}^{2E} \tilde{x}_{mk}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую *нагрузку* (далее — RI-нагрузку, от англ. resulting internodal load) на ребра сети при передаче межузлового потока $\tilde{z}_m$ из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина $\tilde{y}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$. В рамках модели отношение RI-нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные затраты ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках $\tilde{x}_{mi}$.

Вектор $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$ определяет опорную точку на осевой линии равных межузловых потоков (далее ALEF-прямая от англ. axial line equal flow). Вектор $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$ является направляющим для гиперплоскости:

$$\sum_{m=1}^M z_m = \tilde{\zeta}(\tilde{\alpha}), \quad (2.2)$$

где

$$\tilde{\zeta}(\tilde{\alpha}) = \sum_{m=1}^M \tilde{z}_m = \tilde{\alpha}M.$$

Норма вектора $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ может трактоваться как «расстояние» от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью (2.2):

$$\|\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})\| = \tilde{\gamma} = [\sum_{m=1}^M \tilde{z}_m^2]^{1/2} = [\tilde{\alpha}^2 M]^{1/2} = \tilde{\alpha}\sqrt{M}.$$

3. Узловые мультипотoki. В рамках формализма модели для каждой вершины $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, формируется VMF-вектор (от англ. vertex multi flow) исходящего мультипотoka $\tilde{\mathbf{z}}(n)$ с компонентами:

$$z_m(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \notin M(n), \\ z_m, & \text{если } m \in M(n), \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{d}). \end{cases}$$

Таким образом, ненулевыми компонентами $\tilde{\mathbf{z}}(n)$ становятся межузловые потоки $z_m > 0, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$, для всех пар $p_m \in P(v_n)$ с узлами-источниками s_m , расположенными в вершине v_n .

Для каждого VMF-вектора вычисляются равные значения исходящих мультипотокa, последние могут передаваться одновременно в сети $G(1)$ без учета остальных корреспондентов. Указанный способ называется далее *монопольным* режимом передачи VMF-потoka из узла v_n .

З а д а ч а 2. Для заданной вершины v_n найти $\beta^*(n) = \max_{\beta} \beta$

$$\text{при условиях: } \beta \sum_{m \in M(n)} [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \leq d_k(1), \beta \geq 0, k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи 2 последовательно для всех $n, n = \overline{1, N}, p_m \in P, m \in M(n)$, рассчитываются VMF-векторы $\tilde{\mathbf{z}}^*(n)$, все компоненты которых равны $\beta^*(n)$, т. е.

$$z_m^*(n) = \beta^*(n), m \in M(n), z_m^*(n) = 0, m \notin M(n), n = \overline{1, N}.$$

Для каждого ребра $r_k, k = \overline{1, E}$, подсчитывается величина

$$\Delta_k^*(n) = \beta^*(n) \sum_{m \in M(n)} [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0], k = \overline{1, E}, n = \overline{1, N}$$

и формируется вектор ресурсов $\vec{\Delta}^*(n) = \{\Delta_1^*(n), \Delta_2^*(n), \dots, \Delta_E^*(n)\}$. Вектор $\vec{\Delta}^*(n)$ показывает, какие затраты пропускной способности требуются при передаче исходящих межузловых потоков из вершины v_n в монопольном режиме, без учета всех остальных корреспондентов. Для каждого VMF-вектора подсчитывается суммарное значение допустимых межузловых потоков и затраты ресурсов:

$$\zeta^*(n) = \sum_{m \in M(n)} z_m^*(n) = \beta^*(n)(N-1), \delta^*(n) = \sum_{k=1}^E \Delta_k^*(n),$$

а также нормы соответствующих векторов:

$$\|\vec{\mathbf{z}}^*(n)\| = \beta^*(n)(N-1)^{1/2}, \|\vec{\Delta}^*(n)\| = [\sum_{k=1}^E (\Delta_k^*(n))^2]^{1/2}, n = \overline{1, N}.$$

Векторы мультипотокa $\tilde{\mathbf{z}}^*(n)$ взаимно ортогональны. Назовем набор векторов $(\tilde{\mathbf{z}}^*(1), \tilde{\mathbf{z}}^*(2), \dots, \tilde{\mathbf{z}}^*(N))$ структурным внутренним каркасом и обозначим его через $SiF(\mathbf{z}^*(\cdot))$ (от англ. structural internal frame), т. е.

$$SiF(\mathbf{z}^*(\cdot)) = (\vec{\mathbf{z}}^*(1), \vec{\mathbf{z}}^*(2), \dots, \vec{\mathbf{z}}^*(N)).$$

Некоторый вектор

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{n=1}^N \xi_n \vec{\mathbf{z}}^*(n), \sum_{n=1}^N \xi_n = 1, \xi_n \geq 0,$$

представленный в виде выпуклой комбинации векторов $SiF(\mathbf{z}^*(\cdot))$, является допустимым и принадлежит $\mathcal{Z}(\mathbf{d})$.

В рамках вычислительного эксперимента кроме *монопольных* исследовались *предельные* режимы передачи, при которых достигалась максимальная сумма межузловых потоков и использовались все пропускные способности сети. Для оценки VMF-векторов при полной загрузке всех ребер сети формируются векторы $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$, их компоненты определяются по следующему правилу: для каждого узла v_n и всех пар $p_m \in P(v_n)$, с источником и стоком — не смежными узлами (кратчайший маршрут соединения для них состоит из двух и более ребер), поток $z_m^{**}(n)$ приравнивается нулю. Для всех пар $p_a \in P(v_n)$, с кратчайшим маршрутом соединения — единственным ребром r_k , поток $z_a^{**}(n)$ полагается равным $d_k(1)/2$, где $d_k(1)$ — пропускная способность ребра r_k в сети $G(1)$:

$$z_a^{**}(n) = \begin{cases} \frac{d_k(1)}{2}, & \text{если } \mu_a(1) = 1, h_a^1(1) = \{k\}, p_a \in P(v_n); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычисляется норма векторов

$$\|\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)\| = \left[\sum_{k \in K(n)} \left(\frac{d_k(1)}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \|\vec{\Delta}^{**}(n)\|, n = \overline{1, N},$$

где $\vec{\Delta}^{**}(n)$ — вектор ресурсов, необходимых при передаче мультипотока $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$.

При одновременной передаче всех VMF-потоков $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$ из всех узлов v_n , $n = \overline{1, N}$, достигается полная загрузка всех ребер сети $G(1)$, и максимальное суммарное значение допустимых межузловых потоков равно

$$\zeta^{**}(0) = \sum_{n=1}^N \sum_{m \in M(n)} z_m^{**}(n) = \sum_{k=1}^E d_k(1) = D(0).$$

Норма результирующего вектора межузловых потоков $\vec{\mathbf{z}}^{**}(0)$ равна

$$\rho(0) = \|\vec{\mathbf{z}}^{**}(0)\| = \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k \in K(n)} \left(\frac{d_k(1)}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{k=1}^E d_k(1)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.1)$$

Координаты точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью

$$\sum_{m=1}^M z_m = D(0) \quad (3.2)$$

задаются вектором $\vec{\mathbf{z}}(\lambda^{**}(0))$, все компоненты которого равны

$$\tilde{z}_m(\lambda^{**}(0)) = \lambda_m^{**}(0), \text{ где } \lambda_m^{**}(0) = \frac{D(0)}{M}, m = \overline{1, M}.$$

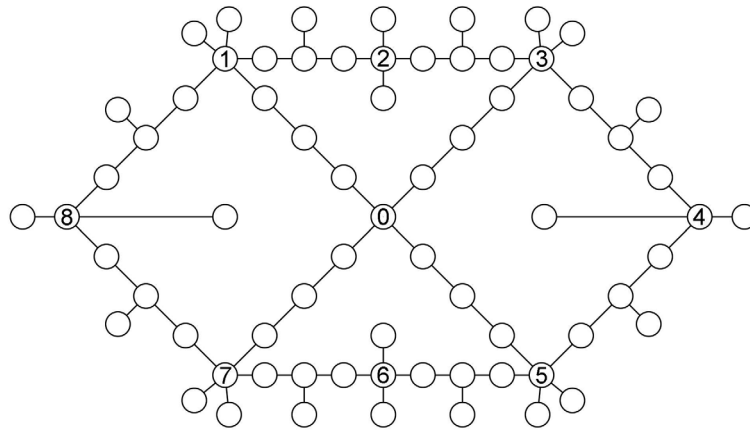


Рис. 1. Базовая сеть.

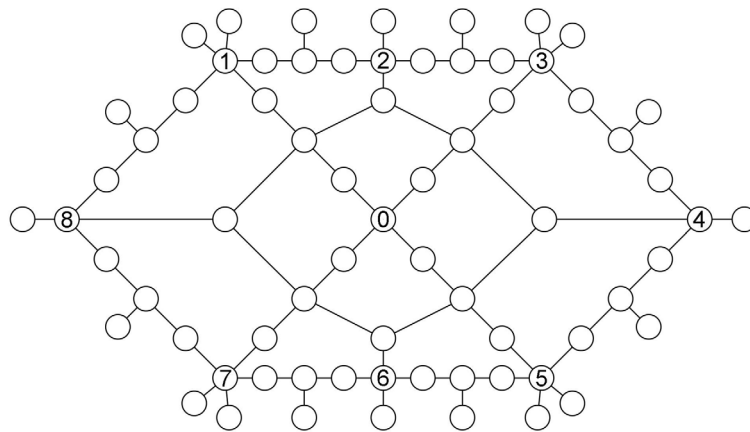


Рис. 2. Кольцевая сеть.

Норма вектора $\bar{z}(\lambda^{**}(0))$ рассматривается как расстояние от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью (3.2):

$$\|\bar{z}(\lambda^{**}(0))\| = \left[\sum_{m=1}^M (\lambda_m^{**}(0))^2 \right]^{1/2} = \frac{D(0)}{\sqrt{M}}.$$

4. Анализ результатов вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2. В каждой сети имеется 69 узлов. В ходе эксперимента проводилась нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(1) = D(0) = 68\,256.$$

На диаграммах рис. 3, 4 для VMF-векторов $\bar{z}(n)$ в базовой и кольцевой сетях по горизонтальной оси откладываются суммарные значения мультипотока $\zeta(n)$, а по вертикальной $\delta(n)$ — соответствующие значения требуемой суммарной пропускной способности при передаче в монопольном режиме. На рис. 3 группа точек, для которых $\zeta(n) \leq 1000$, относится к висячим вершинам и суммарный исходящий поток ограничен величиной пропускной способности инцидентного ребра. Для большой группы узлов суммарный исходящий межузловой поток находится в диапазоне $1300 \leq \zeta(n) \leq 1500$, поскольку в монопольном режиме используется уравнивательная стратегия для всех исходящих потоков. В кольцевой сети “средняя” длина

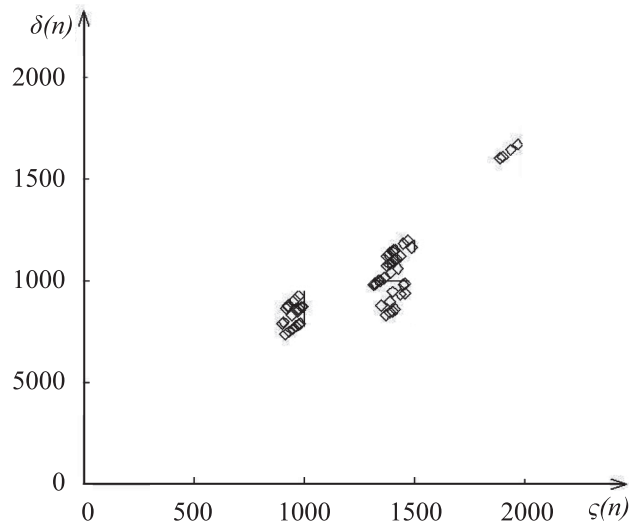


Рис. 3. Узловые мультипотoki и ресурсы в базовой сети.

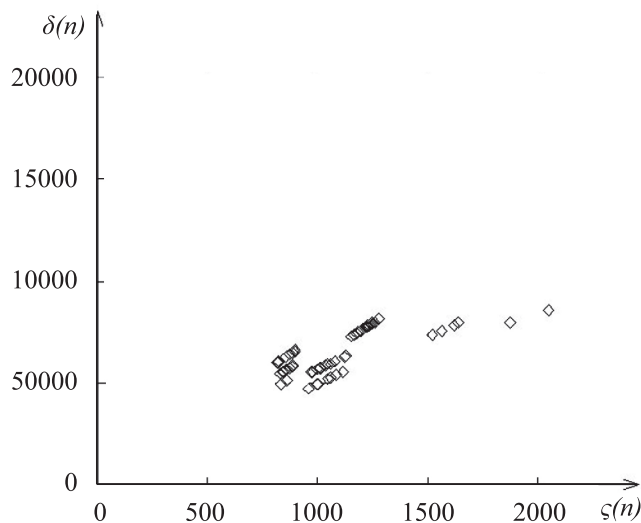


Рис. 4. Узловые мультипотoki и ресурсы в кольцевой сети.

кратчайшего пути меньше, чем в базовой. В результате, как следует из рис. 4, затраты ресурсов — пропускной способности — значительно меньше практически для всех VMF-потокoв и $\delta(n) \leq 10\,000$.

На рис. 5, 6 представлены диаграммы распределения удельных затрат $w(n) = \delta(n)/\zeta(n)$ передачи единичного потока из узла $v(n)$. Значения $w(n)$ откладываются по вертикальной оси, а относительные номера узлов $v(n) = n/N$, $n = 1, N$, указываются по горизонтальной оси. Удельные затраты в кольцевой сети меньше, чем в базовой, поскольку добавление ребер приводит к уменьшению длины кратчайших путей для большого числа пар-корреспондентов. Для висячих узлов, соединенных единственным ребром с сетью, удельные затраты выше, чем для вершин, расположенных в центре. Крайняя точка справа на рис. 5 со значением $5 \leq w^*(n) < 6$, $v(n) = 1$, соответствует центральному узлу в базовой сети.

Круговые диаграммы на рис. 7, 8 строятся на основании векторов потоков $\vec{z}^*(n)$, $n = \overline{1, N}$, сформированных после решения задачи 2. Для каждого вектора $\vec{z}^*(n)$, $n = \overline{1, N}$, вычисляется сумма потоков $\zeta^*(n)$ и значение $\lambda^*(n)$:

$$\zeta^*(n) = \sum_{m=1}^M z_m^*(n), \quad \lambda^*(n) = \frac{\zeta^*(n)}{M}.$$

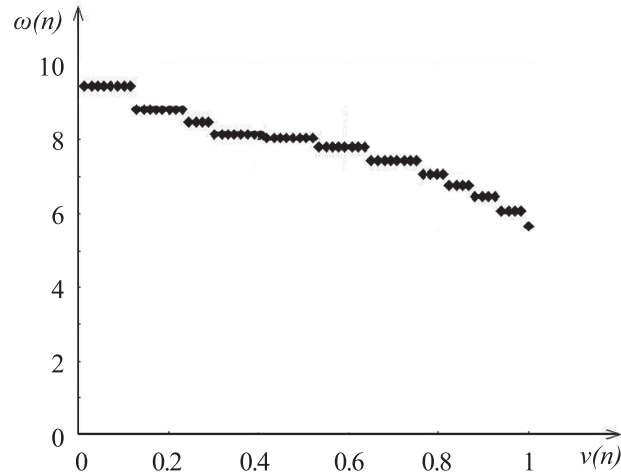


Рис. 5. Удельные затраты в базовой сети.

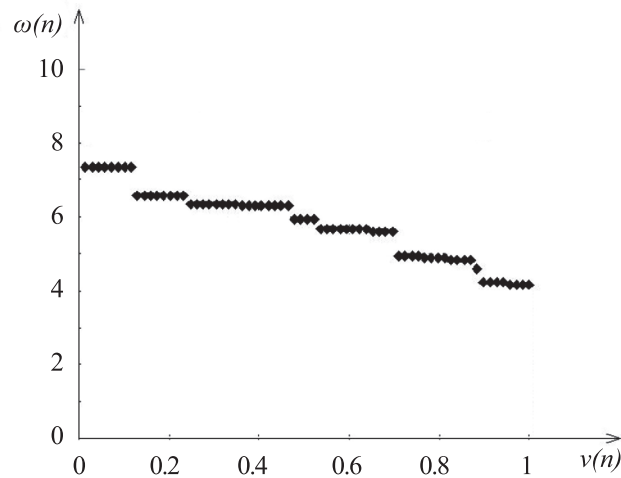


Рис. 6. Удельные затраты в кольцевой сети.

Формируется вектор $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$, каждая из компонент которого

$$\lambda_m^*(n) = \lambda^*(n), \quad m = \overline{1, M}.$$

Для указанного вектора $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ рассчитываются: норма

$$\gamma^*(n) = \left[\sum_{m=1}^M \lambda^*(n)^2 \right]^{1/2} = \lambda^*(n) \sqrt{M} = \frac{\zeta^*(n)}{\sqrt{M}}$$

и норма вектора разности векторов $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ и $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$:

$$\text{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n)) = \left[\sum_{m=1}^M (\lambda^*(n) - z_m^*(n))^2 \right]^{1/2}.$$

По построению диаграмм на рис. 7, 8 значение $\text{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n))$ (отклонения) равно расстоянию между точками, заданными векторами $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ и $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$, в плоскости:

$$\sum_{m=1}^M z_m = \zeta^*(n).$$

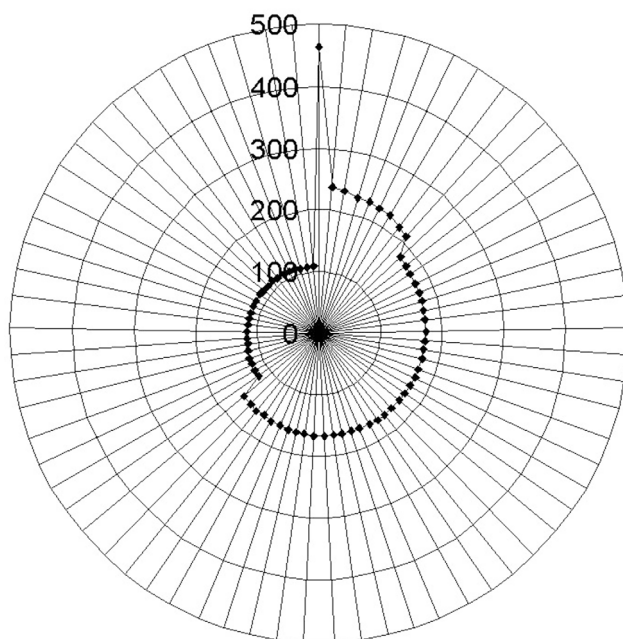


Рис. 7. Базовая сеть. Отклонения в монопольном режиме.

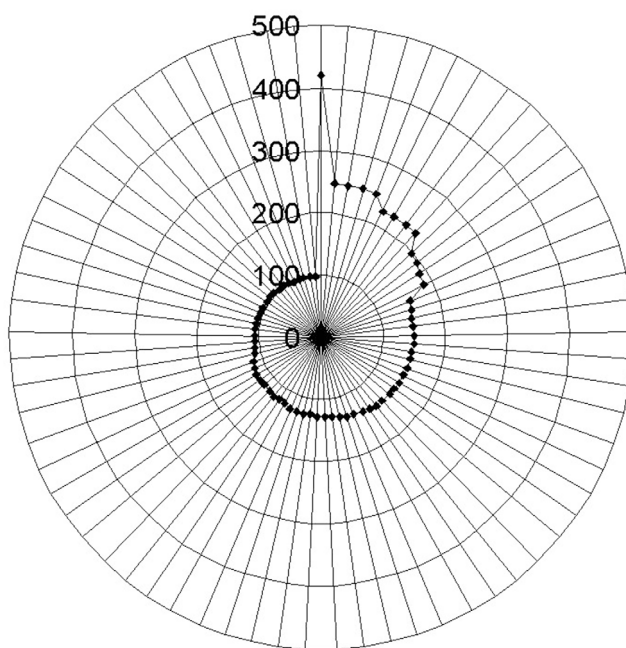


Рис. 8. Кольцевая сеть. Отклонения в монопольном режиме.

На диаграммах рис. 7, 8 концентрические окружности задают сетку значений отклонений. Длина отрезков от центра до точек-ромбов отвечает $\text{dev}(\vec{z}^*(n))$, $n = 1, N$. Точки расположены по ходу часовой стрелки по невозрастанию $\text{dev}(\vec{z}^*(n))$, $n = 1, N$. Значения $\text{dev}(\vec{z}^*(n))$ пропорциональны величине $\zeta^*(n)$ — суммарному исходящему мультипотoku из узла v_n . Векторы мультипотокa $\vec{z}^*(n)$ образуют SiF-каркас, а соответствующие им точки расположены внутри границ множества $Z(d)$. Точки-ромбы на диаграммах 7, 8 обозначают опорные векторы внешней оболочки SiF-каркаса.

На рис. 9, 10 приведены диаграммы для VMF-векторов $\vec{z}^{**}(n)$ при предельной загрузке сети. Сравнение диаграмм с рис. 9, 10 и 7, 8 свидетельствует, что суммарные значения потоков $\zeta^{**}(n)$ и отклонение $\text{dev}(\vec{z}^{**}(n))$ значительно больше при предельной загрузке. Несколько групп

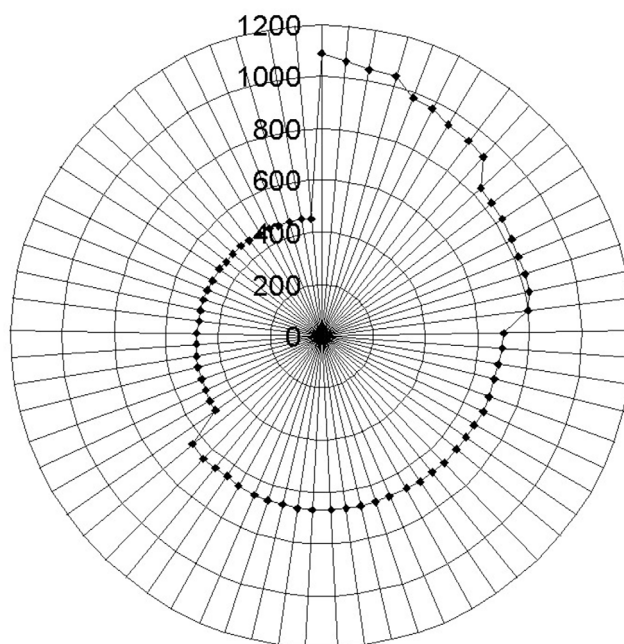


Рис. 9. Базовая сеть. Отклонения при предельной нагрузке.

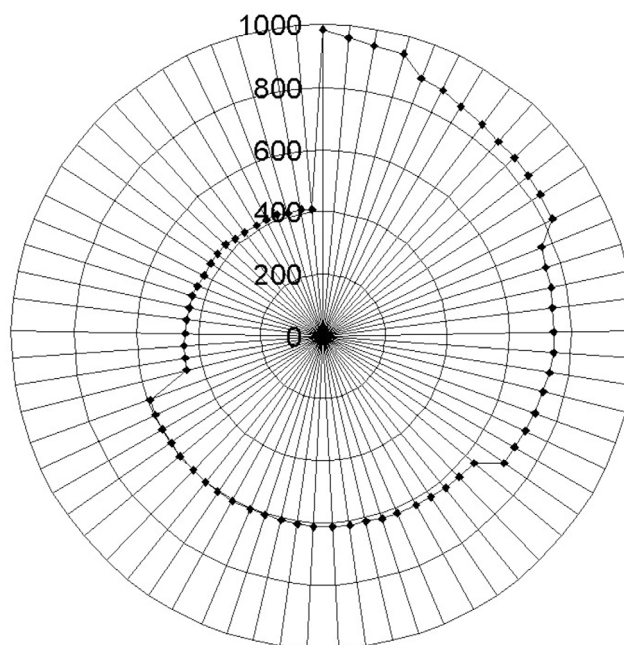


Рис. 10. Кольцевая сеть. Отклонения при предельной нагрузке.

точек-ромбов с почти равными значениями $\zeta^{**}(n)$ отвечают вершинам сети с одинаковым числом инцидентных ребер и близкими значениями исходящих потоков.

Диаграммы на рис. 11, 12 построены на основании метрических оценок и позволяют проанализировать особенности множества допустимых потоков $Z(\mathbf{d})$. По вертикальной оси указывается расстояние от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью межузловых потоков:

$$\sum_{m=1}^M z_m = \tilde{\zeta}(\cdot)$$

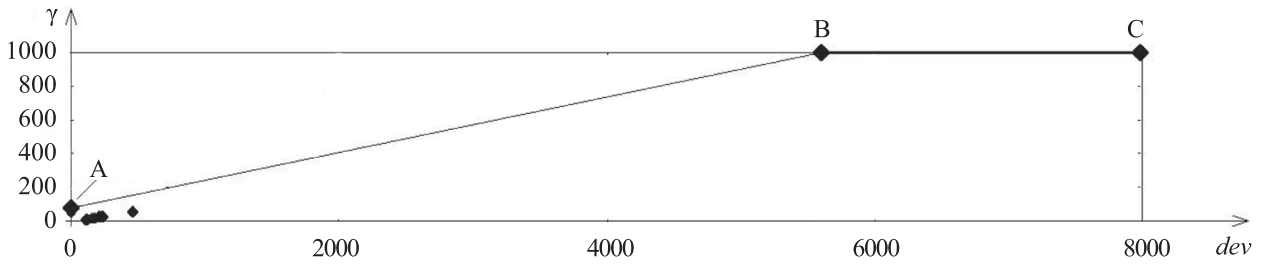


Рис. 11. Базовая сеть. Множество допустимых потоков.

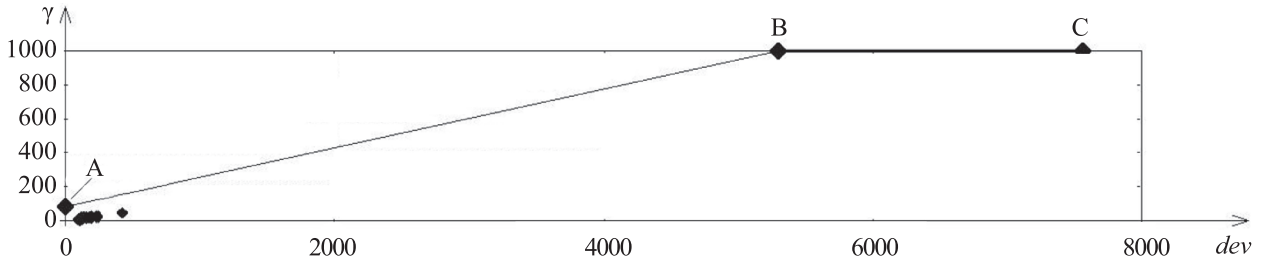


Рис. 12. Кольцевая сеть. Множество допустимых потоков.

при различных заданных значениях $\tilde{\zeta}(\cdot)$. Формально можно рассматривать вертикальную ось как ALEF-прямую, точка-ромб на вертикальной оси соответствует норме вектора межузловых потоков $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ с равными компонентами $\tilde{\alpha}$ — решениями задачи 1. Буква А на диаграммах используется для обозначения точек-ромбов, для которых

$$\tilde{\gamma} = \|\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})\|.$$

Для базовой сети $\tilde{\gamma}=75$, для кольцевой — $\tilde{\gamma}=84$.

По горизонтальной оси откладываются значения $\text{dev}(\tilde{\mathbf{z}}^*(\cdot))$. Для наглядности и оценки масштаба группа точек-ромбов вблизи начала координат вдоль горизонтальной оси отвечает VMF-потокам, точнее $\tilde{\mathbf{z}}^*(n)$ — векторам, изображенным на диаграммах 7, 8. Буквой В обозначена точка-ромб, определяющая вектор межузловых потоков $\tilde{\mathbf{z}}^{**}(n) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$. Выпуклая комбинация

$$\tilde{\mathbf{z}}(\xi) = \xi \tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha}) + (1 - \xi) \tilde{\mathbf{z}}^{**}(0), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

позволяет описать векторы, лежащие на наклонной линии, которая соединяет точки-ромбы А и В диаграмм на рис. 11, 12. Расстояние от начала координат до точки В численно равно $\rho(0)$ — значению нормы вектора (3.1).

Отрезок горизонтальной прямой (жирная линия) между двумя точками-ромбами В и С является отображением подмножества векторов допустимых межузловых потоков $\tilde{\mathbf{z}}(\cdot) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$, таких, что

$$\sum_{m=1}^M z_m(\cdot) = D(0).$$

Точка С соответствует некоторому допустимому вектору $\tilde{\mathbf{z}}^+(0) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$ со следующими компонентами:

$$z_m^+(0) = \begin{cases} d_k(1), & \text{если } \mu_m(1) = 1, h_m^1(1) = \{k\}, k \leq E; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $d_k(1)$ — пропускная способность ребра r_k в сети $G(1)$, $m = \overline{1, M}$. Норма вектора $\tilde{\mathbf{z}}^+(0)$ по формуле (3.1) равна

$$\rho^+ = \left[\sum_{k=1}^E d_k(1)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{2} \rho(0).$$

В M -мерном пространстве межузловых потоков по построению ALEF-прямая перпендикулярна секущим гиперплоскостям с заданной суммой всех межузловых потоков.

На двумерных диаграммах, приведенных на рис. 7–10, указаны расстояния от точек, отвечающих VMF-векторам, до ALEF-прямой. Метрические оценки сохраняют взаимное пространственное расположение векторов, фактически являются сверткой и позволяют выделять доминирующие решения. В свою очередь VMF-векторы взаимно ортогональны и их можно рассматривать как набор базисных векторов для агрегированного представления межузловых потоков.

Набор VMF-векторов с единичными компонентами является направляющими лучами конуса, а его центральная ось — ALEF-прямая. На рис. 7, 8 показаны точки пересечения направляющих лучей конуса с гиперплоскостями межузловых потоков. Метрические оценки вычисляются относительно ALEF-прямой. Выпуклая комбинация VMF-векторов и вектора, коллинеарного ALEF-прямой, позволяет формально описать любой вектор, лежащий внутри конуса SIF-каркаса. На рис. 7, 8 в рамках формализма модели и разработки диспетчерских правил маршрутизации каждый VMF-вектор соответствует доле входного потока (нагрузки), который предполагается передать из узла с номером n остальным корреспондентам.

Заключение. Априорные оценки VMF-векторов, вычисленные в монопольном режиме, дают возможность анализировать ситуации, когда внешняя (входная) нагрузка на сеть в узле превышает нормативные ограничения. В зависимости от постановки задачи и моделируемой системы перегрузки на входе в систему приведут к отказам в обслуживании и/или возникновению очередей на входах. На основе минимальных удельных затрат определяются группы узлов-корреспондентов, требующих больших ресурсов для передачи потоков.

Перекрестный анализ структурных и потоковых характеристик, их взаимосвязи и взаимовлияния может быть использован на предпроектном этапе создания сетей различного назначения [6–14]. Метрические оценки предельных распределений ресурсов позволяют получить агрегированное описание множества допустимых потоков [4, 5]. Диаграммы свидетельствуют, что большая часть содержательно значимых решений в стационарных режимах будет сосредоточена в относительной близости от начала координат и на значительном удалении от формально предельных показателей рабочих характеристик.

REFERENCES

1. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения ресурсов в многопользовательской сети при равных межузловых нагрузках // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 21–26.
2. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 19–24.
3. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 40–45.
4. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Макс Пресс. 2008.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. Kung H.T., Wu C.H. Content Networks: Taxonomy and New Approaches. The Internet as a Large-Scale Complex System. Oxford: Oxford University Press, 2005. P. 203–225.
7. Yang R., Van der Mei R.D., Roubos D. et al. Resource Optimization in Distributed Real-time Multimedia Applications // Multimed. Tools Appl. 2012. V. 59. P. 941–971.
8. Beben A., Batalla J. M., Chai W.K., Sliwinski J. Multi-criteria Decision Algorithms for Efficient Content Delivery in Content Networks // Ann. Telecommun. 2013. V. 68. P. 153–165.
9. Zhang H.P., Yin B.Q., Lu X.N. Modeling and Analysis for Streaming Service Systems // Internat. J. of Automation and Computing. 2014. V. 11. P. 449–458.
10. Pathan A., Buyya R. A Taxonomy and Survey of Content Delivery Network. Technical Report GRIDS-TR-2007-4. Melbourne: University of Melbourne, 2007.
11. Omotunde A.A., Okolie S.O., Adekunle Y.A. et al. Request-Routing for Content Delivery Networks (CDN) // Intern. J. of Advanced Research in Computer Science. 2015. V. 6. Iss. 6. P. 10–16.
12. Waheed M.H.B., Jamil F., Qayyum A. et al. A New Efficient Architecture for Adaptive Bit-Rate Video Streaming // Sustainability. 2021. V. 13. Iss. 8. P. 4541. <https://doi.org/10.3390/su13084541>
13. Vepsäläinen J. Disappearing Frameworks Explained. Ithaca: Cornell University, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.03201>
14. Dutta N., Sarma H.K.D., Jadeja R. et al. Introduction to Information-Centric Networks // Information Centric Networks (ICN). Practical Networking. Cham: Springer, 2021.