

НАИСКОРЕЙШЕЕ УСПОКОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ¹

© 2024 г. И. М. Ананьевский^{1,*}, И. А. Дунаев^{2,**}

¹ИПМех РАН, Москва, Россия

²МФТИ, Москва, Россия

*e-mail: anan@ipmnet.ru

**e-mail: dunaev.ia@phystech.edu

Поступила в редакцию 08.12.23 г.

После доработки 17.01.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается линейная управляемая механическая система третьего порядка, матрица которой имеет одно положительное собственное число. Система может служить математической моделью линеаризованного обратного маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. На величину управляющей переменной наложено ограничение по модулю. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время.

Ключевые слова: линейная управляемая система, перевернутый маятник, оптимальное быстродействие, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S0002338824030028 EDN: UQTECE

THE FASTEST DAMPING OF A LINEAR INVERTED PENDULUM USING A DYNAMIC ABSORBER

I. M. Ananievski^{a,*}, I. A. Dunaev^{b,**}

^aIPMech RAS, Moscow, Russia

^bMIPT, Moscow, Russia

*e-mail: anan@ipmnet.ru

**e-mail: dunaev.ia@phystech.edu

We consider a linear controllable third-order mechanical system whose matrix has one positive eigenvalue. The system can serve as a mathematical model of a linearized inverse pendulum controlled by an active dynamic damper. A modulus constraint is imposed on the value of the control variable. Using Pontryagin's maximum principle, the problem of synthesizing an optimal control that brings the system to a state of rest in a minimum time is solved.

Keywords. Inverted pendulum, bounded control, active dynamic absorber, time-optimal control, maximum principle

Введение. Изучается задача управления механической системой, представляющей собой перевернутый маятник с активным динамическим гасителем. Конструкция состоит из вертикально стоящего невесомого жесткого стержня с закрепленным на конце грузом m_1 и массы m_2 , которая может поступательно перемещаться вдоль горизонтальной направляющей (рис. 1). В качестве управляющей переменной выступает сила взаимодействия между грузом m_1 и массой m_2 гасителя, которая предполагается ограниченной по модулю. Отклонения маятника от вертикального состояния предполагаются малыми, поэтому динамика системы рассматривается в линейном приближении. Требуется за минимальное время привести маятник в вертикальное положение и остановить массу гасителя m_2 . Конечное положение массы гасителя несущественно.

¹ Работа выполнена в рамках госзадания 123021700055-6.

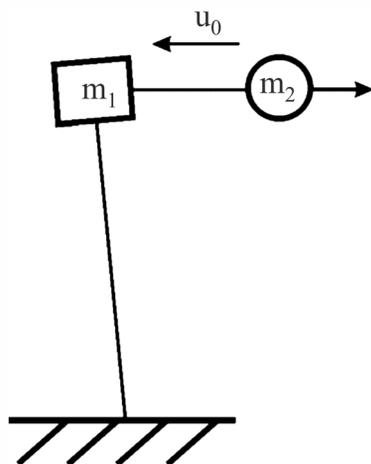


Рис. 1. Обратный маятник с динамическим гасителем

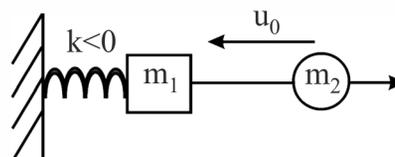


Рис. 2. Упрощенная двухмассовая система.

Эквивалентной моделью описанной конструкции может служить следующая управляемая двухмассовая механическая система (рис. 2). Два тела массами m_1 и m_2 перемещаются вдоль горизонтальной прямой. Первое тело соединено с неподвижным основанием пружиной отрицательной жесткости $k < 0$. Второе тело соединено с первым посредством привода, который генерирует силу u_0 .

Одной из особенностей рассматриваемой системы является ее неустойчивость, обусловленная наличием положительного собственного числа у матрицы линеаризованных уравнений движения системы. Задачи управления движением неустойчивых объектов, в том числе движением обратного маятника, изучались в работе [1], где получены оценки множеств управляемости некоторых объектов такого рода, а также исследовался ряд задач оптимального управления. Оптимальное по быстрдействию управление для механических систем, включающих в себя перевернутый маятник, предложено в работах [2, 3].

Изучаемая ниже задача представляет собой классическую задачу оптимального управления понтрягинского типа, эффективным инструментом решения которой служит принцип максимума Понтрягина [4, 5]. Аналогичная задача оптимального быстрогодействия рассмотрена в работе [6] для системы, изображенной на рис. 2, для случая $k > 0$, т.е. для обычного линейного маятника. Найдены оптимальные режимы движения системы при перемещении ее из одного состояния покоя в другое. В работе [7] исследована задача оптимального быстрогодействия для линейной системы шестого порядка, описывающей динамику управляемого перемещения вдоль горизонтальной прямой тележки, несущей два линейных осциллятора. Система переводится из одного состояния покоя в другое с помощью ограниченной по модулю управляющей силы, приложенной к несущему телу. Изучено поведение функции оптимального управления.

Методы управления маятниковыми системами с помощью активного динамического гасителя без минимизации времени движения предложены в работах [8, 9].

1. Постановка задачи и уравнения движения. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi}_1 + k \xi_1 = -u_0, \quad m_2 \dot{\xi}_2 = u_0. \quad (1.1)$$

Здесь ξ_1 — смещение массы m_1 от нулевого состояния покоя, ξ_2 — скорость массы m_2 . На управляющую силу наложено ограничение

$$|u_0| \leq U, \quad U = \text{const} > 0. \quad (1.2)$$

Задача 1. Требуется найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию фазовых переменных, приводящее систему в начало координат из любой точки фазового пространства за минимальное время.

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{k}{U}\xi_1, \quad t' = t\sqrt{\frac{-k}{m_1}}, \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dt'}, \\ z &= m_2\sqrt{\frac{-k}{m_1}}\xi_2, \quad u = \frac{u_0}{U}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Запишем уравнения (1.1) в новых переменных в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_1 - u, \\ \dot{z} &= u. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и ниже точками обозначены производные по новому времени t' . В дальнейшем штрихи у величины t' будут опущены.

Ограничение (1.2) примет вид

$$|u| \leq 1. \quad (1.5)$$

Сделаем еще одну замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \eta_2 - \eta_1, \\ y &= \eta_1 + \eta_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

и преобразуем уравнения (1.4) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - u, \\ \dot{y} &= y - u, \\ \dot{z} &= u. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Исходная задача 1 теперь может быть сформулирована следующим образом.

Задача 2. Найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию $u(x, y, z)$, которое удовлетворяет условию (1.5) и обеспечивает приведение системы (1.7) в начало координат за минимальное время.

Нетрудно видеть, что система (1.7) удовлетворяет условию управляемости Калмана [10]. Ниже представлено решение задачи 2 в переменных x, y, z . Решение в исходных переменных ξ_1, ξ_2 может быть получено путем обратных замен с использованием формул (1.3) и (1.6).

2. Редуцированная система. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу управления для редуцированной системы, состоящей только из первых двух уравнений системы (1.7) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - u, \\ \dot{y} &= y - u. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Найдем оптимальное по быстродействию управление $u(x, y)$, приводящее систему (2.1) в начало координат и удовлетворяющее условию (1.5). Воспользуемся для этого принципом максимума Понтрягина.

Выпишем гамильтониан редуцированной системы

$$H_1(p_1, p_2, x, y) = -p_1x + p_2y - u(p_1 + p_2)$$

и уравнения для сопряженных переменных

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Решение системы (2.2) имеет вид

$$p_1(t) = d_1 e^t, \quad p_2(t) = d_2 e^{-t}.\tag{2.3}$$

Здесь d_1 и d_2 – произвольные постоянные. В силу ограничения (1.5) гамильтониан H_1 достигает максимума по u , если

$$u = -\text{sign}(p_1 + p_2),\tag{2.4}$$

и в соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории имеет место равенство (2.4), т.е. $u = \pm 1$. При таких значениях управляющей функции решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 1, y(t) = c_2 e^t - 1, \text{ если } u = -1; \\ x(t) = c_1 e^{-t} - 1, y(t) = c_2 e^t + 1, \text{ если } u = 1. \end{cases}\tag{2.5}$$

Найдем число перемен знака функции $p_1(t) + p_2(t)$. Подставим для этого в уравнение $p_1(t) + p_2(t) = 0$ выражения (2.3) для сопряженных переменных. Получим

$$d_1 e^t + d_2 e^{-t} = 0$$

или

$$e^{2t} = -\frac{d_2}{d_1}.$$

Отсюда видно, что непрерывная функция $p_1(t) + p_2(t)$ обращается в нуль не более одного раза и, следовательно, не более одного раза меняет знак.

Таким образом, существует два основных сценария оптимального по быстродействию приведения системы (2.1) в начало координат. Каждый состоит из двух этапов. При первом сценарии на первом этапе $u = -1$, а на втором $u = 1$, при втором – наоборот, сначала $u = 1$, затем $u = -1$.

На рис. 3 изображен фазовый портрет системы (2.1) при $u = 1$, а на рис. 4 – фазовый портрет при $u = -1$. Отметим, что при $u = 1$ точка $x = -1, y = 1$ является седлом системы (2.1), сепаратрисы которого лежат на прямых $x = -1$ и $y = 1$. При $u = -1$ седлом является точка $x = 1, y = -1$, его сепаратрисы лежат на прямых $x = 1$ и $y = -1$.

З а м е ч а н и е 1. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, т.е. одновременная смена знака у переменных x, y и управления u , переводит один фазовый портрет в другой.

Обозначим через G полосу, заключенную между прямыми $y = -1$ и $y = 1$:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\}.$$

Поскольку система (2.1) неустойчива по переменной y , так как соответствующее y собственное число равно 1, то при ограничении (1.5) вне полосы G имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt} \frac{y^2}{2} = \dot{y}y = y^2 - uy \geq y^2 - |y| \geq 0.$$

Следовательно, величина y^2 вне полосы G не убывает и множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, лежит в G .

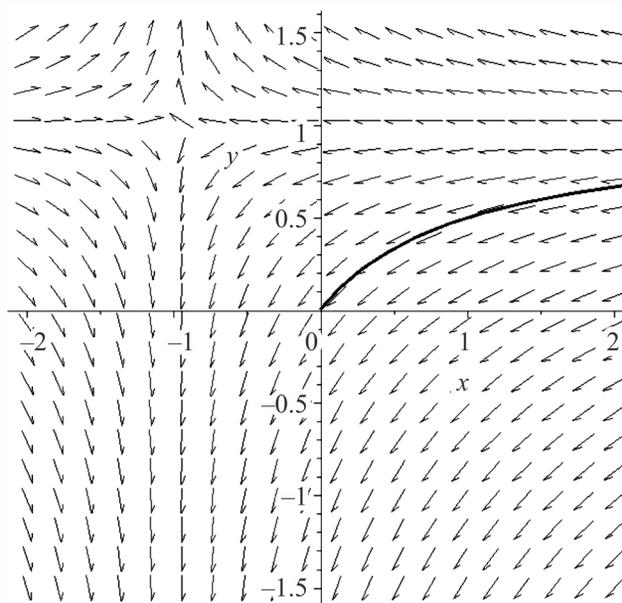


Рис. 3. Фазовый портрет системы при $u = 1$.

Предположим, что в момент времени $s > 0$ система (2.1) приходит в начало координат под действием управления $u = -1$, т.е. в соответствии с (2.5) – вдоль траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} + 1, y(t) = c_2 e^t - 1.$$

Тогда $x(s) = y(s) = 0$ и $c_1 = -e^s, c_2 = e^{-s}$. Очевидно, что все такие траектории лежат на кривой γ_- , которая может быть описана параметрически с помощью s следующим образом:

$$x(s) = 1 - e^s, y(s) = e^{-s} - 1, s \geq 0. \tag{2.6}$$

На рис. 4 кривая γ_- изображена сплошной линией. Все точки фазовой плоскости, из которых система приходит в начало координат под действием управления $u = -1$, лежат на этой кривой, а параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s)) \in \gamma_-$ до нуля. Из соотношений (2.6) вытекает, что в декартовых координатах уравнение кривой γ_- имеет вид

$$x = \frac{y}{1 + y}, y \leq 0. \tag{2.7}$$

Если же система (2.1) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$ в момент времени $s > 0$, т.е. в соответствии с (2.5) – вдоль траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} - 1, y(t) = c_2 e^t + 1,$$

то $c_1 = e^s, c_2 = -e^{-s}$. Такие траектории лежат на кривой γ_+ , которая задается параметрически соотношениями

$$x(s) = e^s - 1, y(s) = 1 - e^{-s}, s \geq 0. \tag{2.8}$$

Здесь также параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s)) \in \gamma_+$ до нуля. Учитывая (2.8), в декартовых координатах уравнение кривой γ_+ можно записать в виде

$$x = \frac{y}{1 - y}, y \geq 0. \tag{2.9}$$

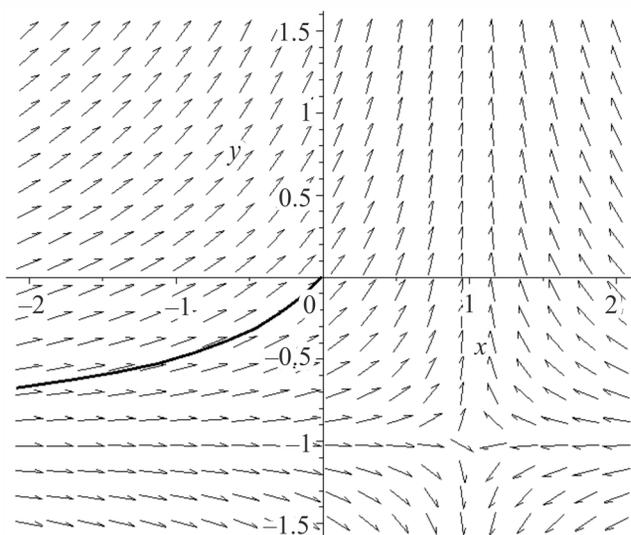


Рис. 4. Фазовый портрет при $u = -1$.

На рис. 3 эта кривая изображена сплошной линией.

При первом сценарии приведения сначала система (2.1) под действием управления $u = -1$ приходит на кривую γ_+ , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ — в начало координат. При втором сценарии сначала система (2.1) под действием управления $u = 1$ приходит на кривую γ_- , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = -1$ — в начало координат. Таким образом, управляющая функция меняет знак на составленной из γ_+ и γ_- кривой $\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+$, которую будем называть кривой переключений. Из соотношений (2.7) и (2.9) следует, что в декартовых координатах эта кривая задается уравнением

$$x = \frac{y}{1 - |y|}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим первый сценарий приведения. В рамках этого сценария на первом этапе начинающаяся в точке (x_1, y_1) траектория системы под действием управления $u = -1$ приходит на кривую γ_+ . Из рис. 3 видно, что множество начальных состояний (x_1, y_1) , из которых можно попасть на кривую γ_+ при $u = -1$, составляет область, заключенная между прямой $y = -1$ и кривой γ . Обозначим эту область через G_- , а область, заключенную между кривой γ и прямой $y = 1$, — через G_+ .

В соответствии с (2.5) решение системы (2.1) при $u = -1$, начинающееся в момент времени $t = 0$ в точке (x_1, y_1) , имеет вид

$$x(t) = (x_1 - 1)e^{-t} + 1, \quad y(t) = (y_1 + 1)e^t - 1 \quad (2.11)$$

и, следовательно, проходит по гиперболе

$$(x - 1)(y + 1) = C_-. \quad (2.12)$$

Здесь использовано обозначение

$$C_- = (x_1 - 1)(y_1 + 1). \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) при $C_- \neq 0$ задает семейство гипербол. Если $C_- > 0$, то соответствующая гипербола лежит в квадранте $x > 1, y > -1$, если $C_- < 0$, то она лежит в квадранте $x < 1, y > -1$, причем при $C_- = -1$ кривая γ_- является ветвью этой гиперболы.

Так как точка (x_1, y_1) лежит в области G_- , то величина C_- может принимать следующие значения:

$$\begin{cases} -1 < C_- < 0, \text{ если } x_1 < 1; \\ C_- = 0, \text{ если } x_1 = 1; \\ C_- > 0, \text{ если } x_1 > 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Отметим, что индексы в обозначениях, используемых при решении редуцированной задачи, выбраны с учетом применения этих же обозначений в дальнейшем при решении полной задачи.

Пусть в момент времени $t_2 > 0$ решение (2.11) попадает на кривую γ_+ . Положим $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$. Соотношения (2.9) и (2.12) приводят к следующим уравнениям на координаты точки пересечения этого решения с кривой γ_+ :

$$x_2 = \frac{y_2}{1 - y_2}, \quad (x_2 - 1)(y_2 + 1) = C_-. \quad (2.15)$$

Подставляя x_2 во второе уравнение (2.15), после некоторых преобразований получим

$$2y_2^2 + (C_- + 1)y_2 - (C_- + 1) = 0. \quad (2.16)$$

Для дискриминанта этого уравнения введем обозначение

$$D_- = (C_- + 1)^2 + 8(C_- + 1) = (C_- + 1)(C_- + 9). \quad (2.17)$$

Так как $C_- + 1 > 0$, согласно (2.14), то дискриминант удовлетворяет неравенству $D_- > 0$.

Точка (x_2, y_2) лежит на кривой γ_+ , поэтому ордината этой точки равна единственному положительному корню уравнения (2.16), т.е.

$$y_2 = \frac{-(C_- + 1) + \sqrt{D_-}}{4} > 0. \quad (2.18)$$

Подставляя $t = t_2$ во второе равенство (2.11) и используя соотношения (2.13) и (2.18), находим время движения системы из начального состояния (x_1, y_1) до кривой переключений γ :

$$t_2 = \ln \frac{y_2 + 1}{y_1 + 1} = \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{4(y_1 + 1)}. \quad (2.19)$$

В момент прихода траектории системы (2.1) в точку $(x_2, y_2) \in \gamma_+$ происходит переключение управления с $u = -1$ на $u = 1$. Время движения t_3 из точки (x_2, y_2) до начала координат вдоль кривой γ_+ находится из второго соотношения (2.8) с помощью подстановок $y(s) = y_2$, $s = t_3$ и с учетом выражения (2.18):

$$\begin{aligned} t_3 &= -\ln(1 - y_2) = -\ln \frac{C_- + 5 - \sqrt{D_-}}{4} = \ln \frac{4}{C_- + 5 - \sqrt{D_-}} = \\ &= \ln \frac{4(C_- + 5 + \sqrt{D_-})}{(C_- + 5 - \sqrt{D_-})(C_- + 5 + \sqrt{D_-})} = \ln \frac{C_- + 5 + \sqrt{D_-}}{4}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

С использованием обозначений (2.13) и (2.17) времена t_2 и t_3 могут быть выражены через координаты x_1 и y_1 . Полное время движения $T = t_2 + t_3$ из точки $(x_1, y_1) \in G_-$ в начало координат представляет собой функцию начального состояния:

$$T_-(x_1, y_1) = \ln \frac{(3 - C_- + \sqrt{D_-})(C_- + 5 + \sqrt{D_-})}{16(y_1 + 1)}. \quad (2.21)$$

Таким образом, если начальное состояние (x_1, y_1) лежит в области G_- или на кривой γ_- , то применяется первый сценарий приведения. При $(x_1, y_1) \in G_-$ сначала траектория системы под действием управления $u = -1$ приходит в точку $(x_1, y_1) \in \gamma_+$ за время t_2 . Затем, на втором этапе, она движется вдоль кривой γ_+ под действием управления $u = 1$ в начало координат в течение времени t_3 . При $(x_1, y_1) \in \gamma_-$ система приходит в начало координат вдоль кривой γ_- под действием управления $u = -1$. В этом случае $C_- = -1$, $D_- = 0$, и формула (2.19) для времени движения t_2 остается справедливой, а второй этап отсутствует и $t_3 = 0$.

Если же начальное состояние (x_1, y_1) лежит в области G_+ или на кривой γ_+ , то применяется второй сценарий. В этом случае $(-x_1, -y_1) \in G_- \cup \gamma_-$ и с учетом замечания 1 можно заключить, что сначала траектория системы под действием управления $u = 1$ приходит в точку $(x_2, y_2) \in \gamma_-$ за время, равное времени движения из состояния $(-x_1, -y_1)$ до кривой γ_+ по первому сценарию:

$$t_2(-x_1, -y_1) = \ln \frac{3 - C_+ + \sqrt{D_+}}{4(1 - y_1)}. \quad (2.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_+(x_1, y_1) &= C_-(-x_1, -y_1) = (x_1 + 1)(y_1 - 1), \\ D_+ &= (C_+ + 1)(C_+ + 9). \end{aligned}$$

Затем траектория движется вдоль кривой γ_- под действием управления $u = -1$ в начало координат в течение времени

$$t_3(-x_1, -y_1) = \ln \frac{C_+ + 5 + \sqrt{D_+}}{4}. \quad (2.23)$$

Если начальное состояние (x_1, y_1) находится на кривой γ_+ , то система приходит в начало координат вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ за время $t_2(-x_1, -y_1)$, а второй этап отсутствует.

Полное время движения задается соотношением

$$T_+(x_1, y_1) = T_-(-x_1, -y_1), \quad (x_1, y_1) \in G_+ \cup \gamma_+.$$

График полного времени движения как функции начального состояния, определенной на всей области G , приведен на рис. 5. Лежащая в плоскости x, y кривая переключений γ здесь изображена сплошной линией.

3. Задача быстродействия для полной системы. 3.1. Принцип максимума. Выпишем теперь гамильтониан для системы (1.7)

$$H(p_1, p_2, p_3, x, y, z) = -p_1 x + p_2 y - u(p_1 + p_2 - p_3)$$

и систему уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2, \\ \dot{p}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение системы (3.1) имеет вид

$$p_1(t) = d_1 e^t, \quad p_2(t) = d_2 e^{-t}, \quad p_3 = d_3. \quad (3.2)$$

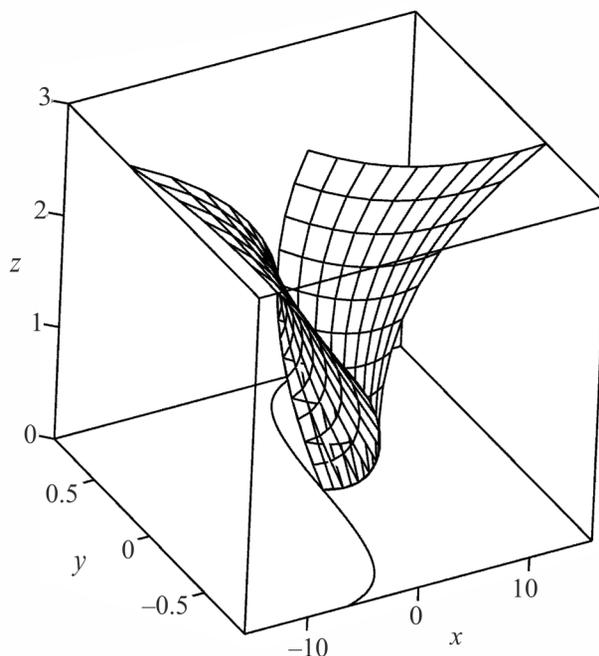


Рис. 5. Время движения $T(x, y)$.

При ограничении (1.5) гамильтониан H достигает максимума по u , если

$$u = -\text{sign}(p_1 + p_2 - p_3), \quad (3.3)$$

и в соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории выполнено равенство (3.3), т.е. $u = \pm 1$. При таких значениях управляющей функции решение системы (1.7) может быть записано как

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 1, y(t) = c_2 e^t - 1, z(t) = -t + c_3, \text{ если } u = -1; \\ x(t) = c_1 e^{-t} - 1, y(t) = c_2 e^t + 1, z(t) = t + c_3, \text{ если } u = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

З а м е ч а н и е 2. Первые два уравнения движения полной системы совпадают с уравнениями движения редуцированной системы, поэтому выражения для $x(t), y(t)$ в (2.5) и (3.4) совпадают, т.е. траектории движения редуцированной системы представляют собой проекции на плоскость x, y траекторий полной системы.

Для определения числа перемен знака функции $\psi(t) = p_1(t) + p_2(t) - p_3(t)$ подставим в уравнение $\psi(t) = 0$ выражения (3.2) для сопряженных переменных:

$$d_1 e^t + d_2 e^{-t} - d_3 = 0.$$

Продифференцировав это равенство по t , получим

$$e^{2t} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Отсюда видно, что производная функции $\psi(t)$ обращается в нуль не более одного раза. Следовательно, сама функция $\psi(t)$ обращается в нуль не более двух раз, поэтому она не более двух раз меняет знак.

З а м е ч а н и е 3. То, что оптимальное управление для редуцированной системы имеет не более одного переключения, а оптимальное управление для полной системы — не более двух, следует из вещественности собственных чисел матриц этих систем. Известно [4], что для

системы порядка n , все собственные числа которой вещественны, оптимальное по быстродействию управление имеет не более $n - 1$ переключений.

Таким образом, в задаче управления полной системой также существует два основных сценария оптимального по быстродействию приведения системы (1.7) в начало координат, однако теперь каждый сценарий состоит из трех этапов. При первом сценарии на первом этапе $u = 1$, на втором $u = -1$ и на третьем вновь $u = 1$. При втором сценарии сначала $u = -1$, затем $u = 1$, а на заключительном этапе снова $u = -1$.

В дальнейшем будем называть траектории движения системы (1.7) с постоянным управлением $u = 1$ положительными, а траектории движения с постоянным управлением $u = -1$ – отрицательными.

З а м е ч а н и е 4. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, т.е. одновременная смена знака у переменных x, y, z и управления u , переводит положительные траектории в отрицательные и наоборот.

3.2. П о в е д е н и е т р а е к т о р и й. Рассмотрим подробно первый сценарий. Пусть (x_0, y_0, z_0) – начальное состояние системы, (x_1, y_1, z_1) – точка, в которой заканчивается первый этап и происходит переключение управления с $u = 1$ на $u = -1$, (x_2, y_2, z_2) – точка, в которой заканчивается второй этап и происходит переключение управления с $u = -1$ на $u = 1$, $t_i \geq 0$ – время движения на i -м этапе, $i = 1, 2, 3$.

Начнем с третьего, заключительного, этапа. На этом этапе система (1.7) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$, т.е. в соответствии с (3.4) – вдоль положительной траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} - 1, \quad y(t) = c_2 e^t + 1, \quad z(t) = t + c_3.$$

Все такие траектории лежат на кривой Γ_+ , которая задается параметрически соотношениями

$$x(s) = e^s - 1, \quad y(s) = 1 - e^{-s}, \quad z(s) = -s, \quad (3.5)$$

причем параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s), z(s)) \in \Gamma_+$ до нуля. Из (3.5) вытекает следующее описание кривой Γ_+ с помощью уравнений в декартовых координатах:

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad z = \ln(1-y), \quad y \geq 0. \quad (3.6)$$

Нетрудно видеть, что кривая γ_+ , которая фигурировала ранее в редуцированной задаче, представляет собой проекцию кривой Γ_+ на плоскость $z=0$.

Поскольку на третьем этапе система (1.7) переходит из точки (x_2, y_2, z_2) в начало координат вдоль положительной траектории за время t_3 , то эта траектория удовлетворяет условиям $x(0) = x_2, y(0) = y_2, z(0) = z_2, x(t_3) = y(t_3) = z(t_3) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} x(t_3) &= (x_2 + 1)e^{-t_3} - 1 = 0, \\ y(t_3) &= (y_2 - 1)e^{t_3} + 1 = 0, \\ z(t_3) &= z_2 + t_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_2 = e^{t_3} - 1, \quad y_2 = 1 - e^{-t_3}, \quad z_2 = -t_3. \quad (3.7)$$

На втором этапе система переходит под действием управления $u = -1$ из точки (x_1, y_1, z_1) в точку (x_2, y_2, z_2) за время t_2 вдоль отрицательной траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} + 1, \quad y(t) = c_2 e^t - 1, \quad z(t) = -t + c_3,$$

поэтому

$$x_2 = (x_1 - 1)e^{-t_2} + 1, \quad y_2 = (y_1 + 1)e^{t_2} - 1, \quad z_2 = -t_2 + z_1. \quad (3.8)$$

Опишем множество точек (x_1, y_1, z_1) , из которых можно попасть на кривую (3.6) вдоль отрицательных траекторий. Это множество представляет собой поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (1.7) с управлением $u = -1$, заканчивающихся на кривой Γ_+ . Обозначим данную поверхность через S_- . Из соотношений (3.7) и (3.8) получаем следующее представление поверхности S_- в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x_1(t_2, t_3) &= e^{t_2+t_3} - 2e^{t_2} + 1, \\ y_1(t_2, t_3) &= -e^{-(t_2+t_3)} + 2e^{-t_2} - 1, \\ z_1(t_2, t_3) &= t_2 - t_3, \quad t_2 > 0, t_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для описания поверхности S_- в декартовых координатах воспользуемся результатами решения редуцированной задачи. Точка (x_2, y_2, z_2) лежит на кривой Γ_+ , а ее проекция на плоскость $z=0$ – точка (x_2, y_2) – на кривой γ_+ . Следовательно, точка (x_1, y_1) , из которой траектория редуцированной системы приходит в точку (x_2, y_2) , лежит во множестве $G_- \cup \gamma_-$. В соответствии с замечанием 2 времена движения t_2 и t_3 полной системы на втором и третьем этапах движения совпадают с временами движения редуцированной системы на первом и втором этапах соответственно, т. е. задаются равенствами (2.19), (2.20). Поэтому координата z_1 точки, принадлежащей поверхности S_- , может быть выражена как функция координат x_1, y_1 с помощью равенств (2.19), (2.20) и третьего соотношения в (3.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= f_-(x_1, y_1) = \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{4(y_1 + 1)} - \ln \frac{C_- + 5 + \sqrt{D_-}}{4} = \\ &= \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{(C_- + 5 + \sqrt{D_-})(y_1 + 1)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь величины C_- и D_- задаются формулами (2.13) и (2.17) и выступают как функции переменных x_1, y_1 .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1. Поверхность S_- представляет собой график функции $f_-(x_1, y_1)$, заданной на множестве $G_- \cup \gamma_-$ с помощью выражения (3.10).

Все траектории системы (1.7), которые приходят в начало координат под действием управления $u = -1$, лежат на кривой Γ_- , которая задается уравнением

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad z = -\ln(1+y), \quad y \leq 0.$$

Обозначим через S_+ поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (1.7) с управлением $u = 1$, заканчивающихся на кривой Γ_- . Эта поверхность представляет собой множество точек (x_1, y_1, z_1) , из которых можно попасть на кривую Γ_- вдоль положительных траекторий. В соответствии с замечанием 4 эта поверхность расположена симметрично поверхности S_- относительно начала координат и представляет собой график функции f_+ , заданной на множестве $G_+ \cup \gamma_+$ следующим образом:

$$f_+(x_1, y_1) = -f_-(-x_1, -y_1).$$

Составим поверхность $S = S_- \cup S_+$. В дальнейшем будем называть ее поверхностью переключений. Она изображена на рис. 6 и представляет собой график функции f , заданной на множестве G формулами:

$$f(x_1, y_1) = \begin{cases} f_-(x_1, y_1), & \text{если } (x_1, y_1) \in G_- \cup \gamma_-; \\ f_+(x_1, y_1), & \text{если } (x_1, y_1) \in G_+ \cup \gamma_+. \end{cases} \quad (3.11)$$

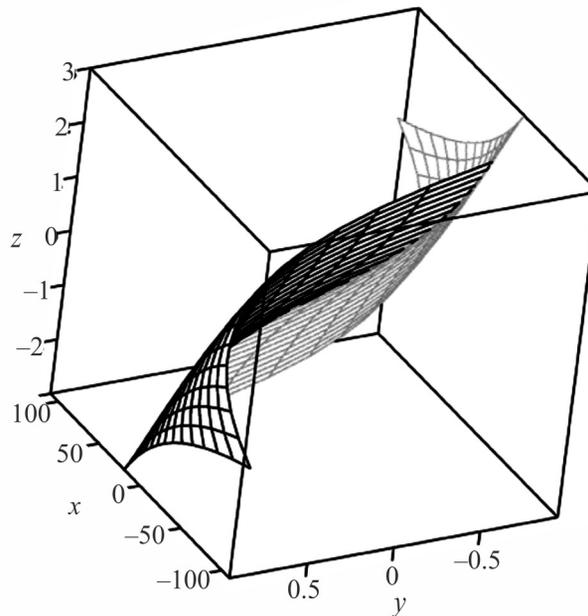


Рис. 6. Поверхность переключений S .

Поскольку кривые Γ_- и Γ_+ расположены симметрично относительно начала координат, то функция f непрерывна. На рис. 6 более темная часть отвечает поверхности S_+ , а более светлая – поверхности S_- .

3.3. С в о й с т в а п о в е р х н о с т и п е р е к л ю ч е н и й. Заметим, что множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, составляет область

$$Q = G \times R^1 = \{(x_0, y_0, z_0) : -\infty < x_0, z_0 < \infty, |y_0| < 1\},$$

а график заданной на G непрерывной функции f разбивает это множество на две подобласти. Обозначим через Q_- ту, что лежит ниже S , а через Q_+ – ту, что лежит выше.

Выясним, как ведут себя решения, которые начинаются в области Q , но вне поверхности S . Поскольку поверхность S_+ образована из полутраекторий положительных траекторий, то в силу единственности решений другие положительные траектории с поверхностью S_+ не пересекаются. Соответственно, не лежащие на поверхности S_- отрицательные траектории не пересекают поверхность S_- . Следовательно, всякая траектория системы (1.7) может пересекать поверхность S только на участке «другого знака».

У т в е р ж д е н и е 2. Положительные траектории системы (1.7) пересекают поверхность S сверху вниз, т.е. из области Q_+ в область Q_- , а отрицательные – снизу вверх.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с замечанием 4 достаточно изучить пересечение положительных траекторий с поверхностью S_- . Используя параметрическое представление (3.9) поверхности S_- , выпишем координаты (ненормированного) вектора нормали n к поверхности S_- :

$$n_x(t_2, t_3) = 2e^{-t_2}(1 - e^{-t_3}),$$

$$n_y(t_2, t_3) = 2e^{t_2}(e^{t_3} - 1),$$

$$n_z(t_2, t_3) = 2(e^{t_3} - e^{-t_3}).$$

Векторное поле v системы (1.7) в точке (x_1, y_1, z_1) пересечения траектории с поверхностью при $u = 1$ в соответствии с (3.9) задается выражениями

$$\begin{aligned} v_x &= -x_1(t_2, t_3) - 1 = -e^{t_2+t_3} + 2e^{t_2} - 2, \\ v_y &= y_1(t_2, t_3) - 1 = -e^{-(t_2+t_3)} + 2e^{-t_2} - 2, \\ v_z &= 1. \end{aligned}$$

Покажем, что скалярное произведение (n, v) векторов n и v при $t_2, t_3 > 0$ отрицательно. Введем обозначение

$$\varphi(t_2, t_3) = \frac{1}{4}(n, v) = e^{t_2} - e^{-t_2} + e^{t_3} - e^{-t_3} - e^{t_2+t_3} + e^{-(t_2+t_3)}.$$

Убедимся, что частная производная функции φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_3} = e^{t_3} + e^{-t_3} - e^{t_2+t_3} - e^{-(t_2+t_3)}$$

отрицательна при $t_2, t_3 > 0$. Так как $\varphi(t_2, 0) = 0$, то отсюда будет следовать, что $\varphi(t_2, t_3) < 0$ при $t_2, t_3 > 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$h(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi}, \quad \xi \geq 1.$$

Эта функция строго возрастает, так как ее производная положительна:

$$h'(\xi) = 1 - \frac{1}{\xi^2} > 0, \quad \xi \geq 1.$$

Поскольку $e^{t_2} < e^{t_2+t_3}$ при $t_3 > 0$, то выполнено соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_3} = h(e^{t_3}) - h(e^{t_2+t_3}) < 0,$$

из которого вытекает неравенство $\varphi(t_2, t_3) < 0$. Следовательно, траектория системы (1.7) при $u = 1$ пересекает поверхность S_- сверху вниз. Утверждение 2 доказано.

Покажем теперь, что при оптимальном по быстродействию приведении системы в начало координат на первом этапе необходимо выбирать $u = 1$, если начальное состояние находится выше поверхности S , и $u = -1$, если ниже.

Пусть начальное состояние (x_0, y_0, z_0) лежит в области Q_+ , т.е. находится выше поверхности S . Это означает, что

$$z_0 > f(x_0, y_0). \tag{3.12}$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что при $u = -1$ траектория $x(t), y(t), z(t)$ с начальным состоянием $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ не попадет на поверхность S .

Изучим поведение траектории с таким начальным состоянием при $u = 1$. В этом случае в соответствии с (3.4) имеем

$$y(t) = (y_0 - 1)e^t + 1 \leq -1, \quad t \geq t_* = \ln \frac{2}{1 - y_0}.$$

Проекция траектории на плоскость x, y покидает полосу G , пересекая прямую $y = -1$ в момент времени $t = t_*$. При $t \rightarrow t_*$ справедливы соотношения

$$C_- \rightarrow 0, \quad f_-(x(t), y(t)) \rightarrow \infty, \quad z(t) \rightarrow z_0 + t_*.$$

Отсюда и из (3.12) вытекает, что найдется момент времени $t < t_*$, когда будет выполнено равенство $z(t) = f_-(x(t), y(t))$, т.е. рассматриваемая траектория пересечет поверхность S_- , которая является графиком функции f_- и частью поверхности S . В этот момент происходит переключение управления.

3.4. Алгоритм управления и время движения. Сформулируем теперь алгоритм оптимального по быстродействию приведения полной системы в начало координат. Пусть (x_0, y_0, z_0) – начальное состояние системы. Если $z_0 > f(x_0, y_0)$, где функция f определена в (3.11), то начальное состояние лежит выше поверхности переключений и на первом этапе следует выбирать $u = 1$. Если $z_0 < f(x_0, y_0)$, то начальное состояние лежит ниже поверхности переключений и на первом этапе должно быть $u = -1$. В случае $z_0 = f(x_0, y_0)$ первый этап отсутствует. Когда траектория системы попадет на поверхность переключений S , управление меняет знак и движение продолжается по этой поверхности до достижения траекторией кривой переключений $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$. Здесь управление вновь меняет знак, и система приходит в начало координат вдоль кривой Γ .

Если $z_0 > f(x_0, y_0)$, то на первом этапе в соответствии с (3.4) решение системы (1.7) имеет вид

$$x(t) = (x_0 + 1)e^{-t} - 1, \quad y(t) = (y_0 - 1)e^t + 1, \quad z(t) = z_0 + t.$$

Подставив в (3.10) соотношения

$$x_1 = (x_0 + 1)e^{-t_1} - 1, \quad y_1 = (y_0 - 1)e^{t_1} + 1, \quad z_1 = z_0 + t_1, \quad (3.13)$$

получим следующее уравнение для нахождения времени движения на первом этапе $t_1(x_0, y_0, z_0)$:

$$z_0 + t_1 = \ln \frac{3 - C_0 + \sqrt{D_0}}{(C_0 + 5 + \sqrt{D_0})((y_0 + 1)e^{t_1} + 2)}.$$

Здесь

$$C_0 = \left((x_0 + 1)e^{-t_1} - 2 \right) \left((y_0 - 1)e^{t_1} + 2 \right), \quad D_0 = (C_0 + 1)(C_0 + 9).$$

Время движения на втором и третьем этапах как функция начального состояния (x_0, y_0, z_0) находится путем подстановки в выражение (2.21) величин x_1, y_1 , вычисляемых по формулам (3.13).

Время движения для случая $z_0 < f(x_0, y_0)$ может быть рассчитано с учетом симметрии системы в соответствии с замечанием 4.

4. Заключение. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления линейной системой третьего порядка с одним положительным собственным числом. Система описывает в линейном приближении динамику перевернутого маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. Особенность рассмотренной задачи состоит в том, что третья фазовая переменная не входит в первые два уравнения движения. Это обстоятельство позволяет сначала решить задачу оптимального управления для редуцированной системы, состоящей из первых двух уравнений, а затем применить полученные результаты для решения полной задачи. В явной форме построены множества, на которых происходит переключение управления, описано поведение траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 229 с.
2. *Лавровский Э.К.* О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.

3. Решмин С.А., Черноусько Ф.Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТИСУ. 2006. № 3. С. 51-62.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
5. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
6. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 699-718.
8. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
9. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып 6. С. 901–908.
10. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.