

УДК: 531.38

УПРАВЛЕНИЕ АМПЛИТУДОЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

© 2024 г. Ю.Ф. Голубев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

e-mail: golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

После доработки 18.09.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Выполнено обобщение метода поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия на случай склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На её движение влияют другие, активно управляемые степени свободы, координаты которых выбираются в качестве функций управления. В число функций управления могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженные переменные в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примерах конкретных колебательных механических моделей о маятнике с опорой, скользящей по циклоиде с сухим и вязким трением, и о спасении шестиночного робота из аварийного положения “навзничь” продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: управление, колебания, трение, амплитуда, оптимизация, механическая система

DOI: 10.31857/S0002338824010054, EDN: IWXXAJ

AMPLITUDE CONTROL OF SYSTEMS OSCILLATIONS WITH FRICTION

© 2024 Yu.F. Golubev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

e-mail: golubev@keldysh.ru

The method of searching for optimal control of the amplitude of one-dimensional oscillations in the vicinity of the equilibrium position is generalized to the case of a scleronous multidimensional mechanical system with friction. The oscillatory degree of freedom of the system does not lend itself to direct control. Its movement is influenced by other, directly controlled degrees of freedom, the coordinates of which are selected as control functions. The number of control functions can include both positional and cyclic coordinates. The method does not use conjugate variables in the sense of the Pontryagin's maximum principle and does not increase the dimension of the original system of differential equations of motion. Using examples of specific oscillatory mechanical models about a pendulum with a support sliding along a cycloid with dry and viscous friction, and about the rescue of a six-legged robot from an emergency position “upside down”, the effectiveness of the proposed method is demonstrated.

Keywords: control, oscillations, friction, amplitude, optimization, mechanical system

Введение. Среди колебательных систем особый интерес вызывают механические устройства, способные управляемо раскачиваться в поле естественных сил (таких, как поле силы тяжести, электрические и магнитные поля) за счет целенаправленного изменения собственной конфигурации. Примером могут служить различные варианты перемещения с помощью конечностей. Это могут быть ходьба, бег, раскачивание на качелях, работа воздушных гимнастов, спасение в аварийных ситуациях и др. Изменение собственной конфигурации происходит с помощью внутренних сил, обеспечиваемых соответствующими приводами, и само по себе не может повлиять на изменение положения центра масс системы в абсолютном пространстве. Для того чтобы вызвать требуемое движение центра масс, нужна опора о внешнюю среду, и если опора меняется, то в точках контакта практически невозможно обеспечить

непосредственное управляющее воздействие. Тем самым естественно возникают системы с недостаточным набором приводов для всех степеней свободы (неполноприводные системы). В теории управления их ещё называют системами с дефицитом управления. К настоящему времени имеется довольно много исследований на эту тему [1–13].

Увеличение или уменьшение амплитуды качаний колебательных систем может быть достигнуто за счет соответствующим образом организованного накопления (уменьшения) энергии резонансными методами [4]. Но это в большинстве случаев громоздкий и плохо управляемый процесс. Применение методов оптимального управления для организации движения по свободным от приводов степеням свободы может оказаться более предпочтительным. В [9–13] предложен простой и экономный метод оптимизации колебаний для голономных консервативных систем с дефицитом управления по одной степени свободы, основанный на идеях работы [14]. В [9, 10] главный результат получен с помощью вычисления первой вариации функционала. В нём в качестве управляющих функций выбираются непосредственно координаты управляемых степеней свободы. В [11–13] найдено более простое доказательство справедливости метода. Этот метод, который не использует сопряженные переменные в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [15] и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения, получает в данной статье дальнейшее развитие для систем с сухим и вязким трением. Показано, что наличие трения в системе не влияет на стратегию оптимального раскачивания (торможения), следующую из работ [8–13]. Оно влияет лишь на фактическую зависимость управляющих функций от времени, что не существенно, а также на результат применения этой стратегии, затрудняя и замедляя процедуру раскачивания, а при большом вязком трении ограничивая достижимую амплитуду.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n — число степеней свободы системы, q_i — обобщённые координаты, $\dot{q}_i$ — обобщённые скорости, а симметричная положительно определённая матрица (a_{ij}) зависит от координат. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

в которых t — время, Q_i — обобщённые силы. В отличие от работ [9–13] эти силы могут содержать слагаемые, выражающие влияние как сухого, так и вязкого трения. Пусть первая обобщённая координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщённые силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщённую координату, обозначив её буквой x : $q_1 = x$.

Будем считать, что обобщённая сила Q_1 представлена суммой

$$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \dots, q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, x, q_2, \dots, q_n), \quad (1.2)$$

где позиционная сила F зависит только от x и других обобщённых координат. Сила R оказывает сопротивление изменению координаты x и зависит как от обобщённых скоростей, так и от обобщённых координат. Пусть первыми в наборе $(q_2, \dots, q_n)$ идут $s-1$ координат, от которых обобщённая сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат не входят явно в выражение для F . Координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причём $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ — вектор координат, непосредственно влияющих на значение F , $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ — вектор координат, от которых F явно не зависит, так что $\partial F / \partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2 \dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где $s-1$ — число u -координат и

$$T^*(x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{k+s,r+s} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

Следуя работам [9—13], в системе (1.1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного возрастания: $\dot{x} > 0$ и обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$ — векторы управляющих координат и их производных по координате x . Тогда уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] - p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

где

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y})}{\partial x} - (t')^2 R(\dot{x}, x, \mathbf{y}),$$

причем $t'(x) = \dot{x}^{-1}$. Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\begin{aligned} & \left| u_j^m \leq u_j(x) \leq u_j^M \right|, \quad \left| w_k^m \leq w_k(x) \leq w_k^M \right|, \\ & \left| \dot{u}_j^m \leq \dot{u}_j(x) \leq \dot{u}_j^M \right|, \quad \left| \dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M \right|, \end{aligned} \quad j = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{1, n-s}. \quad (1.5)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы $Q_2, \dots, Q_n$ вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ реализовались. Предположим, что это может быть сделано, так чтобы ограничения (1.5) удовлетворялись. Тогда можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.6)$$

где x_0 — начальное значение независимой переменной x , $\lambda(x, \mathbf{y})$ — любая функция. Уравнение (1.6) эквивалентно уравнению (1.4). Заметим, что если $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, то уравнение (1.4) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве λ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Равенство (1.6) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} \left[\dot{x}^2 f(x, \mathbf{y}) \lambda(x, \mathbf{y}) \right]_{x_0}^x = 0$$

или

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} \left[f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \right]_{x_0}^x, \quad (1.8)$$

где

$$f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k, \quad (1.9)$$

$$\lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right).$$

В том случае, когда $\dot{x} = \dot{x}(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.8) становится несобственным из-за того, что при $\dot{x} = 0$ значения $t' = 1 / \dot{x}$, $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}} / \dot{x}$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}} / \dot{x}$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.8) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ — следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0. \quad (1.11)$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

Обратное движение маятника ($\dot{x} < 0$) сводится к случаю его прямого движения [9] с помощью замены независимой переменной $\xi = -x$.

2. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний. Пусть λ определено формулой (1.7). Тогда справедливы следующие теоремы (их формулировки, по существу, совпадают с формулировками работ [12, 13] и приводятся здесь исключительно для удобства их дальнейшего использования).

Теорема 1 (принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.3) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$.

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\mathbf{w}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Теорема 2 (принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.3) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$ $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$.

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_1) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Доказательство приведенных теорем практически совпадает с доказательством, представленным в работе [12], и поэтому здесь не приводится.

Следствие. Стратегия (синтез) выбора оптимального управления раскачиванием не зависит от наличия трения в системе. От трения зависит лишь результат применения этой стратегии в каждом конкретном случае.

Доказательство. Поиск оптимального управления осуществляется в соответствии с формулами (2.1)–(2.4), в которые информация о трении явным образом не входит.

Замечание 1. Функции управления от времени будут зависеть от наличия трения в системе.

Замечание 2. Приведенные теоремы справедливы в предположении, что функция $f \neq 0$. По существу, она представляет собой коэффициент при старшей производной в уравнении (1.4). Обращение её в нуль свидетельствует о том, что при выбранном законе управления для заданных параметров системы происходит вырождение. Часто вырождение происходит потому, что динамические параметры управляющих частей системы превосходят динамические характеристики управляемой её части. Тогда соответствующей настройкой параметров системы будет возможно устранить указанную неприятность. При невозможности настройки параметров вырождение также можно исключить переходом к классу кусочно-постоянных функций, разбивая процесс интегрирования на отрезки с сохранением непрерывности фазовых

координат. На каждом таком отрезке производные от управляющих функций окажутся равны нулю, и будет выполнено $f = a_{11} > 0$. Таким образом образуется последовательность кусочно постоянных функций, дающая приближенное представление об оптимальном решении.

3. Пример 1. Маятник с точкой подвеса на перевернутой циклоиде. Твердое тело, имеющее массу m и центральный момент инерции I_b , движется плоскопараллельно так, что его центр масс скользит с сухим и вязким трением в вертикальной плоскости по перевернутой циклоиде (брахистохроне). Тело вращается, отслеживая касательную к траектории центра масс. К этому телу в его центре масс подвешен стержень, имеющий массу M и центральный момент инерции I_r . Относительно тела стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить тело m двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний в окрестности нижней точки циклоиды. Решение этой задачи рассматривалось в сокращённом виде в [13]. Здесь дадим более подробный вариант. Обозначим буквой l расстояние от центра масс C стержня до точки подвеса. Пусть $\mathbf{v}$ — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а ψ — угол между стержнем и вектором $\mathbf{v}$. Угол ψ примем в качестве управления в целях раскачивания системы (рис. 1).

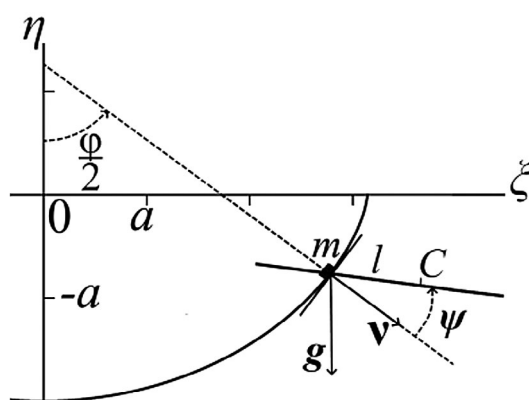


Рис. 1. Циклоидальный маятник со стержнем

Для описания движения введём абсолютную правоориентированную декартову систему координат $O\xi\eta$. Ось $O\eta$ направим вертикально вверх. Ось $O\xi$ расположим в плоскости движения. Тогда ось $O\xi$ будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin \varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos \varphi), \quad \zeta = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где $a > 0$ — постоянная, а φ — обобщённая координата, задающая положение точки m на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Её внешняя нормаль $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, 0)$ имеет координаты

$$v_\xi = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_\eta = -\cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ образует с отрицательным направлением оси $O\eta$ угол $\varphi / 2$. Центр масс стержня имеет координаты

$$\xi_C = a(\varphi + \sin \varphi) + l \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \eta_C = -a(1 + \cos \varphi) - l \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Далее получим

$$\dot{\xi}_C = 2a\dot{\varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \dot{\eta}_C = a\dot{\varphi} \sin \varphi + l \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = 2 \left[(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos\psi \right] \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{Ml^2 + I_r}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right)^2 + \frac{I_b}{8} \dot{\varphi}^2.$$

Найдем силовую функцию:

$$U = (m + M)ga(1 + \cos\varphi) + Mgl \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right).$$

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\psi\dot{\varphi} + B_\psi\dot{\psi}) + C_\psi &= -Mlg \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}(A_\varphi\dot{\varphi} + B_\varphi\dot{\psi}) + C_\varphi &= -(m + M)ga \sin\varphi - \frac{Mgl}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + R, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_\psi &= 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2}, \\ B_\psi &= Ml^2 + I_r, \quad C_\psi = 2Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\psi, \\ \left\{ \begin{aligned} A_\varphi &= 4(m + M)a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2} + \frac{I_b}{4}, \\ B_\varphi &= 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\psi + Ml^2 + I_r, \\ C_\varphi &= \left[(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi}\right) \cos\psi \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь Q_ψ — обобщенная сила, управляющая углом ψ , R — обобщенная сила, учитывающая воздействие сухого и вязкого трения.

Следует отметить, что коэффициенты (3.2), когда $I_b = 0$, отличаются от соответствующих неправильных коэффициентов, полученных в [12], из-за неточности, допущенной там при выводе уравнений движения. В настоящей работе эта погрешность исправлена. Ошибка ни на что не повлияла, так как цель примера в упомянутой работе состояла лишь в том, чтобы продемонстрировать технику применения теорем в общем случае сколько-нибудь сложной системы дифференциальных уравнений.

Из уравнений (3.1) видно, что при отсутствии управления и трения система имеет положения равновесия, когда

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad \sin\varphi = 0. \quad (3.3)$$

В допустимых пределах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ условиям (3.3) соответствуют значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. Очевидно, что при $\varphi = 0$ достигается нижнее устойчивое положение равновесия (нулевое положение

равновесия), а при $\varphi = \pm\pi$ — два верхних неустойчивых положения равновесия по краям циклоиды. Первое условие (3.3) означает, что в положениях равновесия стержень должен быть направлен вертикально вниз.

Перейдём к анализу оптимальных законов раскачивания маятника. В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол ψ . Для простоты анализа влияния трения не будем накладывать никаких ограничений на величину угла ψ . В соответствии с уравнением (1.4) получим $f = A_\varphi + B_\varphi \psi'$, где ψ' — производная по φ . Знак множителя λ , вычисляемого по формуле (1.7), совпадает со знаком функции f . Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла ψ . Оптимизируемая по величине ψ функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u}) = \Phi = -\chi \left[(m + M)ga \sin \varphi + \frac{Mgl}{2} \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right) \right]. \quad (3.4)$$

Экстремальные значения функции Φ достигаются при

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \rightarrow \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$f = A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = Mal \left[2b \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \pm \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{I_b}{4}, \quad b = \frac{2(M + m)a}{Ml}. \quad (3.5)$$

Учтем, что

$$\min \left\{ \left[2b \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \pm \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right\} = \min \left(b + b \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) = b - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}.$$

Следовательно, если

$$\frac{I_b}{Mal} > 2 \left(\sqrt{4b^2 + 1} - 2b \right), \quad (3.6)$$

то коэффициент $\chi > 0$. Воспользовавшись рекомендацией замечания 2, будем в дальнейшем считать условие (3.6) выполненным.

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ , а $\varphi_1 > 0$ — соответственно правая граница, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (2.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полуколебания состоит в применении правила

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.7)$$

Геометрический смысл полученного закона управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен к вертикальной оси и составлять с горизонтальной осью развернутый угол, обеспечивая максимальное значение силового момента.

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.8)$$

Геометрический смысл закона управления (3.8) состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярным к вертикальной оси и сонаправленным с горизонтальной осью, обеспечивая минимальное значение силового момента.

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.8); после достижения минимального отрицательного отклонения следует пользоваться формулой (3.7), и т.д. Таким образом, при достижении экстремальных отклонений маятника стержень должен мгновенно поворачиваться на развернутый угол. Естественно, что в реальности такой скачок по координате невозможен. Его следует рассматривать как предел, когда время переходного процесса стремится к нулю. На практике указанный скачок необходимо сглаживать, вводя ограничения типа (1.5) и выбирая ту границу для функции $\psi(\varphi)$, которая наиболее близка к полученному выше релейному закону.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.7); после достижения минимального отрицательного отклонения следует воспользоваться формулой (3.8), и т.д.

После того как зависимость $\psi(\varphi)$ установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым, и его можно решать любым известным методом [16]. В частности, для решения можно применить формулу (1.8). После определения функции $\varphi(t)$ становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу Q_ψ , обеспечивающую требуемое изменение угла ψ .

Из системы уравнений (3.1) видим, что при $l = 0$ угол ψ становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться правилами разд. 2 для управления скоростями в конце полуразмаха.

Если $\dot{\varphi} \neq 0$, то для законов управления (3.8), (3.9) сила трения может быть представлена формулой

$$R = -2a(M + m) \left[f_r(a\dot{\varphi}^2 + g) \operatorname{sgn} \dot{\varphi} + 2ak_r \dot{\varphi} \right] \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.9)$$

в которой f_r и k_r — коэффициенты сухого трения скольжения и вязкого трения соответственно.

Тем самым принимается во внимание трение лишь между телом m и циклоидой, а в шарнире стержня трение должно быть компенсировано управляющей силой Q_ψ . Заметим, что сухое трение скольжения квадратично зависит от $\dot{\varphi}$ из-за влияния центробежной силы. Если $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, то на систему будет действовать трение покоя.

Наличие сухого трения осложняет картину положений равновесия. В точках $\varphi = \pm\pi$ сухое трение отсутствует. Если управления нет, то в окрестности точки $\varphi = 0$ возникает множество положений равновесия (зона застоя) из-за наличия трения покоя. Условия равновесия в окрестности $\varphi = 0$ принимают вид

$$\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \psi \right) = 0, \quad -f_r \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq f_r. \quad (3.10)$$

3.1. Маятник при раскачивающем законе управления (3.7). Тогда должно быть $\dot{\varphi}(t_0 + 0) > 0$. Второе уравнение системы (3.1) запишем как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\varphi} \left[\left(2b \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] \right\} + \frac{b}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \\ = \frac{g}{2a} (1 - b \sin \varphi) - b \left(f_r \dot{\varphi}^2 + 2k_r \dot{\varphi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сначала найдем положения равновесия, когда сухое трение отсутствует ($f_r = 0$). Тогда если $b < 1$, то положений равновесия нет. Если $b = 1$, то система имеет одно положение равновесия при $\varphi = \pi/2$, а при $b > 1$ — два положения равновесия, соответствующие значению $\sin \varphi = 1/b$.

Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_1 = \arcsin(1/b)$, будет устойчивым, так как если $\varphi < \varphi_1$, то соответствующая обобщенная сила положительна, а если $\varphi > \varphi_1$ она отрицательна. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_2 = \pi - \arcsin(1/b)$, будет неустойчивым, так как в его окрестности имеет место обратное действие обобщенной силы. Заметим, что

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} = b - \sqrt{b^2 - 1}, \quad \tan \frac{\varphi_2}{2} = b + \sqrt{b^2 - 1}. \quad (3.12)$$

Если есть сухое трение, то из-за действия трения покоя возникают зоны застоя. Эти зоны в соответствии с уравнением (3.11) обусловлены выражением

$$|1 - b \sin \varphi| \leq 2f_r b \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.13)$$

Раскроем выражение (3.13). Пусть $1 - b \sin \varphi \geq 0$. В этом случае из (3.13) следует, что зона застоя определена неравенством

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 2b \tan \frac{\varphi}{2} + 1 - 2f_r b \leq 0. \quad (3.14)$$

Обозначим через

$$d_1 = b - \sqrt{b^2 - (1 - 2f_r b)}, \quad d_2 = b + \sqrt{b^2 - (1 - 2f_r b)} \quad (3.15)$$

корни квадратного трехчлена в левой части неравенства (3.14). При

$$b^2 < (1 - 2f_r b) \Rightarrow f_r < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \quad (3.16)$$

корни d_1 и d_2 оказываются комплексными, что говорит о том, что зона застоя в этом случае отсутствует. Отметим, что второе неравенство (3.16) имеет смысл лишь при $b \leq 1$.

Если одновременно выполнены неравенства

$$b \leq 1 \text{ \& } f_r \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right), \quad (3.17)$$

то зона застоя односвязная и определяется неравенством

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.18)$$

Она стягивается в точку при

$$f_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \text{ \& } b \leq 1.$$

Пусть теперь $b > 1$. Тогда система имеет два положения равновесия, причем $\tan(\varphi_2 / 2) \leq d_2$ и $d_1 \leq \tan(\varphi_1 / 2)$. Неравенство (3.14) будет справедливо, только если

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq \tan \frac{\varphi_1}{2}, \text{ либо } \tan \frac{\varphi_2}{2} \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.19)$$

Остальные участки областей застоя получаются в результате исследования случая, когда $1 - b \sin \varphi < 0$. Из (3.13) тогда следует, что область застоя определена неравенством

$$\tan^2 \frac{\varphi}{2} - 2b \tan \frac{\varphi}{2} + 1 + 2f_r b > 0. \quad (3.20)$$

Обозначим через

$$d_3 = b - \sqrt{b^2 - (1 + 2f_r b)} \text{ и } d_4 = b + \sqrt{b^2 - (1 + 2f_r b)} \quad (3.21)$$

корни квадратного трехчлена в левой части (3.20). Если сухое трение велико:

$$b^2 \leq 1 + 2f_r b \Rightarrow f_r \geq \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right), \quad (3.22)$$

то корни d_3 и d_4 оказываются либо комплексными, либо совпадают, а область застоя, охватываемая отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$, оказывается односвязной и выражается неравенством

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.23)$$

Если же

$$b^2 > 1 + 2f_r b \Rightarrow f_r < \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right), \quad (3.24)$$

то корни d_3 и d_4 действительны, причем $d_3 < d_4$. В этом случае неравенство (3.20) удовлетворяется, лишь если

$$\tan \frac{\varphi_1}{2} < \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_3 \text{ либо } d_4 \leq \tan \frac{\varphi}{2} < \tan \frac{\varphi_2}{2}. \quad (3.25)$$

Объединив группу неравенств (3.19) и (3.25), найдем двухсвязную зону застоя в случае $b > 1$, когда выполнено неравенство (3.24):

$$d_1 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_3 \text{ и } d_4 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq d_2. \quad (3.26)$$

3.2. Маятник при раскачивающем законе управления (3.8). Тогда должно быть $\dot{\varphi}(t_0 + 0) < 0$. Второе уравнение системы (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\varphi} \left[\left(2b \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] \right\} + \frac{b}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \\ = -\frac{g}{2a} (1 + b \sin \varphi) + b \left(f_r \dot{\varphi}^2 - 2k_r \dot{\varphi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Перейдем к другой лагранжевой координате $\xi = -\varphi$. Уравнение Лагранжа для координаты ξ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\dot{\xi} \left(2b \cos \frac{\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2} \right) \cos \frac{\xi}{2} + \frac{I_b}{4Mal} \right] + \frac{b}{2} \dot{\xi}^2 \sin \xi = \\ = \frac{g}{2a} (1 - b \sin \xi) - b \left(f_r \dot{\xi}^2 + 2k_r \dot{\xi} + f_r \frac{g}{a} \right) \cos^2 \frac{\xi}{2}. \end{aligned}$$

Оно по смыслу совпадает с уравнением (3.11), так как для новой переменной выполняется $\dot{\xi}(t_0 + 0) = -\dot{\varphi}(t_0 + 0) > 0$. Следовательно, все результаты предыдущего раздела переносятся на рассматриваемый случай с соответствующей интерпретацией.

Пусть трение отсутствует. Тогда если $b < 1$, то положений равновесия нет. Если $b = 1$, то система имеет одно положение равновесия при $\varphi = -\pi/2$, а при $b > 1$ система имеет два положения равновесия, соответствующие значению $\sin \varphi = -1/b$. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_3 = -\arcsin(1/b)$, будет устойчивым, так как если $\varphi > \varphi_3$, то соответствующая обобщенная сила отрицательна, а если $\varphi < \varphi_3$ — положительна. Положение равновесия, для которого $\varphi = \varphi_4 = -\pi + \arcsin(1/b)$, будет неустойчивым, так как в его окрестности возникает обратное действие обобщенной силы. Заметим, что

$$\tan \frac{\varphi_3}{2} = -b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad \tan \frac{\varphi_4}{2} = -b - \sqrt{b^2 - 1}.$$

Как и в предшествующем случае, сухое трение осложняет картину возможных равновесий системы наличием застойных зон. Эти зоны в соответствии с уравнением (3.27) обусловлены выражением

$$|1 + b \sin \varphi| \leq 2f_r b \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.28)$$

Пусть $1 + b \sin \varphi \geq 0$. Тогда при выполнении условия (3.17) зона застоя отсутствует. Если верны условия (3.17), то зона застоя односвязная и определяется неравенством

$$-d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1. \quad (3.29)$$

Она стягивается в точку, если

$$f_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) \text{ \& } b \leq 1.$$

Пусть теперь $b > 1$. Тогда система имеет два положения равновесия, причем $-d_2 \leq \tan(\varphi_4/2)$ и $\tan(\varphi_3/2) \leq -d_1$. Если выполнено неравенство (3.22), то область застоя, охватывая отрезок $[\varphi_3, \varphi_4]$, оказывается односвязной и выражается неравенством

$$-d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1. \quad (3.30)$$

Если же верно условие (3.24), то область застоя оказывается двухсвязной. Она описывается неравенствами

$$-d_3 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_1 \text{ и } -d_2 \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq -d_4.$$

Заметим, что зоны застоя увеличиваются с увеличением коэффициента f_r сухого трения. Они пересекаются, когда $-d_1 \geq d_1$, что эквивалентно

$$f_r \geq \frac{1}{2b}. \quad (3.31)$$

В таком случае на отрезке

$$D = \left\{ \varphi : -|d_1| \leq \tan \frac{\varphi}{2} \leq |d_1| \right\} \quad (3.32)$$

из-за действия силы сухого трения возникает “мертвая” зона застоя. Если тело m попало туда с нулевой скоростью, то из этой зоны его невозможно вывести посредством изменения положения стержня l .

3.3. Анализ влияния длины стержня. Представим центральный момент инерции тела в виде $I_b = mr^2$, где r — радиус инерции тела. Дополнительно введем безразмерные параметры системы:

$$M = \mu m, l = \sigma a, r = \varepsilon a, b = \frac{2(\mu + 1)}{\mu \sigma}, \frac{I_b}{Mal} = \frac{\varepsilon^2}{\mu \sigma}. \quad (3.33)$$

Неравенство (3.6) предстанет в виде

$$\varepsilon^2 > 2 \left[\sqrt{16(1 + \mu)^2 + \mu^2 \sigma^2} - 4(1 + \mu) \right] \quad (3.34)$$

или

$$\mu \sigma < \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 16(1 + \mu)}, \quad (3.35)$$

которое устанавливает соотношение между радиусом инерции тела m , массой стержня и его длиной, исключаяющее возникновение особенностей при управлении. Видно, что при малых значениях σ (малой длине стержня) роль ограничений (3.34), (3.35) невелика, а при достаточно больших значениях σ радиус инерции следует практически выбирать не меньше, чем $a\sqrt{2\mu\sigma}$.

Как следует из анализа положений равновесия системы, эффективность раскачивающего (тормозящего) управления зависит в основном от параметров μ , σ , и f_r . Параметры ε и k_r играют пассивную роль. От параметра ε зависит темп нарастания амплитуды, а параметр k_r ограничивает её величину, так как вязкое сопротивление при больших скоростях массы m может превосходить по величине все остальные силы. Лучшее всего раскачивание происходит, когда при отклонённом стержне положения равновесия отсутствуют даже с учетом сухого трения. Такая ситуация возникает, если $b < 1$ и сухое трение сравнительно невелико, т.е. если выполнены неравенства (3.17): $b < \sqrt{f_r^2 + 1} - f_r$. Этого можно добиться, выбирая

$$\sigma > 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.36)$$

В такой ситуации максимально возможная амплитуда может быть достигнута за один взмах.

Если в соответствии с неравенствами (3.17) будет выполнено

$$2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) < \sigma \leq 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.37)$$

то из-за действия трения покоя при отклонённом стержне возникают две односвязные зоны равновесия, определённые формулами (3.18), (3.30). В этих зонах тело m может остановиться, если кинетическая энергия системы недостаточно велика.

Если в соответствии с неравенствами (3.22) будет верно

$$2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) < \sigma < 2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.38)$$

то к положениям равновесия из-за действия сухого трения добавятся еще положения равновесия из-за действия силы тяжести, хотя области положений равновесия все еще будут оставаться односвязными для каждого экстремального положения стержня.

Если выполнено неравенство (3.24), т.е.

$$0 < \sigma < 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = 2 \left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r \right) \left(1 + \frac{1}{\mu} \right), \quad (3.39)$$

то для каждого экстремального положения стержня зона положений равновесия становится двухсвязной, её расстояние от нулевого положения равновесия сокращается при уменьшении относительной длины σ стержня, уменьшая возможность увеличения амплитуды за один взмах.

Если

$$0 < \sigma < 4f_r \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = S, \quad (3.40)$$

а тело m находится на отрезке D , определённом формулой (3.32), то посредством изменения положения стержня l сдвинуть его с указанной позиции окажется невозможно. Если $\sigma > S$, то “мертвая” зона D застоя отсутствует. В зависимости от величины f_r параметр S меняет свое значение, ограничивая снизу область возможности управления системой:

$$\begin{cases} S \leq 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & 0 < f_r \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} - f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) < S \leq 2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & \frac{1}{2\sqrt{2}} < f_r \leq \frac{1}{2}, \\ 2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) < S < 2\left(\sqrt{f_r^2 + 1} + f_r\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & f_r > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.41)$$

3.4. Результаты вычислений. Уравнения (3.11) и (3.27) можно представить в виде

$$\ddot{\phi}A - \dot{\phi}^2B = \begin{cases} \frac{g}{2a}(1 - b\sin\phi) - \frac{b}{2}(1 + \cos\phi)\left[f_r\left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a}\right) + 2k_r\dot{\phi}\right], & \dot{\phi} > 0, \\ -\frac{g}{2a}(1 + b\sin\phi) + \frac{b}{2}(1 + \cos\phi)\left[f_r\left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a}\right) - 2k_r\dot{\phi}\right], & \dot{\phi} < 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

где

$$A = \begin{cases} b(1 + \cos\phi) - \frac{1}{2}\sin\phi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\phi} > 0, \\ b(1 + \cos\phi) + \frac{1}{2}\sin\phi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\phi} < 0, \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{1}{2}(b\sin\phi + \cos\phi), & \dot{\phi} > 0, \\ \frac{1}{2}(b\sin\phi - \cos\phi), & \dot{\phi} < 0. \end{cases}$$

Когда оказывается, что $\dot{\phi} = 0$, то это означает, что достигнуто максимальное значение отклонения тела m от нулевого положения равновесия, и в этот момент в формулах (3.42) происходит альтернативное переключение знаков. В начальный момент t_0 времени задаётся $\dot{\phi} = \phi = 0$, а управление выбирается так, как если бы $\dot{\phi}(t_0 - 0) < 0$.

Учет трения покоя выполняется по формуле

$$\ddot{\phi} = 0 \text{ при } \begin{cases} \dot{\phi} = 0, & \phi > 0, & |1 + b\sin\phi| < bf_r(1 + \cos\phi), \\ \dot{\phi} = 0, & \phi \leq 0, & |1 - b\sin\phi| < bf_r(1 + \cos\phi). \end{cases} \quad (3.43)$$

Параметры системы имеют вид (3.33). На рис. 2 представлен фазовый портрет системы для следующего набора независимых параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = \sqrt{0.5}$, $f_r = 0$, $k_r = 0$. Пунктиром выделены оси, проходящие через начало координат, а также положения равновесия при отклоненном стержне от вертикали, соответствующие значениям $\phi_1 = -\phi_3 = \arcsin(1/b) \approx 0.0625$. На всех фазовых портретах ниже по горизонтальной оси откладываются значения параметра ϕ , а на вертикальной оси — значения скорости $\dot{\phi}$. Видно, что описанный в разд. 3 алгоритм раскачивания системы успешно справляется с задачей увеличения амплитуды колебаний вплоть до значения скорости порядка 3 С^{-1} . Далее гироскопическая сила, определяемая

коэффициентом B , будучи отрицательной в окрестности $\varphi = 0$, превосходит по модулю положительный момент силы тяжести. Затем момент силы тяжести при проходе параметра φ через точку $\varphi_3 = -\pi + \arcsin(1/b)$ тоже становится отрицательным, усугубляя уменьшение скорости после прохождения точки φ_3 . В окрестности точки $\varphi = \pi$ гироскопическая сила становится положительной, определяя некоторое увеличение скорости $\dot{\varphi}$ в конце фазовой траектории.

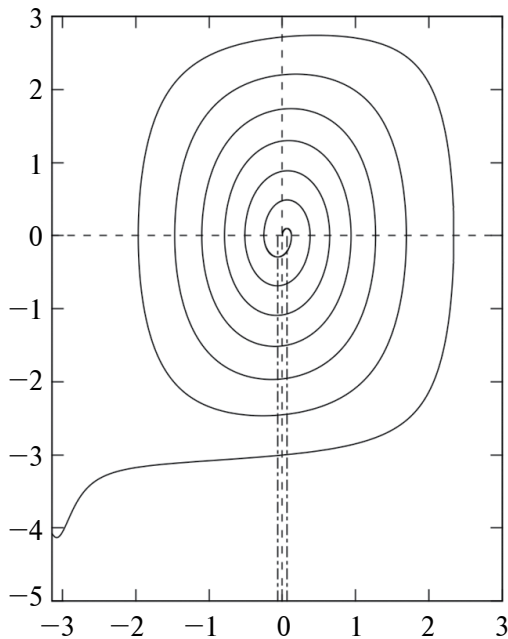


Рис. 2. Фазовый портрет при $f_r = k_r = 0$

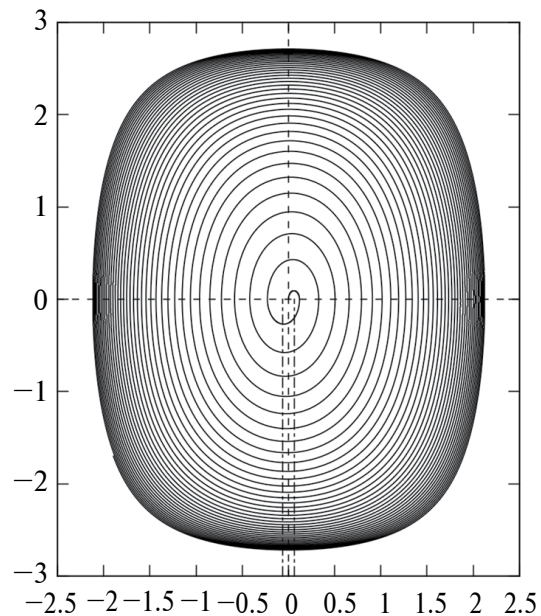


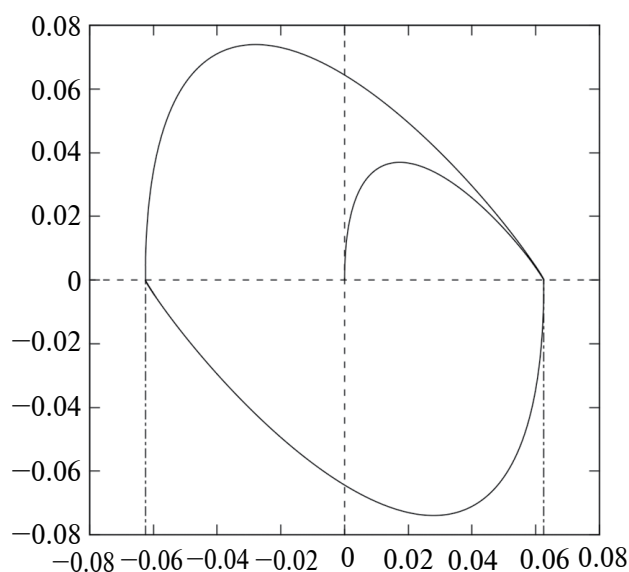
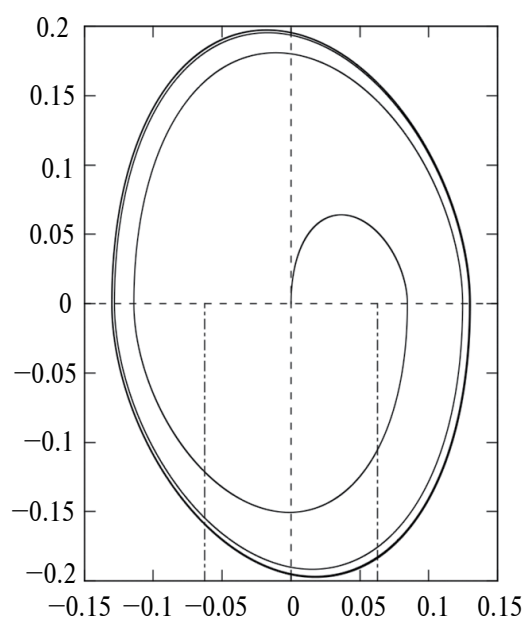
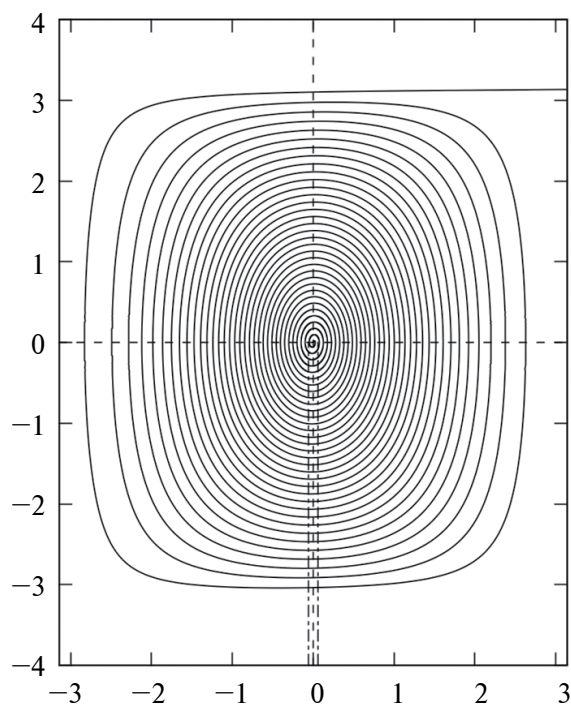
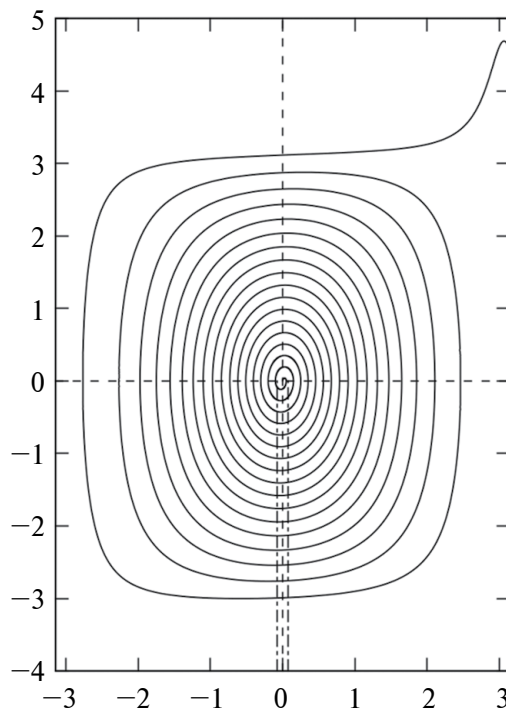
Рис. 3. Вязкое трение: $f_r = 0, k_r = 0,1$

На рис. 3 представлен фазовый портрет системы, для которого по сравнению с параметрами, принятыми для рис. 2, изменён только коэффициент вязкого трения: $k_r = 0.1$. Видим, что даже сравнительно небольшое вязкое трение препятствует неограниченному увеличению амплитуды, уменьшая приращения амплитуды на каждом следующем цикле управления. На рис. 4 показан фазовый портрет системы для $k_r = 1$. Здесь достаточно быстро удаётся достичь амплитуды, определяющей предельный цикл колебаний. Причем значение этой амплитуды оказывается весьма небольшим.

Рис. 5 дает представление о том, как ведёт себя система при $k_r = 3$. Это значение оказывается большим настолько, что вместо колебаний система аperiodически стремится к положениям равновесия ($\varphi = \pm \arcsin(1/b) \approx \pm 1/16$, $\dot{\varphi} = 0$). Процесс приближения $\dot{\varphi} \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pm 1/16$ происходит на бесконечном интервале времени. Поэтому переключение управляющей функции делается не при $\dot{\varphi} = 0$, а когда $\dot{\varphi}$ становится достаточно малым. Предельная амплитуда колебаний в данном случае, очевидно, оказывается равной $\arcsin(1/b)$. При дальнейшем увеличении $k_r > 3$ амплитуда колебаний меняться уже не будет.

При выполнении расчётов, связанных с оценкой влияния сухого трения, необходимо учитывать трение покоя. В соответствии с формулой (3.32) движение тела m из нулевого положения равновесия может начаться вследствие качания стержня лишь тогда, когда выполнено соотношение $2bf_r < 1$. Если взять параметры, принятые выше для оценки влияния вязкого трения: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = \sqrt{0.5}$, то получим $\sigma > 8f_r$. Таким образом, при $\sigma = 0.25$ должно быть $f_r < 0.03125$. На рис. 6 показан фазовый портрет системы для значений $f_r = 0.025$, $k_r = 0$. Остальные параметры соответствуют ранее рассмотренным вариантам. При сравнении с рис. 1 видно, что наличие сухого трения приводит к тому, что амплитуда колебаний увеличивается медленнее и приращения амплитуды становятся больше от цикла к циклу управления, указывая на отсутствие предельно большой конечной амплитуды. Следовательно, в кинематически допустимых пределах маятник с таким трением можно раскачать до любой заданной амплитуды. Но процесс раскачивания будет замедленным.

Аналогичная картина наблюдается для коэффициентов трения, близких к предельному значению 0.03125, например $f_r = 0.031$. В этом случае приращения амплитуды в начале раскачивания настолько малы, что изображение сливается в одно пятно. Но раскачивание всё-таки происходит неограниченно. Ускорить процесс раскачивания под действием влияния сухого трения можно, увеличивая длину стержня. На рис. 7 изображен фазовый портрет системы для значений $\sigma = 0.3$, $f_r = 0.025$, $k_r = 0$. Видно, что при увеличенной длине стержня приращения амплитуды от цикла к циклу возрастают и для раскачивания требуется меньше витков.

Рис. 5. Вязкое трение: $f_r = 0$, $k_r = 3$ Рис. 4. Вязкое трение: $f_r = 0$, $k_r = 1$ Рис. 6. Сухое трение: $f_r = 0.025$, $k_r = 0$ Рис. 7. Сухое трение: $f_r = 0.025$, $\sigma = 0.3$

Как уже отмечалось выше, при выполнении условия $2bf_r \geq 1$ невозможно заставить тело m выйти из нулевого положения равновесия посредством колебаний стержня. Но это тело можно попытаться вытолкнуть из положения равновесия, придав ему некоторую начальную скорость. Рис. 8 показывает, что в этом случае даже при применении оптимальной стратегии раскачивания тело m колеблется с уменьшающейся амплитудой, так как в окрестности нулевого положения равновесия влияние силы трения превосходит влияние силы тяжести. Остановка здесь происходит не в начале координат, а в некоторой точке зоны нечувствительности.

Если трение отсутствует, то в силу консервативности системы прекращение управления влечёт сохранение амплитуды колебаний. В присутствии трения такой способ сохранения амплитуды невозможен. Вместе с тем трение можно использовать для поддержания значений амплитуды колебаний в некотором диапазоне значений. На рис. 9 изображён фазовый портрет системы, соответствующий параметрам $\sigma = 0.25$, $f_r = 0.025$. Здесь при превышении значения 0.5 модуля амплитуды в моменты достижения значений скорости $\dot{\varphi} = 0$ оптимальное увеличение амплитуды прекращалось, стержень приводился в вертикальное положение вдоль отрицательного направления оси $O\eta$ и в таком положении оставался до того момента, когда амплитуда становилась меньше заданного значения. На рисунке видна полоса, внутри которой находятся фазовые траектории при таком управлении. Диапазон получающихся амплитуд приблизительно составляет 0.1. Выделяются также траектории пассивного торможения. На них происходит уменьшение амплитуды. Регулировка ширины полосы может быть обеспечена изменением длины стержня.

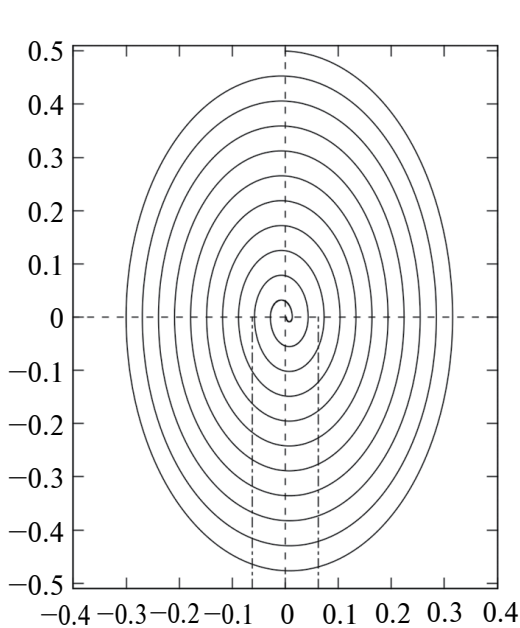


Рис. 8. Сухое трение: $\dot{\varphi}_0 = 0,5$, $f_r = 0,035$

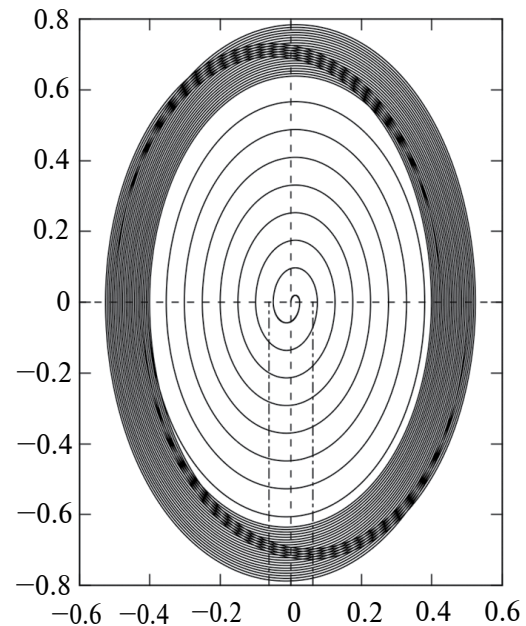


Рис. 9. Управление по амплитуде

На рис. 10 показана диаграмма Пуанкаре предложенной выше процедуры удержания амплитуды в требуемом диапазоне значений. По горизонтальной оси откладываются предыдущие значения амплитуды, а по вертикальной оси — последующие. Участки диаграммы, находящиеся выше биссектрисы координатного угла, соответствуют увеличению амплитуды, а участки, расположенные ниже биссектрисы, — уменьшению. На рисунке видно, что сначала происходит монотонное увеличение амплитуды, а затем включается описанная выше логика поддержания амплитуды в районе значения 0.5. Регулировка ширины реализуемого диапазона значений амплитуды может быть обеспечена посредством изменения длины стержня.

4. Пример 2. Выведение шестиногого робота из положения “навзничь”. В работе [8] была исследована задача о спасении робота из указанного аварийного положения с помощью согласованного колебательного движения группы ног, находящихся с одной его стороны. При этом колебательное движение ног было релейным, но содержащим линейные переходные участки между минимальным и максимальным допустимыми значениями углов между ногами и корпусом. Указанное колебательное движение ног не было оптимальным, но приводило к вынужденным

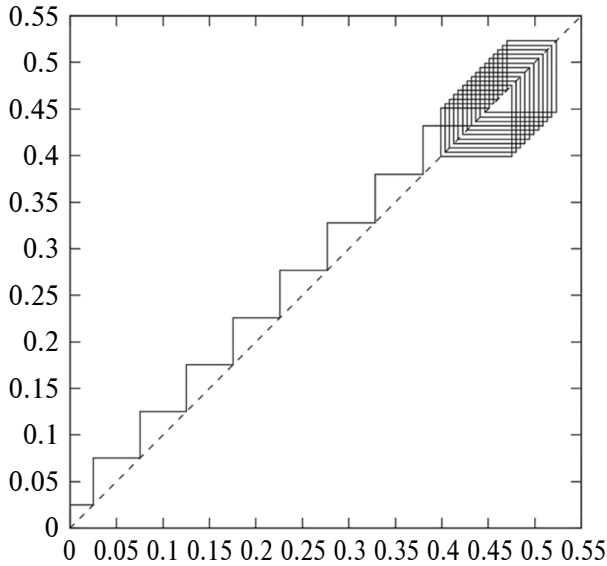


Рис. 10. Диаграмма Пуанкаре

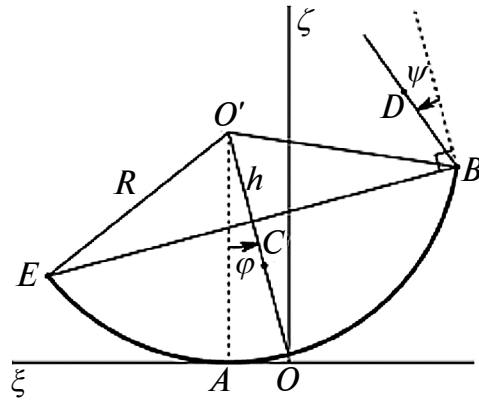


Рис. 11. Переворот робота из положения “навзничь”

колебаниям корпуса с нарастающей амплитудой, что в конечном итоге обеспечивало переворот корпуса робота в правильное рабочее положение. Здесь обсудим вопрос об оптимизации процедуры раскачивания. Движение робота будем считать плоскопараллельным.

Рассмотрим сечение системы плоскостью, перпендикулярной продольной оси корпуса. Тогда в этой плоскости на горизонтальной опорной прямой будет лежать однородный сегмент круга, имеющий массу M . Сегмент ограничен дугой окружности радиуса R и хордой BE , отстоящей от центра окружности на расстояние h . Дуга окружности сегмента касается опорной прямой в точке A . Сегмент может перекачиваться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь вокруг центра упомянутой окружности на угол φ , отсчитываемый от вертикального радиуса, который направлен в точку A касания сегмента с прямой. Если $\varphi = 0$, то сегмент лежит так, что его хорда параллельна опорной прямой (рис. 11).

К правому концу B хорды BE сегмента плоским шарниром прикреплен стержень (выпрямленные ноги) массы m_1 , который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . Угол ψ отсчитывается от внешнего перпендикуляра к хорде сегмента. Когда $\psi = 0$, стержень направлен перпендикулярно хорде в сторону от опорной прямой. На другом конце хорды BE в точке расположена точечная масса m_2 , уравнивающая стержень. Центр масс D стержня расположен на расстоянии ρ от точки B . Центр масс C сегмента расположен на срединном перпендикуляре к хорде на расстоянии r от центра окружности сегмента. Сегмент имеет момент инерции J относительно прямой, проходящей через центр масс сегмента перпендикулярно плоскости сегмента. Момент инерции стержня относительно его центра масс обозначим буквой J_r . Для описания движения воспользуемся системой координат $O\xi\zeta$. Начало O поместим в точку касания сегмента с опорной прямой при $\varphi = 0$. Ось $O\xi$ пустим вдоль опорной прямой справа налево. Ось $O\zeta$ направим вертикально вверх.

Уравнение изменения кинетического момента системы относительно продольной оси корпуса, проходящей через точку A , возьмём из работы [8]:

$$\frac{d}{dt}(K_\varphi \dot{\varphi} + K_\psi \dot{\psi}) - R\dot{\varphi}Q_\zeta = M_\sigma g(\xi_{cm} - R\varphi), \quad (4.1)$$

где

$$K_\varphi = I + 2R[M_\sigma(\zeta'_{cm} \cos \varphi - \xi'_{cm} \sin \varphi) - m_1 \rho \cos(\psi - \alpha)],$$

$$K_\psi = J_r + m_1 \rho^2 + m_1 \rho R[\cos(\varphi + \psi) - \cos(\psi - \alpha)],$$

$$\xi'_{cm} = \frac{m_1 \rho \sin \psi - S_2}{M + m_1 + m_2}, \quad \eta'_{cm} = 0, \quad \zeta'_{cm} = \frac{m_1 \rho \cos \psi - S_1}{M + m_1 + m_2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{R}.$$

$$\begin{aligned}
I &= J + J_r + M(R^2 + r^2) + m_1(\rho^2 + 2R^2) + 2m_2R^2, \quad M_\sigma = M + m_1 + m_2, \\
\xi_{cm} &= R\varphi + \xi'_{cm} \cos \varphi + \zeta'_{cm} \sin \varphi, \quad \eta_{cm} = 0, \quad \zeta_{cm} = R - \xi'_{cm} \sin \varphi + \zeta'_{cm} \cos \varphi, \\
Q_\zeta &= -M_\sigma(\xi_{cm} - R\varphi)\dot{\varphi} - m_1\rho\dot{\psi} \sin(\varphi + \psi), \quad Q_\xi = M_\sigma\zeta_{cm}\dot{\varphi} + m_1\rho\dot{\psi} \cos(\varphi + \psi), \\
S_1 &= Mr + (m_1 + m_2)h, \quad S_2 = (m_1 - m_2)\sqrt{R^2 - h^2}.
\end{aligned}$$

4.1. Оптимальное управление. В соответствии с обозначениями разд. 1 в рассматриваемом примере имеем

$$f = K_\varphi + K_\psi \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad F = g[m_1 \sin(\varphi + \psi) - (S_2 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi)]. \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что экстремальные по углу ψ значения функции F достигаются при

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} - \varphi \rightarrow \frac{d\psi}{d\varphi} = -1. \quad (4.3)$$

Функция f на экстремали имеет вид

$$f = J + M |AC|^2 + m_1 |AB|^2 \mp \rho R \sin(\varphi + \alpha).$$

Следовательно, $f > 0$ для любых значений угла φ , если

$$\frac{J + M |AC|^2}{m_1} + |AB|^2 > \rho R. \quad (4.4)$$

В дальнейшем условие (4.4) будем предполагать выполненным.

Простейший вариант стратегии управления при раскачивании корпуса робота получается, когда ограничения на угол ψ отсутствуют:

$$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi, & \dot{\varphi} > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \dot{\varphi} < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Геометрический смысл полученного управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен вертикальной оси $O\zeta$. Для положительного полуразмаха стержень направлен влево, а для отрицательного полуразмаха — вправо (рис. 11). При этом переключения управления должны быть мгновенными.

Из-за инерционности стержня закон управления (4.5) практически нереализуем и может рассматриваться лишь как предельный вариант при бесконечно большой скорости переходного процесса. Кроме того, наличие неровностей опорной поверхности может привести к столкновениям ноги с опорой и связанных с этим потерям энергии и уменьшению амплитуды колебаний.

Более реалистичным представляется вариант, когда функция $\psi(t)$ и её производная по времени ограничены: $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$, $\dot{\psi}_m \leq \dot{\psi} \leq \dot{\psi}_M$. Тогда оптимальное управление, учитывающее только ограничение на величину угла ψ , предстанет в виде

$$\dot{\varphi} > 0 : \psi_n = \begin{cases} \psi_M, & \frac{\pi}{2} - \varphi \geq \psi_M, \\ \frac{\pi}{2} - \varphi, & \psi_m \leq \frac{\pi}{2} - \varphi < \psi_M, \\ \psi_m, & \frac{\pi}{2} - \varphi < \psi_m; \end{cases} \quad \dot{\varphi} < 0 : \psi_n = \begin{cases} \psi_m, & -\frac{\pi}{2} - \varphi < \psi_m, \\ -\frac{\pi}{2} - \varphi, & \psi_M \geq -\frac{\pi}{2} - \varphi \geq \psi_m, \\ \psi_M, & -\frac{\pi}{2} - \varphi > \psi_M. \end{cases}$$

Смысл управления ψ_n состоит в том, что если вычисленное по формуле (4.5) оптимальное значение угла ψ не попадает в отрезок $[\psi_m, \psi_M]$, то в качестве ψ_n выбирается ближайшая к этому значению граница отрезка $[\psi_m, \psi_M]$. Учет ограничения по скорости переходного процесса выполняется линейно по времени в соответствии с формулой

$$\dot{\psi}_t = \begin{cases} \dot{\psi}_n, & |\psi - \psi_n| \leq d, \\ \frac{1}{2}[(\dot{\psi}_m - \dot{\psi}_M)\text{sign}(\psi - \psi_n) + \dot{\psi}_m + \dot{\psi}_M], & |\psi - \psi_n| > d, \end{cases} \quad (4.6)$$

где d — ширина зоны чувствительности следящей системы. Значение $\dot{\psi}_t$ подается на вход следящей системы. Иными словами, значение угла ψ_t будет максимально быстро приближаться к значению ψ_n с постоянной допустимой угловой скоростью. После того как неравенство $|\psi - \psi_n| \leq d$ окажется выполненным, система начнёт реализовывать желаемое управление ψ_n .

4.2. Результаты компьютерного моделирования. Параметры робота были взяты такими же, как в работе [8]. При расчётах трением качения, ввиду его малости, будем пренебрегать. На рис. 12 показан фазовый портрет раскачивающегося робота, когда значения угла ψ были ограничены диапазоном $\psi_m = -30^\circ \leq \psi \leq 60^\circ = \psi_M$, а значения угловой скорости $\dot{\psi}$ лежали в пределах $\dot{\psi}_m = -2\text{с}^{-1} \leq \dot{\psi} \leq 2\text{с}^{-1} = \dot{\psi}_M$. Естественно, что перед началом процесса раскачивания корпуса ноги робота, не участвующие в этом процессе, складываются так, чтобы они не мешали раскачиванию. Зависимость $\dot{\phi}(\phi)$ выделена символом “□”, причем значения $\dot{\phi}$ откладываются по оси ординат в 1/с. Значения ϕ откладываются по оси абсцисс в радианах. Зависимость $\psi(\phi)$ выделена символом “○”. Для неё по оси ординат откладываются значения в радианах. Характерные “ушки” на графиках $\dot{\phi}(\phi)$ соответствуют моментам переключения функции $\psi(\phi)$. Криволинейные участки зависимости $\psi(\phi)$ соответствуют линейному по времени переходу между ограничениями. Не параллельные оси абсцисс прямолинейные участки функции $\psi(\phi)$ соответствуют случаю, когда $\psi + \phi = \pm\pi/2$.

Функция $\psi(\phi)$ начинается практически из начала координат, затем выходит на максимальное ограничение, сходит с него линейно по ϕ , а когда становится $\dot{\phi} = 0$ при $\phi > 0$, она линейно по времени устремляется к минимальному ограничению и т.д. В данном варианте желаемый переворот корпуса происходит сразу после первого полного качания на третьем размахе.

Если возникает опасность соударения маховых ног с неровностью опорной поверхности, то тогда возникает необходимость сузить допустимую область изменения угла ψ . На рис. 13 показан фазовый портрет системы при ограничениях $10^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$. Остальные параметры были взяты такими же, как в предыдущем примере.

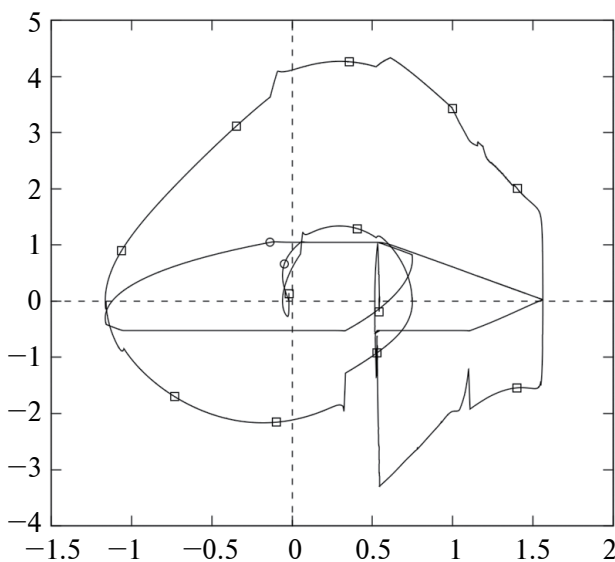


Рис. 12. Фазовый портрет при $-30^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$

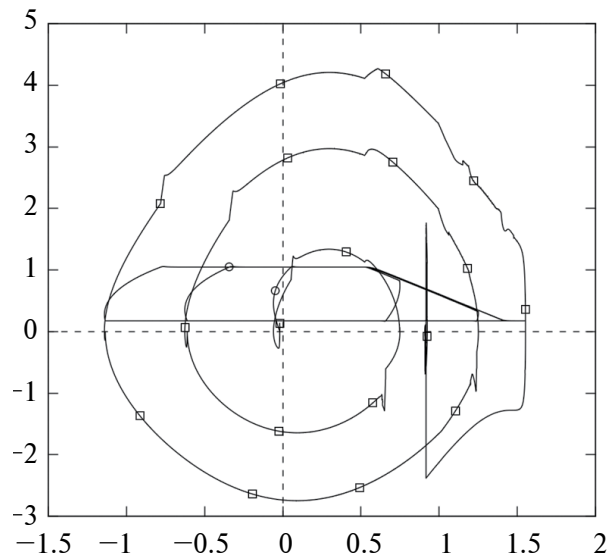


Рис. 13. Фазовый портрет системы при $10^\circ \leq \psi \leq 60^\circ$

На рис. 13 видно, что простое сужение области допустимых значений управления приводит к потере преимуществ оптимального управления в связи с увеличением числа колебаний. Для сохранения указанных преимуществ может потребоваться введение более изощрённых ограничений, зависящих от φ .

На рис. 14 представлен для сравнения фазовый портрет системы, когда управление происходит с тем же набором ограничений, что и для рис. 13, но в соответствии с неоптимальным алгоритмом, предложенном в [8]. Здесь число колебаний получается таким же, как и для оптимального варианта на рис. 13.

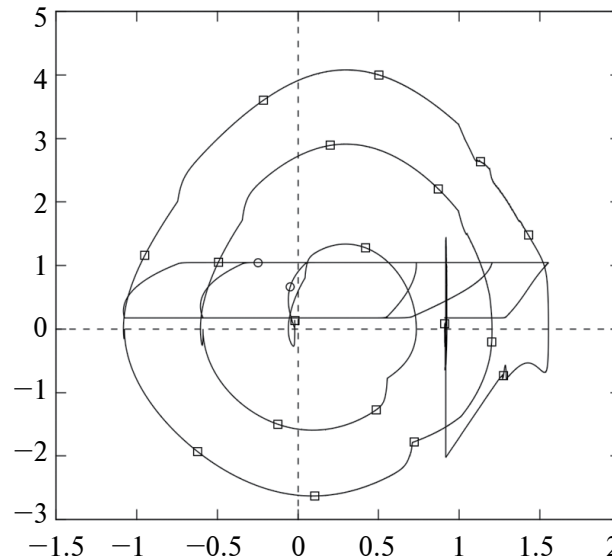


Рис. 14. Фазовый портрет при управлении “по упорам”

Заключение. Предложены простые и лаконичные необходимые условия оптимальности управления колебаниями для голономных механических систем общего вида с сухим и вязким трением и дефицитом управления по одной степени свободы. Применение алгоритмов управления, получаемых из указанных необходимых условий оптимальности (2.1)—(2.4), предполагает учет информации о достижении экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукосильвания. Условия (2.1)—(2.4) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [15]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на стратегию выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этой стратегии в каждом конкретном случае. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Эти условия упрощают решение оптимальных задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. В примере о маятнике с опорой, скользящей по циклоиде, проиллюстрированы особенности применения предложенного метода в системах с трением и продемонстрирована техника учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности её заданного значения. В задаче о спасении шестипалого робота из аварийного положения “навзничь” с необременительными ограничениями на управление найдено оптимальное решение, позволяющее выполнить переворот робота на третьем размахе колебаний. Показано, что простое сужение области допустимых управлений может привести к существенной потере преимуществ, связанных с оптимальностью. Тем не менее задача спасения робота успешно выполняется и в этом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Перевод с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
2. *McGeer Tad.* Passive Dynamic Walking // Intern. J. Robotics Research. 1990. V. 9. No. 2. P. 62—82.
3. *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
4. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 384 с.
5. *Гришин А. А., Житомирский С. В., Ленский А. В., Формальский А. М.* Управление ходьбой двуногого пятизвенного механизма // Изв. РАН: ТиСУ. 1999. № 6. С. 15—19.
6. *Климина Л. А., Формальский А. М.* Об оптимальном раскачивании качелей стоящим на них человеком // Изв. РАН: ТиСУ. 2022. № 6. С. 85—94. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.31857/S0002338822060117. *Klimina, L. A., Formalskii, A. M.* On the Optimal Swinging of a Swing by a Person Standing on It // J. Computer and Systems Sciences International. 2022. V. 61. No. 6, P. 944—953. ISSN 064-2307. DOI: 10.1134/S1064230722060119.
7. *Безнос А. В., Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Формальский А. М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 1. С. 27—38.
8. *Голубев Ю. Ф., Корянов В. В., Мелкумова Е. В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами” // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163—176. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.1134/S0002338819060052.
9. *Golubev Yu.F., Koryanov V. V., Melkumova E. V.* Bringing an Insectomorphic Robot to a Normal Position from an Abnormal Upside Down Position // J. Computer and Systems Sciences International. 2019. V. 58. No. 6. P. 987—999. ISSN PRINT 1064-2307. DOI: 10.1134/S1064230719060054.
10. *Голубев Ю. Ф.* Метод оптимального управления колебаниями механических систем: Препринт № 33. М: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>, <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>
11. *Golubev, Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. No. 11. P. 2596—2607. ISSN: 1995-0802. <https://doi.org/10.1134/S199508022111010X>
12. *Голубев Ю. Ф.* Оптимизация колебаний механических систем // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 52—57. ISSN: 2686-9543. DOI: 10.31857/S2686954322010040.
13. *Голубев Ю. Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // Известия РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 22—30. ISSN: 0002-3388. DOI: 10.31857/S0002338822040084. *Golubev Yu.F.* Controlling the Amplitude of Oscillations of Mechanical Systems // J. Computer and Systems Sciences International. 2022. V. 61. No. 4. P. 496—504. <https://doi.org/10.1134/S1064230722040086>
14. *Голубев Ю. Ф.* Оптимизация колебаний механических систем с трением // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. С. 18—26. ISSN: 2686-9543. DOI: 10.31857/S2686954323060052.
15. *Охоцимский Д. Е., Эннеев Т. М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. М.: ГОСТЕХИЗДАТ. 1957. С. 5—32.
16. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
17. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е, испр. М.: МЦНМО. 2018. 344 с. ISBN 978-5-94057-907-6.