

УДК 519.977

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ МАШИНЫ ДУБИНСА С ОДНОКРАТНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А.С. Бортакровский^{a, b, *}, И.В. Урюпин^{c, **}

^a Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^b МИСИС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

^c ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

**e-mail: uryupin93@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

После доработки 19.09.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается задача быстрогодействия гибридной системы, в процессе функционирования которой количество объектов управления меняется. Движение начинает один объект управления (носитель). В некоторый момент времени от него отделяются несколько подвижных объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). Носитель представляется гибридной моделью машины Дубинса, допускающей траектории неограниченной кривизны. Движение отделяемых объектов прямолинейное с ограниченными скоростями и ускорениями. Решается задача минимизации времени достижения всех целей.

Ключевые слова: гибридная система, модель Дубинса, оптимальное управление, разделение объектов управления

DOI: 10.31857/S0002338824010063, EDN: IVVBVB

RESERCHING PERFORMANCE OF THE DUBINS MACHINE HYBRID MODEL WITH SINGLE SEPARATION OF CONTROL OBJECTS

© 2024 A.S. Bortakovskii^{a, b, *}, I.V. Uryupin^{c, **}

^a Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

^b National University of Science and Technological University (MISiS), Moscow, Russia

^c Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia

*e-mail: asbortakov@mail.ru

**e-mail: uryupin93@yandex.ru

The problem of the performance of a hybrid system, which the number of control objects changes during the operation is considered. One control object (carrier) begins to move. At some point in time, several moving objects are separated from it and sent to specified terminal states (targets). The carrier is represented by a hybrid model of the Dubins machine, allowing trajectories of unlimited curvature. The movement of separated objects is rectilinear with limited speeds and accelerations. The problem of minimizing the time to achieve all goals is solved.

Keywords: hybrid system, Dubins model, optimal control, separation of control objects

Введение. Задачи группового управления имеют многочисленные приложения, в том числе при управлении подвижными объектами [1–3], в частности летательными аппаратами [4–8]. Постановки задач группового управления подвижными объектами весьма разнообразны [9]. Например, задачи сбора группы в заданной области [4], обход препятствий [2, 4, 8], перехват подвижной цели [10], управление в конфликтной среде [11]. Управляемыми динамическими системами служат

математические модели роботов, летательных аппаратов, надводных и подводных кораблей. Для моделирования движения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [12] нередко используется модель Маркова—Дубинса [13—15] или ее модификации и обобщения [16—20].

Рассматривается задача достижения точечных целей группой подвижных объектов за наименьшее время. Процесс управления разбивается на два этапа. На первом этапе объект управления один — это так называемый носитель. Его движение представляется гибридной моделью машины Дубинса, допускающей траектории неограниченной кривизны. Первый этап заканчивается, когда от носителя отделяются несколько объектов, которые направляются в заданные терминальные состояния (цели). На втором этапе происходит управление группой отделяемых объектов. Скорость движения и ускорение каждого объекта ограничены. Второй этап заканчивается, когда все отделяемые объекты попадают в заданные терминальные состояния. Требуется найти наименьшее время достижения целей, т.е. решить задачу группового быстродействия.

Для решения поставленной задачи нужно найти оптимальное управление на каждом этапе, а также оптимальную точку разделения объектов управления, в которой заканчивается первый этап — управление носителем, и начинается второй этап — управление группой отделяемых объектов. Оптимальное управление подвижными объектами находится с помощью принципа максимума Понтрягина [21]. Наилучшее положение точки разделения определяется путем применения негладкого анализа [22] и параметрической оптимизации.

В статье получены типовые оптимальные траектории движения гибридной модели машины Дубинса, описано положение оптимальной точки разделения объектов управления, разработан алгоритм решения задачи группового быстродействия. Эффективность алгоритма показана на примерах.

1. Постановка задачи. Пусть на промежутке времени $[0, s]$ прямолинейное движение носителя описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\gamma, \dot{y}(t) = v(t)\sin\gamma, \dot{v}(t) = u(t), \quad (1.1)$$

а криволинейное движение (поворот) —

$$\dot{x}(t) = v\cos\gamma(t), \dot{y}(t) = v\sin\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t). \quad (1.2)$$

Здесь x, y — координаты положения объекта управления на плоскости, γ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, v, u — линейные скорость и ускорение, а ω, ε — угловые скорость и ускорение соответственно. Управление осуществляется выбором ускорений u и ε , удовлетворяющих ограничениям $|u(t)| \leq U, |\varepsilon(t)| \leq \mathcal{E}$, где U и $\mathcal{E}$ — заданные максимальные значения ускорений. Изменение модели движения, когда прямолинейное движение (1.1) сменяется криволинейным (1.2) или наоборот, считается переключением. В моменты переключений координаты x, y, γ, v непрерывны, а угловая скорость $\omega = 0$.

Динамическая система (1.1), (1.2) является гибридной моделью машины Дубинса [19].

В отличие от классической модели, при прямолинейном движении возможно изменение линейной скорости, а при поворотах — угловой. Кроме того, допустимы повороты на месте, которые исключаются в других обобщениях машины Дубинса. Заметим, что модель (1.1), (1.2) относится к гибридным системам переменной размерности [23], так как количество координат вектора состояния системы до разделения и после разделения разное.

Начальное состояние носителя задано

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \gamma(0) = \gamma_0, v(0) = v_0, \omega(0) = \omega_0. \quad (1.3)$$

Конечное состояние может определяться по-разному, в зависимости от постановки задачи [19]. Например, для попадания в точку $S(x_S, y_S)$ условия имеют вид

$$x(s) = x_S, y(s) = y_S. \quad (1.4)$$

Для остановки носителя в точке $S(x_S, y_S)$ добавляются равенства нулю конечных скоростей (линейной и угловой):

$$x(s) = x_S, y(s) = y_S, v(s) = 0, \omega(s) = 0. \quad (1.5)$$

В момент времени s происходит отделение от носителя m отделяемых объектов, движение которых описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t)\cos\gamma_i(t), \dot{y}_i(t) = v_i(t)\sin\gamma_i(t), \dot{v}_i(t) = u_i(t), i = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

Здесь x_i, y_i, γ_i — плоские координаты и угол направления движения i -го объекта, v_i, u_i — его линейная скорость и ускорение. Управление каждым объектом осуществляется выбором угла направления γ_i и ускорения u_i , удовлетворяющего ограничению $|u_i(t)| \leq U_i$.

Начальное состояние i -го отделяемого объекта определяются конечным состоянием носителя

$$x_i(s) = x(s), y_i(s) = y(s), v_i(s) = 0,$$

а конечное состояние объекта — заданной терминальной точкой $F_i(x_{F_i}, y_{F_i})$. При этом возможны варианты:

либо попадание в точку (цель)

$$x_i(T_i) = x_{F_i}, y_i(T_i) = y_{F_i}, \quad (1.7)$$

либо остановка в точке

$$\begin{aligned} x_i(T_i) &= x_{F_i}, y_i(T_i) = y_{F_i}, \\ v_i(T_i) &= 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Движение отделяемого объекта заканчивается в момент T_i достижения цели.

Качество управления оценивается временем T достижения всех целей:

$$T = \max_{i=1, \dots, m} T_i. \quad (1.9)$$

Требуется найти наименьшее значение $T_{\min}$ функционала (1.9) и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстрогодействия:

$$\max_{i=1, \dots, m} T_i \rightarrow \min. \quad (1.10)$$

В постановке задачи будем учитывать дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач. Это естественное ограничение линейных скоростей: носителя $v(t) \in [0, V]$ при $t \in [0, s]$ и отделяемого объекта $v_i(t) \in [0, V_i]$ при $t \in [s, T_i]$, $i = 1, \dots, m$, где V и V_i — заданные величины максимальных линейных скоростей носителя и отделяемых объектов соответственно. Предполагаем, что максимальная скорость носителя больше максимальных скоростей отделяемых объектов, т.е. $V > V_i$, $i = 1, \dots, m$. В противном случае оптимальное разделение было бы в начальный момент времени.

Возможно дополнительное ограничение угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$, где Ω — заданная величина максимальной по модулю допустимой скорости. Это ограничение менее “значимо”, чем ограничение линейной скорости. Действительно, рост угловой скорости не может быть продолжительным, так как полный поворот на угол, превосходящий 2π , вряд ли возможен на оптимальной траектории [24]. Другие ограничения рассматриваются в [16–20]. Заметим, что ограничения скоростей относятся к фазовым ограничениям в задаче оптимального управления.

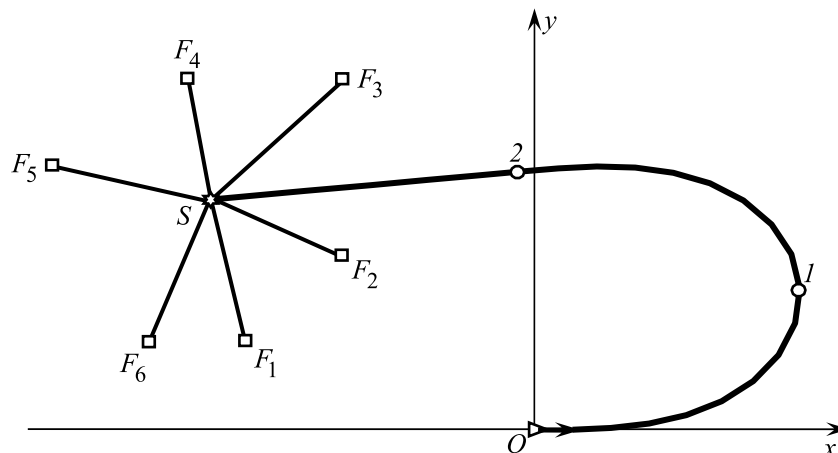


Рис. 1. Типовая траектория системы с одним разделением объектов управления

На рис. 1 представлена типовая траектория системы с одним разделением объектов управления. Траектория OS носителя изображена полужирной линией OS , траектории $SF_1, \dots, SF_6$ шести отделяемых объектов — светлыми линиями. Начальное состояние носителя обозначено треугольником в начале координат, начальная скорость — полужирной стрелкой, точка разделения S — звездочкой, заданные конечные состояния отделяемых объектов — квадратами.

2. Состав оптимальных траекторий. Для решения задачи быстродействия применяем принцип максимума Понтрягина [25].

2.1. Прямолинейное движение носителя. Для системы (1.1) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_v, v, u) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_v u - 1, \quad (2.1)$$

где ψ_x, ψ_y, ψ_v — вспомогательные переменные. Записываем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_v = -\psi_x \cos \gamma - \psi_y \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что ψ_x, ψ_y — постоянные величины, а $\psi_v(t)$ — линейная функция. Условия трансверсальности сводятся к равенству нулю функции Гамильтона—Понтрягина в нефиксированный конечный момент времени $H|_s = 0$. Заметим, что в силу постоянства функции Гамильтона—Понтрягина на оптимальном процессе (в стационарном случае) равенство нулю сохраняется на всем промежутке $[0, s]$ функционирования системы:

$$H \equiv 0. \quad (2.3)$$

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.1) по управлению приводит к равенству

$$u = \arg \max_{|u| \leq U} H = U \operatorname{sign} \psi_v, \quad (2.4)$$

при $\psi_v \neq 0$. Если переменная $\psi_v(t) = 0$ на некотором интервале (t_1, t_2) , то условие (2.3) не позволяет однозначно найти оптимальное управление u . На этом интервале возникает особое управление [24].

Рассмотрим особый режим подробнее. При $\psi_v = 0$ функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma - 1. \quad (2.5)$$

Если $\psi_x = \psi_y = 0$, то получаем равенство $H = -1$, которое противоречит (2.3). Следовательно, ψ_x и ψ_y не равны нулю одновременно, поэтому

$$H = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma - 1 = v \psi_{xy} \sin(\gamma + \phi) - 1, \quad (2.6)$$

где $\psi_{xy} = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \neq 0$, $\sin \phi = \psi_x / \psi_{xy}$, $\cos \phi = \psi_y / \psi_{xy}$. Отсюда следует, что линейная скорость v постоянна. Значит, особый режим — равномерное движение.

Таким образом, оптимальное управление прямолинейным движением носителя — кусочно-постоянное ($u \in \{0, \pm U\}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок разгона ($u = U$), либо участок торможения ($u = -U$), либо участок равномерного движения ($u = 0$).

2.2. Криволинейное движение (поворот) носителя. Для системы (1.2) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_\omega, \gamma, v, \omega, \varepsilon) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_\gamma \omega + \psi_\omega \varepsilon - 1, \quad (2.7)$$

где $\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_\omega$ — вспомогательные переменные. Записываем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_x = 0, \dot{\psi}_y = 0, \dot{\psi}_\gamma = v \psi_x \sin \gamma - v \psi_y \cos \gamma, \dot{\psi}_\omega = -\psi_\gamma. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что ψ_x, ψ_y — постоянные величины. Как и в случае прямолинейного движения носителя, получаем тождество (2.3) — равенство нулю функции Гамильтона—Понтрягина.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.7) по управлению приводит к равенству

$$\varepsilon = \arg \max_{|\varepsilon| \leq \mathcal{E}} H = \mathcal{E} \operatorname{sign} \psi_\omega \quad (2.9)$$

при $\psi_\omega \neq 0$. Если переменная $\psi_\omega(t) = 0$ на некотором интервале (t_1, t_2) , то условие (2.9) не позволяет однозначно найти оптимальное управление ε . На этом интервале возникает особое управление [24].

Рассмотрим особый режим подробнее. При $\psi_\omega = 0$, согласно (2.8), имеем $\psi_\gamma = -\dot{\psi}_\omega = 0$.

Следовательно, функция Гамильтона—Понтрягина (2.7) имеет вид (2.5). Рассуждая, также как в прямолинейном случае (см. разд. 2.1), заключаем, что ψ_x и ψ_y не равны нулю одновременно. Поскольку $\psi_\gamma = 0$, то $\dot{\psi}_\gamma = 0$, из (2.8) получаем

$$v \psi_x \sin \gamma - v \psi_y \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow v \psi_{xy} \cos(\gamma + \phi) = 0. \quad (2.10)$$

Величина ψ_{xy} и вспомогательный угол ϕ такие же, как в (2.6). Поскольку $\psi_{xy} \neq 0$, то из равенства (2.10) следует либо $v = 0$, либо $\gamma = \text{const}$, так как угол ϕ постоянный. В первом случае (при $v = 0$) носитель совершает поворот на месте. Во втором случае (при $\gamma = \text{const}$) движение прямолинейное и равномерное, а не криволинейное.

Таким образом, оптимальное управление криволинейным движением носителя — кусочно-постоянное ($\varepsilon = \pm \mathcal{E}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок закручивания — увеличения угловой скорости ($\varepsilon = \mathcal{E}$), либо участок раскручивания — уменьшения угловой скорости ($\varepsilon = -\mathcal{E}$), при этом не исключаются повороты на месте (при $v = 0$).

Заметим, что при дополнительном ограничении угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$ возникает еще один тип оптимального управления — поворот с нулевым угловым ускорением и максимальной угловой скоростью. При $\varepsilon = 0$ и $\omega = \pm \Omega$ траектория движения — либо окружность, если $v \neq 0$, либо поворот на месте с постоянной угловой скоростью, если $v = 0$.

2.3. Движение отделяемого объекта. Для каждого объекта системы (1.6) функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_x, \psi_y, \psi_\gamma, \psi_v, \gamma, v, u) = \psi_x v \cos \gamma + \psi_y v \sin \gamma + \psi_v u - 1. \quad (2.11)$$

Для сокращения записи индекс i у переменных x, y, v, γ, u опущен. Как видим, функция Гамильтона—Понтрягина (2.11) совпадает с (2.1). Поэтому соотношения (2.2)—(2.4) для носителя будут также выполняться и для каждого отделяемого объекта. Отличие моделей (1.1) и (1.3) заключается в том, что угол направления $\gamma = \gamma(t)$ является для отделяемого объекта управлением. Поэтому из необходимого условия максимума функции Гамильтона—Понтрягина (2.11) по управлению γ получаем

$$H_\gamma = 0 \Rightarrow -v \psi_x \sin \gamma + v \psi_y \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow v \psi_{xy} \cos(\gamma + \phi) = 0. \quad (2.12)$$

Величина ψ_{xy} и вспомогательный угол ϕ такие же, как в (2.6). Поскольку $v \neq 0$ и $\psi_{xy} \neq 0$, то из равенства (2.12) следует, что угол направления γ постоянный, например $\gamma = \pi/2 - \phi$. Значит, оптимальный выбор угла направления происходит в начальный момент времени S , а затем не меняется. Для i -го объекта ($i = 1, \dots, m$), который из положения $S(x_S, y_S)$ двигается в цель (x_{iT}, y_{iT}) , получаем

$$\sin \gamma_i = \frac{y_{iT} - y_S}{L_i}, \cos \gamma_i = \frac{x_{iT} - x_S}{L_i}, \quad (2.13)$$

где $L_i = \sqrt{(x_{iT} - x_S)^2 + (y_{iT} - y_S)^2}$ — длина пути.

Таким образом, после выбора оптимального направления (2.13) оптимальное управление прямолинейным движением i -го отделяемого объекта — кусочно-постоянное ($u_i \in \{0, \pm U_i\}$), оптимальные траектории при этом представляют собой непрерывное соединение участков, каждый из которых либо участок разгона ($u_i = U_i$), либо участок торможения ($u_i = -U_i$), либо участок равномерного движения ($u_i = 0$).

3. Оптимальные траектории. Оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов составляются из частичных траекторий — участков движения с постоянными ускорениями. Получим такие составные траектории, интегрируя уравнения движения.

3.1. Прямолинейное движение носителя до остановки. Найдем оптимальное по быстродействию управление прямолинейным движением носителя из начального состояния (1.3) в конечное состояние (1.5), которое соответствует остановке носителя в заданном положении $S(x_S, y_S)$. Предполагаем, что в начальный момент времени угловая скорость равна нулю, а носитель “нацелен” в точку $S(x_S, y_S)$, т.е. угол направления γ удовлетворяет равенствам

$$\sin \gamma = \frac{y_S - y_0}{L}, \cos \gamma = \frac{x_S - x_0}{L}, \quad (3.1)$$

где $L = \sqrt{(x_S - x_0)^2 + (y_S - y_0)^2}$ — длина пути носителя.

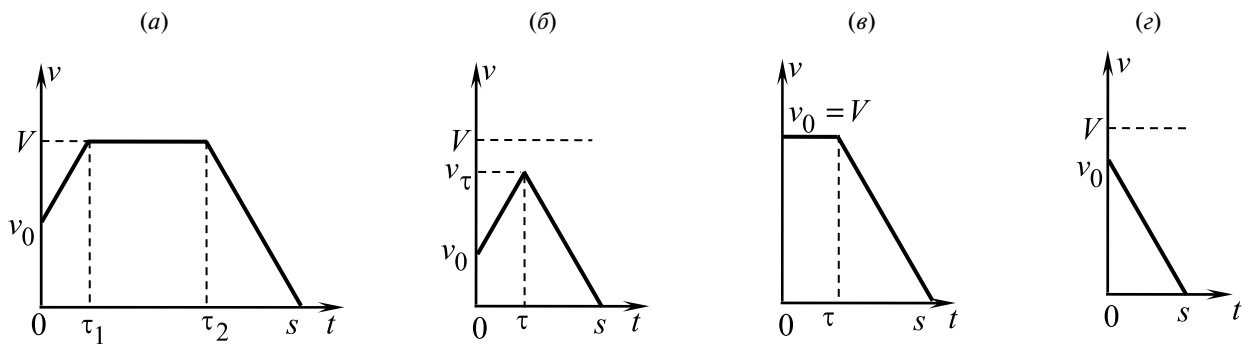


Рис. 2. Графики изменения скорости прямолинейного движения носителя до остановки

На рис. 2, учитывая результаты разд. 2.1, представлены все возможные графики изменения скорости движения носителя. Линейная скорость сначала возрастает, достигая в некоторый момент τ_1 максимального допустимого значения V , затем это значение сохраняется до момента τ_2 , после которого скорость уменьшается до нуля в момент s окончания движения носителя (рис. 2, а). Найдем параметры этой траектории. Для этого составляем систему уравнений

$$L = sV - \frac{1}{2}(V - v_0)\tau_1 - \frac{1}{2}V(s - \tau_2), V = v_0 + \tau_1 U, V = (s - \tau_2)U. \quad (3.2)$$

Подставляя в первое уравнение $\tau_1 = (V - v_0) / U$ и $s - \tau_2 = V / U$, получаем

$$L = sV - \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2U} \Leftrightarrow s = \frac{L}{V} + \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2UV}. \quad (3.3)$$

Линейная скорость сначала возрастает до значения v_τ в некоторый момент τ , не достигая максимального допустимого значения V , а затем уменьшается до нуля (рис. 2, б). Составляем систему уравнения для нахождения параметров этой траектории:

$$L = \frac{v_0 + v_\tau}{2}\tau + v_\tau(s - \tau), v_\tau = v_0 + \tau U, v_\tau = (s - \tau)U. \quad (3.4)$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\tau = \frac{1}{2}s - \frac{v_0}{2U}, v_\tau = \frac{1}{2}sU + \frac{v_0}{2}. \quad (3.5)$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (3.4), после упрощений приходим к квадратному уравнению относительно s :

$$L = \frac{1}{4}s^2U + \frac{1}{2}v_0s - \frac{v_0^2}{4U}.$$

Находим положительный корень этого уравнения:

$$s = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4LU}}{U}. \quad (3.6)$$

Графики на рис. 2, *в*, *г* получаются из графиков рис. 2, *а*, *б* соответственно. Действительно, параметры графика *в* находим по формулам (3.2), (3.3), полагая $v_0 = V$:

$$s = \frac{L}{V} + \frac{V}{2U}, \tau_1 = 0, \tau_2 = s - \frac{V}{U}.$$

Время $s = v_0 / U$ для графика *г* определяется первой формулой в (3.5) при $\tau = 0$.

Осталось записать аналитические условия, позволяющие установить тип оптимального управления, т.е. сделать правильный выбор одного из четырех случаев графиков рис. 2, *а–г* оптимального управления. Для этого рассмотрим рис. 2, *б*, когда линейная скорость не достигает своего максимально допустимого значения V , т.е. выполняется неравенство $v_\tau < V$. Подставляя в это неравенство v_τ из формул (3.5) с учетом (3.6), получаем

$$\frac{1}{2}sU + \frac{v_0}{2} < V \Leftrightarrow \sqrt{2v_0^2 + 4LU} < 2V \Leftrightarrow 2v_0^2 + 4LU < 4V^2 \Leftrightarrow 2LU < 2V^2 - v_0^2.$$

Следовательно, если $2LU < 2V^2 - v_0^2$, то оптимальное управление (сначала разгон, потом торможение), как на рис. 2, *б*, или, в частности, при $2LU = v_0^2$ — только торможение, как на рис. 2, *г*. Если же $2LU \geq 2V^2 - v_0^2$, то оптимальное управление (сначала разгон, затем равномерное движение с максимальной допустимой скоростью, потом торможение), как на рис. 2, *а* или, в частности, при $2LU = V^2$ — только равномерное движение, а потом торможение, как на рис. 2, *в*. Заметим, что при $2LU < v_0^2$ допустимого процесса нет, поскольку носитель не успевает затормозить. Условия и параметры оптимального управления прямолинейным движением носителя до остановки в заданном положении приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальное управление прямолинейным движением носителя до остановки

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение, торможение (см. рис. 2, <i>а</i>)	$2LU \geq 2V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau_1;$ $u(t) = 0, \tau_1 \leq t < \tau_2;$ $u(t) = -U, \tau_2 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} + \frac{(V - v_0)^2 + V^2}{2UV};$ $\tau_1 = \frac{V - v_0}{U}, \tau_2 = s - \frac{V}{U}$
Разгон, торможение (см. рис. 2, <i>б</i>)	$v_0^2 \leq 2LU < 2V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau;$ $u(t) = -U, \tau \leq t \leq s$	$s = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4LU}}{U};$ $\tau = \frac{1}{2}s - \frac{v_0}{2U}$
Равномерное движение, торможение (см. рис. 2, <i>в</i>)	$2LU = V^2$	$u(t) = 0, 0 \leq t < \tau_2;$ $u(t) = -U, \tau_2 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} + \frac{V}{2U}; \tau_2 = s - \frac{V}{U}.$
Торможение (рис. 2, <i>г</i>)	$2LU = v_0^2$	$u(t) = -U, 0 \leq t \leq s$	$s = \frac{v_0}{U}$

3.2. Прямолинейное движение носителя до заданной точки. Рассмотрим теперь движение носителя из начального состояния (1.3) в заданную точечную цель (1.4). Оптимальное управление, разумеется, заключается в наискорейшем разгоне носителя, а торможение при этом исключается. Графики изменения скорости движения приведены на рис. 3.

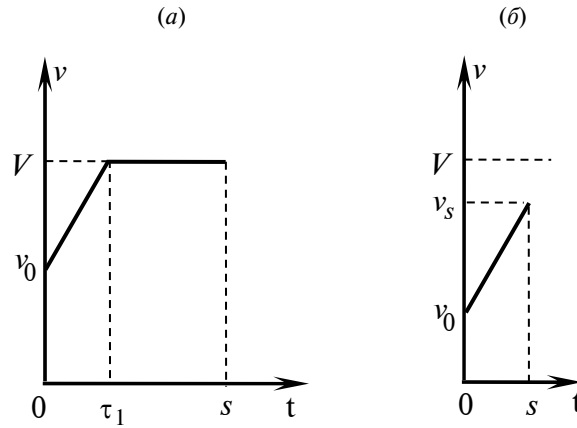


Рис. 3. Графики изменения скорости прямолинейного движения носителя до цели

На рис. 3, а линейная скорость сначала возрастает, достигая в некоторый момент τ_1 максимального допустимого значения V , затем эта скорость сохраняется до момента s окончания движения. Из системы уравнений

$$L = sV + \frac{1}{2}\tau_1(V - v_0), V = v_0 + \tau_1 U$$

находим параметры управления

$$s = \frac{L}{V} - \frac{(V - v_0)^2}{2U}, \tau_1 = \frac{V - v_0}{U}.$$

На рис. 3, б линейная скорость возрастает, но не успевает достигнуть максимально допустимого значения. Поэтому имеем систему

$$L = \frac{v_0 + v_s}{2}s, v_s = v_0 + sU,$$

откуда

$$s = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2LU}}{U}.$$

Из неравенства $v_s < V$ определяем условие, при котором имеет место график на рис. 3, б:

$$v_0 + sU < V \Leftrightarrow \sqrt{v_0^2 + 2LU} < V \Leftrightarrow 2LU < V^2 - v_0^2.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то тип оптимального управления соответствует графику на рис. 3, а. Условия и параметры оптимального управления прямолинейным движением носителя до цели приведены в табл. 2.

Таблица 2. Оптимальное управление прямолинейным движением носителя до цели

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение (см. рис. 3, а)	$2LU \geq V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t < \tau_1;$ $u(t) = 0, \tau_1 \leq t \leq s$	$s = \frac{L}{V} - \frac{(V - v_0)^2}{2U}, \tau_1 = \frac{V - v_0}{U}$
Разгон (см. рис. 3, б)	$2LU < V^2 - v_0^2$	$u(t) = U, 0 \leq t \leq s$	$s = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2LU}}{U}$

3.3. Криволинейное движение (поворот) носителя. Как показано в разд. 2.2, оптимальное по быстродействию криволинейное движение происходит с максимальным по модулю постоянным угловым ускорением. Запишем систему (1.2) с постоянным угловым ускорением $\varepsilon \neq 0$:

$$\dot{x}(t) = v \cos \gamma(t), \dot{y}(t) = v \sin \gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \dot{\omega}(t) = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Получим ее решение с начальными условиями (1.3). Последние два уравнения интегрируются элементарно:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (3.8)$$

Подставляя $\gamma(t)$ в первые два уравнения в (3.7), получаем

$$\dot{x}(t) = v \cos(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2), \dot{y}(t) = v \sin(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2). \quad (3.9)$$

Обозначим

$$\hat{\gamma}_0 = \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}, \tau = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left(t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right).$$

Тогда

$$t = \tau \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} - \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \left(t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right)^2 + \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon, \quad (3.10)$$

при этом уравнения (3.9) принимают вид

$$\dot{x}(t) = v \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon), \dot{y}(t) = v \sin(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon). \quad (3.11)$$

Интегрируя первое уравнение в (3.11) на промежутке $[0, t]$, делаем замену переменной t , согласно (3.10). Получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon) dt = x_0 + v \int_{\tau_0}^{\tau_1} \cos(\hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} d\tau = \\ &= x_0 + v \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\cos \hat{\gamma}_0 \cos \tau^2 - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \sin \tau^2) \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\tau_0 = \frac{\omega_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}, \tau_1 = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + t \right) \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}.$$

Полученный интеграл выражаем через интегралы Френеля [26]:

$$C(t) = \int_0^t \cos \tau^2 d\tau, S(t) = \int_0^t \sin \tau^2 d\tau.$$

В результате имеем

$$x(t) = x_0 + v \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \cos \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \}. \quad (3.12)$$

Аналогично интегрируем второе уравнение в (3.9):

$$y(t) = y_0 + v \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \sin \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] + \text{sign } \varepsilon \cos \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \}. \quad (3.13)$$

Траектория (3.12), (3.13) представляет собой спираль Эйлера (клотоиду, спираль Корню) [26], кривизна которой изменяется линейно. Если линейная скорость нулевая, то совершается поворот на месте. Положение объекта не меняется $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, а угловая скорость и угол направления меняются, согласно (3.8).

При дополнительном ограничении угловой скорости $|\omega(t)| \leq \Omega$ возможен поворот с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \pm\Omega$ и нулевым ускорением $\varepsilon = 0$. Система (1.2) при этих условиях имеет вид

$$\dot{x}(t) = v \cos \gamma(t), \dot{y}(t) = v \sin \gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \omega, \dot{\omega}(t) = 0. \quad (3.14)$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t, \omega(t) = \omega_0.$$

Интегрируем первые два уравнения в (3.14):

$$x(t) = x_0 + \frac{v}{\omega_0} \sin(\gamma_0 + \omega_0 t), \quad y(t) = y_0 - \frac{v}{\omega_0} \cos(\gamma_0 + \omega_0 t). \quad (3.15)$$

Траектория (3.15) представляет собой окружность.

3.4. Оптимальная траектория отделяемого объекта. Рассмотрим управление i -м отделяемым объектом ($i = 1, \dots, m$). После мгновенного выбора направления (2.13) в момент отделения s движение объекта будет прямолинейным с ограниченными скоростью $0 \leq v_i(t) \leq V_i$ и ускорением $|u_i(t)| \leq U_i$. Это движение отличается от прямолинейного движения носителя только ограничениями. Поэтому оптимальное по быстродействию управление u_i находится так же, как управление прямолинейным движением носителя (см. разд. 3.1). При этом параметры U, V носителя и длину пути L нужно соответственно заменить параметрами U_i, V_i объекта и длиной его пути:

$$L_i = \sqrt{(x_{iT} - x_S)^2 + (y_{iT} - y_S)^2}.$$

Кроме того, необходимо учесть, что движение i -го объекта происходит на промежутке $[s, T_i]$, а движение носителя — на $[0, s]$. Поэтому моменты переключений управления u_i и время T_i окончания движения следует увеличить на величину s . Наконец, поскольку начальная скорость объекта нулевая $v_i(s) = 0$, в формулах для носителя полагаем $v_0 = 0$. При этом исчезает случай график торможения на рис. 2, z .

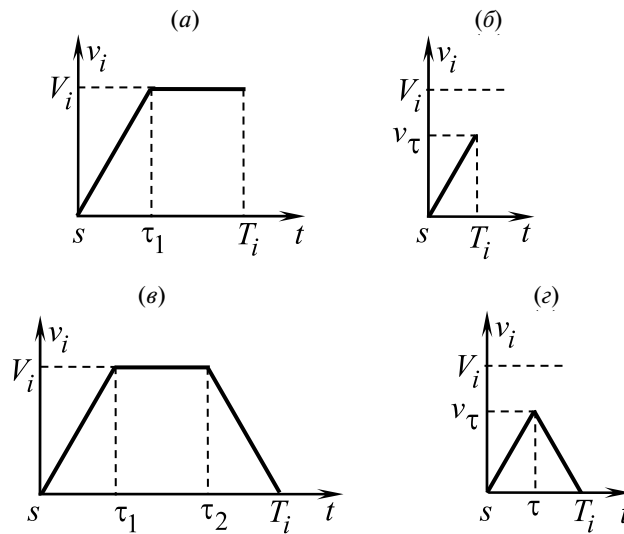


Рис. 4. Графики изменения скорости движения отделяемого объекта

На рис. 4 представлены графики изменения скорости движения отделяемого объекта, а в табл. 3 — условия и параметры оптимального управления его движением. Графики

на рис. 4, a , b соответствуют условиям (1.7) — попадания в заданную точечную цель, а v и z — условиям (1.8), т.е. остановке в заданной точке.

Таблица 3. Оптимальное управление движением i -го объекта

Тип управления	Условия, определяющие тип управления	Оптимальное управление	Параметры
Разгон, равномерное движение (см. рис. 4, a)	$2L_i U_i \geq V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau_1;$ $u_i(t) = 0, \tau_1 \leq t \leq T_i$	$T_i = s + \frac{L_i}{V_i} + \frac{V_i}{2U_i};$ $\tau_1 = s + \frac{V_i}{U_i}$
Разгон (см. рис. 4, a)	$2L_i U_i < V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < T_i$	$T_i = s + \sqrt{\frac{2L_i}{U_i}}$
Разгон, равномерное движение, торможение (см. рис. 4, b)	$4L_i U_i \geq V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau_1;$ $u_i(t) = 0, \tau_1 \leq t < \tau_2;$ $u_i(t) = -U_i, \tau_2 \leq t \leq T_i$	$T_i = s + \frac{L_i}{V_i} + \frac{V_i}{U_i}; \tau_1 = s + \frac{V_i}{U_i};$ $\tau_2 = T_i - t_1$
Разгон, торможение (см. рис. 4, z)	$4L_i U_i < V_i^2$	$u_i(t) = U_i, s \leq t < \tau;$ $u_i(t) = -U_i, \tau \leq t \leq T_i$	$T_i = s + 2\sqrt{\frac{L_i}{U_i}};$ $\tau = \frac{s + T_i}{2}$

3.5. Оптимальная траектория носителя до остановки в заданной точке. Оптимальные по быстродействию траектории носителя состояются из частичных траекторий — участков движения с постоянными ускорениями. Как показано в разд. 3.1—3.3, частичными траекториями могут быть: либо отрезок ($\mathbb{L}$) в случае прямолинейного движения, либо спираль ($\mathbb{S}$) при повороте, либо точка ($\mathbb{P}$) при повороте на месте.

Опишем оптимальное по быстродействию управление движением носителя из нулевого начального состояния:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, \gamma(0) = 0, v(0) = 0, \omega(0) = 0 \quad (3.16)$$

с остановкой в заданной точке (1.5). Без ограничения общности будем считать, что конечное положение задано в верхней полуплоскости координатной плоскости Oxy . Поскольку в конечный момент времени линейная скорость нулевая, то последний участок допустимой траектории прямолинейный ($\mathbb{L}$). Так как в начале прямолинейного участка угловая скорость должна быть равна нулю, то криволинейное движение носителя должно заканчиваться с нулевой угловой скоростью. Поэтому криволинейное движение состоит из двух участков ($\mathbb{SS}$) одинаковой продолжительности, на первом из которых происходит увеличение угловой скорости (участок “закручивания”), а на втором — уменьшение угловой скорости (участок “раскручивания”). Большее количество участков криволинейного движения, чередование “закручивания” и “раскручивания” не будет оптимальным. Заметим, что движение по спирали невозможно в начальный момент времени, так как начальная линейная скорость движения нулевая. Поэтому первый участок траектории прямолинейный ($\mathbb{L}$) либо поворот на месте ($\mathbb{P}$).

Таким образом, оптимальная траектория носителя с остановкой в заданной точке представляет собой либо поворот на месте и прямолинейное движение (траектория $\mathbb{PL}$), либо прямолинейное движение (разгон), затем два участка криволинейного движения (“закручивания” и “раскручивания”), потом прямолинейное движение (траектория $\mathbb{LSSL}$). Траектории типов $\mathbb{PL}$ и $\mathbb{LSSL}$ изображены на рис. 5 полужирными линиями. Начальное положение носителя представлено треугольником в начале координат, а после поворота на месте на угол γ — пунктирным треугольником. Звездочками A и B отмечены точки остановки носителя.

На рис. 6 показано примерное разделение верхней полуплоскости на две области PL и LSSL. Расчеты проводились при $V = 3$, $U = 4$, $\varepsilon = 1$ и нулевых начальных условиях. Если точка разделения S находится в области PL, то траектория PL носителя лучше траектории LSSL. Если точка S находится в области LSSL, то, наоборот, лучше траектория LSSL.

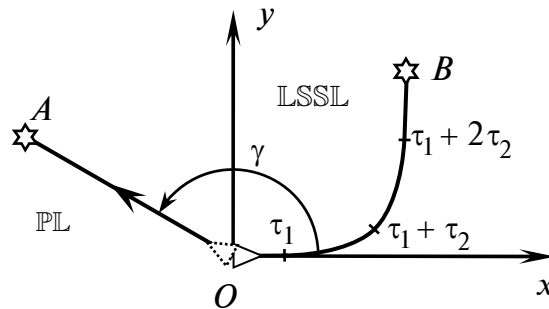


Рис. 5. Траектории PL и LSSL носителя

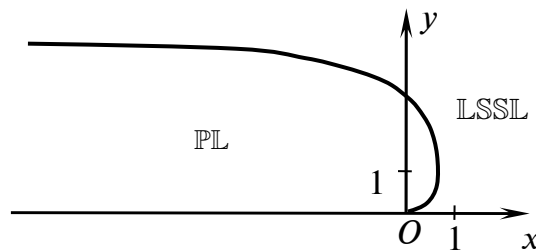


Рис. 6. Области конечных точек движения носителя, в которые приводят оптимальные траектории PL и LSSL соответственно

Параметры указанных траекторий определяются следующим образом. Для траектории PL поворот на месте на угол γ задается формулами (3.1). Он выполняется с максимальным по модулю угловым ускорением: сначала $\varepsilon(t) = \varepsilon$, $0 \leq t \leq \tau_1$, а затем $\varepsilon(t) = -\varepsilon$, $\tau_1 \leq t \leq 2\tau_1$, где $\tau_1 = \sqrt{\gamma / \varepsilon}$. Поворот оканчивается с нулевой угловой скоростью, после чего начинается участок прямолинейного движения, параметры которого указаны в табл. 1 (тип управления рис. 2, а или б).

Для траектории LSSL нужно задать два параметра: продолжительность τ_1 первоначального разгона (с управлением $u(t) = U$), а также времена τ_2 “закручивания” траектории (поворот с ускорением $\varepsilon(t) = \varepsilon$). Эти параметры полностью определяют часть LSS траектории, поскольку время “раскручивания” такое же, как и время “закручивания”, так как поворот заканчивается с нулевой угловой скоростью. Параметры последнего прямолинейного участка указаны в табл. 1. Заметим, что в момент окончания поворота носитель должен быть направлен в заданную точку разделения (x_S, y_S) , иначе попадания не будет. Поэтому оптимизация траектории LSSL по параметрам τ_1 и τ_2 является условной и может быть выполнена только численно.

После нахождения оптимальной траектории каждого типа (PL или LSSL), сравниваем полученные для этих траекторий значения функционала (1.9). Предпочтение отдается процессу с меньшим значением функционала.

3.6. Оптимальная траектория носителя до заданной точки. Оптимальные траектории движения носителя из нулевого состояния (3.16) в заданную точку (1.4) могут быть разных типов. Во-первых, подходят траектории PL или LSSL, рассмотренные в разд. 3.5, с тем отличием, что последние участки этих траекторий представляют собой прямолинейное движение без торможения, параметры которого находятся по табл. 2. Во-вторых, возможны траектории LSS, поскольку в конечный момент времени скорости (линейная и угловая) не заданы. Такие траектории определяются тремя параметрами: продолжительностью τ_1 первоначального разгона (с управлением $u(t) = U$), временем τ_2 “закручивания” траектории и временем τ_3

“раскручивания”. Причем “закручивание” на промежутке $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ может быть как в положительном направлении, когда $\varepsilon(t) = \mathcal{E}$, так и в отрицательном направлении при $\varepsilon(t) = -\mathcal{E}$. “Раскручивание” происходит на промежутке $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ в противоположном “закручиванию” направлении. Заметим, что в момент окончания $s = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ носитель должен оказаться в заданной точке $S(x_S, y_S)$. Поэтому оптимизация траектории $\mathbb{LSS}$ по трем параметрам τ_1, τ_2, τ_3 является условной и может быть выполнена только численно. После нахождения оптимальной траектории каждого типа сравниваем полученные для этих траекторий значения функционала (1.9). Предпочтение отдается процессу с меньшим значением функционала.

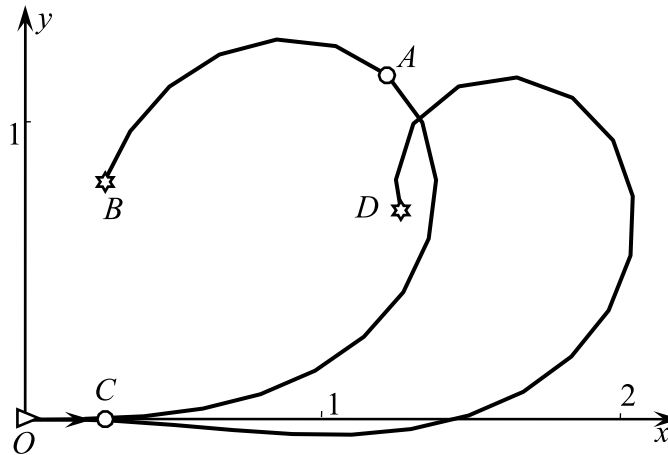


Рис. 7. Траектории $\mathbb{SS}$ носителя

Если начальная скорость ненулевая, первоначального разгона (или торможения) может не быть и оптимальными будут траектории $\mathbb{SS}$. Эти траектории определяются в результате условной минимизации по двум параметрам: времени “закручивания” и “раскручивания”. На рис. 7 представлены две типовых траектории. Траектории отличаются направлением “закручивания”. Траектория OAB получается при “закручивании” в положительном направлении (дуга OA), а траектория OCD — в отрицательном направлении (дуга OC). “Раскручивание” происходит в противоположном направлении (дуги AB и CD соответственно).

4. Оптимальный выбор точки разделения. Для решения задачи (1.10) группового быстрого действия нужно выбрать оптимальную точку $S(x_S, y_S)$ разделения объектов управления. Оптимальную по быстродействию траекторию носителя из начального положения O до выбранной точки разделения S и оптимальные траектории группы объектов после отделения можно получить описанными в разд. 3 способами. Выбор точки $S(x_S, y_S)$ зависит от заданных целей (1.7), (1.8) для отделяемых объектов.

Обозначим через $\theta(O, S)$ оптимальное время движения носителя из начальной точки O в заданную точку разделения S , а через $\theta_i(S, F_i)$ — оптимальное время движения i -го отделяемого объекта от точки разделения S до цели $F_i, i = 1, \dots, m$. В зависимости от терминальных условий (1.4) или (1.5) для носителя функция θ вычисляется по-разному (см. разд. 3.5, 3.6). Функция θ_i находится по разным формулам для конечных условий (1.7) или (1.8) (см. разд. 3.4). Заметим, что формулы для функции θ_i зависят также от модели отделяемого объекта — от его максимальной скорости V_i и максимального по модулю ускорения U_i .

Используя введенные функции, функционал (1.9) можно записать следующим образом:

$$T = \theta(O, S) + \max_{1 \leq i \leq m} \theta_i(S, F_i). \quad (4.1)$$

Тогда решение задачи группового быстрого действия (1.10) находится при минимизации:

$$T_{\min} = \min_{S \in \mathbb{R}^2} \{ \theta(O, S) + \max_{1 \leq i \leq m} \theta_i(S, F_i) \}. \quad (4.2)$$

Так как функция (4.1) негладкая, точнее, квазидифференцируемая, для поиска минимума нужно использовать методы недифференцируемой оптимизации [22]. Если целей несколько ($m > 1$), то максимум в (4.2) не может достигаться только для одной цели, например для цели F_1 .

В этом случае оптимальная точка разделения S совпадала бы с худшей целью F_1 . Но тогда $\theta_1(S, F_1) = 0$, а $\theta_2(S, F_2) > 0$. Значит, цель F_2 хуже, чем F_1 (противоречие). Поэтому нужно рассматривать такие случаи, когда максимум в (4.2) достигается в двух или более точках. Иначе говоря, когда имеются две или более худшие цели.

Предположим, что максимум в (4.2) достигается в точках F_i и F_j ($1 \leq i < j \leq m$) и, быть может, в еще некоторых других:

$$\theta_i(S, F_i) = \theta_j(S, F_j) \geq \theta_k(S, F_k), k = 1, \dots, m, k \neq i, k \neq j. \quad (4.3)$$

Тогда, решая задачу минимизации

$$T_{ij} = \min_{S \in \mathbb{R}^2} \{ \theta(O, S) + \theta_i(S, F_i) \} \quad (4.4)$$

при ограничениях (4.3), получаем оптимальное значение T_{ij} функции (4.2) для худших целей F_i и F_j (и, быть может, еще каких-нибудь худших целей). Решая задачу (4.3), (4.4), для всех пар целей F_i, F_j ($1 \leq i < j \leq m$) находим значения T_{ij} , среди которых выбираем наименьшее:

$$T_{\min} = \min_{1 \leq i < j \leq m} T_{ij}.$$

Процедура поиска упрощается, если удастся эффективно использовать ограничения (4.3). Например, если все отделяемые объекты одинаковые, т.е. $V_1 = \dots = V_m$ и $U_1 = \dots = U_m$, то равенство $\theta_i(S, F_i) = \theta_j(S, F_j)$ будет означать, что равны длины отрезков $SF_i = SF_j$. Значит, точку S нужно искать на серединном перпендикуляре к отрезку F_iF_j . Положение точки S при этом задается одним параметром, а задача минимизации (4.3), (4.4) будет однопараметрической.

5. Примеры. Рассмотрим два примера группового быстрогодействия с разными типами траекторий носителя. В первом примере заданные точки окончания движения (остановки) находятся в II четверти и оптимальная траектория носителя — PL. Во втором примере остановки заданы во I четверти и оптимальная траектория — LSSL.

Пример 1. Пусть по сравнению с общей постановкой задачи параметры движения носителя $V = 5, U = 4, \mathcal{E} = 1$; параметры движения четырех отделяемых объектов $V_i = i, U_i = 3, i = 1, \dots, 4$. Начальное состояние носителя — нулевое (3.16). Терминальные положения (цели) отделяемых объектов $F_1(-7;1), F_2(-6;2), F_3(-7;3), F_4(-8;2)$. В точке разделения, а также в терминальных точках скорости объектов управления нулевые, т.е. речь идет об остановках подвижных объектов в этих точках. Требуется найти наименьшее время достижения всех целей и оптимальное управление, при котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстрогодействия.

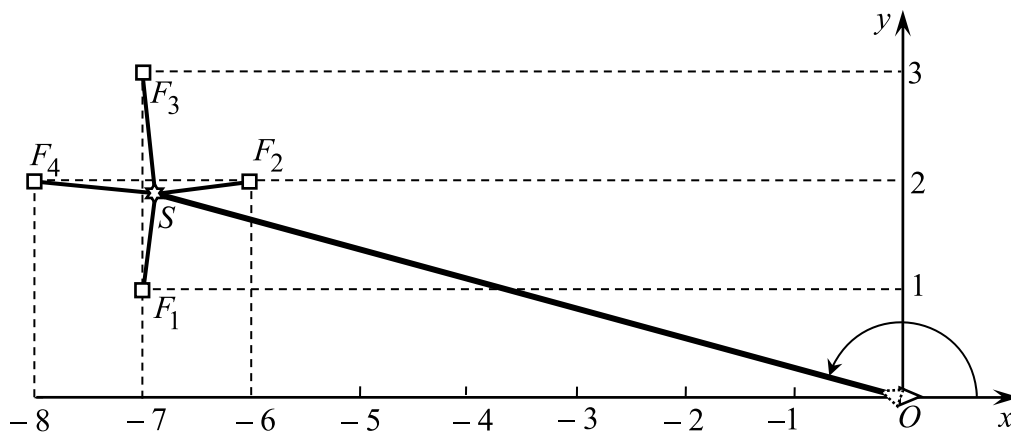


Рис. 8. Оптимальные траектории PL носителя и четырех отделяемых объектов

На рис. 8 показаны оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов. Управление носителем: сначала поворот на месте (“закручивание” в течение 1.695 с, затем “раскручивание” той же продолжительности). После поворота — прямолинейное движение: сначала

разгон в течение 1.25 с, потом равномерное движение — 0.177 с, затем — торможение в течение 1.25 с. Траектория $\mathbb{PL}$ носителя изображена на рис. 8 полужирной линией, начальное состояние — треугольником, точка разделения $S(-6.882; 1.883)$ — звездочкой. Оптимальное управление первым отделяемым объектом — разгон (в течение 0.333 с), равномерное движение (0.558 с), торможение (0.333 с). Управление остальными объектами — разгон и торможение одинаковой продолжительности: для второго объекта время разгона 0.545 с, для третьего — 0.612 с, для четвертого — 0.612 с. Траектории отделяемых объектов изображены светлыми линиями. Минимальное время достижения всех целей $T_{\min} = 7.292$. Заметим, что первый, третий и четвертый объекты являются “худшими”, так как время достижения целей этими объектами совпадает с $T_{\min}$. Время остановки второго объекта меньше гарантирующего значения $T_{\min}$.

Координаты точки разделения $S(-6.882; 1.883)$ найдены приближенно на квадратной сетке с шагом 0.001. Остальные результаты округлены, но вычисления проводились с машинной точностью без методических погрешностей.

Пример 2. Пусть по сравнению с общей постановкой задачи параметры движения носителя $V = 3$, $U = 4$, $\varepsilon = 1$; параметры движения трех отделяемых объектов $V_1 = V_2 = 1$, $V_3 = 2$, $U_1 = U_2 = U_3 = 3$. Начальное состояние носителя — нулевое (3.16). Терминальные положения (цели) отделяемых объектов $F_1(7; 1)$, $F_2(7; 3)$, $F_3(8; 2)$. В точке разделения, а также в терминальных точках скорости объектов управления нулевые, т.е. речь идет об остановках подвижных объектов в этих точках. Требуется найти наименьшее время достижения всех целей и оптимальное управление, при котором это время достигается, т.е. решить задачу группового быстройдействия.

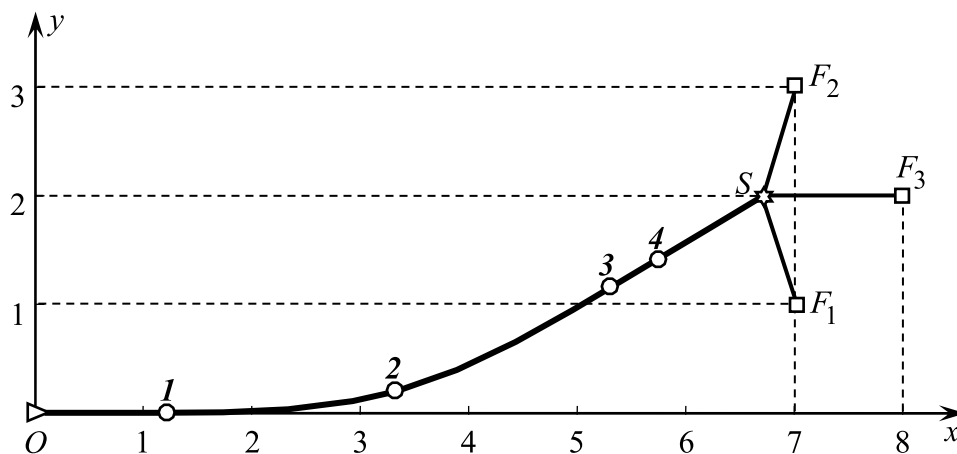


Рис. 9. Оптимальная траектории $\mathbb{LSSL}$ носителя и трех отделяемых объектов

На рис. 9 показаны оптимальные траектории носителя и отделяемых объектов. Управление носителем: сначала разгон в течение 0.75 с, затем поворот — “закручивание” в течение 0.735 с и “раскручивание” той же продолжительности, потом равномерное движение 0.173 с и, наконец, торможение — 0.75 с. Траектория $\mathbb{LSSL}$ носителя изображена на рис. 7 полужирной линией, начальное состояние — треугольником, точка разделения $S(6.702; 2)$ — звездочкой. Управление первым и вторым отделяемыми объектами: разгон в течение 0.333 с, равномерное движение — 0.710 с и торможение — 0.333 с. Управление третьим объектом — разгон и торможение одинаковой продолжительности 0.658 с. Траектории отделяемых объектов изображены светлыми линиями. Минимальное время достижения всех целей $T_{\min} = 4.520$. Заметим, что первый и второй объекты являются “худшими”, так как время достижения целей этими объектами совпадает с $T_{\min}$. Время остановки третьего объекта меньше гарантирующего значения $T_{\min}$.

Поскольку первые два отделяемых объекта одинаковые, то поиск точки разделения проводился на серединном перпендикуляре к отрезку F_1F_2 . Координаты точки разделения $S(6.702; 2)$ найдены приближенно на сетке с шагом 0.001. Результаты, относящиеся к движению носителя — приближенные, так как получены путем численного решения задачи условной минимизации. Параметры управления отделяемыми объектами округлены, но вычисления проводились с машинной точностью без методических погрешностей.

Заключение. Поставлена задача группового быстрогодействия с однократным разделением объектов управления. Для описания движения системы до разделения используется гибридная модель машины Дубинса, допускающая повороты на месте. После разделения система представляет собой группу управляемых объектов, которые перемещаются в заданные конечные состояния с ограниченными скоростями и ускорениями. Получены типовые оптимальные траектории, выведены формулы для траекторий движения с постоянными ускорениями, разработан алгоритм решения задачи, применение которого демонстрируется на примерах. Решение задачи с моделью Дубинса может служить начальным приближением для аналогичных прикладных задач управления летательными аппаратами.

Дальнейшие исследования задачи группового быстрогодействия могут развиваться в разных направлениях. Во-первых, возможны изменения терминальных и промежуточных условий. Условия остановки подвижных объектов в заданных точках можно изменить на условия попадания, условия “парковки”, т.е. остановки с заданным направлением движения и т.п. Во-вторых, для описания движения всех подвижных объектов можно использовать разные модели машины Дубинса, допускающие не только повороты на месте, но и движения задним ходом. Важными представляются задачи с учетом препятствий и воздействий противника, с перемещением или изменением целей. Для задачи быстрогодействия группы БПЛА актуальными будут исследования с пространственным движением управляемых объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
2. *Куржанский А. Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 1. С. 20–25.
3. *Бортаковский А. С.* Быстродействие группы управляемых объектов // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 51–77.
4. *Евдокименков В. Н., Красильщиков М. Н., Оркин С. Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд-во МАИ, 2015.
5. *Гончаренко В. И., Желтов С. Ю., Князь В. А., Лебедева Г. Н., Михайлина Д. А., Царева О. Ю.* Интеллектуальная система планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных мобильных объектов на заданной территории // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 39–56.
6. *Tsourdos A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. N. Y.: Wiley&Sons, 2011.
7. *Jia Zeng, Xiaoke Yang, Lingyu Yang, Gongzhang Shen.* Modeling for UAV Resource Scheduling Under Mission Synchronization // J. Systems Engineering and Electronics. 2010. V. 21. № 5. P. 821–826.
8. *Babel L.* Coordinated Target Assignment and UAV Path Planning with Timing Constraints // J. Intelligent & Robotic Systems. 2019. V. 94 (3-4). P. 857–869.
9. *Poudel S., Moh S.* Task Assignment Algorithms for Unmanned Aerial Vehicle Networks: A Comprehensive Survey // Vehicular Communications. 2022. V. 35. P. 100469.
10. *Бузинов М. Э., Галеев А. А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021. № 5. С. 3–19.
11. *Галеев А. А., Рубинович Е. Я.* Планирование движения подвижных объектов в конфликтной среде // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. XI Междунар. Четаевской конф. (плениарные доклады). Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 71–90.
12. *Mohsan S. A. H., Othman N. Q. H., Li Y. et al.* Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): Practical Aspects, Fpplications, Open Challenges, Security Issues, and Future Trends. Intel Serv Robotics. 2023. V. 16. P. 109–137.
13. *Марков А. А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250–276.
14. *Dubins L. E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
15. *Isaacs R.* Games of Pursuit // Scientific Report of the RAND Corporation. Santa Monica, 1951.
16. *Reeds J. A., Shepp L. A.* Optimal Paths for a Car that Goes Both Forwards and Backwards // Pacific J. Math. 1990. V. 145. No. 2. P. 367–393.
17. *Бердышев Ю. И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 26–35.
18. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2002. Т. 90. С. 5–189.
19. *Бортаковский А. С.* Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 38–48.

20. Пацко В. С., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 25—49.
21. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
22. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
23. Бортакровский А. С. Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 28—40.
24. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
25. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
26. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). М.: Физматгиз, 1960. 293 с.