

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ КВАНТИЛЬНОГО КРИТЕРИЯ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ И ГАУССОВСКОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

© 2024 г. В. Н. Нефедов^а, *

^аМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Решение многих практических задач приводит к вычислению значений вероятностных критериев, наиболее распространенными из которых являются функционалы квантили и вероятности. Известно, что при достаточно общих предположениях методы, пригодные для решения задач нахождения значений вероятностного критерия, могут быть использованы для решения задачи квантильного анализа. Предлагаемый метод решения задачи квантильного анализа опирается на метод численного многомерного интегрирования, описанный в предыдущих работах автора. Одним из важных свойств этого метода интегрирования является универсальность (при его применении можем задавать произвольное количество переменных n и произвольное количество линейных ограничений r). Единственным ограничением является случай неприемлемо большого времени решения. Тем самым указанная универсальность переносится и на решение рассматриваемой задачи квантильного анализа.

Ключевые слова: квантильный анализ, функционал вероятности, метод численного многомерного интегрирования

DOI: 10.31857/S0002338824020021, EDN: VOTPPQ

ON A NUMERICAL ESTIMATION METHOD WITH A GIVEN ACCURACY OF A QUANTILE CRITERION IN THE CASE OF A PIECE-LINEAR LOSS FUNCTION AND A GAUSSIAN PROBABILITY DENSITY

V. N. Nefedov^а, *

^аMoscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

The solution of many practical problems leads to the calculation of the values of probabilistic criteria, the most common of which are the quantile and probability functionals. It is known that, under fairly general assumptions, methods suitable for solving problems of finding the values of a probabilistic criterion can be used to solve the problem of quantile analysis. The proposed method for solving the problem of quantile analysis is based on the use of the method of numerical multidimensional integration described in the previous works of the author. One of the important properties of this integration method is universality (when using it, we can set an arbitrary number of variables n and an arbitrary number of linear constraints r). The only limitation is the case of an unacceptably long solution time. Thus, the indicated universality is transferred to the solution of the considered problem of quantile analysis.

Keywords: quantile analysis, probability functional, method of numerical multidimensional integration

Введение. Решение многих практических задач приводит к вычислению значений вероятностных критериев. Наиболее распространенными вероятностными критериями

качества технических систем при случайных воздействиях являются функционалы квантили [1] и вероятности. Квантильный критерий может характеризовать точность системы управления при случайных возмущениях [1], гарантированную площадь взлетно-посадочной полосы, на которую летательный аппарат садится с заданной вероятностью в условиях ветровых помех [2] и т.д. Функционал вероятности характеризует обычно вероятность выполнения условий рассматриваемой задачи.

Как установлено в [1], при достаточно общих предположениях методы, пригодные для решения задач нахождения значений вероятностного критерия, могут быть использованы для решения задачи квантильного анализа.

Во многих случаях нахождение значения вероятностного критерия сводится к вычислению многомерного интеграла от плотности вероятности некоторого случайного вектора по заданному множеству, что представляет собой сложную вычислительную задачу [1]. Применение традиционных методов решения этой задачи (см., например, [3–5]), таких, как прямое интегрирование плотности вероятности или метод Монте-Карло, при высоких требованиях к точности получаемого результата приводит к недопустимо большим вычислительным затратам.

Таким образом, нахождение значения вероятностного критерия, а также решение задачи квантильного анализа упирается в разработку численных методов многомерного интегрирования с любой желаемой точностью. Понятно, что размерность n решаемой задачи будет невелика. Автором был проведен численный эксперимент при $n = 5$. В случае когда подынтегральная функция является плотностью нормального распределения, множеством интегрирования является многогранник, заданный несколькими линейными ограничениями (количество линейных ограничений в используемом методе не имеет большого значения), приближенное значение интеграла $I = 0.785685556863937$ было вычислено с абсолютной погрешностью $\delta = 0.000498\dots$ (см. ниже пример 1). Соответственно, относительная погрешность составила 0.0634%. При этом применялся численный метод интегрирования, описанный в работах [6–9], являющийся универсальным в том смысле, что мы можем задавать произвольное количество переменных n и произвольное количество линейных ограничений r , но при этом при больших n время счета может оказаться неприемлемо большим.

Задача многомерного интегрирования с заданной точностью рассматривалась и в других публикациях, в частности в работе [12], в которой предлагаются методы, не обладающие указанным свойством универсальности. Например, случай, когда множеством интегрирования является многогранник, описан в [12] для максимального значения $n = 3$, а в случае эллипсоида – для $n = 2$. Между тем в [6] (см. табл. 1, 2 из этой работы), приводятся результаты численного эксперимента для эллипсоида при $n = 3$ (а сам метод универсален для любого n).

Предлагаемый в этой статье метод решения задачи квантильного анализа основан на применении метода численного многомерного интегрирования, описанного в [6–9], использующего последовательное k -этапное дробление исходного “внешнего” (для заданного подынтегрального множества) куба на кубы, получаемые последовательным делением ребер кубов пополам. Краткое описание этого метода приводится в разд. 1. В разд. 2 представлены основные определения и используемые в настоящей работе обозначения, связанные с функцией квантили. В разд. 3 приводятся некоторые вспомогательные методы и алгоритмы, связанные с рассматриваемым в этой работе кусочно-линейным случаем для целевой функции. В разд. 4 предлагается алгоритм вычисления с заданной точностью функции квантили, основанный на алгоритме вычисления многомерного интеграла с помощью последовательного k -этапного дробления исходного “внешнего” куба. Приводится его обоснование, а также весьма оптимистическая оценка для основного параметра алгоритма – k , т.е. количества этапов дробления, необходимого для достижения требуемой точности вычисления $\varepsilon > 0$. В зависимости от использования модификации алгоритма интегрирования (см. разд. 1) эта оценка имеет вид $k \leq C_1 - 0.5 \log_2 \varepsilon$ (с помощью 1-го наиболее простого метода интегрирования) или $k \leq C_2 - (\log_2 \varepsilon) / 3$ (с помощью 2-го более сложного метода интегрирования), где C_1, C_2 – некоторые константы (которые можно приблизительно оценить уже в самом начале процесса вычислений). Замечательно, что в этих оценках не присутствует число n – размерность задачи. Для получения этих оценок применялось геометрическое неравенство (4.6). В разд. 5 описываются некоторые свойства выпуклых многогранников, необходимые для обоснования этого неравенства.

1. Численный метод многомерного интегрирования с заданной точностью в случае кусочно-линейной функции потерь и гауссовской плотности вероятности. Укажем лишь общие идеи метода, который будем далее называть алгоритмом 1. Все необходимые детали можно

найти в работах [6–9]. Рассматривается задача приближенного вычисления с заданной точностью интеграла:

$$I = \int_X \varphi_n(x) dx, \tag{1.1}$$

где $\varphi_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$,

$$X = \{x \in \Pi \mid l_1(x) \leq 0, \dots, l_r(x) \leq 0\}, \text{int} X \neq \emptyset,$$

$$l_i(x) = \langle e^i, x \rangle + d_i, e^i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, |e^i| \neq 0, i = \overline{1, r}, \tag{1.2}$$

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b, i = \overline{1, n}\}, a < b. \tag{1.3}$$

Этот метод использует некоторые идеи метода ветвей и границ, применяемого в алгоритмах дискретной оптимизации (см., например, [10]).

В замечании 2 из [6] говорится о том, что куб Π может иметь более общий вид $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$, т.е. являться n -мерным координатным параллелепипедом (будем кубы или параллелепипеды, заданные указанным образом, называть координатными). Однако программная реализация предлагаемого в [6–9] метода оказывается наиболее экономичной (см., например, [6, С. 57]) в случае (1.3). Действительно, в этом случае можно заранее создать одномерный массив $\Phi(a, b, k)$ значений функции

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt, \tag{1.4}$$

где $y \in \mathbb{R}$, на равномерной сетке $S(a, b, k) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = s_i(a, b, k) \triangleq a + i(b - a)2^{-k}, i = \overline{0, 2^k}\}$ (т.е. $\Phi(a, b, k) = \{\Phi(s_i(a, b, k)), i = \overline{0, 2^k}\}$), и тогда многие вспомогательные задачи интегрирования будут решаться путем выбора соответствующих элементов из этого массива и совершения над ними арифметических действий (умножения, сложения и т.д.).

Алгоритм 1 основан на многоэтапном дроблении куба Π . Для этого выбирается k – количество этапов дробления. Точность приближенного вычисления интеграла (1.1) непосредственно зависит от величины количества этапов дробления k . Обозначим через \tilde{I} – приближенное значение интеграла (1.1), вычисленное с помощью алгоритма 1, δ – достигаемая при выбранном k точность вычисления, при этом после окончания работы алгоритма для приближенного значения интеграла выполняется

$$\tilde{I} \leq I \leq \tilde{I} + \delta. \tag{1.5}$$

Сначала присваиваем $\tilde{I} = 0$, $\delta = 0$ и дробим исходный куб Π на 2^n кубов (делением ребер куба Π пополам), которые назовем кубами первого этапа дробления (соответственно, кубы, являющиеся элементами аналогичного дробления кубов первого этапа дробления, назовем кубами второго этапа дробления и т.д.). На каждом этапе $j = \overline{1, k}$ перебираем кубы Q j -го этапа дробления и проверяем выполнение условия “погружения”:

$$Q \subseteq X. \tag{1.6}$$

Если (1.6) справедливо, то полагаем $\tilde{I} := \tilde{I} + I_Q$, где

$$I_Q = \int_Q \varphi_n(x) dx,$$

и исключаем куб Q из дальнейшего рассмотрения. В нашем случае с линейными ограничениями проверка условия (1.6) осуществляется точно и достаточно экономично (см. [9, С. 1114–1115]) и в случае (1.6) вычисление интеграла I_Q осуществляется за $O(n)$ арифметических операций с использованием заготовленного массива $\Phi(a, b, k)$ (см. [9, С. 1114]). В противном случае проверяем выполнение условия “отсечения”:

$$X \cap \text{int}Q = \emptyset. \quad (1.7)$$

Если (1.7) справедливо, то исключаем куб Q из дальнейшего рассмотрения и переходим к очередному кубу j -го этапа дробления (см. ниже замечание 1); если все кубы j -го этапа дробления исчерпаны, то переходим к очередному кубу Q ($j-1$)-го этапа дробления (пока еще $j-1 \geq 1$) и т.д. Если же все кубы первого этапа дробления исчерпаны, то конец работы алгоритма.

Если для очередного куба Q (некоторого j -го этапа дробления) не выполняется ни условие погружения (1.6), ни условие отсечения (1.7), то осуществляем дальнейшее дробление этого куба, а в случае $j = k$ полагаем

$$\delta := \delta + I_Q. \quad (1.8)$$

Нетрудно показать (см. утверждение 1 из [7, С. 45]), что одновременное невыполнение условий погружения (1.6) и отсечения (1.7) для некоторого координатного куба $Q \subseteq \Pi$ равносильно тому, что $\partial X \cap \text{int}Q \neq \emptyset$, где ∂X – граница множества X .

После выполнения алгоритма справедливо равенство

$$\delta = \sum_{\partial X \cap \text{int}Q \neq \emptyset} \int_Q \varphi_n(x) dx \quad (1.9)$$

(здесь суммирование осуществляется по всем кубам Q k -го (т.е. последнего) этапа дробления, для которых не выполняется ни условие отсечения, ни условие погружения).

З а м е ч а н и е 1. В [8, 9] трудоемкая проверка условия отсечения (1.7) заменена на достаточное для (1.7) гораздо менее трудоемкое условие (см. условие (3.4) из [9]).

З а м е ч а н и е 2. В приведенном описании алгоритма 1 даны лишь общие идеи и опущены технические детали, позволяющие модифицировать этот алгоритм для уменьшения погрешности δ . Например, в [8, 9] формула присвоения (1.8) уточняется. Для этого вычисляются верхняя и нижняя оценки для величины

$$I_{Q \cap X} = \int_{Q \cap X} \varphi_n(x) dx$$

и вместо I_Q к δ прибавляется разность между верхней и нижней оценками. Одновременно с этим нижняя оценка прибавляется к \tilde{I} . В [8, 9] приведены две модификации для приближенного вычисления $I_{Q \cap X}$ с разными порядками точности. Пусть $\tau = T / 2^{k+1}$, где $T = b - a$ – длина ребер куба Π , т.е. τ – половина длины ребер кубов k -го (последнего) этапа дробления куба Π . В первой модификации для результирующего значения δ выполняется $\delta = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$ (метод второго порядка точности), а во второй гораздо более сложной модификации $\delta = O(\tau^3)$ при $\tau \rightarrow 0$ (метод третьего порядка точности). Первая модификация была реализована на компьютере (см. ниже пример 1, из которого видно, что при увеличении k на единицу (соответственно, при уменьшении τ в 2 раза) δ уменьшается приблизительно в 4 раза).

З а м е ч а н и е 3. Для уменьшения времени работы алгоритма возможно распараллеливание. Например, всякий раз при дроблении любого куба $(k-1)$ -го этапа дробления на кубы k -го этапа дробления можно параллельно решать 2^n подзадач (для каждого куба Q k -го этапа дробления) проверки выполнения условий (1.6), (1.7) и в случае невыполнения этих условий – вычисления верхней и нижней оценок для $I_{Q \cap X}$ (см. замечание 2). Можно провести распараллеливание по-другому принципу: параллельно вычислять значения интегралов $I_{Q \cap X}$ для 2^n кубов Q первого этапа дробления с последующим сложением результатов, т.е. приближенных значений интегралов. Используя равенство (1.9), нетрудно показать, что при этом сумма погрешностей при вычислении интегралов $I_{Q \cap X}$ даст точную погрешность в случае вычисления без распараллеливания всего интеграла I . Такие распараллеливания могут значительно уменьшить общее время счета.

З а м е ч а н и е 4. Поскольку множество X ограничено, то, решая соответствующие задачи линейного программирования (ЗЛП), можно определить $a_i = \min \{x_i \mid x \in \Pi, l_j(x) \leq 0, j = \overline{1, r}\}$,

$b_i = \max \{x_i \mid x \in \Pi, l_j(x) \leq 0, j = \overline{1, r}\}, i = \overline{1, n}$ и тем самым сузить куб Π до параллелепипеда $\Pi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$, где $a \leq a_i, b_i \leq b, i = \overline{1, n}$, и при этом $X \subseteq \Pi_0 \subseteq \Pi$, откуда $X = X \cap \Pi_0 = \{x \in \Pi_0 \mid l_j(x) \leq 0, j = \overline{1, r}\}$. Более того, можно считать, что числа a_i, b_i являются узлами сетки $S(a, b, k)$ (наиболее близкими к точным их значениям), поскольку при любых $\tilde{a}_i \in [a, a_i], \tilde{b}_i \in [b_i, b], i = \overline{1, n}$, очевидно, снова выполняется $X \subseteq \tilde{\Pi}_0 \subseteq \Pi$, где $\tilde{\Pi}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}_i \leq x_i \leq \tilde{b}_i, i = \overline{1, n}\}$, откуда $X = X \cap \tilde{\Pi}_0 = \{x \in \tilde{\Pi}_0 \mid l_j(x) \leq 0, j = \overline{1, r}\}$. Тогда, следуя [8], алгоритм 1 можно модифицировать следующим образом. Снова последовательно дробим куб Π . Но теперь для каждого текущего куба Q перед проверкой условий (1.6), (1.7) проверяем выполнение условия $\Pi_0 \cap \text{int}Q = \emptyset$ (осуществляется за $O(n)$ арифметических операций). Если это условие верно, то исключим Q из дальнейшего рассмотрения и перейдем к анализу очередного куба. В противном случае действуем согласно алгоритму 1. Такая модификация позволит за незначительное время отсечь “лишние” области в кубе Π по сравнению с параллелепипедом Π_0 . Кроме того, условие погружения (1.6) можно теперь ослабить, заменив его на $Q \cap \Pi_0 \subseteq X$ (проверяется аналогично (1.6)), в случае выполнения которого присваиваем $\tilde{I} := \tilde{I} + I_{Q \cap \Pi_0}$, где

$$I_{Q \cap \Pi_0} = \int_{Q \cap \Pi_0} \varphi_n(x) dx.$$

При этом $Q \cap \Pi_0$ – координатный параллелепипед, координаты вершин которого являются элементами сетки $S(a, b, k)$. Но тогда значение интеграла $I_{Q \cap \Pi_0}$ легко вычисляется, используя элементы массива $\Phi(a, b, k)$. Аналогичным образом можно ослабить и условие отсечения, заменяя в нем Q на $Q \cap \Pi_0$.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что процесс нахождения величины \tilde{I} , удовлетворяющей (1.5) для заданного $\delta > 0$, является, вообще говоря, многошаговым. Нам редко удастся сразу “угадать” требуемое количество этапов дробления k . Начинаем с некоторого $k = k_0 \geq 2$, а затем увеличиваем значение k до достижения (1.5) для заданного δ . При этом следует отметить три момента. Во-первых, при увеличении k на 1 можно снова использовать $\Phi(a, b, k)$, поскольку $S(a, b, k) \subset S(a, b, k + 1)$, $\Phi(a, b, k) \subset \Phi(a, b, k + 1)$ (в $\Phi(a, b, k + 1)$ помимо элементов из $\Phi(a, b, k)$ войдут значения функции $\Phi(y)$ в серединах отрезков, соединяющих каждые из двух последовательных членов из $S(a, b, k)$). Во-вторых, применив алгоритм 1 при некотором начальном $k = k_0 \geq 2$, можно в процессе работы этого алгоритма определять для всякого куба Q (любого этапа дробления), для которого было выполнено условие погружения (1.6), а также для всех кубов последнего k -го этапа дробления, для которых не было выполнено условие отсечения (1.7) (объединение указанных кубов покрывает X), минимальный номер $j_{\min}(k_0) \in \{1, 2^{k_0} + 1\}$ и максимальный номер $j_{\max}(k_0) \in \{1, 2^{k_0} + 1\}$ элементов сетки $S(a, b, k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}(k_0) = s_{j_{\min}(k_0)}(a, b, k_0), \tilde{b}(k_0) = s_{j_{\max}(k_0)}(a, b, k_0)$. Тогда выполняется включение $X \subseteq \tilde{\Pi}(k_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}(k_0) \leq x_i \leq \tilde{b}(k_0), i = \overline{1, n}\}$. Таким образом, в случае применения алгоритма 1 для $k = k_0 + 1$ можно теперь в качестве куба Π взять куб $\tilde{\Pi}(k_0)$ (при этом $\tilde{\Pi}(k_0) \subseteq \Pi$). Более того, следуя замечанию 4, можно в процессе работы алгоритма 1 для тех же кубов определять по каждой координате x_i минимальный $j_{\min}^{(i)}(k_0) \in \{1, 2^{k_0} + 1\}$ и максимальный $j_{\max}^{(i)}(k_0) \in \{1, 2^{k_0} + 1\}$ номера элементов сетки $S(a, b, k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}_i(k_0) = s_{j_{\min}^{(i)}(k_0)}(a, b, k_0), \tilde{b}_i(k_0) = s_{j_{\max}^{(i)}(k_0)}(a, b, k_0)$,

$i = \overline{1, n}$. Тогда верно включение $X \subseteq \tilde{\Pi}_0(k_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}_i(k_0) \leq x_i \leq \tilde{b}_i(k_0), i = \overline{1, n}\}$. Таким

образом, при выполнении алгоритма 1 при $k \geq k_0 + 1$ можем теперь применить модификацию этого алгоритма в соответствии с замечанием 4 (минуя необходимость дополнительного решения указанных в этом замечании ЗЛП). В-третьих, может также возникнуть следующая ситуация, которую поясним на примере. Предположим, что $k_0 = 6$ и соответственно в сетке $S(a, b, k_0)$ содержится $2^{k_0} + 1 = 65$ элементов. Пусть в результате работы алгоритма 1 при $k = k_0 = 6$ оказалось, что $j_{\min}(k_0) = 11$, $j_{\max}(k_0) = 26$, т.е. имеем, $26 - 11 + 1 = 16$ “активных” членов сетки $S(a, b, k_0)$. Это указывает на то, что полученные значения \tilde{I}, δ в результате применения алгоритма 1 при количестве этапов дробления $k = k_0 = 6$ к рассматриваемой задаче с использованием куба Π , удовлетворяющего (1.3), дают одинаковый результат, если бы вместо куба Π применялся куб $\tilde{\Pi} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_{11}(a, b, k_0) \leq x_i \leq s_{27}(a, b, k_0), i = \overline{1, n}\}$ (здесь $27 = 11 + 2^4$, 4 – минимальный показатель степени l , при котором $11 + 2^l \geq 26$), при количестве этапов дробления $k = \tilde{k}_0 = 4$ (вместо $k = k_0 = 6$). В связи с этим в этом примере можно для дальнейшего уменьшения δ использовать алгоритм 1, применяя $\tilde{\Pi}$ вместо Π при количестве этапов дробления $\tilde{k}_0 + 1 = 5$ вместо $k_0 + 1 = 7$, что может дать существенное сокращение объема вычислений. Здесь используется простое утверждение, заключающееся в том, что значения величин \tilde{I}, δ однозначно определяются множеством кубов последнего этапа дробления, для которых либо верно условие погружения (в том числе, в случае его выполнения для некоторого куба меньшего этапа дробления, в котором он содержится), либо в случае одновременного невыполнения ни условия погружения, ни условия отсечения. В приведенном примере в обоих рассматриваемых случаях множества этих кубов совпадают (несмотря на отличие в максимальном количестве этапов дробления в каждом из этих случаев).

П р и м е р 1. Автором была составлена программа для вычисления интеграла I вида (1.1) для случая, когда X – многогранник, реализующая метод второго порядка точности. Рассматривался пример, когда $n = 5$,

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \Pi \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 7 \leq 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 8 \leq 0, \\ &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 9 \leq 0, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 7 \leq 0\}, \\ \Pi &= \{x \in \mathbb{R}^5 \mid -2 \leq x_i \leq 2, i = \overline{1, 5}\}, \end{aligned}$$

т.е. при $r = 4$. Результаты вычислений величин $\tilde{I}, \tilde{I} + \delta, \delta$, удовлетворяющих (1.5), приведены в табл. 1 при различных $k = 4, 5, 6$. Из этой таблицы видно, что погрешность δ уменьшается примерно в 4 раза при каждом увеличении k на 1.

Таблица 1

k	\tilde{I}	$\tilde{I} + \delta$	δ
4	0.781744375667924	0.792289376178296	0.0105450005103716
5	0.784924691133069	0.787097696396805	0.00217300526373691
6	0.785685556863937	0.786183881161937	0.00049832429799992

2. Функция квантили. Пусть

$$F(t) = P_t = P(\Psi(\xi) \leq t) = \int_{\Psi(x) \leq t} f(x) dx,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t\} \neq \emptyset$, $\Psi(x)$ – целевая функция, например кусочно-линейная (как всюду в этой статье), квадратичная (как в статье [8]) или возможны другие случаи, $f(x)$ –

плотность вероятности вектора случайных факторов ξ , а следовательно, $\forall x \in \mathbb{R}^n \ f(x) \geq 0$. В этой статье всюду в дальнейшем $f(x) = \varphi_n(x)$.

Обозначим $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t\}$. Функцией квантили (quantile function) называется функция

$$q(\alpha) = \inf\{t \mid P_t \geq \alpha\} = \inf\left\{t \mid \int_{\Psi(x) \leq t} f(x) dx \geq \alpha\right\} = \inf\left\{t \mid \int_{X(t)} f(x) dx \geq \alpha\right\}.$$

В сделанных обозначениях

$$F(t) = \int_{X(t)} f(x) dx.$$

Тогда $q(\alpha) = \inf\{t \mid F(t) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in (0, 1)$ – заданная доверительная вероятность. Предполагается, что $F(t)$ – непрерывная функция при всех $t \in \mathbb{R}$, таких, что $X(t) \neq \emptyset$ (в рассматриваемом кусочно-линейном случае с ограниченными множествами $X(t), t \in \mathbb{R}$ это условие очевидным образом выполняется). В любом случае $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, такого, что $X(t_0) \neq \emptyset$, для любых $t, t' \geq t_0$ справедливо $t' \geq t \Rightarrow X(t') \supseteq X(t) \Rightarrow F(t') \geq F(t)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $F(t)$ монотонно не убывает и непрерывна при $t \geq t_0$ (где t_0 – любое число, такое, что $X(t_0) \neq \emptyset$), а следовательно, в случае, если

$$\exists t_1, \bar{t}_1 \in \mathbb{R} : t_1 < \bar{t}_1, X(\bar{t}_1) \neq \emptyset, F(t_1) < \alpha, F(\bar{t}_1) \geq \alpha, \tag{2.1}$$

верно

$$q(\alpha) = \inf\{t \mid F(t) \geq \alpha\} = \min\{t \in [t_1, \bar{t}_1] \mid F(t) = \alpha\} \tag{2.2}$$

(здесь и далее знак \min перед некоторым множеством действительных чисел означает минимальный элемент в нем и соответственно \inf – точную нижнюю грань на этом множестве).

3. Кусочно-линейный случай. В настоящей работе исследуется случай, когда $\Psi(x) = \max\{l_1(x), \dots, l_r(x)\}$ (где $l_1(x), \dots, l_r(x)$ удовлетворяют (1.2)). Для произвольного измеримого (по Лебегу) множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ будем его меру обозначать через $\mu(Y)$. Пусть для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ $X(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t_0\}$ – ограниченное непустое множество. Тогда (см. теорему 17, С. 177 из [11]) $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t)$ – ограниченное множество и $\exists t_1 \in \mathbb{R} : t_1 = \min \Psi(X(t_0)) = \min \Psi(\mathbb{R}^n)$, поскольку $X(t_0)$ – компакт. При этом, очевидно, $\text{int } X(t_1) = \emptyset \Rightarrow \mu(X(t_1)) = 0$, откуда $F(t_1) = 0 < \alpha$, а следовательно, $q(\alpha) = \inf\{t \mid F(t) \geq \alpha\} > t_1$, т.е. величина t_1 дает нижнюю границу для $q(\alpha)$ и может быть найдена, решая задачу линейного программирования:

$$v \rightarrow \min(= t_1), l_i(x) \leq v, i = \overline{1, r}, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

(в (3.1) и ниже в аналогичных случаях выражение $v \rightarrow \min(= t_1)$ означает, что в рассматриваемой задаче ищется значение минимума функции v при указанных ограничениях и при этом в скобках дается обозначение для искомого значения минимума).

Заметим, что в кусочно-линейном случае с ограниченным множеством $X(t_1)$ функция $F(t)$ непрерывна и монотонно возрастает. Это следует из рассмотрения монотонно возрастающей непрерывной функции $\mu(X(t))$ (нетрудно даже показать, что она удовлетворяет условию Липшица).

Опишем также метод определения верхней границы для $q(\alpha)$. Пусть имеется программа вычисления функции $\Phi(y)$, где $y \in \mathbb{R}$, по формуле (1.4). Рассмотрим задачу поиска $b \in \mathbb{R}$:

$$b > 0, \beta(b) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-b}^b e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(-b) = \alpha^{1/n}. \tag{3.2}$$

Пусть $\Pi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -b \leq x_i \leq b, i = \overline{1, n}\}$. Тогда

$$\int_{\Pi_0} \varphi_n(x) dx = \prod_{i=1}^n [\Phi(b) - \Phi(-b)] = \alpha.$$

Поскольку функция $\beta(y)$ является монотонно возрастающей всюду на $\mathbb{R}_{\geq} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$, то величину $\beta(b)$, удовлетворяющую (3.2), можно определить со сколь угодно точностью $\sigma > 0$, т.е. вычислить $b_\sigma \in \mathbb{R} : b \leq b_\sigma \leq b + \sigma$. При этом $\beta(b_\sigma) \geq \alpha^{1/n}$. Пусть $\Pi_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -b_\sigma \leq x_i \leq b_\sigma, i = \overline{1, n}\}$, где $\sigma > 0$ – произвольное небольшое число (например, $\sigma = 0.01$). Тогда

$$\int_{\Pi_\sigma} \varphi_n(x) dx = \prod_{i=1}^n [\Phi(b_\sigma) - \Phi(-b_\sigma)] = [\beta(b_\sigma)]^n \geq \alpha.$$

Рассмотрим для каждого $i = \overline{1, r}$ задачу

$$l_i(x) = \langle e^i, x \rangle + d_i \rightarrow \max (= \gamma_i), x \in \Pi_\sigma.$$

Каждая из этих задач решается точно за $O(n)$ арифметических операций (см. аналогичную задачу в [9, С. 1113]). Тогда для величины $\bar{t}_1 = \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ выполняется $X(\bar{t}_1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq \bar{t}_1\} \supseteq \Pi_\sigma$, а следовательно,

$$F(\bar{t}_1) = \int_{X(\bar{t}_1)} \varphi_n(x) dx \geq \int_{\Pi_\sigma} \varphi_n(x) dx \geq \alpha,$$

т.е. величина \bar{t}_1 является верхней оценкой для $q(a)$. Таким образом,

$$t_1 < q(\alpha) \leq \bar{t}_1. \quad (3.3)$$

Кроме того, для работы алгоритма многомерного интегрирования функции $\varphi_n(x)$ на многогранниках $X(t)$, где $t \in (t_1, \bar{t}_1]$, понадобится (см. разд. 2) куб Π вида (1.3), такой, что $X(\bar{t}_1) \subseteq \Pi$. Для нахождения чисел a, b из (1.3) достаточно решить $2n$ задач линейного программирования

$$x_i \rightarrow \max (= \eta_i), x \in X(\bar{t}_1), \quad (3.4)$$

$$x_i \rightarrow \min (= v_i), x \in X(\bar{t}_1), \quad (3.5)$$

а затем положить $a = \min\{v_1, \dots, v_n\}$, $b = \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$.

З а м е ч а н и е 6. В процессе работы приводимого ниже алгоритма 2 величина $q(\alpha)$ будет оценена сверху и снизу гораздо более точно, чем в (3.3), и тогда мы можем уточнить величины a, b , заменяя в (3.4), (3.5) величину \bar{t}_1 на новую гораздо более точную оценку сверху величины $q(\alpha)$. Такие уточнения можно производить периодически (см. далее замечание 7).

4. Численный метод нахождения с заданной точностью $q(\alpha)$. Опишем алгоритм 2 нахождения с заданной точностью $\varepsilon > 0$ величины $q(\alpha)$, основанный на использовании алгоритма 1. Шаги алгоритма 2 вполне очевидны (в частности, сходны с соответствующим алгоритмом в [12]) и не претендуют на новизну. Для автора важным было показать возможность применения в этом алгоритме универсального (относительно размерности n) алгоритма 1 и тем самым придать алгоритму 2 ту же универсальность. В разд. 3 величина $q(\alpha)$ была уже оценена сверху и снизу (см. неравенства (3.3)). Кроме того, в разд. 3 был описан алгоритм нахождения куба Π вида (1.3) такого, что $\forall t \in (t_1, \bar{t}_1] X(t) \subseteq \Pi$, а следовательно, $\forall t \in (t_1, \bar{t}_1] X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t\} = \{x \in \Pi \mid \Psi(x) \leq t\}$. Но тогда $\forall t \in (t_1, \bar{t}_1] (t > t_1, \text{ чтобы } \text{int}X(t) \neq \emptyset)$ интеграл

$$F(t) = \int_{X(t)} \varphi_n(x) dx$$

является интегралом вида (1.1)–(1.3), и мы можем применить к нему алгоритм 1, описанный в разд. 1, который позволяет вычислять значение этого интеграла с любой желаемой точностью $\delta = \delta(k) > 0$ (задавая необходимое количество k последовательных дроблений куба Π). Используя алгоритм 1, $\forall t \in (t_1, \bar{t}_1]$ при любом выбранном значении $k \geq 2$ вместо точного значения интеграла $F(t)$ находим числа $F_\delta(t)$, $\delta = \delta(k) > 0$, такие, что (см. далее замечание 7)

$$F_\delta(t) \leq F(t) \leq F_\delta(t) + \delta. \quad (4.1)$$

Заметим, что в рассматриваемом нами кусочно-линейном случае с ограниченными множествами $X(t)$, где $t \geq t_1$, функция $F(t)$ непрерывна и монотонно возрастает при $t \geq t_1$, а следовательно, существует единственное число $q(\alpha) > t_1 : F(q(\alpha)) = \alpha$. Нам понадобятся следующие простые утверждения, непосредственно следующие из определения $q(\alpha)$.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть выполняется (4.1). Тогда в случае $F_\delta(t) < \alpha - \delta$ (откуда в силу (4.1) $F(t) < \alpha$) справедливо $t < q(\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $t \geq q(\alpha)$. Из монотонности F следует, что $F(t) \geq F(q(\alpha)) = \alpha$, а это противоречит тому, что $F(t) < \alpha$. Утверждение 1 доказано.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть верно (4.1). Тогда в случае $F_\delta(t) \geq \alpha$ справедливо $q(\alpha) \leq t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (4.1), получаем $F(t) \geq F_\delta(t) \geq \alpha = F(q(\alpha))$, откуда в силу монотонности F имеем $q(\alpha) \leq t$. Утверждение 2 доказано.

А л г о р и т м 2 (нахождения с заданной точностью $\varepsilon > 0$ величины $q(\alpha)$).

Ш а г 1. Пусть t_1, \bar{t}_1 — найденные ранее величины, удовлетворяющие (3.3), $i = 1, k = k_0 \geq 2, k$ — количество этапов дробления куба Π , от которого зависит величина δ из (4.1), k_0 — начальное значение этой величины. Тогда справедливы неравенства

$$t_i < q(\alpha) \leq \bar{t}_i. \quad (4.2)$$

Ш а г 2. Проверяем выполнение неравенства $t_i - \bar{t}_i \leq 2\varepsilon$. Если оно верно, то в силу (4.2) имеем: $|q(\alpha) - (t_i + \bar{t}_i) / 2| \leq \varepsilon$, т.е. задача решена и в качестве приближенного значения $q(\alpha)$ берем $(t_i + \bar{t}_i) / 2$. В противном случае переходим к шагу 3.

Ш а г 3. Находим числа t'_i, t''_i методом “золотого сечения” (см. ниже замечание 8):

$$t'_i = t_i + (3 - \sqrt{5})(\bar{t}_i - t_i) / 2 \simeq t_i + 0.382(\bar{t}_i - t_i),$$

$$t''_i = t_i + (\sqrt{5} - 1)(\bar{t}_i - t_i) / 2 \simeq t_i + 0.618(\bar{t}_i - t_i).$$

Ш а г 4. Используя алгоритм 1, определяем числа $F_{\delta_1}(t'_i), F_{\delta_2}(t''_i), \delta_1 = \delta_1(k) > 0, \delta_2 = \delta_2(k) > 0$, такие, что $F_{\delta_1}(t'_i) \leq F(t'_i) \leq F_{\delta_1}(t'_i) + \delta_1, F_{\delta_2}(t''_i) \leq F(t''_i) \leq F_{\delta_2}(t''_i) + \delta_2$. Если $F_{\delta_1}(t'_i) < \alpha - \delta_1$, то в силу утверждения 1 $t'_i < q(\alpha)$. Тогда полагаем $t_{i+1} = t'_i, \bar{t}_{i+1} = \bar{t}_i$, присваиваем $i := i + 1$, переходим к шагу 2 и при этом сохраняется (4.2).

Если $F_{\delta_2}(t''_i) \geq \alpha$, то в силу утверждения 2 $q(\alpha) \leq t''_i$. Тогда полагаем $t_{i+1} = t_i, \bar{t}_{i+1} = t''_i$, присваиваем $i := i + 1$, переходим к шагу 2 и при этом сохраняется (4.2).

Ш а г 5. К шагу 5 переходим только в случае

$$F_{\delta_1}(t'_i) \geq \alpha - \delta_1, F_{\delta_2}(t''_i) < \alpha. \quad (4.3)$$

Увеличиваем число этапов дробления куба Π на 1, т.е. присваиваем $k := k + 1$ и переходим к шагу 4.

О б о с н о в а н и е а л г о р и т м а 2. Покажем, что работа алгоритма 2 закончится через конечное число шагов.

Предположим противное, т.е. пусть при работе алгоритма 2 совершается бесконечное число шагов. Заметим, что после каждого присвоения (на шаге 4) $i := i + 1$ переходим к шагу 2 с новым набором величин t_i, \bar{t}_i и при этом $\bar{t}_i - t_i = 0.5(\sqrt{5} - 1)(\bar{t}_{i-1} - t_{i-1})$, где $0.5(\sqrt{5} - 1) = 0.618... < 1$, а следовательно, при достаточно большом i будет справедливо $\bar{t}_i - t_i = \left[0.5(\sqrt{5} - 1)\right]^{i-1} (\bar{t}_1 - t_1) \leq 2\varepsilon$, что приведет к остановке алгоритма на шаге 2, а это противоречит бесконечности выполнения шагов алгоритма. Таким образом, для некоторого фиксированного i будет происходить бесконечное число переходов: шаг 4 \mapsto шаг 5 \mapsto шаг 4 \mapsto шаг 5 $\mapsto \dots \mapsto$ шаг 4 \mapsto шаг 5 $\mapsto \dots$, т.е. бесконечное увеличение количества этапов дробления k при вычислении интегралов: $F(t'_i) = \int_{X(t'_i)} \varphi_n(x) dx$, $F(t''_i) = \int_{X(t''_i)} \varphi_n(x) dx$,

где $t'_i = t_i + 0.5(3 - \sqrt{5})(\bar{t}_i - t_i)$, $t''_i = t_i + 0.5(\sqrt{5} - 1)(\bar{t}_i - t_i)$. При этом

$$t'_i \geq t_1 + 0.5(3 - \sqrt{5}) \left[0.5(\sqrt{5} - 1)\right]^{i-1} (\bar{t}_1 - t_1) > t_1, \text{ а следовательно, } \text{int}X(t'_i) \neq \emptyset, \text{ int}X(t''_i) \neq \emptyset.$$

Таким образом, выполнены все условия, необходимые для применения алгоритма 1 и при увеличении k — количества этапов дробления куба Π величины $\delta_1 = \delta_1(k)$, $\delta_2 = \delta_2(k)$ стремятся к 0 (см. далее замечание 7). Из (4.3), используя (4.1), для фиксированного i имеем $\alpha - \delta_1 \leq F_{\delta_1}(t'_i) \leq F(t'_i)$, $F(t''_i) \leq F_{\delta_2}(t''_i) + \delta_2 < \alpha + \delta_2$, и при этом в силу монотонности $F(t)$ справедливо $F(t'_i) < F(t''_i)$ (поскольку $t'_i < t''_i$), а следовательно,

$$F(t''_i) - F(t'_i) < \delta_1(k) + \delta_2(k). \quad (4.4)$$

Заметим, что в левой части неравенства (4.4) находится постоянная положительная величина, а выражение справа стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Полученное противоречие и завершает обоснование алгоритма 2.

Таким образом, установлена принципиальная возможность вычисления с заданной точностью $\varepsilon > 0$ значения $q(\alpha)$. Получим также в рассматриваемом кусочно-линейном случае некоторые оценки. Обозначим через $\varepsilon_i = (\bar{t}_i - t_i) / 2$ переменную величину, меняющуюся в процессе работы алгоритма 2. Поскольку в силу (4.2) $t_i < q(\alpha) \leq \bar{t}_i$, то $|q(\alpha) - 0.5(\bar{t}_i + t_i)| \leq 0.5(\bar{t}_i - t_i) = \varepsilon_i$, т.е. величину ε_i можно рассматривать как достигнутую при текущем значении параметра i точность вычисления $q(\alpha)$. Цель дальнейшего рассуждения — получение неравенства, показывающего, что между величиной ε_i и величиной $\delta_1(k) + \delta_2(k)$ из условия (4.4), являющегося следствием неравенств (4.3), выполняющихся на шаге 5, можно установить “линейную” зависимость так, что для некоторой константы $C > 0$ справедливо

$$\varepsilon_i \leq C(\delta_1(k) + \delta_2(k)). \quad (4.5)$$

Из этого неравенства, в частности, следует, что на шаге 5 не может выполняться $\delta_1(k) + \delta_2(k) \leq \varepsilon / C$, поскольку в этом случае $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ и на шаге 2 должна была произойти остановка по условию $\bar{t}_i - t_i = 2\varepsilon_i \leq 2\varepsilon$. Таким образом, оценка (4.5) накладывает ограничение на максимальное количество этапов дробления k (более подробно об этом говорится в замечании 7, приведенном ниже).

Для установления справедливости указанного условия (4.5) потребуется геометрическое неравенство, обоснование которого приводится в разд. 5. Чтобы его сформулировать, потребуются некоторые обозначения. При любом $t \geq t_1$ множество $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t\}$ является выпуклым ограниченным и многогранным (кратко — многогранником). В случае $t > t_1$ имеем $\text{int}X(t) \neq \emptyset$, т.е. множество $X(t)$ является многогранником размерности n и мы можем ввести в рассмотрение поверхность множества $X(t)$, т.е. его границу, которая является объединением граней размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$. Кроме того, в этом случае можно говорить о площади поверхности $X(t)$ как сумме площадей граней размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$ (площадь каждой грани Γ размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$)

понимается как мера Лебега $\mu_{n-1}(\Gamma)$, рассматриваемая в плоскости размерности $n - 1$, включающей в себя Γ ; этой плоскостью будет аффинная оболочка множества Γ). Обозначим через $S(t)$ площадь поверхности многогранника $X(t)$, где $t > t_1$. Пусть $E = \max\{|e^1|, \dots, |e^n|\} > 0$, $t' \geq t > t_1$. Тогда (см. ниже утверждение 21) справедливо геометрическое неравенство

$$\mu(X(t')) - \mu(X(t)) \geq E^{-1}S(t)(t' - t), \quad (4.6)$$

откуда

$$\begin{aligned} F(t') - F(t) &= \int_{X(t') \setminus X(t)} \varphi_n(x) dx \geq \min \varphi_n(X(t')) [\mu(X(t')) - \mu(X(t))] \geq \\ &\geq E^{-1} \min \varphi_n(X(t')) S(t)(t' - t). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\Delta > 0, \bar{t}_1 \geq t' \geq t \geq t_1 + \Delta, L = E^{-1} \min \varphi_n(X(\bar{t}_1)) \cdot \inf_{t \in [t_1 + \Delta, \bar{t}_1]} S(t). \quad (4.7)$$

Тогда

$$F(t') - F(t) \geq L(t' - t). \quad (4.8)$$

Заметим, что в формуле, определяющей постоянную L , присутствует неопределенный параметр $\Delta > 0$. Он легко находится в результате совершения нескольких шагов алгоритма 2 без проверки справедливости условия останова алгоритма $\bar{t}_i - t_i \leq 2\varepsilon$. Поскольку $q(\alpha) > t_1$ и при обосновании алгоритма 2 была по существу доказана сходимость t_i, \bar{t}_i к $q(\alpha)$ в процессе его выполнения, то после конечного числа шагов алгоритма при некотором $i_0 \geq 2$ обязательно верно $t_1 < t_{i_0} < q(\alpha)$, и тогда при $i \geq i_0$ будет справедливо $t_i \geq t_1 + \Delta$, где $\Delta = t_{i_0} - t_1$. Таким образом, можно для простоты обозначений предполагать, что уже при $i = 2$ верно

$$t_2 = t_1 + \Delta < q(\alpha) \leq \bar{t}_2 \leq \bar{t}_1, \Delta > 0. \quad (4.9)$$

В этом случае, если мы находимся на шаге 5 при некотором $i \geq 2$, то справедливы неравенства (4.3), а следовательно, и (4.4), откуда, используя выполнение (4.8) в случае (4.7), имеем

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) > F(t_i'') - F(t_i') \geq L(t_i'' - t_i') = (\sqrt{5} - 2)L(\bar{t}_i - t_i), \quad (4.10)$$

т.е. на шаге 5 при $i \geq 2$ верно

$$\varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i) < [L(\sqrt{5} - 2)]^{-1} (\delta_1(k) + \delta_2(k)) = (\sqrt{5} + 2)L^{-1} (\delta_1(k) + \delta_2(k)),$$

и тем самым обосновано существование величины $C = (\sqrt{5} + 2)L^{-1}$ из условия (4.5). Кроме того, необходимо обосновать, что

$$L = E^{-1} \min \varphi_n(X(\bar{t}_1)) \cdot \inf_{t \in [t_1 + \Delta, \bar{t}_1]} S(t) > 0.$$

Выполнение $\min \varphi_n(X(\bar{t}_1)) > 0$ очевидно. Осталось доказать, что

$$\inf_{t \in [t_1 + \Delta, \bar{t}_1]} S(t) > 0.$$

Заметим, что функция $\mu(X(t))$ монотонно возрастает и при этом $\mu_0 = \mu(X(t_1 + \Delta)) > 0$, поскольку в силу $\Delta > 0$ верно $\text{int}X(t_1 + \Delta) \neq \emptyset$. Пусть S_0 — площадь поверхности n -мерного

шара объема μ_0 . Тогда $\forall t \geq t_1 + \Delta \mu(X(t)) \geq \mu_0 = \mu(X(t_1 + \Delta))$, а следовательно, $\forall t \geq t_1 + \Delta S(t) \geq S_0$, откуда

$$\inf_{t \in [t_1 + \Delta, \bar{t}_1]} S(t) \geq S_0 > 0.$$

З а м е ч а н и е 7. Как уже отмечалось, мы находимся в условиях применения алгоритма 1, и при этом возможны по крайней мере две модификации, предложенные в [8, 9]. В одной из них (1-я модификация) для величины δ из условия (5.1) выполняется $\delta = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0+$, а в другой (более сложной 2-й модификации) $\delta = O(\tau^3)$ при $\tau \rightarrow 0+$, где $\tau = T / 2^{k+1}$, $T = b - a$ — длина ребер куба Π , т.е. τ — половина длины ребер кубов k -го (т.е. последнего) этапа дробления куба Π , k — параметр алгоритма 2. Более того, можно показать, что в случае выполнения условий (4.9) найдутся константы $\bar{C}_1, \bar{C}_2 > 0$ (общие для всей работы алгоритма 2), такие, что при $i \geq 2$ для величин δ_1, δ_2 , вычисляемых на шаге 4 алгоритма 2, в случае 1-й модификации будет верно $\delta_1, \delta_2 \leq \bar{C}_1 \tau^2$, а в случае 2-й модификации — $\delta_1, \delta_2 \leq \bar{C}_2 \tau^3$. Следствием этих условий, а также неравенства (4.5) является условие $\varepsilon_i = O(\tau^2)$ (для 1-й модификации) и $\varepsilon_i = O(\tau^3)$ (для 2-й модификации) при $\tau \rightarrow 0+$. Условие $\varepsilon_i = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0+$ говорит о том, что при увеличении k на 1 (см. $k := k + 1$ на шаге 5) величина $\tau = T / 2^{k+1}$ уменьшается в 2 раза и можно ожидать, что величина ε_i уменьшится в 4 раза (в рассмотренных автором примерах такая зависимость, как правило, наблюдается). Соответственно, в случае 2-й модификации при увеличении k на 1 можно ожидать уменьшение величины ε_i в 8 раз.

Используя эти соображения, можно при решении практической задачи сделать предварительные расчеты для некоторого $k = k_0$ и по достигнутой для этого случая величине $\varepsilon_i = \varepsilon_i(k_0)$ спрогнозировать количество этапов $k = k(\varepsilon)$, необходимых для вычисления с заданной точностью ε значения $q(\alpha)$. Затем, как уже отмечалось ранее, можно заранее создать одномерный массив $\Phi(a, b, k)$ значений функции $\Phi(y)$, удовлетворяющей равенству (1.4), на равномерной сетке $S(a, b, k) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = s_i(a, b, k) \triangleq a + i(b - a)2^{-k}, i = \overline{0, 2^k} \right\}$, которые можно использовать при решении всех вспомогательных задач интегрирования, возникающих в процессе выполнения алгоритма 2. Это дает значительное снижение вычислительных затрат.

Кроме того, действуя, согласно замечанию 5, можно при каждом вычислении величины $F_{\delta_2}(t_i'')$ для всяких текущих i, k находить минимальный и максимальный номера используемых узлов сетки $S(a, b, k)$. Тогда в первом же случае присвоения на шаге 4 алгоритма $2 \bar{t}_{i+1} = t_i''$ (при выполнении $F_{\delta_2}(t_i'') \geq \alpha$) можно теперь уточнить границы внешнего куба Π , используемого при решении дальнейших задач интегрирования, заменяя его на более узкий $\tilde{\Pi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a} \leq x_i \leq \tilde{b}, i = \overline{1, n} \right\}$, где \tilde{a}, \tilde{b} — элементы сетки $S(a, b, k)$, определяемые по указанным номерам (см. замечание 5). Кроме того, как показано в замечании 5, при замене внешнего куба Π на $\tilde{\Pi}$ может появиться возможность для уменьшения текущего (а следовательно, и последующих) количества этапов дробления k для нового внешнего куба $\tilde{\Pi}$.

Более того, следуя замечанию 4, можно при каждом вычислении величины $F_{\delta_2}(t_i'')$ для всяких текущих i, k определять по каждой координате x_i минимальный $j_{\min}^{(i)}(k) \in \left\{ \overline{1, 2^k + 1} \right\}$ и максимальный $j_{\max}^{(i)}(k) \in \left\{ \overline{1, 2^k + 1} \right\}$ номера элементов сетки $S(a, b, k)$, являющихся координатами вершин этих кубов. Обозначим $\tilde{a}_i(k) = s_{j_{\min}^{(i)}(k)}(a, b, k)$, $\tilde{b}_i(k) = s_{j_{\max}^{(i)}(k)}(a, b, k)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда в первом же случае присвоения на шаге 4 алгоритма $2 \bar{t}_{i+1} = t_i''$ (при выполнении $F_{\delta_2}(t_i'') \geq \alpha$) происходит включение $X \subseteq \tilde{\Pi}_0(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}_i(k) \leq x_i \leq \tilde{b}_i(k), i = \overline{1, n} \right\}$. Таким образом, при решении дальнейших задач интегрирования с помощью алгоритма 1 можем

теперь применять модификацию этого алгоритма в соответствии с замечанием 4 (минуя необходимость дополнительного решения указанных в этом замечании ЗЛП).

Приведем также следующие “оптимистические” оценки для количества этапов дробления k . В случае 1-й модификации неравенства (4.5), $\delta_1, \delta_2 \leq \bar{C}_1 \tau^2$, а также равенство $\tau = T / 2^{k+1}$ приводят к неравенству $\varepsilon_i \leq C'_1 2^{-2k}$, где $C'_1 > 0$ — некоторое число, т.е. найдется число $C_1 > 0$, для которого верно $k \leq C_1 - 0.5 \log_2 \varepsilon_i$. Соответственно, в случае 2-й модификации аналогичным образом получаем, что для некоторого числа $C_2 > 0$ выполняется $k \leq C_2 - (\log_2 \varepsilon_i) / 3$. Отметим, что в этих оценках не присутствует число n — размерность задачи (тем не менее, от n зависит общее число кубов на каждом этапе дробления, которое очевидным образом влияет на время решения задачи).

З а м е ч а н и е 8. Как известно (см., например, [11, С. 19]), золотым сечением отрезка $[t_i, \bar{t}_i]$ называется деление его (с помощью любой из точек t'_i, t''_i) на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Замечательно здесь то, что t'_i в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[t_i, t''_i]$. Аналогично точка t''_i производит золотое сечение отрезка $[t'_i, \bar{t}_i]$. Используя указанное, можно получить экономию в вычислениях.

З а м е ч а н и е 9. Чтобы расширить множество задач, к которым может быть применен алгоритм 2, перечислим все условия, которые потребовались для его обоснования. Это прежде всего строгая монотонность $F(t)$, которая применялась на втором этапе обоснования при рассмотрении (4.4). Кроме того, использовалась применимость алгоритма 1 для вычисления интегралов $F(t)$ с точностью $\delta > 0$, т.е. возможность вычисления чисел $F_\delta(t), \delta$, удовлетворяющих (4.1). При любом фиксированном $t \in (t_1, \bar{t}_1]$ с увеличением k (параметр алгоритма 1) величина $\delta = \delta(k)$ в условии (4.1) должна стремиться к нулю (это также использовалось на втором этапе обоснования при рассмотрении (4.4)). В работе [9] (см. также [6, С. 53]) показано, что если $X = \{x \in \Pi | l_1(x) \leq 0, \dots, l_r(x) \leq 0\}, \Psi(x) = \max\{l_1(x), \dots, l_r(x)\}$, где Π удовлетворяет (1.3), $l_1(x), \dots, l_r(x)$ — определенные и измеримые на Π функции, то в случае $\mu(\{x \in \Pi | \Psi(x) = 0\}) = 0$ при применении алгоритма 1 к вычислению

$$F = \int_X \varphi_n(x) dx$$

верно $\delta = \delta(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В связи с этим потребуется выполнение условия $\mu(\{x \in \Pi | \Psi(x) = t\}) = 0$ при $t \in (t_1, \bar{t}_1]$. Соответственно для существования и возможности определения границ a, b куба Π понадобится ограниченность множеств $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n | \Psi(x) \leq t\}$ при $t \in (t_1, \bar{t}_1]$. Перечисленные условия являются справедливыми для широкого круга задач. Кроме того, для работы алгоритма 2 необходимы “стартовые” значения t_1, \bar{t}_1 , такие, что $t_1 < q(\alpha) \leq \bar{t}_1$. Как правило они находятся “простым подбором” (в результате вычисления значений $F_\delta(t)$ на сетке значений t при достаточно малом $\delta > 0$).

П р и м е р 2. Рассматривался случай с $n = 3, r = 4, X(t) = \{x \in \Pi | \Psi(x) \leq t\}, \Psi(x) = \max\{l_1(x), l_2(x), l_3(x), l_4(x)\}, l_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 9, l_2(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 8, l_3(x) = x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 10, l_4(x) = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 9, \Pi = \{x \in \mathbb{R}^n | -10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 3\}$. Величина $q(\alpha)$ вычислялась для $\alpha = 0.9$. Была задана точность $\varepsilon = 0.001$. Начальное значение $k = 5$. Был использован метод интегрирования второго порядка точности. Составлена табл. 2 текущих значений величин $k, i, \varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i), 0.5(\bar{t}_i + t_i)$ на шаге 5 алгоритма 2. Именно на этом шаге происходит увеличение количества этапов дробления k . Поэтому представляет интерес достигнутое минимальное значение величины $\varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i)$ (текущая точность вычисления $q(\alpha)$ для текущего значения k). Как и было предсказано теоретически, в последнем столбце устанавливается значение 4 (поскольку был использован метод интегрирования второго порядка точности). Алгоритм закончил работу при $i = 20, k = 12, \varepsilon_i = 0.5(\bar{t}_i - t_i) = 0.000695261517342338, q(\alpha) = q(0.9) \simeq 0.5(\bar{t}_i + t_i) = -2.09240354796087$.

Таблица 2

k	i	$\varepsilon_i(k) = 0.5(\bar{t}_i - t_i)$	$0.5(\bar{t}_i + t_i)$	$\varepsilon_i(k) / \varepsilon_i(k + 1)$
5	3	2.48277907312568	2.55166278062295	5.136
6	5	0.948337219377051	-2.189430195617486	2.618
7	7	0.362232585005468	-2.05106965997813	6.854
8	11	0.0528490219125919	-2.0837321517923	2.618
9	13	0.0201865300984221	-2.09144272017497	4.236
10	16	0.00476539333307313	-2.09144272017497	4.236
11	19	0.00112495676612956	-2.09283324320966	—

5. Некоторые свойства выпуклых многогранников. Целью этого раздела является получение геометрического неравенства (4.6), позволяющего в свою очередь получить неравенство (4.5), устанавливающее линейный характер зависимости между вычисляемой на шаге 2 алгоритма 2 величиной $\varepsilon_i = (\bar{t}_i - t_i) / 2$ (точность достигнутого приближения $(\bar{t}_i + t_i) / 2$ к искомому значению $q(\alpha)$) и суммарной погрешностью $\delta_1(k) + \delta_2(k)$ вычисления интегралов на шаге 2. Расчет этих интегралов дает основной вклад в трудоемкость алгоритма 2, которая определяется максимальным значением параметра k — количества этапов дробления “внешнего” куба Π , необходимого для вычисления этих интегралов. На основании оценки (4.5) в замечании 7 приведены весьма “оптимистические” оценки для величины k в зависимости от ε_i , не зависящие от размерности задачи n .

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Обозначим $B^{(n)}(x^0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x^0| \leq \delta\}$ — шар радиуса δ с центром в точке x^0 . Кроме того, для произвольного множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ считаем, что $\partial U = \bar{U} \setminus \text{int} U$ — граница U .

Утверждение 3. Допустим, что $X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) \leq t\}$, $X = X(0) \neq \emptyset$, $\Psi(x) = \max\{l_1(x), \dots, l_r(x)\}$ и $l_i(x)$ удовлетворяют условиям (1.2). Тогда при любом $t > 0$ множество $X(t)$ содержит каждую точку $x^0 \in X$ вместе с шаром $B^{(n)}(x^0, E^{-1}t)$, где $E = \max\{|e^1|, \dots, |e^r|\} > 0$.

Доказательство. Из условия $x^0 \in X$ следует, что $\max\{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i \mid i = \overline{1, r}\} \leq 0$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $|x - x^0| \leq E^{-1}t$. Докажем, что $x \in X(t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x \rangle + d_i\} &= \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 + (x - x^0) \rangle + d_i\} = \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i + \langle e^i, x - x^0 \rangle\} = \\ &\leq \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i + |e^i| \cdot |x - x^0|\} \leq \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i + E^{-1}|e^i|t\} \leq \\ &\leq \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i + t\} \leq \max_{i=1, r} \{\langle e^i, x^0 \rangle + d_i\} + t \leq t \Rightarrow x \in X(t). \end{aligned}$$

Утверждение 3 доказано.

Следствием утверждения 3 является утверждение 4.

Утверждение 4. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3, $t \geq 0$, $t' > t$. Тогда множество $X(t')$ содержит каждую точку $x^0 \in X(t)$ вместе с шаром $B^{(n)}(x^0, E^{-1}(t' - t))$.

Утверждение 5. Пусть $e^1, e^2 \in \mathbb{R}^n, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \delta > 0, H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle e^1, x \rangle + d_1 = 0\}, x^1 \in H_1,$

$$\forall x \in B^{(n)}(x^1, \delta) \cap H_1 \quad \langle e^2, x \rangle + d_2 \leq 0. \quad (5.1)$$

Тогда если векторы e^1, e^2 линейно независимы, то $\langle e^2, x^1 \rangle + d_2 < 0.$

Доказательство. Из того, что векторы e^1, e^2 линейно независимы, следует, что

$$|e^1| \neq 0, |e^2| \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad e^2 \neq \lambda e^1. \quad (5.2)$$

Пусть

$$e = e^2 - \gamma e^1, \gamma = \langle e^1, e^2 \rangle |e^1|^{-2}. \quad (5.3)$$

Тогда

$$\langle e^1, e \rangle = \langle e^1, e^2 - \gamma e^1 \rangle = \langle e^1, e^2 \rangle - \gamma \langle e^1, e^1 \rangle = 0, |e| \neq 0 \quad (5.4)$$

(действительно, $|e| = 0 \Rightarrow e^2 = \gamma e^1$, что противоречит (5.2)). Нетрудно показать, что в случае (5.2) выполняется

$$|\langle e^1, e^2 \rangle| < |e^1| \cdot |e^2|. \quad (5.5)$$

Действительно, используя (5.3), (5.4), имеем

$$\begin{aligned} |e^2|^2 &= \langle e^2, e^2 \rangle = \langle \gamma e^1 + e, \gamma e^1 + e \rangle = \gamma^2 |e^1|^2 + |e|^2 > \gamma^2 |e^1|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |e^2|^2 > |\langle e^1, e^2 \rangle|^2 |e^1|^{-2} \Rightarrow |e^1|^2 |e^2|^2 > |\langle e^1, e^2 \rangle|^2, \end{aligned}$$

откуда и следует (5.5). Предположим, что $\langle e^2, x^1 \rangle + d_2 = 0.$ Тогда в силу (5.5) для e , удовлетворяющего (5.3), выполняется

$$\begin{aligned} \forall t > 0 \quad \langle e^2, x^1 + te \rangle + d_2 &= \langle e^2, x^1 \rangle + d_2 + t \langle e, e^2 \rangle = t \langle e, e^2 \rangle = t \langle e^2 - \gamma e^1, e^2 \rangle = \\ &= t \left[|e^2|^2 - \gamma \langle e^1, e^2 \rangle \right] = t \left[|e^2|^2 - |\langle e^1, e^2 \rangle|^2 |e^1|^{-2} \right] > 0, \langle e^1, x^1 + te \rangle + d_1 = 0, \end{aligned}$$

т.е. $\forall t > 0 \quad x^1 + te \in B^{(n)}(x^1, t|e|) \cap H_1, \quad \langle e^2, x^1 + te \rangle + d_2 > 0,$ а это противоречит (5.1).

Утверждение 5 доказано.

Приведем некоторые простые утверждения, связанные с выпуклыми многогранными множествами. Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_1(x) \leq 0, \dots, l_r(x) \leq 0\} \neq \emptyset, \quad (5.6)$$

где $l_i(x)$ удовлетворяют (1.2), $i \in I_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$. Множество X называется *выпуклым многогранным (полиэдральным)*, а в случае, если X — компакт, оно называется *выпуклым многогранником (полиэдром)*.

Обозначим через $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) = 0\}$ гиперплоскость размерности $n - 1$ (поскольку $|e^i| \neq 0$), $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \leq 0\}$, $\Gamma_i = H_i \cap X$, $i \in I_r$. Кроме того, для любого множества $I \subseteq I_r$ обозначим

$$X_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \leq 0, i \in I\} = \bigcap_{i \in I} X_i$$

(в частности, $X_{I_r} = X$, $X_\emptyset = \mathbb{R}^n$).

Будем ограничение $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, называть *существенным для X* , если

$$\exists I_i \subseteq I_r : X = X_{I_i} \neq X_{I_i \setminus \{i\}} \quad (5.7)$$

(очевидно, что $i \in I_i$), т.е. $\exists x(i) \in X_{I_i \setminus \{i\}} : l_i(x(i)) > 0$ (действительно, если $\forall x \in X_{I_i \setminus \{i\}} : l_i(x) \leq 0$, то $X_{I_i \setminus \{i\}} \subseteq X_i \Rightarrow X_{I_i \setminus \{i\}} = X_{I_i \setminus \{i\}} \cap X_i = X_{I_i} = X$, что противоречит (5.7)).

Условие (5.7) делит множество ограничений $l_i(x) \leq 0$, $i \in I_r$ на существенные для X и не являющиеся таковыми. Как следует из определения, ограничение $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, не будет существенным, если

$$\forall I \subseteq I_r \quad X = X_I \Rightarrow X = X_{I \setminus \{i\}}. \quad (5.8)$$

Обозначим через I_* множество номеров ограничений, существенных для X , а через \tilde{I} — множество номеров ограничений, не являющихся существенными для X . Тогда

$$I_r = I_* \cup \tilde{I}, I_* \cap \tilde{I} = \emptyset, \tilde{I} = I_r \setminus I_*. \quad (5.9)$$

Утверждение 6. $X = X_{I_*}$.

Доказательство. Рассмотрим нетривиальный случай, когда $I_* \neq I_r$, т.е. $\tilde{I} \neq \emptyset$. Пусть для простоты обозначений $\tilde{I} = \{\overline{1, r_1}\}$, где $1 \leq r_1 < r$ (если $r_1 = r$, то $X = X_\emptyset = \mathbb{R}^n$, а это противоречит условию $|e^i| \neq 0$, $i \in I_r$; см. (1.2)). Тогда, используя (5.8), получаем

$$X = X_{I_r} = X_{I_r \setminus \{1\}} = X_{I_r \setminus \{1, 2\}} = \dots = X_{I_r \setminus \{\overline{1, r_1}\}} = X_{I_*}.$$

Утверждение 5 доказано.

Назовем ограничения $l_i(x) \leq 0$, $l_j(x) \leq 0$, где $i, j \in I_r$, *эквивалентными*, если

$$\exists \lambda > 0 : l_i(x) = \lambda l_j(x) \quad (5.10)$$

(т.е. $e^i = \lambda e^j$, $d_i = \lambda d_j$).

Замечание 10. Очевидно, что если среди ограничений, задающих множество X , имеются ограничения, эквивалентные некоторому ограничению $l_i(x) \leq 0$, где $i \in I_r$, то множество X не изменится, если оставить только это ограничение, а другие, эквивалентные этому, отбросить. Заметим, что выделение ограничений, эквивалентных данному, представляет собой очень простую вычислительную задачу, поэтому часто можно предполагать, что среди ограничений, задающих множество X , нет эквивалентных. Отметим, кроме того, что при рассмотрении множества $X(t)$ из утверждения 3 следует иметь в виду, что из эквивалентности

ограничений при некотором $t \in \mathbb{R}$ не следует их эквивалентность при другом t . То же замечание следует сделать и относительно существенных (или несущественных) ограничений.

Используя то, что $|e^i| \neq 0, i \in I_r$ (см. (1.2)), нетрудно доказать следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 7. (а) $\text{int}X \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x^0 \in \mathbb{R}^n : l_i(x^0) < 0, i \in I_r$; (б) для любого множества $I \subseteq I_r$ такого, что $X = X_I$, справедливо $x^0 \in \text{int}X \Leftrightarrow l_i(x^0) < 0, i \in I$.

Обозначим $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad I(x) = \{i \in I_r \mid l_i(x) = 0\}$.

У т в е р ж д е н и е 8. Пусть $i, j \in I_r$, векторы e^i, e^j линейно зависимы, $\text{int}X \neq \emptyset$, $\exists x^0 \in X : i, j \in I(x^0)$. Тогда ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из линейной зависимости e^i, e^j , а также того, что $|e^i| \neq 0, |e^j| \neq 0$, следует, что $\exists \lambda \neq 0 : e^i = \lambda e^j$. Поскольку $l_i(x^0) = l_j(x^0)$, то

$$\begin{aligned} \langle e^i, x^0 \rangle + d_i = 0, \langle e^j, x^0 \rangle + d_j = 0 &\Rightarrow \langle \lambda e^j, x^0 \rangle + d_i = 0, \langle \lambda e^j, x^0 \rangle + \lambda d_j = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_i = \lambda d_j \Rightarrow l_i(x) = \lambda l_j(x). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $\lambda > 0$. Предположим, что $\lambda < 0$. Тогда

$$X_i \cap X_j = H_i = H_j \Rightarrow X = \bigcap_{i \in I_r} X_i \subseteq H_i,$$

а это противоречит условию $\text{int}X \neq \emptyset$. Таким образом, условие (5.10) выполнено, а следовательно, ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны. Утверждение 8 доказано.

У т в е р ж д е н и е 9. Пусть среди ограничений, задающих множество X , нет эквивалентных. Тогда, если $\text{int}X \neq \emptyset$, то

$$(а) \forall i \in I_r \left[i \in I_* \Leftrightarrow X \neq X_{I_r \setminus \{i\}} \right] \Leftrightarrow \left[\exists x(i) \in X_{I_r \setminus \{i\}} : l_i(x(i)) > 0 \right];$$

$$(б) \forall i \in I_* \exists x^0(i) \in \Gamma_i, \delta_i > 0 : I(x^0(i)) = \{i\}, B^{(n)}(x^0(i), \delta_i) \cap H_i \subseteq \Gamma_i = H_i \cap X.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость (а). Пусть $i \in I_r$. Если $X (= X_{I_r}) \neq X_{I_r \setminus \{i\}}$, то ограничение $l_i(x) \leq 0$ является существенным для X , т.е. $i \in I_*$. Допустим теперь $i \in I_*$. Покажем, что $X \neq X_{I_r \setminus \{i\}}$. Предположим противное. Пусть

$$X = X_{I_r \setminus \{i\}}. \tag{5.11}$$

Из $i \in I_*$ получаем (см. (5.7)), что $\exists I_i \subseteq I_r : X = X_{I_i} \neq X_{I_i \setminus \{i\}}$, а следовательно, $\exists x(i) \in \mathbb{R}^n : x(i) \in X_{I_i \setminus \{i\}}, x(i) \notin X_{I_i}$, откуда $l_j(x(i)) \leq 0, j \in I_i \setminus \{i\}, l_i(x(i)) > 0$. Пусть $x^0 \in \text{int}X$.

Тогда (см. утверждение 7(б)) $l_j(x^0) < 0, j \in I_r$. Заметим, что $\exists \lambda \in (0, 1) : x^\lambda = \lambda x(i) +$

$$+(1-\lambda)x^0 = x^0 + \lambda(x(i) - x^0), l_i(x^\lambda) = 0, \forall j \in I_i \setminus \{i\} \quad l_j(x^\lambda) < 0, \text{ а следовательно,}$$

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta), \forall j \in I_i \setminus \{i\} \quad l_j(x) < 0, \text{ откуда}$$

$$x^\lambda \in H_i, \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \quad l_i(x) = 0, l_j(x) < 0, j \in I_i \setminus \{i\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \subseteq X_{I_i} = X \Rightarrow \forall x \in B^{(n)}(x^\lambda, \delta) \cap H_i \quad \langle e^j, x \rangle + d_j \leq 0, j \in I_r.$$

Но тогда $I(x^\lambda) = \{i\}$, так как в силу утверждения 5, если $j \in I(x^\lambda), j \neq i$, то e^i, e^j линейно зависимы, а следовательно ограничения $l_i(x) \leq 0, l_j(x) \leq 0$ эквивалентны (см. утверждение 8),

что противоречит исходным предположениям. Таким образом, $l_j(x^\lambda) < 0, j \in I_r \setminus \{i\}$, а следовательно, x^λ входит в $X_{I_r \setminus \{i\}}$ вместе с некоторым шаром, а это противоречит (5.11), поскольку $l_i(x^\lambda) = 0$ и в силу $|e^i| \neq 0$ выполняется $x^\lambda \notin \text{int}X$. Утверждение 9(а) доказано.

Для доказательства (б) осталось заметить, что условие (б) выполняется для $x^0(i) = x^\lambda$ (см. x^λ из доказательства (а); при этом в силу (а) можно при нахождении x^λ сразу положить $I_i = I_r$). Утверждение 9(б) доказано.

З а м е ч а н и е 11. Из утверждения 9(а) следует, что в случае, когда среди ограничений, задающих X , нет эквивалентных, то для выделения существенных ограничений достаточно решить следующие ЗЛП:

$$l_i(x) \rightarrow \sup(= \gamma_i), \quad l_j(x) \leq 0, \quad j \in I_r \setminus \{i\},$$

где $i \in I_r$. Тогда $i \in I_* \Leftrightarrow \gamma_i > 0$.

З а м е ч а н и е 12. Из замечаний 10, 11 следует, что, не теряя общности рассуждений, можно считать, что среди ограничений, задающих X , нет эквивалентных, и при этом все ограничения существенные. Однако это замечание нельзя перенести на случай, когда рассматривается множество $X(t)$ из утверждения 3 (см. замечание 10).

Допустим, что $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $(x^1, x^2) = \{\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \mid \lambda \in (0, 1)\}$, $[x^1, x^2] = \{\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$. Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, F — выпуклое замкнутое непустое подмножество Y . Множество F называется *гранью* Y , если

$$\forall x^1, x^2 \in Y \quad (x^1, x^2) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow [x^1, x^2] \subseteq F.$$

У т в е р ж д е н и е 10. Допустим, что $i \in I_r, \Gamma_i = H_i \cap X \neq \emptyset$. Тогда Γ_i — грань X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^1, x^2 \in X, x^0 \in (x^1, x^2), x^0 \in \Gamma_i$. Тогда $\exists \lambda \in (0, 1): x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$,

$$0 = l_i(x^0) = \lambda l_i(x^1) + (1 - \lambda)l_i(x^2). \quad (5.12)$$

Из условий $x^1, x^2 \in X$ следует, что

$$l_i(x^1) \leq 0, \quad l_i(x^2) \leq 0. \quad (5.13)$$

Докажем, что $l_i(x^1) = 0, l_i(x^2) = 0$, откуда $x^1, x^2 \in \Gamma_i$. Пусть, например, $l_i(x^1) < 0$. Тогда из (5.12) получаем $l_i(x^2) > 0$, что противоречит (5.13). Утверждение 10 доказано.

Совершенно аналогично доказывается утверждение 11.

У т в е р ж д е н и е 11. Пусть $I \subseteq I_r, I \neq \emptyset$,

$$\Gamma = X \cap \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset.$$

Тогда Γ — грань X .

У т в е р ж д е н и е 12. Пусть среди ограничений, задающих множество X , нет эквивалентных, $\text{int}X \neq \emptyset$. Тогда,

(а) $\forall i \in I_* \Gamma_i = H_i \cap X$ — грань размерности $n - 1$;

(б) $\partial X = \Gamma_* = \bigcup_{i \in I_*} \Gamma_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (а) является очевидным следствием утверждения 9(б). Покажем справедливость утверждения (б). Включение $\Gamma_* \subseteq \partial X$ следует из утверждения 7(б). Докажем обратное включение. Пусть $x \in \partial X$. Тогда $x \in X, x \notin \text{int}X$ и в силу утверждений 6, 7(б) $\exists i \in I_*: l_i(x) = 0$, откуда $x \in \Gamma_i \subseteq \Gamma_*$. Утверждение 12(б) доказано.

Для дальнейшего понадобятся некоторые дополнительные понятия и обозначения. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$, $l(x) = \langle e, x \rangle + d$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l(x) = 0\}$ — гиперплоскость размерности $n - 1$ (поскольку $|e| \neq 0$, которая может соответствовать любому из введенных ранее H_i , $i \in I_r$).

Пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим точку $h \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую следующим двум условиям: (а) $l(h) = 0$, т.е. $h \in H$; (б) $y - h \perp H$, т.е. $y - h = \gamma e$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда из (б) получаем $h = y - \gamma e$, откуда в силу (а) $0 = l(h) = l(y - \gamma e) = \langle y, e \rangle - \gamma |e|^2 + d$, а следовательно,

$$h = y - \gamma e, \gamma = (\langle y, e \rangle + d) / |e|^2. \quad (5.14)$$

Таким образом, точка h определяется из условий (а), (б) однозначно. Она называется *проекцией* точки y на гиперплоскость H и обозначается $h = pr_H y$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $pr_H A = \bigcup_{y \in A} pr_H y$ — проекция множества A на гиперплоскость H .

Пусть $U \subseteq H$, $t \geq 0$. Тогда $U^{t|e|} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = u + \tau e, u \in U, \tau \in [0, t]\}$ — *призма* с основанием U и высотой $t|e|$. Приведем некоторые простые свойства проекции точки на гиперплоскость H , а также призм.

У т в е р ж д е н и е 13. Пусть $y = h + te$, где $h \in H, t \in \mathbb{R}$. Тогда $pr_H y = h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условия (5.14), $l(h) = 0$, получаем: $pr_H y = y - \gamma e$, $\gamma = (\langle h + te, e \rangle + d) / |e|^2 = t|e|^2 / |e|^2 = t$, откуда $pr_H y = y - \gamma e = h + te - te = h$. Утверждение 13 доказано.

Следствием утверждения 13 является утверждение 14.

У т в е р ж д е н и е 14. Пусть $U \subseteq H, t \geq 0$. Тогда $pr_H U^{t|e|} = U$.

У т в е р ж д е н и е 15. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \langle pr_H u - pr_H v, e \rangle = l(pr_H u) - l(pr_H v) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: $\forall h^1, h^2 \in H \ l(h^1) - l(h^2) = 0 - 0 = 0$. Утверждение 15 доказано.

У т в е р ж д е н и е 16. Справедливо неравенство

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \ |pr_H u - pr_H v| \leq |u - v|. \quad (5.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть γ_1, γ_2 определяются согласно (5.14) для $y = u, v$ соответственно. Используя утверждение 15, имеем

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= \langle pr_H u + \gamma_1 e - pr_H v - \gamma_2 e, pr_H u + \gamma_1 e - pr_H v - \gamma_2 e \rangle = \\ &= |pr_H u - pr_H v|^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 |e|^2, \end{aligned}$$

откуда и следует (5.15). Утверждение 16 доказано.

У т в е р ж д е н и е 17. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n, h^0 = pr_H x^0, \delta \geq 0$. Тогда $pr_H B^{(n)}(x^0, \delta) = B^{(n)}(h^0, \delta) \cap H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in pr_H B^{(n)}(x^0, \delta)$. Покажем, что $h \in B^{(n)}(h^0, \delta) \cap H$. Из $h \in pr_H B^{(n)}(x^0, \delta)$ следует, что $h \in H, \exists x \in B^{(n)}(x^0, \delta): h = pr_H x$. Но тогда, используя утверждение 16, получаем $h \in H, |h - h^0| \leq |x - x^0| \leq \delta$, что и требовалось доказать. Пусть теперь $h \in B^{(n)}(h^0, \delta) \cap H$. Покажем, что $h \in pr_H B^{(n)}(x^0, \delta)$. Пусть γ удовлетворяет (5.14) при $y = x^0$. Тогда $h^0 = x^0 - \gamma e$. Пусть $x = h + \gamma e$. Тогда в силу утверждения 13 $pr_H x = h, |x - x^0| = |h - h^0| \leq \delta$, а следовательно, $x \in B^{(n)}(x^0, \delta), h = pr_H x$, что и требовалось доказать. Утверждение 17 доказано.

Следствием утверждений 14, 17 является утверждение 18.

У т в е р ж д е н и е 18. Пусть $U \subseteq H, t > 0, u \in int U^{t|e|}, h = pr_H u$. Тогда $\exists \delta > 0: B^{(n)}(h, \delta) \cap H \subseteq U$.

У т в е р ж д е н и е 19. Пусть $e^1, e^2 \in \mathbb{R}^n$, $|e^1| \neq 0$, $|e^2| \neq 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $\langle e^1, x^1 \rangle + d_1 = 0$, $\langle e^2, x^2 \rangle + d_2 = 0$, $\langle e^2, x^1 \rangle + d_2 < 0$, $\langle e^1, x^2 \rangle + d_1 < 0$. Тогда не существует $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, таких, что

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, x^1 + t_1 e^1 = x^2 + t_2 e^2. \quad (5.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что нашлись такие $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, что выполняется (5.16). Тогда

$$\begin{aligned} \langle e^2, x^1 \rangle + d_2 &= \langle e^2, x^2 + t_2 e^2 - t_1 e^1 \rangle + d_2 = \langle e^2, x^2 \rangle + d_2 + t_2 |e^2|^2 - t_1 \langle e^1, e^2 \rangle = \\ &= t_2 |e^2|^2 - t_1 \langle e^1, e^2 \rangle < 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \langle e^1, x^2 \rangle + d_1 &= \langle e^1, x^1 + t_1 e^1 - t_2 e^2 \rangle + d_1 = \langle e^1, x^1 \rangle + d_1 + t_1 |e^1|^2 - t_2 \langle e^1, e^2 \rangle = \\ &= t_1 |e^1|^2 - t_2 \langle e^1, e^2 \rangle < 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.17), (5.18) заключаем, что $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$, $\langle e^1, e^2 \rangle > 0$, т.е. $\langle e^1, e^2 \rangle = |\langle e^1, e^2 \rangle|$, и при этом $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_2 / t_1 < |\langle e^1, e^2 \rangle| \cdot |e^2|^{-2}$, $t_1 / t_2 < |\langle e^1, e^2 \rangle| \cdot |e^1|^{-2}$, откуда $1 < |\langle e^1, e^2 \rangle|^2 \cdot |e^1|^{-2} \cdot |e^2|^{-2} \leq 1$,

т.е. пришли к противоречию. Утверждение 19 доказано.

У т в е р ж д е н и е 20. Пусть среди ограничений, задающих множество X , нет эквивалентных, $\text{int}X \neq \emptyset$, $1, 2 \in I_*$. Пусть далее $t_1, t_2 > 0$, $\Gamma_i = H_i \cap X = \{x \in X \mid \langle e^i, x \rangle + d_i = 0\}$, $\Gamma_i^{t_i |e^i|} = \{x = x' + \tau e^i \mid x' \in \Gamma_i, \tau \in [0, t_i]\}$ — призма с основанием Γ_i и высотой $t_i |e^i|$, $i = 1, 2$. Тогда (а) $\forall i \in \{1, 2\} \Gamma_i$ — грань размерности $n - 1$; (б) не существует точки $x^0 \in \text{int}\Gamma_1^{t_1 |e^1|} \cap \text{int}\Gamma_2^{t_2 |e^2|}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (а) следует из утверждения 9(б). Докажем (б). Рассмотрим сначала случай, когда векторы e^1, e^2 не коллинеарные. Тогда они являются линейно независимыми. Предположим, что нашлась точка $x^0 \in \text{int}\Gamma_1^{t_1 |e^1|} \cap \text{int}\Gamma_2^{t_2 |e^2|}$. Пусть $\delta > 0$, $B^{(n)}(x^0, \delta) \subseteq \Gamma_1^{t_1 |e^1|}$, $x^1 \in \Gamma_1$, $\tau_1 \in (0, t_1)$, $x^0 = x^1 + \tau_1 e^1$. Тогда в силу утверждений 13, 14, 17 $pr_{H_1} x^0 = x^1$, $B^{(n)}(x^1, \delta) \cap H_1 = pr_{H_1} B^{(n)}(x^0, \delta) \subseteq pr_{H_1} \Gamma_1^{t_1 |e^1|} = \Gamma_1 \subseteq X$, а в силу утверждения 5 получаем, что $\langle e^2, x^1 \rangle + d_2 < 0$. Совершенно аналогично для $x^2 \in \Gamma_2, \tau_2 \in (0, t_2)$, таких, что $x^0 = x^2 + \tau_2 e^2$, имеем $\langle e^1, x^2 \rangle + d_1 < 0$. Полученное равенство $x^1 + \tau_1 e^1 = x^0 = x^2 + \tau_2 e^2$, где $\tau_1, \tau_2 > 0$, противоречит утверждению 19.

Пусть теперь векторы e^1, e^2 коллинеарные. Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R} : e^2 = \lambda e^1$. Очевидно, что $\lambda \neq 0$. Предположим, что $\lambda > 0$. Возможны случаи: (а) $d_2 = \lambda d_1$, (б) $d_2 < \lambda d_1$, (в) $d_2 > \lambda d_1$. В случае (а) условия 1, 2 эквивалентны, что противоречит условиям доказываемого утверждения. В случаях (б), (в) приходим к противоречию с условием $1, 2 \in I_*$. Пусть

теперь $\lambda < 0$. Предположим, что нашлась точка $x^0 \in \text{int}\Gamma_1^{t_1|e^1|} \cap \text{int}\Gamma_2^{t_2|e^2|}$. Тогда аналогично предыдущему найдутся $x^1 \in \Gamma_1$, $x^2 \in \Gamma_2$, $\tau_1 \in (0, t_1)$, $\tau_2 \in (0, t_2)$: $x^0 = x^1 + \tau_1 e^1 = x^2 + \tau_2 e^2$, откуда $x^2 = x^1 + \tau_1 e^1 - \tau_2 e^2 = x^1 + \lambda_1 e^1$, где $\lambda_1 = \tau_1 - \lambda \tau_2 > 0$, а следовательно, $\langle e^1, x^2 \rangle + d_1 = \langle e^1, x^1 \rangle + \lambda_1 |e^1|^2 + d_1 = \lambda_1 |e^1|^2 + d_1 > d_1$, а это противоречит тому, что $x^2 \in \Gamma_2 \subseteq X \subseteq X_1$. Утверждение 20(б) доказано.

Пусть мы находимся в условиях утверждения 1 и $t > 0$. Тогда $\text{int}X(t) \neq \emptyset$, и мы можем ввести в рассмотрение поверхность множества $X(t)$, т.е. его границу (см. утверждение 12(б)):

$$\partial X(t) = \bigcup_{i \in I_*(t)} \Gamma_i(t),$$

где $I_*(t)$ — множество номеров ограничений, существенных для $X(t)$, которая в силу утверждения 12(а) является объединением граней $\Gamma_i(t)$ размерности $n - 1$ многогранного множества $X(t)$. Как уже отмечалось, если X — ограниченное множество, $\forall t \geq 0$ множество $X(t)$ также является ограниченным, т.е. является многогранником и в этом случае можно говорить о площади поверхности $X(t)$ как сумме площадей попарно различных граней размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$ (площадь каждой грани $\Gamma(t)$ размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$ понимается как мера Лебега $\mu_{n-1}(\Gamma(t))$, рассматриваемая в плоскости размерности $n - 1$, включающей в себя $\Gamma(t)$ (эта плоскость является аффинной оболочкой множества $\Gamma(t)$). Обозначим через $S(t)$ площадь поверхности многогранника $X(t)$.

У т в е р ж д е н и е 21. Пусть мы находимся в условиях утверждения 3, $t > 0$, $t' \geq t$. Тогда

$$\mu(X(t')) - \mu(X(t)) \geq E^{-1}S(t)(t' - t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $t > 0$ следует, что $\text{int}X(t) \neq \emptyset$. В силу утверждения 4 каждая точка любой грани $\Gamma = \Gamma(t)$ размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$ войдет в множество $X(t')$ вместе с внешним перпендикуляром к этой грани длины $\geq E^{-1}(t' - t)$, а следовательно, $X(t')$ будет содержать вместе с Γ призму Γ^{h_Γ} с основанием Γ и высотой $h_\Gamma \geq E^{-1}(t' - t)$, т.е. с объемом (мерой Лебега) $S_\Gamma h_\Gamma \geq E^{-1}S_\Gamma(t' - t)$, где S_Γ — мера Лебега размерности $n - 1$ грани Γ . Из утверждения 20 следует, что для различных граней Γ_i, Γ_j размерности $n - 1$ многогранника $X(t)$ в случае $i, j \in I_*(t)$ (где $I_*(t)$ — множество номеров ограничений, существенных для $X(t)$) соответствующие им призмы попарно не пересекаются в своих внутренних точках, а в силу утверждения 12(б)

$$\partial X(t) = \bigcup_{i \in I_*(t)} \Gamma_i,$$

откуда

$$\mu(X(t')) - \mu(X(t)) \geq \sum_{i \in I_*(t)} S_{\Gamma_i} h_{\Gamma_i} \geq \sum_{i \in I_*(t)} E^{-1}S_{\Gamma_i}(t' - t) = E^{-1}S(t)(t' - t).$$

Утверждение 21 доказано.

Заключение. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение серии работ [6—9], посвященных численным методам многомерного интегрирования. Предлагается приложение этих методов к задаче квантильного анализа (вычисления с заданной точностью ε значения функции квантили).

Поскольку наиболее значимые результаты были получены в [6—9] для многогранной области интегрирования и случая, когда подынтегральная функция является плотностью нормального

распределения, то и в настоящей работе основной упор делается именно на этот случай. При этом приведена оценка для основного параметра метода (см. алгоритм 2) — величины k (количества этапов последовательного дробления кубов), в наибольшей степени определяющего общий объем вычислений. Найдены оценки для каждой из двух описанных в [8, 9] возможных модификаций используемого метода интегрирования, а именно $k \leq C_1 - 0.5 \log_2 \varepsilon$ (для 1-й модификации) и $k \leq C_2 - (\log_2 \varepsilon) / 3$ (для 2-й модификации), где C_1, C_2 — некоторые постоянные, ε — погрешность решения задачи. Замечательно, что в этих оценках не присутствует число n — размерность задачи. Например, вторая из этих оценок говорит о том, что при каждом увеличении величины k на 1 можем ожидать уменьшения погрешности ε в 8 раз.

В замечании 9 также рассматривается вопрос о применимости алгоритма 2 к возможно более широкому множеству задач. Перечислены условия, необходимые для его реализации. Используя результаты из [6—9], показывается, что во многих случаях эти условия выполняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
4. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979.
5. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
6. *Нефедов В.Н.* К вопросу о вычислении вероятностного критерия оптимизации с использованием методов ветвления и отсека. Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 4. С. 51—60.
7. *Нефедов В.Н.* К вопросу об отыскании глобального экстремума в липшицевых и полиномиальных задачах оптимизации. Деп. в ВИНТИ. 26.04.1991. № 1759-В91. М.: ВИНТИ, 1991.
8. *Нефедов В.Н.* О приближенном вычислении многомерного интеграла с заданной точностью. Деп. в ВИНТИ. 11.11.1991. № 4838-В91. М.: ВИНТИ, 1991.
9. *Нефедов В.Н.* Некоторые численные методы приближенного вычисления вероятностной меры многогранника второго и третьего порядков точности // ЖВМ и МФ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1108—1124.
10. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
11. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
12. *Травин А.А.* Алгоритмы оценки квантильного критерия с заданной точностью в задачах стохастического программирования с кусочно-линейными и квадратичными функциями потерь: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2015.