

УДК 531.53

О ДИАГРАММАХ ФУНКЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛАТФОРМЫ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2024 г. О. Р. Каюмов^{a, *}

^aФилиал ОмГПУ, г. Тара, Россия

*e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.10.2023 г.

После доработки 10.12.2023 г.

Принята к печати 29.01.2024 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения твердого тела, движущегося поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущего n линейных осцилляторов. Единственная управляющая сила приложена к платформе и ограничена по модулю, трение отсутствует. Система переводится из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний. Исследуется эволюция функций оптимального управления в зависимости от дальности перемещения. Предлагается общий подход к построению наглядной диаграммы, отражающей такую эволюцию. Для этого используется геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности как свойств вспомогательной «контрольной» кривой в n -мерном пространстве. Приведены численные примеры построения диаграмм функций оптимального управления платформой с тремя осцилляторами.

Ключевые слова: диаграммы функций оптимального управления, платформа с осцилляторами

DOI: 10.31857/S0002338824020079, EDN: VOJEHR

ON THE OPTIMAL CONTROL FUNCTION DIAGRAMS IN THE PROBLEM OF THE MOVEMENT OF A PLATFORM WITH OSCILLATORS

O. R. Kayumov^{a, *}

^aBranch of Omsk State Pedagogical University, Tara, Omsk Oblast, 646535 Russia

*e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

We consider the problem of the time-optimal movement of a rigid body moving translationally along a horizontal straight line and carrying n -linear oscillators. The only control force is applied to the platform and is limited in magnitude, there is no friction. The system is transferred from a state of rest to a specified distance with vibration damping. The evolution of optimal control functions depending on the distance of movement is investigated. A general approach to constructing a visual diagram reflecting such evolution is proposed. To do this, a geometric interpretation of the necessary optimality conditions is used as properties of an auxiliary “control” curve in n -dimensional space. Numerical examples of constructing diagrams of optimal control functions for a platform with three oscillators are given.

Keywords: Optimal Control Function Diagrams, Platform with Oscillators

Введение. Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и прикрепленных к нему n линейных пружин с материальными точками на концах (рис. 1). Пружины параллельны горизонтальной оси, вдоль которой платформа движется поступательно. К ней приложена единственная управляющая сила, ограниченная по модулю наперед заданной величиной. Такая модель может приближенно описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда, частично заполненного жидкостью. Постановки задач управления подобными объектами сформулированы в [1], где с помощью принципа максимума Понтрягина [2] была решена задача наивысшего перемещения платформы с одним осциллятором. Оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключе-

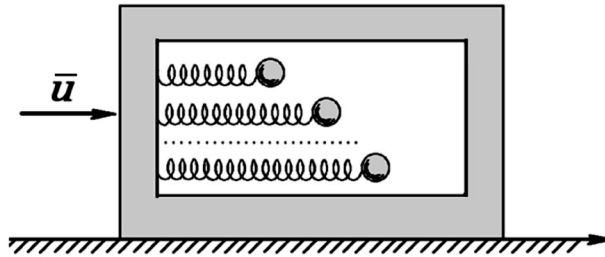


Рис. 1. Модель платформы с осцилляторами

ниями [1, 3]. В общем случае (для платформы с n осцилляторами) задача до сих пор не была решена. Управляемость такой системы гарантирована, если частоты собственных колебаний осцилляторов попарно различны [1, 4]. Несмотря на линейность системы, управление при дефиците внешних воздействий представляет известную сложность. Задачи перемещения таких объектов с гашением колебаний за конечное время в последнее время рассматривались в [5–7]. Были построены алгоритмы, достигающие цели при действии неизвестных возмущений и при неизмеряемых состояниях осцилляторов [8, 9]. В работе [10] предложен закон управления, переводящего платформу с n осцилляторами за конечное время в требуемое состояние покоя при неполной информации о состоянии и возмущениях, причем для некоторого типа начальных состояний найдена асимптотика времени движения в зависимости от числа n .

В задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами из одного состояния равновесия в другое, когда трение отсутствует, а фазовое состояние системы в каждый момент измеримо, удастся использовать симметрию краевых условий. На этой основе функция оптимального управления была выражена через значения первых n моментов переключения, предварительно определяемых из системы нелинейных уравнений [11]. Для случая $n = 2$ оптимальные режимы иллюстрировались на фазовой плоскости одного из осцилляторов [11], а также путем построения наглядного изображения, названного диаграммой функций оптимального управления [12]. Алгоритм построения диаграммы опирался на свойства вспомогательной «контрольной» кривой, геометрически отразившие решения сопряженной системы из принципа максимума Понтрягина. В настоящей работе этот подход обобщается на случай n осцилляторов с учетом того, что для малых перемещений платформы оптимальное управление на полутраектории имеет не более n переключений [13].

1. Постановка задачи и ее свойства симметрии. Повторяя использованные в [11] преобразования координат и времени, приведем уравнения движения системы (рис. 1) к форме с безразмерными переменными и временем:

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = u, \quad i = \overline{1, n}, \quad |u| \leq 1, \quad (1.1)$$

где u — управляющая сила, а значения частот пронумерованы в порядке возрастания ($1 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$). Переменные под знаками производных являются линейными комбинациями координат платформы и осцилляторов, причем одновременное обращение в нуль значений x_i , $i = \overline{1, n}$, соответствует ненапряженным состояниям пружин, а положение несущего тела характеризуется переменной x_0 . Если ее значение при требуемом перемещении платформы меняется на величину $2b$, то в середине этого отрезка назовем начало отсчета координаты x_0 . Аналогичную «удвоенную» запись введем и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (1.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad x_i(2T) = \dot{x}_i(2T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Поставленную задачу быстрогодействия будем рассматривать для взаимной вариационной задачи на максимум дальности $2b$ при заданном времени $2T$ (ввиду их монотонной взаимозависимости). Обобщая результаты [12], исследуем также эволюцию функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, с изменением значения T .

На основе принципа максимума Понтрягина было показано [11], что в задаче оптимального быстрогодействия (1.1) – (1.3) в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$, оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также все решения $x_i(\tilde{t})$, $i = 0, n$ будут нечетными функциями, а $\dot{x}_i(\tilde{t})$, $i = 0, n$ – четными функциями. Поэтому в конце оптимальной полутраектории выполняются соотношения

$$u(T) = x_i(T) = 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (1.4)$$

Особые управления здесь невозможны в силу линейной независимости известных решений сопряженной системы из принципа максимума. В результате оптимальное управление будет кусочно-постоянным с нечетным числом переключений.

2. Необходимые условия оптимальности и их геометрическая интерпретация. Если моменту времени T предшествуют j моментов времени переключения управления $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$, то через них (путем интегрирования дифференциальных уравнений (1.1)) в конце полутраектории можно выразить значения $x_i(T)$, $i = \overline{1, n}$ [11]. Они равны нулю, согласно соотношениям (1.4), поэтому в обозначениях

$$\gamma_k = T - \tau_k, \quad k = \overline{1, j}, \quad (2.1)$$

получается система из n нелинейных уравнений:

$$(-1)^j - \cos \omega_i T + 2 \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1} \cos \omega_i \gamma_k = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Дальнейшие рассуждения будут основаны на эволюции корней γ_k , $k = \overline{1, j}$ системы (2.2) при изменении значений T . Каждой длительности T полутраектории соответствует свое количество j моментов переключения управления, заранее неизвестное, и свое множество корней, удовлетворяющее при этом неравенству

$$T > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_j > 0. \quad (2.3)$$

Если в системе (1.1) все числа ω_i , $i = \overline{1, n}$ – рациональные, то в задаче оптимального быстрогодействия (1.1) – (1.3) имеют место следующие свойства [11].

Замечание 1. Существует оптимальное движение с одним переключением управления при $T = T_*$, где $T_* = 2n_*\pi$, n_* – общий знаменатель всех несократимых дробей ω_i , $i = \overline{1, n}$.

Замечание 2. Если управление с моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$, T удовлетворяет крайевым условиям (2.2), то им также удовлетворит:

1) управление с моментами переключения $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_j + T_*, T + T_*$;

2) управление с моментами переключения $\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_{j-1} + \Delta, T + \Delta$ (при условии $\Delta = T_* - 2T > 0$).

Замечания 1, 2 дают возможность описать все сценарии оптимального поведения системы, периодически повторяющиеся с ростом параметра T . Если хотя бы одно из значений ω_i , $i = \overline{1, n}$ иррационально, то в системе (2.2) не будет общего периода T_* всех функций, поэтому с ростом длительности T количество разных типов оптимального движения будет бесконечным, не поддающимся завершённому описанию.

На основе принципа максимума Понтрягина доказано утверждение [11], которое в терминах γ_k , $k = \overline{1, j}$ можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 1. Если в задаче (1.1)–(1.3) полутраектория оптимальна по быстроддействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с n переключениями на промежутке $t \in [0, T)$ в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\xi \det Q_{n+1}(t)), \quad Q_{n+1} = \begin{vmatrix} T-t & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \sin \omega_1(T-t) & \sin \omega_1 \gamma_1 & \sin \omega_1 \gamma_2 & \dots & \sin \omega_1 \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \omega_n(T-t) & \sin \omega_n \gamma_1 & \sin \omega_n \gamma_2 & \dots & \sin \omega_n \gamma_n \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

знак константы ξ определяется известным (по условию) значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1]$.

Для каждой заданной длительности полутраектории T сначала нужно найти из системы (2.2) предполагаемый набор значений моментов переключения. Затем нужно проверить его на соответствие необходимым условиям оптимальности, применяя утверждение 1: если при действии управления (2.3) возникнут другие моменты переключения, кроме ожидаемых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, то это расписание не оптимально. В случае, когда найденное из системы (2.2) количество переключений превосходит n , т.е. $j > n$, то для них условие остается прежним [11]: все эти j значений должны автоматически проявиться при действии управления (2.4). Если же у системы (2.2) количество корней $j < n$, то в формуле для управляющей функции (2.4) вместо определителя Q_{n+1} берется лишь его левый верхний минор размерами $(j+1) \times (j+1)$ [11].

Геометрический смысл таких необходимых условий оптимальности можно иллюстрировать с помощью линии в n -мерном пространстве, названной в [12] контрольной кривой. Для этого заметим, что равенство нулю определителя Q_{n+1} равносильно условию

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \psi(\omega_1(T-t)) & \psi(\omega_1\gamma_1) & \dots & \psi(\omega_1\gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi(\omega_n(T-t)) & \psi(\omega_n\gamma_1) & \dots & \psi(\omega_n\gamma_n) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

где введена вспомогательная функция

$$\psi(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad (2.6)$$

доопределенная значением $\psi(0) = 1$. Согласно утверждению 1, условие (2.4) должно выполняться лишь при $T-t = \gamma_k$, $k = \overline{1, n}$, т.е. лишь когда первый столбец определителя численно совпадет с одним из n последующих. Эти n столбцов представим как векторы $\overline{OB_k}$, отложенные от начала O в аффинном пространстве с координатами $(y_0, y_1, \dots, y_n)^T$ и порождающие гиперплоскость. Ее пересечение с гиперплоскостью $y_0 = 1$ даст $(n-1)$ -мерную плоскость, содержащую все точки $\overline{B_k}$ (ввиду одинаковости их первой координаты). Поэтому множество векторов $\overline{OB_k}$, $k = \overline{1, n}$ можно однозначно спроецировать на подпространство с координатами $(y_1, \dots, y_n)^T$, получая лежащие в нем векторы $\overline{OA_k} = (\psi(\omega_1\gamma_k), \dots, \psi(\omega_n\gamma_k))^T$, $k = \overline{1, n}$. Тогда окажется, что все точки A_k принадлежат общей кривой, задаваемой в n -мерном пространстве вектор-функцией

$$r = (\psi(\omega_1\rho), \dots, \psi(\omega_n\rho))^T, \quad \rho \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Линию (2.7) назовем *контрольной кривой*. Ее форма зависит от сочетания значений ω_i , $i = \overline{1, n}$, но всегда линия начинается в точке $K_0(1, 1, \dots, 1)$ при $\rho = 0$ и проходит через точку $O(0, 0, \dots, 0)$ при $\rho = T_*/2$ (если $T_*/2 < T$). Ее актуальный участок завершается в точке W с параметром $\rho = T$ и содержит точки A_k , $k = \overline{1, n}$, расположенные последовательно соответственно значениям их параметров (2.3). В смещенном времени $\tilde{t} \in [-T, T]$ можно следить за движением по контрольной кривой изображающей точки, которая дважды пройдет дугу WK_0 (из конца W в начало K_0 и обратно). При этом определитель Q_{n+1} будет каждый раз менять знак при прохождении через пункты A_k , т.е. в точках пересечения контрольной кривой с гиперплоскостью $A_1A_2\dots A_n$. Геометрический смысл необходимого условия оптимальности заключается в том, что контрольная кривая не должна иметь с гиперплоскостью $A_1A_2\dots A_n$ других точек пересечения, кроме тех, чьим параметрам γ_k , $k = \overline{1, j}$ соответствуют запланированные моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$ переключений.

Например, при $n = 2$ (случай платформы с двумя осцилляторами) контрольная кривая лежит в двумерной плоскости. На рис. 2 дано ее изображение для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, а на рис. 3 — для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$.

Для платформы с тремя осцилляторами ($n = 3$) контрольная кривая лежит в трехмерном пространстве (y_1, y_2, y_3) . На рис. 4 показан случай $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$ (пунктиром отмечены фрагменты кривой, лежащие ниже горизонтальной плоскости (y_1, y_2)). Проекция этой линии на плоскости (y_1, y_2) и (y_1, y_3) выглядят, как на рис. 2 и рис. 3.

Заметим, что на рис. 2 начальный участок кривой (от K_0 до первой точки перегиба) вогнутый, т.е. может содержать только две коллинеарные точки A_1 и A_2 , но не может содержать третьей. Поэтому здесь прямая A_1A_2 — это «гиперплоскость», не имеющая с актуальным

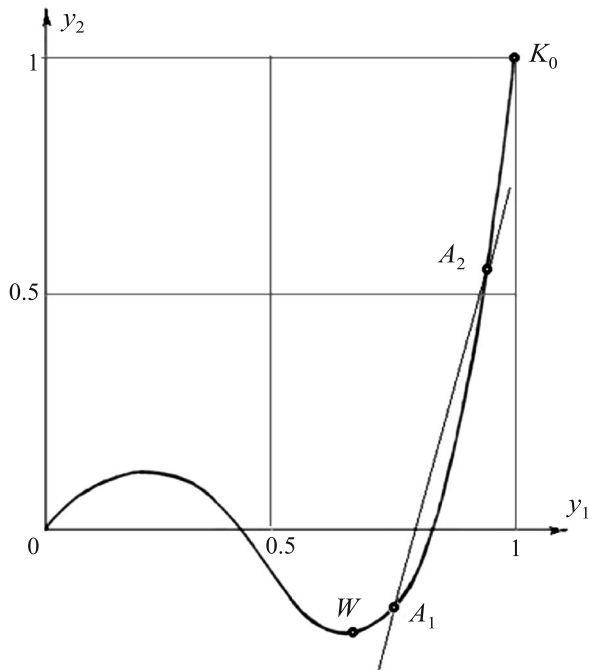


Рис. 2. Контрольная кривая в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$

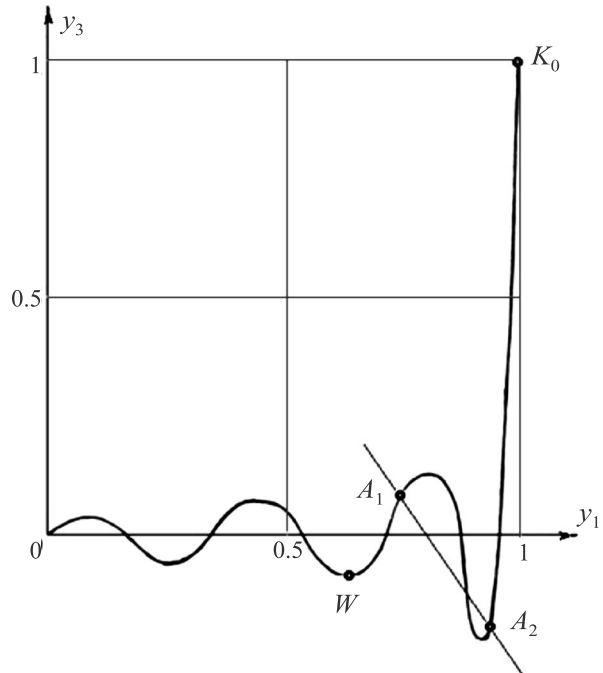


Рис. 3. Контрольная кривая в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 7$

участком контрольной кривой других пересечений, кроме A_1 и A_2 . Отсюда следует, что для достаточно малых значений T (не превышающих параметр точки перегиба) оптимальное управление имеет не более двух моментов переключения на полутраектории. Аналогично можно показать, что при $n = 3$ начальный участок контрольной кривой не может содержать более трех компланарных точек, т.е. на малом промежутке T оптимальное управление платформой с тремя осцилляторами будет иметь не более трех переключений. Эта закономерность доказана [13] в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. В задаче (1.1)–(1.3) существует такое значение T_0 , что для всех $T \in (0, T_0]$ функции $u(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, будут иметь не более n моментов времени переключения.

Доказательство сводилось к обоснованию того, что на достаточно малом участке WK_0 контрольной кривой (2.7) любые $(n+1)$ ее точек A_k , $k = 1, n+1$ не могут принадлежать общей гиперплоскости, т.е. вектор $\overline{A_1 A_{n+1}}$ не сможет принадлежать подпространству, порожаемому векторами $\overline{A_1 A_i}$, $i = 2, n$. Построенный на этих векторах определитель будет положительным [13], по крайней мере, при условии

$$T_0 = \sigma\pi / \omega_n. \quad \sigma = 0.597670. \quad (2.8)$$

Такая оценка является весьма грубой и обусловлена стилем доказательства (путем разложения элементов определителя в ряды Маклорена). На рис. 2 (где $n = 2$, $\omega_n = 3$) точка W имеет параметр $T = \pi / 2$. Другими словами, для платформы с двумя осцилляторами при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, в диапазоне $T < \pi / 2$ оптимальным полутраекториям соответствуют ровно два момента переключения управления.

Далее для описания эволюции функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, с изменением параметра T будем применять наглядное изображение, предложенное в [12] и названное диаграммой функций оптимального управления.

Например, на рис. 5 показана диаграмма для случая $n = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$. Вверх по оси симметрии отложена ось T . Каждое горизонтальное сечение диаграммы, прочитываемое слева-направо, символизирует одну кусочно-постоянную функцию оптимального управления $u(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in [-T, T]$. Серым отрезкам горизонтали соответствуют промежутки времени, где $u = 1$, а белым отрезкам – где $u = -1$. Например, сечение EJ задает при $T = \pi / 2$ функцию оптимального управления с пятью переключениями. Участок EF кодирует график $u(t)$ для

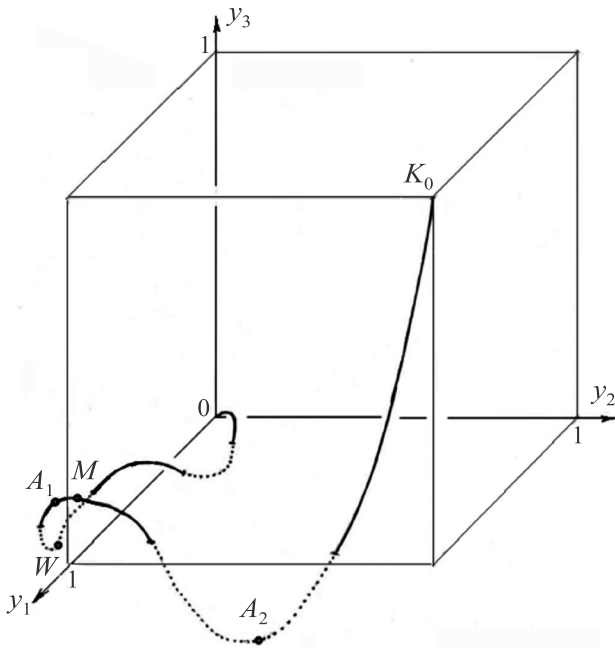


Рис. 4. Контрольная кривая в случае $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$

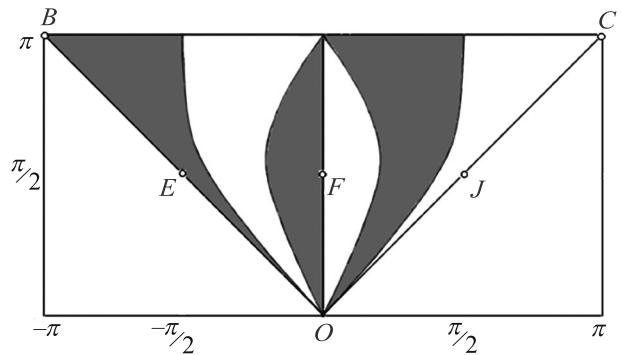


Рис. 5. Диаграмма функций оптимального управления в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$

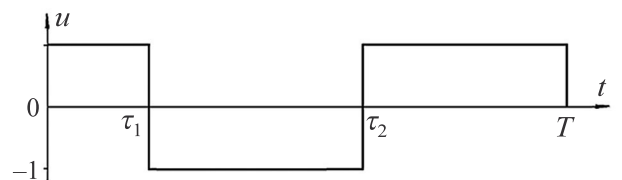


Рис. 6. График функции $u(t)$ в случае $n = 2$ при $\omega_2 / \omega_1 = 3$, $T = \pi / 2$

«полутраектории», показанный на рис. 6 в несмещенном времени $t \in [0, T]$. Моментам переключения $\tau_1 = \pi / 10$, $\tau_2 = 3\pi / 10$ соответствуют корни $\gamma_1 = 2\pi / 5$, $\gamma_2 = \pi / 5$ системы (2.2) при $j = 2$, $T = \pi / 2$. На контрольной кривой (рис. 2) им отвечают точки W ($\rho = \pi / 2$), A_1 ($\rho = 2\pi / 5$) и A_2 ($\rho = \pi / 5$). Здесь прямая A_1A_2 не имеет других пересечений с дугой WK_0 , поэтому функция $u(t)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в задаче быстрогодействия (1.1)–(1.3).

При рассмотренных целочисленных значениях $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, согласно замечанию 1, величина $T_* = 2\pi$ является «периодом» для повторения формы диаграммы. Ее продолжение, согласно замечанию 2, строится путем зеркального отражения треугольника OBC (с его закрашенными областями) относительно горизонтали BC , что дало бы симметричный треугольник O_1BC . При продолжении вертикальной оси T внутри угла BOC будут периодически повторяться квадраты OBO_1C с их раскрашенными областями.

Далее рассмотрим закономерности, позволяющие строить диаграммы функций управления в задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с n осцилляторами.

3. Свойства диаграммы функций оптимального управления при малых значениях параметра T .

Рассмотрим устройство диаграммы в ее самой нижней части, т.е. в окрестности вершины O . Поскольку для $T \in (0, T_0]$, согласно утверждению 2, количество моментов переключений управления $u(t)$, $t \in [0, T)$ не превышает n , то из вершины O будут выходить не более n кривых. В обозначениях $\gamma_k = T - \tau_k$, $k = \overline{1, n}$, где выполнены неравенства (2.3), можно рассматривать эти кривые как графики функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, m}$, $m \leq n$. С увеличением параметра T такая эволюция соответствует изменению корней системы n уравнений (2.2), записанной при $j = n$. При меньшем числе переключений управления $m < n$ в этой системе можно формально считать $\gamma_j \equiv 0$, $j = m + 1, n$.

Далее в предположении о малости значений T (а значит, и всех γ_k , $k = \overline{1, n}$) используем разложения в ряды Маклорена:

$$\cos(\omega_i T) \approx 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{(v_i t)^j}{(2j)!}, \quad \cos(\omega_i \gamma_k) \approx 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{(v_i \theta_k)^j}{(2j)!},$$

$$t = T^2, \quad v_i = \omega_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad \theta_k = \gamma_k^2, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.1)$$

Подставляя соотношения (3.1) в (2.2), перегруппируем слагаемые, выделяя в них выражения:

$$p_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left[\frac{t^j}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \theta_k^j \right], \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Тогда, вводя вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, преобразуем систему (2.2) к виду

$$\Omega \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & \dots & v_1^{n-1} \\ 1 & v_2 & \dots & v_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_n & \dots & v_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Поскольку определитель Вандермонда

$$\det \Omega = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_i - v_j) \neq 0, \text{ при } \omega_j \neq \omega_i \ (j \neq i),$$

то из матричного соотношения (3.3) следует $p_i = 0, i = \overline{1, n}$, что приводит к системе n уравнений относительно n переменных $\alpha_i = \theta_i / t, i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k^i = \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

Можно показать, что такая система (3.4) всегда имеет n корней $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$, причем значения α_1 и α_n , α_2 и α_{n-1} и т.д. дополняют друг друга до единицы. Детали вычислений приведем отдельно для двух случаев.

С л у ч а й 1. Если n – четное, т.е. $n = 2k, k \in N$, то можно ввести новые переменные $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, представив

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \beta_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} - \beta_{n-j+1}, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (3.5)$$

где

$$1/2 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k > 0. \quad (3.6)$$

При подстановке выражений (3.5) в систему (3.4) ее каждое второе уравнение повторит предыдущее, так что останется лишь k уравнений, порождающих в новых переменных $\delta_i = (-1)^{i+1} \beta_i, i = \overline{1, k}$, симметрическую систему

$$\sum_{i=1}^k \delta_i^{2j-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^j, \quad j = \overline{1, k}.$$

Она решается введением симметрических многочленов, числовые значения которых найдутся стандартными процедурами, чтобы затем (согласно теореме Виета) стать коэффициентами «порождающего» алгебраического уравнения k -й степени с корнями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$. При $k > 4$ эти уравнения решаются лишь численно, но для малых k корни находятся в явном виде:

- 1) при $k = 1$ (т.е. $n = 2$) имеем $\beta_1 = 1/4$ (т.е. $\alpha_1 = 3/4, \alpha_2 = 1/4$),
- 2) при $k = 2$ (т.е. $n = 4$) имеем $\beta_1 = (\sqrt{5} + 1)/8, \beta_2 = (\sqrt{5} - 1)/8$ (т.е. $\alpha_1 = (5 + \sqrt{5})/8, \alpha_2 = (3 + \sqrt{5})/8, \alpha_3 = (5 - \sqrt{5})/8, \alpha_4 = (3 - \sqrt{5})/8$),
- 3) при $k = 3$ (т.е. $n = 6$) возникает «порождающее» уравнение

$$\delta^3 - \frac{1}{4}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta + \frac{1}{64} = 0,$$

корни которого находятся по формулам Кардано

$$\delta_i = \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{7}}{6} \cos \left[\varphi + \frac{2\pi}{3}(i-1) \right], \quad i = \overline{1,3}, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{28}} \right).$$

Им соответствуют численные значения $\beta_1 \approx 0.45048441$, $\beta_2 \approx 0.31174485$, $\beta_3 \approx 0.11126044$, дающие по формулам (3.5) все корни α_i , $i = \overline{1,6}$ системы (3.4).

С л у ч а й 2. Если n – нечетное, т.е. $n = 2k + 1$, $k \in N$, то корни системы (3.4) выразятся через новые переменные в виде:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \beta_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} - \beta_{n-j+1}, \quad j = \overline{k+2,n}, \quad (3.7)$$

где вновь выполнится неравенство (3.6).

При подстановке выражений (3.7) в систему (3.4) ее нечетные уравнения вырождаются в тождества, а четные выразятся лишь через β_i^2 , $i = \overline{1,k}$, так что при замене $\tilde{\alpha}_i = 4\beta_i^2$, $i = \overline{1,k}$, система в точности повторит вид системы (3.4) для $n = k$. Иначе говоря, получим значения $\beta_i = \sqrt{\tilde{\alpha}_i} / 4$, где $\tilde{\alpha}_i$, $i = \overline{1,k}$, – корни системы (3.4) для $n = k$. Таким образом, получим:

- 1) при $n = 3$ корни $\alpha_1 = (2 + \sqrt{2}) / 4$, $\alpha_2 = 1 / 2$, $\alpha_3 = (2 - \sqrt{2}) / 4$,
- 2) при $n = 5$ корни $\alpha_1 = (2 + \sqrt{3}) / 4$, $\alpha_2 = 3 / 4$, $\alpha_3 = 1 / 2$, $\alpha_4 = 1 / 4$, $\alpha_5 = (2 - \sqrt{3}) / 4$,
- 3) при $n = 7$ корни $\alpha_1 = (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) / 4$, $\alpha_2 = (2 + \sqrt{2}) / 4$, $\alpha_3 = (2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) / 4$, $\alpha_4 = 1 / 2$, $\alpha_5 = (2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}) / 4$, $\alpha_6 = (2 - \sqrt{2}) / 4$, $\alpha_7 = (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) / 4$ и т.д.

Замечание 3. Подставляя корни α_i , $i = \overline{1,n}$ системы (3.4) в выражение

$$S = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \alpha_j^{n+1} - 1 / 2, \quad (3.8)$$

при любом n получим неравенство $S < 0$.

Можно показать (подробности опускаем), что при $n = 2k$, $k \in N$, выражение (3.8) принимает значение $S = -(2k + 1) / 2^{4k+1}$, а при $n = 2k + 1$, $k \in N$, – значение $S = -(k + 1) / 2^{4k+2}$.

Поскольку среди корней системы (3.4), имеющих исходный смысл $\alpha_i = \gamma_i^2 / T^2$, $i = \overline{1,n}$, нет нулевых значений, а сама система порождена представлением (3.1), то в предположении о малости T показана справедливость следующего свойства.

Утверждение 3. В задаче быстрогодействия (1.1)–(1.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$ имеет ровно n переключений. На соответствующей диаграмме из вершины O выходят ровно n кривых $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$, имеющих в этой точке угловые коэффициенты:

$$k_i = \left. \frac{d\gamma_i}{dT} \right|_{T=0} = \sqrt{\alpha_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3.9)$$

где α_i , $i = \overline{1,n}$, – корни системы (3.4).

В силу гладкости участвующих в (2.2) функций и с учетом вышесказанного, существует диапазон $T \in [0, T_0)$, на котором функции $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1,n}$ непрерывны и дифференцируемы, так что если применить разложение

$$\gamma_i(T) \approx \gamma_i(0) + \dot{\gamma}_i(0)T + \ddot{\gamma}_i(0)T^2 / 2, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3.10)$$

то $\gamma_i(0) = 0$, $\dot{\gamma}_i(0) = \sqrt{\alpha_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Заметим, что система (3.3) порождена приближением (3.1) с учетом n степеней переменной $t = T^2$. Если разложение (3.1) дополнить степенью t^{n+1} , подразумевая при этом увели-

чение обсуждаемого диапазона T , то после подстановки в систему (2.2) в ней появилась бы наряду с выражениями (3.2) новая компонента:

$$h = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \left[\frac{t^{n+1}}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \theta_k^{n+1} \right]. \quad (3.11)$$

Тогда вместо однородного матричного уравнения (3.3) окажется неоднородное

$$\Omega p = -h q, \quad q = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_n^n)^T. \quad (3.12)$$

Из него методом Крамера последует значение $p_1 = -h \det \Omega_1 / \det \Omega$, где матрица Ω_1 получается из Ω заменой первого столбца на столбец q . Поэтому

$$\det \Omega_1 = (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^n (v_k) \cdot \det \Omega,$$

откуда

$$p_1 = -h(-1)^{n+1} \prod_{k=1}^n (v_k). \quad (3.13)$$

Сравнивая соотношения (3.8) и (3.11), получим

$$-h(-1)^{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(2(n+1))!} S,$$

т.е. знак нового выражения (3.13) для p_1 совпадет со знаком прежнего выражения (3.8) для S . Таким образом, при достаточно малом значении T , согласно утверждению 2 и замечанию 3, ранее имели оценки $p_1 = 0$ и $S < 0$. Теперь с небольшим увеличением параметра T знак выражения S сохранится, а знак выражения

$$p_1 = \frac{t}{2!} (\alpha_1 - \alpha_2 + \dots + (-1)^{n+1} \alpha_n - 1/2) \quad (3.14)$$

станет отрицательным, что приводит к следующему выводу.

Замечание 4. Для достаточно малых значений T выражение $w = (\dot{\gamma}_1^2 - \dot{\gamma}_2^2 + \dots + (-1)^{n+1} \dot{\gamma}_n^2)$ убывает, т.е.

$$\frac{dw}{dT} < 0. \quad (3.15)$$

Этот факт позволяет для достаточно малых значений T уточнить знак оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, при $t = 0$. С этой целью введем в рассмотрение функцию времени t , определенную на промежутке $t \in [0, T]$ и зависящую от параметра τ :

$$v(t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 1 & \text{при } \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Тогда кусочно-постоянную функцию управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, характеризующую моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, T (где $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < T$) и принимающую значение $u(0) = 1$, можно представить в виде

$$u(t) = v(t, 0) + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i v(t, \tau_i). \quad (3.16)$$

Если бы в начальный момент было $u(0) = -1$, то в формуле (3.16) правая часть была бы умножена на «-1». Для дифференциального уравнения $\ddot{x}_0 = u$, $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, характеризующего перемещение платформы из «нулевого» положения под действием управления (3.16), решением будет

$$x_0(t) = \frac{1}{2}(t-0)^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^i (t - \tau_i)^2.$$

Поэтому перемещение платформы за время T в обозначениях (2.1) примет вид

$$x_0(T) = \frac{1}{2}T^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \gamma_i^2 \quad (3.17)$$

(с умножением правой части на «-1» в случае $u(0) = -1$).

Если для малых значений T в выражениях (3.10) ограничиться линейными компонентами, то при их подстановке в (3.17) правая часть вырождается в нуль, поскольку равна нулю правая часть в (3.14). Поэтому для отыскания знака величины $x_0(T)$ понадобится выражение (3.10) с учетом квадратичной компоненты. Подставляя его в (3.17), сокращая подобные слагаемые и пренебрегая величинами четвертого порядка малости, получим

$$x_0(T) \approx -T^3 [\dot{\gamma}_1(0)\ddot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\ddot{\gamma}_2(0) + \dots + (-1)^{n+1}\dot{\gamma}_n(0)\ddot{\gamma}_n(0)] \quad (3.18)$$

(с домножением на «-1» в случае $u(0) = -1$). Поскольку выражение в квадратных скобках (3.18) отрицательно ввиду неравенства (3.15), то дальность $x_0(T)$ окажется положительной лишь в случае $u(0) = 1$. Таким образом, справедливо следующее свойство.

Утверждение 4. В задаче быстрогодействия (1.1)–(1.3) при достаточно малом значении T функция оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T)$, на начальном этапе (при $t \in [0, \tau_1)$) положительна.

4. Общий подход к построению диаграммы функций оптимального управления. Все вышеизложенное позволяет начать построение диаграммы функций оптимального управления, выводя из вершины O кривые $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, n}$ с угловыми коэффициентами (3.9), закрашивая серые и белые области между ними в соответствии с утверждением 4.

Эволюцию значений $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, n}$ можно описать, дифференцируя соотношения (2.2) по параметру T . Сокращая каждое i -е уравнение на $2\omega_i$, получим систему

$$\sum_{k=1}^j (-1)^{k+1} \dot{\gamma}_k \sin \omega_i \gamma_k = \frac{1}{2} \sin \omega_i T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.1)$$

Она разрешается (ввиду $j = n$) относительно производных

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.2)$$

$$\Delta = \eta D, \quad \Delta_i = \eta_i D_i, \quad \eta = \prod_{k=1}^n (\omega_k \gamma_k), \quad \eta_i = \eta T / (2\gamma_i),$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \psi(\omega_1 \gamma_1) & \psi(\omega_1 \gamma_2) & \dots & \psi(\omega_1 \gamma_n) \\ \psi(\omega_2 \gamma_1) & \psi(\omega_2 \gamma_2) & \dots & \psi(\omega_2 \gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi(\omega_n \gamma_1) & \psi(\omega_n \gamma_2) & \dots & \psi(\omega_n \gamma_n) \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Определители D_i , $i = \overline{1, n}$, получаются из D заменой γ_i на T в i -м столбце с одновременным его переносом на место левее первого столбца.

При численном интегрировании уравнений (4.2) на каждом этапе требуется проверка необходимого условия оптимальности: гиперплоскость, проведенная через точки A_k , $k = \overline{1, n}$ (с координатами в виде столбцов определителя D), не должна пересекать контрольную кривую в иных точках. С этой целью для каждого очередного набора T , γ_i , $i = \overline{1, n}$ можно табулировать параметр $t \in [0, T)$, чтобы убедиться, что соотношение (2.5) выполняется только n раз. В противном случае промежуток интегрирования признается завершенным, поскольку уравнения (4.2) сохраняют свой смысл только при тех значениях T , которым соответствует ровно n корней системы (2.2).

Частный случай $n = 2$ был исследован в [12], где диаграмма могла состоять из нескольких слоев, разделяемых горизонталями $T = T_k$, $k \in N$. Внутри каждого слоя происходила своя непрерывная эволюция значений $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, j}$ со своим конкретным количеством j , т.е. интегрировалась очередная система дифференциальных уравнений.

Для произвольного значения n завершение «первого слоя» диаграммы (при $T = T_1$) тоже может быть двух вариантов. Если $T_1 = T_*$ («тривиальный» вариант), то диаграмма состоит из одного слоя, внутри которого у всех оптимальных полутраекторий управление имеет n переключений. Для «нетривиального» варианта, представляющего интерес в дальнейшем, в конце первого слоя при $T_1 < T_*$ системе (2.2) соответствует количество корней $j < n$. Такое уменьшение числа корней может произойти либо из-за обращения в нуль функции $\gamma_n(T)$, либо из-за совпадения значений $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, $i \in \overline{1, n-1}$ и т.д. При этом если системе (2.2) отвечает решение, в котором численно совпадут два «соседних» значения $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, то ей удовлетворит и решение, в котором эти два значения заменены нулями. Таким образом, существование управления с количеством переключений $j < n$ при некотором значении T подразумевало бы для системы (2.2) наличие решения $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, 0, \dots, 0)$, т.е. справедливость условия

$$\gamma_m = 0, \quad m = \overline{j+1, n}. \quad (4.4)$$

Замечание 5. Условие (4.4) может выполняться только для изолированных точек на числовой оси T , т.е. не может продолжаться на непрерывном промежутке этой оси.

Действительно, если систему (4.1) при $j < n$ записать «в дифференциалах» (умножив уравнения на dT), то из нее не удастся выразить $d\gamma_i$, $i = \overline{1, j}$, через dT , поскольку получится система (n уравнений с j неизвестными) несовместная (ввиду линейной независимости строк). Поэтому для параметра $T + dT$ не найдется продолжения в виде $\gamma_i + d\gamma_i$, $i = \overline{1, j}$.

Из замечания 5 вытекает следствие.

Замечание 6. Для непрерывной эволюции функций $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, j}$ их количество должно быть $j \geq n$.

Приведем еще два утверждения, относящихся к частным случаям соотношений (4.4).

Замечание 7. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней при $\gamma_m = 0$, $m = \overline{2, n}$, то соответствующее ему управление (с тремя переключениями в моменты времени $T - \gamma_1$, T , $2T - \gamma_1$) при $u(0) = 1$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Действительно, если в задаче (1.1)–(1.3) при некотором n существует режим с тремя переключениями, то он существует и для системы, полученной из (1.1) формальным исключением последних $(n - 1)$ уравнений. Но для такой платформы с одним осциллятором режим с тремя переключениями является оптимальным [1, 3]. Достижимая при $n = 1$ максимальная дальность $x_0(2T)$ будет не меньшей, чем для системы (1.1) при $n > 1$, т.е. для системы с ограничениями в виде дополнительных $(n - 1)$ дифференциальных уравнений.

Замечание 8. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней при $\gamma_m = 0$, $m = \overline{3, n}$, то соответствующее ему управление (с пятью переключениями в моменты времени $T - \gamma_1$, $T - \gamma_2$, T , $2T - \gamma_2$, $2T - \gamma_1$) при $u(0) = 1$ удовлетворит необходимым условиям оптимальности в том случае, когда хотя бы одна кривая

$$y_k = \psi(\omega_k \rho), \quad y_s = \psi(\omega_s \rho), \quad \rho \in [0, T] \quad (4.5)$$

на плоскости (y_k, y_s) имеет только две общие точки с прямой $A_1 A_2$, проведенной через взятые на кривой точки A_1 и A_2 с параметрами γ_1 и γ_2 .

Доказательство аналогично замечанию 6: если в задаче (1.1)–(1.3) при некотором n существует режим с пятью переключениями, то он существует и для системы меньшего порядка — относительно переменных x_0 , x_k , x_s . Для нее выполнено необходимое условие оптимальности в геометрической форме для контрольной кривой (4.5), поэтому достижимая платформой

с двумя осцилляторами дальность $x_0(2T)$ будет максимально возможной. Для исходной системы (1.1), стесненной дополнительными дифференциальными уравнениями, дальность не может быть больше.

В замечании 7 к режимам с тремя переключениями не было дополнительных геометрических требований потому, что порождается лишь одной точкой (с параметром γ_1) множество, т.е. нульмерная плоскость, заведомо не может иметь других пересечений с контрольной кривой. Что касается замечания 8, то оно заменяет проверку отсутствия «лишних» пересечений контрольной кривой с прямой A_1A_2 в n -мерном пространстве. Естественным обобщением замечаний 7 и 8 является следующий факт.

Замечание 9. Если при некотором значении T система (2.2) допускает множество корней с условием (4.4), то соответствующее ему управление (с k переключениями на полутраектории, $k = n - j$) при $u(0) = 1$ удовлетворит необходимым условиям оптимальности в том случае, когда из чисел ω_i , $i = 1, n$ можно выбрать k (перенумерованных) значений ω_j , $j = 1, k$, для которых соответствующая кривая $\bar{r} = (\psi(\omega_1\rho), \dots, \psi(\omega_k\rho))^T$, $\rho \in [0, T]$ в k -мерном пространстве имеет только k общих точек с плоскостью $A_1A_2\dots A_k$, проведенной через взятые на кривой точки с параметрами γ_j , $j = 1, k$.

Далее рассмотрим разновидности нетривиальных сценариев, относя их к завершению не только «первого слоя» диаграммы (при $T = T_1$), но и любого очередного слоя с некоторым номером k (при $T = T_k$). Перечислим некоторые возможные типы завершения непрерывной эволюции k -го слоя в связи с изменением количества корней системы (2.2).

Тип 1. Пусть при $T = T_k$ количество корней стало $(n - 1)$. Это возможно, например, в ситуации обращения в нуль функции $\gamma_n(T)$, когда на контрольной кривой в n -мерном пространстве изображающая точка A_n совмещается с началом K_0 . Согласно замечанию 5, дальнейшая непрерывная эволюция переменных возможна лишь с увеличением их количества. Для оптимальной функции управления $u(t)$ это возможно лишь путем добавления двух новых сколь угодно близких моментов переключения [12], что на графике соответствует «игольчатой» вариации. При таком значении параметра $T = T_k$ на контрольной кривой гиперплоскость должна пройти через точки A_i , $i = 1, n - 1$, но не должна быть секущей к этой кривой, иначе в графике $u(t)$ возникли бы скачкообразные изменения. Поэтому гиперплоскость пройдет как касательная к контрольной кривой. Параметр γ_M искомой точки M касания можно определить из условия принадлежности к гиперплоскости не только точки A_M , но и вычисленного в ней касательного вектора $v = (\phi(\omega_1\gamma_M), \dots, \phi(\omega_k\gamma_M))^T$, выраженного через функцию $\phi(\omega\rho) = [\cos(\omega\rho) - \psi(\omega\rho)] / \rho$. Точка M касания на контрольной кривой получит статус «сдвоенной», как и соответствующие моменты переключения $\tau = T - \gamma_M$ на графике функции $u(t)$ управления. На диаграмме на горизонтали $T = T_k$ добавится точка с параметром γ_M , из которой в следующем слое будут выходить две новые кривые, так что эволюция перенумерованных функций $\gamma_i(T)$, $i = 1, n + 1$ будет описываться системой с количеством дифференциальных уравнений $n + 1$.

Тип 2. Пусть при $T = T_k$ количество корней убавилось до $(n - 2)$. Это возможно, например, в ситуации сближения «соседних» значений $\gamma_i(T)$ и $\gamma_{i+1}(T)$, вплоть до совпадения, когда на контрольной кривой совместятся изображающие точки A_i и A_{i+1} . Для продолжения непрерывной эволюции, согласно замечанию 6, потребуется как минимум еще две переменные $\gamma_k(T)$, что на контрольной кривой соответствует появлению «сдвоенной» точки. В отличие от предыдущего случая (тип 1), где такая точка определялась построением касательной гиперплоскости, сейчас для такой процедуры недостаточно имеющихся точек A_i . Если через $(n - 1)$ точек можно было провести не более двух касательных гиперплоскостей к контрольной кривой, то через $(n - 2)$ точек их можно провести бесконечно много. Поэтому для отыскания на горизонтали $T = T_k$ «сдвоенной» точки (назовем ее L) удобнее обратиться к системе (4.1). Ее коэффициенты вычисляются при известных значениях $T = T_k$ и $(n - 2)$ «старых» переменных γ_i . Параметр искомой сдвоенной точки обозначим γ_L , считая его общим для двух новых переменных γ_j и γ_{j+1} . В системе будет ровно n неизвестных, в том числе параметр γ_L , разность $x = \dot{\gamma}_j - \dot{\gamma}_{j+1}$ и производные $(n - 2)$ «старых» переменных. Исключая из системы производные, получим тригонометрическое уравнение с одним неизвестным γ_L . Искомый корень γ_L должен удовлетворять двум условиям, проверяемым интегрированием множества функций $\gamma_i(T)$, $i = 1, n$, на сколь угодно малом промежутке $[T_k, T_k + \Delta T]$:

- а) соблюдение неравенства (2.3),
- б) отсутствие лишних точек пересечения контрольной кривой и гиперплоскости, проведенной через точки с параметрами $\gamma_i(T)$, $i = 1, n$.

Заметим, что рассмотренные выше типы 1 и 2 дают исчерпывающий перечень возможных «дефицитов» корней (4.4) лишь для случая $n = 3$. Обобщением могут быть ситуации, когда для продолжения непрерывной эволюции, согласно замечанию 6, понадобится три и более недостающих точек A_i . На графике функции $u(t)$ это может соответствовать двум и более игольчатым вариациям. Количество возможных сценариев (при разных комбинациях параметров ω_i , $i = 1, n$) бесконечно, поэтому вместо конечного алгоритма речь можно вести лишь об общем подходе к продолжению диаграммы функций оптимального управления. Он заключается в совместном рассмотрении диаграммы и геометрических свойств контрольной кривой.

Т и п 3. Пусть при $T \geq T_k$ у системы (2.2) число корней $j = n + m$, $m \in N$. Тогда эволюция функций $\gamma_i(T)$, $i = 1, n + m$ опишется набором $(n + m)$ дифференциальных уравнений, первые n из которых имеют вид (4.1), а остальные m уравнений получаются дифференцированием по параметру T соотношений вида (2.5), где вместо $(T - t)$ подставлены каждая из m переменных $\gamma_i(T)$, $i = n + 1, n + m$.

5. Результаты численных экспериментов для платформы с тремя осцилляторами.

Пример 1. На рис. 7 для значений $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 5$ показана правая часть диаграммы функций оптимального управления (ее левая часть – зеркальная, но с переменной местами белого и серого цветов). Из вершины O выходят кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ с угловыми коэффициентами, вычисленными по формулам (3.9) (для случая 2) в виде

$$k_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} / 2, \quad k_2 = \sqrt{2} / 2, \quad k_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} / 2. \quad (5.1)$$

Уравнения (4.2), $n = 3$ интегрировались численно с одновременной проверкой отсутствия «лишних» пересечений контрольной кривой с плоскостью, проведенной через точки с параметрами $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$. Процесс завершился при $T_1 = \pi$, $\gamma_1 = \pi / 2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Согласно замечанию 1, для целочисленных значений частот величина $T_* = 2\pi$ является «периодом» повторения формы диаграммы, зеркально удвоенной относительно прямой $T = \pi$ и породившей квадрат. Через его вершину пройдет горизонталь $T = 2\pi$, символизирующая режим с одним моментом переключения управления. Таким образом, рисунок 7 содержит все возможные фрагменты продолжаемой бесконечно диаграммы. При любых значениях T здесь возможны лишь режимы с количествами 1, 3, 7 переключений оптимального управления.

Пример 2. На рис. 8 показана правая (зеркальная) часть диаграммы для случая $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$. Кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ выходят из вершины O с теми же угловыми коэффициентами (5.1), но интегрирование системы завершается уже при $T_1 = \pi / 2$ ввиду обращения в нуль функции $\gamma_3(T)$. Значения $\gamma_1 = 2\pi / 5$, $\gamma_2 = \pi / 5$ при $T_1 = \pi / 2$ удовлетворяют не только системе (2.2), но и необходимым условиям оптимальности в виде замечания 8.

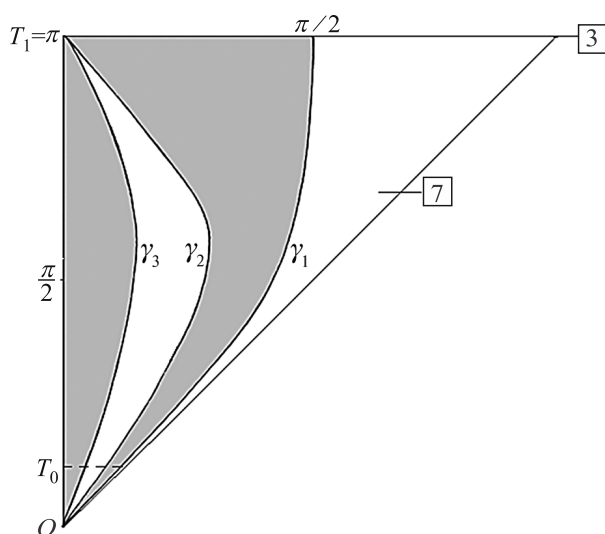


Рис. 7. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 5$

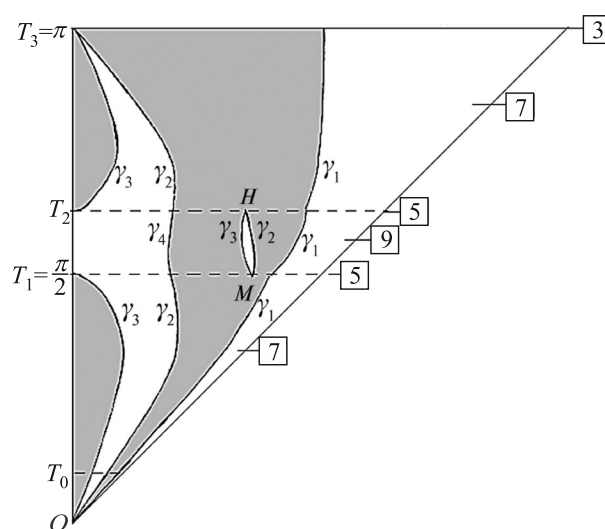


Рис. 8. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 7$

Действительно, пространственная контрольная кривая (рис. 4) имеет проекцию на плоскость (y_1, y_2) в виде рис. 2, на котором проведенная через точки A_1 и A_2 (с параметрами $2\pi/5$ и $\pi/5$) прямая не имеет других пересечений с контрольной кривой. Согласно замечанию 8, этого достаточно, несмотря на то что, например, проекция на плоскость (y_1, y_3) (рис. 3) такому свойству не удовлетворяет.

На горизонтали $T_1 = \pi/2$ наличие лишь двух точек из трех соответствует описанному выше типу 1. Параметр $\gamma_M \approx 1.150466$ третьей точки M найден из условия касания плоскости A_1A_2M с контрольной кривой (эти точки показаны на рис. 4). С увеличением параметра T касательная плоскость превращается в секущую, из пункта M на контрольной кривой выйдут две новые точки. Второй слой диаграммы начинается при перенумерованных значениях переменных $\gamma_1 = 2\pi/5$, $\gamma_2 = \gamma_3 \approx 1.150466$, $\gamma_4 = \pi/5$, причем интегрируется новая система уравнений. Она соответствует типу 3: к трем уравнениям (4.1) добавится четвертое, полученное дифференцированием по параметру T соотношения (2.5) при $n = 3$, куда вместо $(T - t)$ подставляется γ_4 . Результирующая система разрешится относительно производных в виде

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{R_i}{R}, \quad i = \overline{1,4},$$

$$R = 2(\mu_1 V_{234} + \mu_2 V_{134} + \mu_3 V_{124} + \mu_4 V_{123}) / T, \quad \mu_i = G_i / \gamma_i^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad (5.2)$$

$$R_1 = (\mu_2 V_{034} + \mu_3 V_{024} + \mu_4 V_{023}) / \gamma_1, \quad R_2 = (-\mu_1 V_{034} + \mu_3 V_{014} + \mu_4 V_{013}) / \gamma_2,$$

$$R_3 = (-\mu_1 V_{024} - \mu_2 V_{014} + \mu_4 V_{012}) / \gamma_3, \quad R_4 = (-\mu_1 V_{023} - \mu_2 V_{013} - \mu_3 V_{012}) / \gamma_4.$$

Здесь использованы столбцы $\mathbf{g}_i = (\psi(\omega_1 \gamma_i), \psi(\omega_2 \gamma_i), \psi(\omega_3 \gamma_i))^T$, $i = \overline{1,4}$ и столбец $\mathbf{g}_0 = (\psi(\omega_1 T), \psi(\omega_2 T), \psi(\omega_3 T))^T$. Определитель третьего порядка G_i , $i = \overline{1,4}$ получается из определителя $G = \|(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)(\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)(\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_4)\|$ формальной заменой $\mathbf{g}_i$ на столбец $\mathbf{h}_i = (\cos(\omega_1 \gamma_i), \cos(\omega_2 \gamma_i), \cos(\omega_3 \gamma_i))^T$, $i = \overline{1,4}$, а все определители $V_{ijk} = \|(\mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j)(\mathbf{g}_k)\|$ составлены из столбцов с возрастающими номерами.

Интегрирование системы (5.2) завершается при $T_2 \approx 1.982313$ ввиду совпадения значений функций $\gamma_3(T)$ и $\gamma_2(T)$. Их графики на диаграмме (рис. 8) пересекаются в вершине H «чечевицы», начатой вверх из точки M . На контрольной кривой в исчезающей «сдвоенной» точке $\gamma_2 = \gamma_3 \approx 1.0760698$ пройдет момент касания с гиперплоскостью, после чего оставшаяся точка A_1 ($\gamma_1 \approx 1.459590$) сохранит имя, а A_4 ($\gamma_4 \approx 0.624976$) переименуется в A_2 . В роли третьей точки A_3 далее выступит K_0 ($\gamma_3 = 0$), поскольку, как показывает численная проверка, только такая плоскость $A_1A_2A_3$ не пересекает контрольной кривой в других точках. При $T_2 > 1.982313$ эволюция функций $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ находится интегрированием уравнений (4.2) при $n = 3$. Этот третий слой завершается значениями $T_3 = \pi$, $\gamma_1 = \pi/2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ и является последним на диаграмме (рис. 8). В каждом слое диаграммы цифрой указано соответствующее количество переключений управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$.

Пример 3. На рис. 9 показана правая (зеркальная) часть диаграммы для случая $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\omega_3 = 13$. Сюжет подобран для иллюстрации ситуации типа 2, поскольку система (2.2) заведомо допускает решение $T = \pi/2$, $\gamma_1 = \pi/3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Здесь вновь кривые $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$, $\gamma_3(T)$ выходят из вершины O с теми же угловыми коэффициентами (5.1), но интегрирование системы (4.2) завершается при $T_1 \approx 0.946912$, где $\gamma_3(T_1) = 0$. В этот момент на контрольной кривой точка A_3 совместится с K_0 . К двум оставшимся точкам A_1 и A_2 (тип 1) далее добавится третья — после отыскания параметра $\gamma_R \approx 0.690766$ точки R касания контрольной кривой и плоскости A_1A_2R . Во втором слое диаграммы интегрирование системы (5.2) завершается при $T_2 \approx 1.146912$ ввиду $\gamma_4(T_2) = 0$. В третьем слое интегрируется система (4.2) при $n = 3$, пока не произойдет пересечение кривых $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$ в точке P . На горизонтали $T_3 = \pi/2$ остается лишь одна точка ($\gamma_1 = \pi/3$) вместо трех. Для отыскания новой точки L по описанной выше схеме (см. тип 2) составляем систему уравнений (4.1) с заменой $x = \dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_3$ в виде

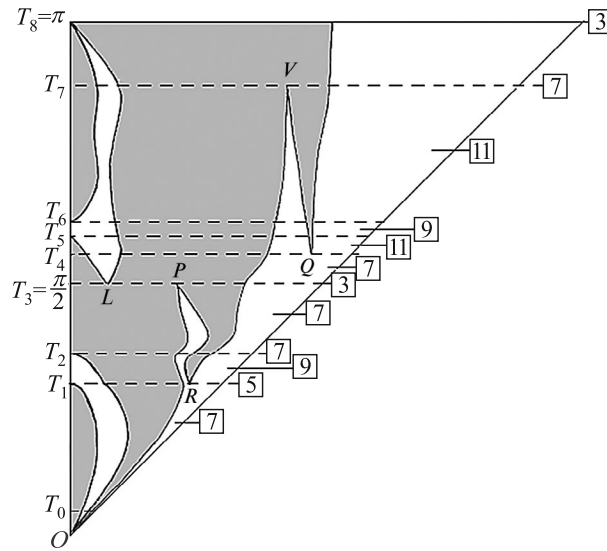


Рис. 9. Правая (зеркальная) часть диаграммы для $n = 3$ при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\omega_3 = 13$

$$\dot{\gamma}_i \sin\left(\frac{\omega_i \pi}{3}\right) - x \sin(\omega_i \gamma_L) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\omega_i \pi}{2}\right), \quad i = \overline{1,3}. \quad (5.3)$$

Подставляя значения $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\omega_3 = 13$, исключим из системы переменные $\dot{\gamma}_1$ и x , получая уравнение $\sin(\gamma_L) = \sin(13\gamma_L)$. В актуальном диапазоне ($0 < \gamma_L < \pi/2$) оно имеет пять корней, из которых только $\gamma_L \approx 0.2243995$ удовлетворяет одновременно условиям а) и б), упомянутым в комментариях (см. тип 2).

В четвертом слое диаграммы (рис. 9) из точки L выходят кривые $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$, которые вместе с $\gamma_1(T)$ определяются интегрированием системы (4.2) при $n = 3$. Процесс прерывается при $T_4 \approx 1.736850$, когда контрольная кривая касается плоскости $A_1 A_2 A_3$ в дополнительной точке Q с параметром $\gamma_Q \approx 1.466848$. На диаграмме в пятом слое из точки R выходят две новые кривые, поэтому к трем уравнениям (4.1) добавятся четвертое и пятое, полученные дифференцированием по параметру T соотношения (2.5) при $n = 3$, куда вместо $(T - t)$ подставляются соответственно γ_4 и γ_5 . Результирующая система сводится к виду

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{H_i}{H}, \quad i = \overline{1,5},$$

$$H = 2 \left[\begin{aligned} &V_{345}(\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) + \\ &+ V_{245}(\mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3) + V_{145}(\mu_3 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_3) + \\ &+ \mu_4(\lambda_1 V_{235} + \lambda_2 V_{135} + \lambda_3 V_{125}) - \\ &- \lambda_5(\mu_1 V_{234} + \mu_2 V_{134} + \mu_3 V_{124} + \mu_4 V_{123}) \end{aligned} \right] / T,$$

$$\mu_i = G_i / \gamma_i^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad \lambda_i = F_i / \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 5, \quad (5.4)$$

$$H_1 = \left[\begin{aligned} &V_{045}(\mu_3 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_3) + \\ &+ \mu_4(\lambda_2 V_{035} + \lambda_3 V_{025}) - \\ &- \lambda_5(\mu_2 V_{034} + \mu_3 V_{024} + \mu_4 V_{023}) \end{aligned} \right] / \gamma_1,$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= \left[\begin{array}{l} V_{045}(\mu_1\lambda_3 - \mu_3\lambda_1) + \\ + \mu_4(-\lambda_1V_{035} + \lambda_3V_{015}) - \\ - \lambda_5(-\mu_1V_{034} + \mu_3V_{014} + \mu_4V_{013}) \end{array} \right] / \gamma_2, \\
H_3 &= \left[\begin{array}{l} V_{045}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + \mu_4(-\lambda_1V_{025} - \lambda_2V_{015}) - \\ - \lambda_5(-\mu_1V_{024} - \mu_2V_{014} + \mu_4V_{012}) \end{array} \right] / \gamma_3, \\
H_4 &= \left[\begin{array}{l} V_{035}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + V_{025}(\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) + \\ + V_{015}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) - \\ - \lambda_5(-\mu_1V_{023} - \mu_2V_{013} - \mu_3V_{012}) \end{array} \right] / \gamma_4, \\
H_5 &= \left[\begin{array}{l} V_{034}(\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2) + \\ + V_{024}(\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) + \\ + V_{014}(\mu_3\lambda_2 - \mu_2\lambda_3) + \\ + \mu_4(\lambda_1V_{023} + \lambda_2V_{013} + \lambda_3V_{012}) \end{array} \right] / \gamma_5.
\end{aligned}$$

Здесь к ранее введенным в (5.2) столбцам $\mathbf{g}_i$, $i = \overline{0,4}$ добавлен новый $\mathbf{g}_5 = (\psi(\omega_1\gamma_5), \psi(\omega_2\gamma_5), \psi(\omega_3\gamma_5))^T$. Определитель третьего порядка F_i , $i = 1, 2, 3, 5$ получается из определителя $F = \|(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)(\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)(\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_5)\|$ формальной заменой $\mathbf{g}_i$ на столбец $\mathbf{h}_i = (\cos(\omega_1\gamma_i), \cos(\omega_2\gamma_i), \cos(\omega_3\gamma_i))^T$, $i = 1, 2, 3, 5$, а все определители $V_{ijk} = \|(\mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j)(\mathbf{g}_k)\|$ составлены из столбцов с возрастающими номерами.

Интегрирование системы (5.4) завершается при $T_5 \approx 1.853483$ ввиду обращения в нуль переменной $\gamma_5(T_5) = 0$. В шестом слое диаграммы интегрируется система четвертого порядка (5.2) до того момента, когда при $T_6 \approx 1.933983$ контрольная кривая пересечется в точке K_0 ($\gamma_5 = 0$) плоскостью, проходящей через A_1, A_2, A_3 и A_4 . Далее в седьмом слое диаграммы интегрируется система пятого порядка (5.4) до тех пор, как при $T_7 \approx 2.756850$ в точке V пересекутся кривые $\gamma_2(T)$ и $\gamma_3(T)$. Оставшиеся три кривые в восьмом слое определяются интегрированием системы (4.2) при $n = 3$. Завершается диаграмма (рис. 9) горизонталью $T_8 = \pi$.

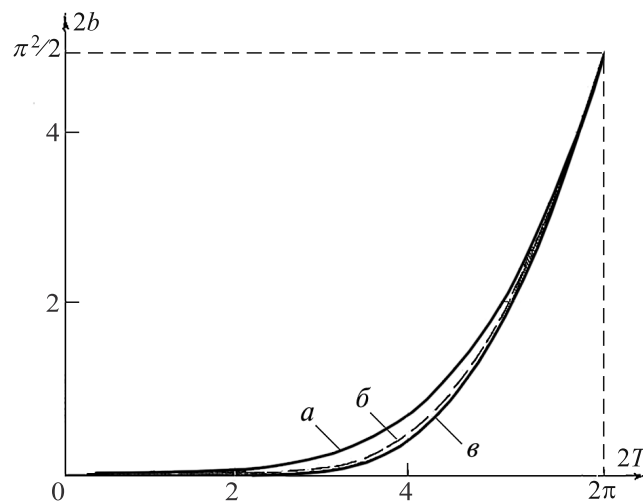


Рис. 10. Зависимость дальности $2b$ от времени $2T$ для разных сочетаний параметров

В примерах 1–3 были числа ω_i , $i = \overline{1,3}$ – целые нечетные, поэтому при $T = \pi$ система (2.2) допускает решение $\gamma_1 = \pi/2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Можно показать (разложением слагаемых этой системы в ряды Тейлора), что на диаграмме в окрестности горизонтали $T = \pi$ во всех трех примерах значения производных будут $\dot{\gamma}_1 = 0$, $\dot{\gamma}_2 = -\sqrt{3}/2$, $\dot{\gamma}_3 = -1/2$. Практически идентичными выглядят и малые окрестности вершины O , поскольку совпадают угловые коэффициенты выходящих из нее линий. На каждой диаграмме пунктиром помечена своя горизонталь на уровне T_0 (2.8), который давал (явно заниженную) оценку диапазона, где гарантировались режимы с n переключениями управления на полутраектории.

Поскольку на рис. 7–9 диаграммы завершаются одинаково при $T = \pi$, $\gamma_1 = \pi/2$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, то одинаковы и значения соответствующей «полудальности» $b = \pi^2/4$ по формуле (3.17).

На рис. 10 показаны зависимости дальности $2b$ перемещения платформы от времени $2T$ движения. Примерам 1, 2 и 3 соответствуют кривые a , b и a .

Заключение. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию перемещения (на заданное расстояние) платформы с n осцилляторами из одного состояния покоя в другое. Предложенная схема построения диаграммы функций оптимального управления стала естественным обобщением ранее изученного в [12] случая $n = 2$. Общий подход заключается в совместном рассмотрении диаграммы и геометрических свойств контрольной кривой в n -мерном пространстве. Для малых перемещений платформы функция оптимального управления оказалась кусочно-постоянной с n моментами переключения на полутраектории. Неочевидным оказалось то, что они почти не зависят от соотношения собственных частот осцилляторов. Например, на диаграммах с разными сочетаниями параметров ω_1 , ω_2 , ω_3 (рис. 7–9) окрестности вершины O практически идентичны в диапазоне $T < T_0$, вычисленном по формуле (2.8) для $\omega_3 = 13$ (рис. 9). Поэтому, в частности, можно считать завершенным решение исходной задачи в постановке [1], где платформа с n маятниками рассматривалась в линейном приближении, а значит, в предположении о малости перемещений. Для нее итогом исследования будет утверждение о количестве переключений оптимального управления, равном $(2n + 1)$, а функции управления заимствуются из нижней части соответствующей диаграммы, согласно утверждению 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
3. Мамалыга В.М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
4. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.
5. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270.
6. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
7. Ovsievich A.A. Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // JOTA. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
8. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
9. Ананьевский И.М. Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.
10. Ананьевский И.М., Овсеевич А.И. Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 18–26.
11. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т.85. Вып. 6. С. 699–718.
12. Каюмов О.Р. Диаграммы функций оптимального управления в задаче наивысшего перемещения платформы с двумя осцилляторами // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 66–83.
13. Kayumov O.R. On the Properties of the Time-Optimal Movement of a Platform with Oscillators // Proceedings of 16th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2022. Moscow, 2022. С. 9807541.