

УДК 519.7

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ¹

© 2024 г. А.Н. Жирабок^{a, b, *}, А.В. Зуев^{a, b}, Ким Чхун Ир^a

^aДальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

^bИнститут проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию: 22.01.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 31.08.2023 г.

Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для дискретных линейных систем при внешних возмущениях, шумах измерений и параметрических неопределенностях. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной линейной вектор-функции состояния системы. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: дискретные линейные системы, возмущения, шумы измерения, параметрические неопределенности, интервальный наблюдатель

DOI: 10.31857/S0002338824010113, EDN: WJFEAF

INTERVAL ESTIMATION IN DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

© 2024 A. Zhirabok^{a, b, *}, A. Zuev^{a, b}, C. Kim^a

^aFar Eastern Federal University, Vladivostok

^bInstitute of Marine Technology Problems, Vladivostok

*e-mail: zhirabok@mail.ru, zuev.al@dyfu.ru, kim.ci@dyfu.ru

The problem of interval observer design for discrete-time linear systems under the external disturbances, measurement noise, and parametric uncertainties is studied. The relation allowing designing the interval observer of minimal dimension estimating the set of admissible values of the specified linear vector function of the system state are derived. Theoretical results are illustrated by the example.

Keywords: discrete-time linear systems, disturbances, measurement noise, parametric uncertainties, interval observer.

Введение. Статья является логическим продолжением работы [1], в которой рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем при наличии внешних возмущений и шумов измерений.

Задача построения интервальных наблюдателей активно исследуется последние годы, обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [2, 3], решения для различных классов систем, а также практические приложения можно найти в [4-11]. Особенностью этих работ является то, что в них определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в теории же и на практике интерес может представлять интервальная оценка только для значений заданной линейной функции этого вектора. Такой интервальный наблюдатель может иметь меньшую размерность, чем наблюдатель для полного вектора состояния, а точность оценивания выше. Кроме того, динамика наблюдателя может

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 23-29-000191), <https://rscf.ru/project/23-29-000191/>.

быть представлена в канонической форме, что позволяет упростить процесс решение задачи и расширить класс систем, для которых интервальные наблюдатели могут быть построены.

В статье ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для стационарных дискретных систем, описываемых линейными динамическими моделями, работающими в условиях действия внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей, которые позволяют оценить множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния.

1. Основные модели и постановка задачи. Предполагается, что рассматриваемые системы описываются дискретной линейной моделью

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\y(t) &= Hx(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния и выхода; $u(t) \in R^m$ – точно известный вектор управления, $F \in R^{n \times n}$, $G \in R^{n \times m}$, $L \in R^{n \times q}$ и $H \in R^{l \times n}$ – постоянные матрицы; $\rho(t) \in R^q$ описывает внешние возмущения и полагается неизвестной ограниченной функцией времени, $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$; $\tilde{A}(t) \in R^{l \times l}$ описывает шумы измерений и также является неизвестной ограниченной функцией времени, $\|\tilde{A}(t)\| \leq v_*$; здесь символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма; $\mu(t) \in \Pi \subset R^s$ – ограниченный вектор переменных параметров. Как и в [2], предполагается, что значения вектора $\mu(t)$ недоступны для измерений, множество Π известно, матричная функция $\Delta F(\mu)$ ограничена для всех $\mu \in \Pi$: $\underline{\Delta F} \leq \Delta F(\mu) \leq \overline{\Delta F}$ с известными границами $\underline{\Delta F}$ и $\overline{\Delta F}$. Как и в [2], для векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$ и матриц $A^{(1)}, A^{(2)}$ отношения $x^{(1)} \leq x^{(2)}$ и $A^{(1)} \leq A^{(2)}$ понимаются поэлементно.

Как следует из описания системы (1.1), неопределенность в задаче представлена в виде шума измерений $v(t)$ и возмущения $\rho(t)$ с верхними границами v_* и ρ_* соответственно для всех $t \geq 0$, а также и параметрической неопределенности ΔF из интервала $(\underline{\Delta F}, \overline{\Delta F})$.

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, не чувствительный или мало чувствительный к внешним возмущениям и параметрическим неопределенностям, формирующий нижнюю $\underline{z}(t)$ и верхнюю $\overline{z}(t)$ границы линейной вектор-функции состояния, которая задана известной матрицей M в виде

$$z(t) = Mx(t), z(t) \in R^p, M \in R^{p \times n},$$

такие, что $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t)$ при всех $t \geq 0$. Вид матрицы M определяется решаемой задачей, в частности, в примере разд. 6 требуется оценить неизмеряемую компоненту вектора состояния системы. Поскольку задачи учета шума измерений и возмущений для дискретных и непрерывных систем решаются практически одинаково, а последние были детально рассмотрены в [1], в настоящей работе акцент сделан на параметрические неопределенности; поэтому предположим вначале, что $v(t) = 0$ и $\rho(t) = 0$, в результате чего модель (1.1) упрощается:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (F + \Delta F(\mu(t)))x(t) + Gu(t), \\y(t) &= Hx(t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

В [1] показано, что для непрерывных систем интервальный наблюдатель может быть построен на основе модели минимальной размерности, реализованной в двух разных канонических формах – идентификационной (ИКФ) и жордановой. Для дискретных систем более предпочтительной представляется ИКФ, которая является устойчивой и неотрицательной, что соответствует требованиям, предъявляемые к дискретным интервальным наблюдателям [2]. Отметим, что неотрицательность используется в доказательстве теоремы 1, а устойчивость – это стандартное требование к наблюдателю.

Решение задачи построения интервального наблюдателя основано на модели исходной системы (1.2) минимальной размерности, оценивающей вектор-функцию $z(t)$:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= (F_* + \Delta F_*)x_*(t) + (J_* + J')y(t) + G_*u(t), \\ z(t) &= H_z x_*(t) + Qy(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния модели, k – ее размерность, F_* , J , J' , G_* , L_* , H_z и Q – матрицы, подлежащие определению, матрица J' – это поправка на параметрическую неопределенность. По аналогии с (1.2) предполагается, что $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$ для известных $\underline{\Delta F}_*$ и $\overline{\Delta F}_*$ и $x_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$.

Для решения задачи будем полагать, что векторы $x(t)$ и $x_*(t)$ связаны матрицей Φ :

$$x_*(t) = \Phi x(t).$$

Известно [12, 13], что при $\Delta F(\mu) = 0$ и $\Delta F_* = 0$ матрицы, описывающие модель, удовлетворяет уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, G_* = \Phi G, J' = 0. \quad (1.4)$$

Представим второе уравнение в (1.3) вместе с $z(t) = Mx(t)$ в виде линейного алгебраического уравнения

$$M = H_z \Phi + QH = \begin{pmatrix} H_z & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

с неизвестными матрицами H_z и Q ; оно имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

т.е. если каждая строка матрицы M линейно выражается через строки матриц Φ и H , согласно (1.5).

Замечание 1. Рассматриваемый подход имеет некоторые ограничения, связанные с параметрической неопределенностью ΔF и условием на нее в виде $\underline{\Delta F} \leq \Delta F(\mu) \leq \overline{\Delta F}$. Неопределенность ΔF_* , входящая в (1.3), определяется на основе ΔF следующим образом. Из (1.2) и (1.3) по аналогии с (1.4) следует

$$\Phi(F + \Delta F) = (F_* + \Delta F_*)\Phi + J_* H + J' H.$$

Поскольку матрица Φ удовлетворяет условию $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$, то $\Phi \Delta F = \Delta F_* \Phi + J' H$ или

$$\Phi \Delta F = \begin{pmatrix} \Delta F_* & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

После определения матрицы Φ из уравнения (1.7) вычисляются ΔF_* и J' .

2. Построение модели. Для упрощения процесса решения задачи матрица F в (1.3) задается в ИКФ:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

В отличие от непрерывного случая, когда для обеспечения устойчивости собственные числа должны иметь отрицательные вещественные части, в дискретном они по модулю не должны превосходить единицу; для рассматриваемой ИКФ они равны нулю.

Согласно (1.3), неопределенность ΔF в виде слагаемого ΔF_* влияет на модель, а следовательно, и на ширину интервала $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$. Ясно тогда, что наилучшей с точки зрения ширины интервала является модель, не чувствительная к неопределенности ΔF , т.е. когда в (1.3) $\Delta F_* = 0$. Тогда по аналогии с [12, 13] решение осуществляется на основе уравнения, гарантирующее такую нечувствительность:

$$(\Phi_1 - J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k}) \left(V^{(k)} \Delta^{(k)} \right) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad \Delta^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta F & F\Delta F & \dots & F^{k-1}\Delta F \\ 0 & H\Delta F & \dots & HF^{k-2}\Delta F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Φ_i и J_i — i -е строки матриц Φ и J_* . Матрица $V^{(k)}$ обеспечивает построение модели (1.3), $\Delta^{(k)}$ — ее нечувствительность к неопределенности ΔF . Уравнение (2.2) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank} \left(V^{(k)} \Delta^{(k)} \right) < lk + n. \quad (2.3)$$

Для построения модели условие (2.3) проверяется последовательно для $k = 1, k = 2, \dots$ и выбирается минимальное k , при котором оно выполняется; далее из (2.2) определяется строка $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$, затем на основе известных [12, 13] соотношений

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_k H, \quad (2.4)$$

полученных из (1.4) и (2.1), строится матрица Φ . Далее проверяется условие (1.6), выполнение которого означает, что матрица M может быть выражена через $(\Phi^T H^T)^T$ и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную $z = Mx$; матрицы H_z и Q определяются из уравнения (1.5) и G — из (1.4). Если условие (1.6) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (2.2) при прежнем или увеличенном значении k . Если условие (2.3) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад неопределенности ΔF в модель, который традиционно оценивается нормой Фробениуса матрицы $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k}) \Delta^{(k)}$ [14].

3. Построение интервального наблюдателя. Поскольку в модель (1.3) входит произведение $J'y(t)$, а неопределенность ΔF , согласно (1.7), может входить в матрицу J' , вклад этой неопределенности в наблюдатель зависит от значений переменной $y(t)$. Отметим, что,

согласно (1.7), J' зависит от ΔF линейно. Для учета этого обстоятельства свяжем с J' бинарную переменную c следующим образом (предполагается для простоты, что только один элемент матрицы J' зависит от ΔF): если при возрастании ΔF значение этого элемента также возрастает, то $c = 1$, в противном случае $c = -1$. Введем матрицы \underline{J}_0 и \bar{J}_0 :

$$\underline{J}_0 = \begin{cases} J'(** \underline{\Delta F} *), \text{ если } cy(t) > 0, \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ J'(** \overline{\Delta F} *), \text{ если } cy(t) < 0, \end{cases} \quad \bar{J}_0 = \begin{cases} J'(** \overline{\Delta F} *), \text{ если } y(t) > 0, \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ J'(** \underline{\Delta F} *), \text{ если } y(t) < 0. \end{cases}$$

Символом «*» отмечены элементы, не зависящие от ΔF . Если матрица J' не зависит от ΔF_* , то $\underline{J}_0 = \bar{J}_0 = J'$. Тогда

$$(J' - \underline{J}_0)y(t) = \begin{cases} (J'(** \Delta F *) - J'(** \underline{\Delta F} *))y(t) \geq 0, \text{ если } cy(t) > 0 \\ 0, \text{ если } y(t) = 0, \\ (J'(** \Delta F *) - J'(** \overline{\Delta F} *))y(t) \geq 0, \text{ если } cy(t) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $(J' - \underline{J}_0)y(t) \geq 0$; аналогично можно показать, что $(\bar{J}_0 - J')y(t) \geq 0$.

По аналогии с [2] предлагаются два варианта построения интервальных наблюдателей – более простой, но с ограничениями на исходную систему, и более сложный без ограничений. Рассмотрим оба варианта, начав с первого, когда дополнительно предполагается, что $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ и $x_*(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. В этом случае наблюдатель строится на основе модели (1.3) с матрицами, определенными при построении этой модели, и ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (F_* + \underline{\Delta F}_*)\underline{x}_*(t) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_*u(t) \\ \bar{x}_*(t+1) &= (F_* + \overline{\Delta F}_*)\bar{x}_*(t) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_*u(t), \\ &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy(t) \quad \underline{x}_*(0) = \underline{x}_0, \bar{x}_*(0) = \bar{x}_0 \\ \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

уравнения для которых с учетом (1.3) и (3.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_*\underline{e}_*(t) + \underline{\Delta F}_*x_*(t) - \underline{\Delta F}_*\underline{x}_*(t) + (J' - \underline{J}_0)y(t), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_*\bar{e}_*(t) + \overline{\Delta F}_*\bar{x}_*(t) - \overline{\Delta F}_*x_*(t) + (\bar{J}_0 - J')y(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теорема 1. Пусть $0 \leq \underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$, $H_z \geq 0$, $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ и $x_*(t) \geq 0$, тогда для интервального наблюдателя (3.1) и всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t). \tag{3.4}$$

Доказательство. Выше было показано, что $(J' - \underline{J}_0)y(t) \geq 0$. Далее, из $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, согласно (3.2), следует $\underline{e}_*(0) \geq 0, \bar{e}_*(0) \geq 0$. Из (3.3) получаем $\underline{e}_*(1) = F_*\underline{e}_*(0) + \underline{\Delta F}_*x_*(0) - \underline{\Delta F}_*\bar{x}_*(0)$.

Поскольку $\underline{\Delta F}_* \geq 0$ и $\underline{x}^*(0) \leq x_*(0)$, то $\underline{\Delta F}_*(x_*(0) - \underline{x}_*(0)) \geq 0$ и $\underline{\Delta F}_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* \underline{x}_*(0)$. Так как $\Delta F_* \geq \underline{\Delta F}_*$ и $x_*(0) \geq 0$, то $(\Delta F_* - \underline{\Delta F}_*)x_*(0) \geq 0$ и $\Delta F_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* x_*(0)$, откуда с учетом предыдущего получаем $\Delta F_* x_*(0) \geq \underline{\Delta F}_* \underline{x}_*(0)$. Так как $\underline{e}_*(0) \geq 0$ и $F_* \geq 0$, то из (3.3) следует $\underline{e}_*(1) \geq 0$, т.е. $\underline{x}_*(1) \leq x_*(1)$. По индукции можно доказать неравенства $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t)$ и аналогичные $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. Так как $z(t) = H_z x_*(t) + Qu(t)$, из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = H_z x_*(t) + Qu(t) - (H_z \underline{x}_*(t) + Qu(t)) = H_z \underline{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = H_z \bar{x}_*(t) + Qu(t) - (H_z x_*(t) + Qu(t)) = H_z \bar{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \geq 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$, что эквивалентно $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$. Теорема доказана.

Замечание 2. В [2], где рассматривается аналогичная задача по оценке полного вектора состояния непрерывных систем, на исходную систему накладывается больше ограничений и доказательство заметно сложнее; в нашем случае оно упрощается за счет канонической формы матрицы F_* . Кроме того, наблюдатель в [2] имеет более сложный вид за счет введения в уравнения (3.1) дополнительных членов, обеспечивающих, в частности, устойчивость наблюдателя. В дискретном случае использование таких членов не дает требуемого результата, но для доказательства ограниченности переменных $\underline{x}_*(t)$ и $\bar{x}_*(t)$ требуется, чтобы матрицы $F_* + \underline{\Delta F}_*$ и $F_* + \Delta F_*$ в наблюдателе (3.1) были устойчивы.

Замечание 3. В случае $H_z \leq 0$ границы $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ определяются соотношениями $\underline{z} = H_z \bar{x}_* + Qu$ и $\bar{z} = H_z \underline{x}_* + Qu$. Действительно, тогда

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = H_z x_*(t) + Qu(t) - (H_z \bar{x}_*(t) + Qu(t)) = -H_z \bar{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = H_z \underline{x}_*(t) + Qu(t) - (H_z x_*(t) + Qu(t)) = -H_z \underline{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0, \bar{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \leq 0$ также получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$.

Рассмотрим более сложный интервальный наблюдатель без ограничений на исходную систему. Изложение предварим леммой.

Лемма. Пусть $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ для некоторых $(n \times n)$ -матриц \underline{A}, \bar{A} и $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ для n -мерных векторов $\underline{x}, x, \bar{x}$. Тогда

$$\underline{A}^+ \underline{x}^+ - \bar{A}^+ \underline{x}^- - \underline{A}^- \bar{x}^+ + \bar{A}^- \bar{x}^- \leq Ax \leq \bar{A}^+ \bar{x}^+ - \underline{A}^+ \bar{x}^- - \bar{A}^- \underline{x}^+ + \underline{A}^- \underline{x}^- \quad (3.5)$$

где $A^+ = \max(0, A)$, $A^- = A^+ - A$; для переменных $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ аналогично.

Доказательство. Приведено в [6].

Интервальный наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+(t) - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^-(t) - \underline{\Delta F}_*^- \bar{x}_*^+(t) + \overline{\Delta F}_*^- \bar{x}_*^-(t)) + (J_* + \underline{J}_0)u(t) + G_* u(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= F_* \bar{x}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \bar{x}_*^+(t) - \underline{\Delta F}_*^+ \bar{x}_*^-(t) - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+(t) + \\ &\quad + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-(t)) + (J_* + \bar{J}_0)u(t) + G_* u(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \underline{\Delta F}_* x_*(t) - (\underline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^+(t) - \overline{\Delta F}_*^+ \underline{x}_*^-(t) - \underline{\Delta F}_*^- \bar{x}_*^+(t) + \overline{\Delta F}_*^- \bar{x}_*^-(t)), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + (\overline{\Delta F}_*^+ \bar{x}_*^+(t) - \underline{\Delta F}_*^+ \bar{x}_*^-(t) - \overline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^+(t) + \underline{\Delta F}_*^- \underline{x}_*^-(t)) - \underline{\Delta F}_* x_*(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть $\underline{\Delta F}_* \leq \Delta F_* \leq \overline{\Delta F}_*$, $H_z \geq 0$ и $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, тогда для интервального наблюдателя (3.6) и всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \quad \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t).$$

Доказательство. Из $\underline{x}_{\bar{\Delta}}(\bar{\Delta}) \leq x(\cdot) \leq \bar{x}(\cdot)$, согласно (3.2), следует $\underline{e}_*(0) \geq 0$, $\bar{e}(0) \geq 0$. Поскольку $F_* \geq 0$, из (3.7) и леммы вытекает $\underline{e}_*(1) \geq 0$ т.е. $\underline{x}_*(1) \leq x_*(1)$. По индукции можно доказать неравенства $\underline{e}_*(t) \geq 0$ и $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t)$ и аналогичные $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ для всех $t \geq 0$. Вторая часть теоремы доказывается по аналогии с такой же частью теоремой 1. Теорема доказана.

Замечание 4. Если вектор параметров постоянен, но точно не известен, то функция $\Delta F(\mu)$ также постоянна. В этом случае соотношение (3.5) упрощается и принимает вид [6]

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x}.$$

Интервальный наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= F_* \underline{x}_*(t) + (\Delta F_*^+ \underline{x}_*(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*(t)) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_* u(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= F_* \bar{x}_*(t) + (\Delta F_*^+ \bar{x}_*(t) - \Delta F_*^- \underline{x}_*(t)) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_* u(t), \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned}$$

Уравнения для ошибок оценивания здесь принимают вид

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* x_*(t) - (\Delta F_*^+ \underline{x}_*(t) - \Delta F_*^- \bar{x}_*(t)), \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + (\Delta F_*^+ \bar{x}_*(t) - \Delta F_*^- \underline{x}_*(t)) - \Delta F_* x_*(t). \end{aligned}$$

Теорема 2 и ее доказательство трансформируются очевидным образом.

Сравнение рассмотренных вариантов показывает, что первый накладывает больше ограничений на систему (1.2), нежели второй, но дает более простую конструкцию интервального наблюдателя.

4. Робастное решение. Если условие (2.3) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад неопределенности ΔF в модель, который традиционно оценивается нормой Фробениуса матрицы $(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) \Delta^{(k)}$ [14]. Оно практически полностью совпадает с решением, предложенным в [1], за исключением того, что минимизируется норма $\left\| (\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) \Delta^{(k)} \right\|_F$ при выполнении условия

$$(\Phi_1 \quad -J_1 \quad \dots \quad -J_k) V^{(k)} = 0. \tag{4.1}$$

Отметим, что общая идея получения робастного решения была предложена в [14].

Как и в [1], определяется минимальное значение k , при котором уравнение (4.1) имеет несколько линейно независимых решений, которые сводятся в матрицу

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_1^{(1)} & -J_2^{(1)} & \dots & -J_k^{(1)} \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ \Phi_1^{(N)} & -J_1^{(N)} & -J_2^{(N)} & \dots & -J_k^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $W \Delta^{(k)} = U_\Delta \Sigma_\Delta V_\Delta$, первый транспонированный столбец матрицы U_Δ выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$

и принимается $(\Phi_1 \ -J_1 \ \dots \ -J_k) = wW$. Определением матриц Φ , $G_* = \Phi G$ и ΔF_* завершается синтез модели (1.3), минимально чувствительной к неопределенности ΔF .

Аналогичным образом можно искать решение, минимизирующее вклад возмущения $\rho(t)$ в модель. Для этого строится матрица

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $WL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$, первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$ и принимается $(\Phi_1 \ -J_1 \ \dots \ -J_k) = wW$. Определением матриц Φ , $G_* = \Phi G$ и $L_* = \Phi L$ завершается синтез модели (1.3), минимально чувствительной к возмущениям.

5. Учет возмущений и погрешности измерений. Наличие возмущения $\rho(t) \neq 0$ в случае $L = \Phi L \neq 0$ приводит к тому, что статическая часть модели (1.3) должна быть скорректирована следующим образом:

$$z(t) = H_z x_*(t) + Qy_0(t);$$

переменная $y_0(t)$, входящая в это уравнение, должна формироваться так, чтобы $z(t)$ была не чувствительной к возмущению. Так как $y_0(t)$ – это преобразованный вектор $y(t)$, $y_0(t) = N_1 y(t) = N_1 Hx(t)$. Далее введем матрицу L_0 максимального ранга, такую, что $L_0 L = 0$. Поскольку вектор $x'(t) = L_0 x(t)$ не чувствителен к возмущению, то $y_0(t) = N_2 x'(t)$ для некоторой матрицы N_2 . Тогда для матриц N_1 и N_2 получаем уравнение $N_1 H = N_2 L_0$, которое имеет решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0) + \text{rank}(H).$$

Если это условие выполняется, матрицы N_1 и N_2 определяются из уравнения

$$(N_1 \ -N_2) \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

При наличии возмущений и погрешностей измерений модель пополняется слагаемыми $(J_* + J')v(t)$ и $L_* \rho(t)$; для их компенсации с целью получения неотрицательных значений ошибок оценивания $\underline{e}_*(t)$ и $\bar{e}_*(t)$ в наблюдатель добавляются слагаемые $-(|J_* + J'|)E_k v_*$ и $-|L_*|E_k \rho_*$ для переменной $\underline{x}_*(t)$ и $(|J_* + J'|)E_k v_*$ и $|L_*|E_k \rho_*$ для переменной $\bar{x}_*(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (F_* + \Delta F_*)\underline{x}_*(t) + (J_* + \underline{J}_0)y(t) + G_*u(t) - (|J_* + J'|)E_k v_* - |L_*|E_k \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (F_* + \overline{\Delta F_*})\bar{x}_*(t) + (J_* + \bar{J}_0)y(t) + G_*u(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* + |L_*|E_k \rho_*, \\ \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $|J_* + J'|$ и $|L_*|$ – матрицы, составленные из абсолютных значений элементов матриц $J_* + J'$ и L_* , E_k – $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц. Выражения (3.3) для ошибок оценивания также корректируются:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= F_* \underline{e}_*(t) + \Delta F_* \underline{x}_*(t) - \underline{\Delta F_*} \underline{x}_*(t) - (J_* + J')v(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* + L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*, \\ \bar{e}_*(t+1) &= F_* \bar{e}_*(t) + \overline{\Delta F_*} \bar{x}_*(t) - \overline{\Delta F_*} \bar{x}_*(t) + (J_* + J')v(t) + (|J_* + J'|)E_k v_* - L_* \rho(t) + |L_*|E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомый результат следует из доказательства теоремы 1 и очевидных дополнительных неравенств $\left(|J_* + J'| \right) E_k v_* \pm (J_* + J') v(t) \geq 0$ и $|L_*| E_k \rho_* \pm L_* \rho(t) \geq 0$.

Изложим все сказанное выше в виде обобщенного алгоритма.

Алгоритм.

1. Из условия (2.3) найти минимальную размерность k .
2. Из (2.2) и (2.4) определить матрицы Φ и L^* .
3. При условии выполнения (1.6) из (1.5) и (1.7) найти матрицы H_z , Q и J' .
4. Построить интервальный наблюдатель (3.1) или (3.6), или (5.1).
5. Если условие (1.6) не выполняется, найти робастное решение на основе результатов разд. 4.
6. **Пример.** Рассмотрим дискретизированную модель электропривода [15]:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= (k_2 + \Delta_1(t)) x_3(t) + x_2(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_3 x_2(t) + (k_4 + \Delta_2(t)) x_3(t) + k_5 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), y_2(t) = x_3(t) + v_2(t), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ – это скорость и угол вращения вала двигателя и ток якоря соответственно; коэффициенты $k_1 - k_5$ представляют параметры электропривода и интервал дискретизации; возмущение $\rho(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; неопределенность $\Delta_1(t)$ вызвана изменением инерционных свойств механических частей электропривода, $\Delta_2(t)$ – изменением активного сопротивления цепи якоря электродвигателя из-за его нагрева. Модель (6.1) описывается следующими матрицами:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Delta_1 F(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $x_2(t)$, приняв $M = (0 \ 1 \ 0)$. Поскольку неопределенность $\Delta_1(t)$ входит в уравнение для этой переменной, сделать модель нечувствительной к ней невозможно, поэтому ее можно строить, приняв $\Delta_1(t) = 0$. Уравнение (2.2) с $\Delta^{(k)} = 0$ с размерностью модели $k = 1$ имеет вид

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает $\Phi = (1/k_1 \ -1 \ 0)$ и $J_* = (1/k_1 \ -k_2)$, откуда $G_* = 0$, $L_* = -1$. Нетрудно проверить, что условие (1.5) выполняется и $H_z = -1$, $Q = (1/k_1 \ 0)$; из (1.6) следует $\Delta F_1 = 0$, $J'_1 = (0 - \Delta_1)$ и $\Delta F_2 = 0$, $J'_2 = 0$. Модель (1.3) для системы (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1/k_1) y_1(t) - (k_2 + \Delta_1(t)) y_2(t) - \rho(t), \\ z(t) &= -x(t) + (1/k_1) y_1(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для $J_1' = (0 - \Delta_1)$ переменная $= -1$. Рассмотрим такой режим работы электропривода, когда $x_2(t) = y_2(t) \geq 0$ при $v_2(t) = 0$. Тогда из определения матриц J_0 и \bar{J}_0 следует $J_0 = \bar{\Delta}_1$, $\bar{J}_0 = \underline{\Delta}_1$. Так как $H_z = -1$, интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $z(t) = x_2(t)$, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - (k_2 + \bar{\Delta}_1)y_2(t) - (1/k_1)v_1 - k_2v_2 - \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - (k_2 + \underline{\Delta}_1)y_2(t) + (1/k_1)v_1 + k_2v_2 + \rho_*, \\ \underline{z}(t) &= -\bar{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t), \bar{z}(t) = -\underline{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Переменные $x_1(t)$ и $x_3(t)$ могут быть оценены, согласно формулам измерений из (6.1):

$$\underline{x}_1(t) = y_1(t) - v_1, \underline{x}_3(t) = y_2(t) - v_2, \bar{x}_1(t) = y_1(t) + v_1, \bar{x}_3(t) = y_2(t) + v_2.$$

Сравнивая полученные оценки с оценками, которые строятся на основе [2] и аналогичных работ, можно сделать вывод о том, что предложенный подход дает более простой наблюдатель и интервалы меньших размеров, поскольку, в частности, не все они содержат параметрические неопределенности.

Для моделирования рассмотрим систему (6.1) и наблюдатель и (6.2) с $u(t) = 0.2\sin(t/20)$ и $\Delta_1(t) = 0.3(1 + \sin(10t))$; шумы $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $\rho(t)$ в каждый момент времени t представляют собой независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(-0,01; 0,01)$. Для простоты примем $k_1 = k_2 = k_5 = 1$, $k_3 = k_4 = -1$. Результаты моделирования приведены на рисунке, где при $v_{1*} = v_{2*} = \rho = 0.015$ и $\underline{\Delta}_1 = 0$, $\bar{\Delta}_1 = 0.6$ показано поведение переменной $x_2(t)$ и ее нижней и верхней оценок $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$ для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = (0, -0.05)^T$, $\bar{x}(0) = (0, 0.05)^T$.

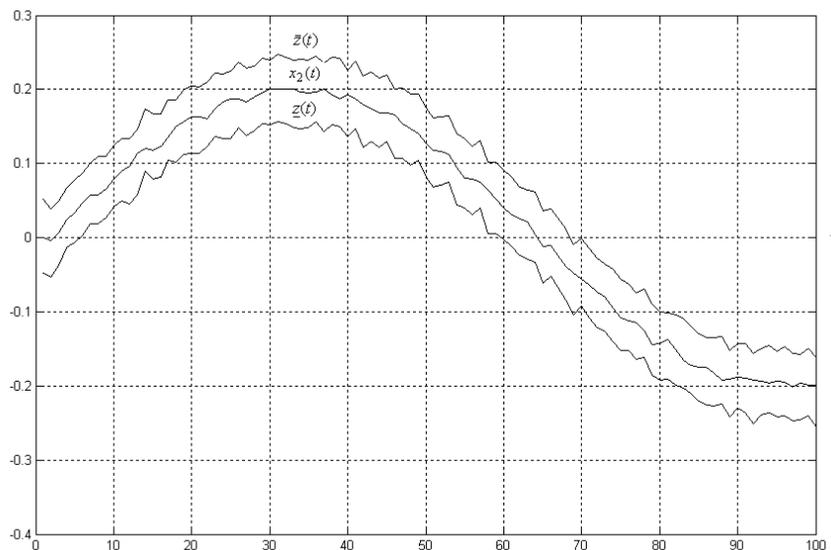


Рисунок. Поведение переменной $x_2(t)$ и ее оценок $\underline{z}(t)$ и $\bar{z}(t)$

Заключение. Рассмотрена задача построения интервальных наблюдателей в системах, описываемых линейными дискретными моделями, которые позволяют оценивать множество допустимых значений заданной линейной вектор-функции состояния системы при наличии

внешних возмущений, шумов измерений и параметрических неопределенностей. Предложен метод построения интервальных наблюдателей на основе предварительно синтезированной модели (1.3) с матрицами, определенными при синтезе этой модели на базе соотношений (1.4) и (1.5), а также идентификационной канонической формы матрицы F (2.1), которая позволяет получить простой метод минимизации размерности модели и обеспечить его нечувствительность или малую чувствительность к внешним возмущениям и параметрическим неопределенностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Ким Чхун Ир* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 22-32.
2. *Ефимов Д. В., Раиси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // АиТ. 2016. № 2. С. 5-49.
3. *Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.* Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. V. 14. P. 721-740.
4. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using Fuzzy Interacting Observers for Fault Diagnosis in Systems with Parametric Uncertainty // Proc. XII-th Inter. Sympos. «Intelligent Systems», INTELS'16. Moscow, Russia, 2016. P. 499-504.
5. *Кремлев А. С., Чеботарев С. Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. №. 4. С. 42-46.
6. *Efimov D., Raissi T., Chebotarev S., Zolghadri A.* Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. 2013. V. 49. P. 200-206.
7. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval Observers for Continuous-time LPV Systems with L_1/L_2 Performance // Automatica. 2015. V. 51. P. 82-89.
8. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // IEEE Trans. Automatic Control. 2010. V. 55. №. 2. P. 523-527.
9. *Blesa J., Puig V., Bolea Y.* Fault Detection Using Interval LPV Models in an Open-flow Canal // Control Engineering Practice. 2010. V. 18. P. 460-470.
10. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // IFAC Ncolcos 2013. Toulouse, France, 2013.
11. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-Minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // Intern. J. Control. 2019. DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
12. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Шумский А. Е.* Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 73–89.
13. *Жирабок А. Н., Зуев А. В., Шумский А. Е.* Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // АиТ. 2020. № 2. С. 18–35.
14. *Low X., Willsky A., Verghese G.* Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems // Automatica. 1996. V. 22. P. 333-344.
15. *Филаретов В. Ф., Зуев А. В., Губанков А. С.* Управление манипуляторами при выполнении различных технологических операций. М.: Наука, 2018.