ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 1, С. 17–21

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5.037

АГРЕГИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С КОЛЕБАНИЯМИ

© 2024 г. И.Н. Барабанов[a], *, В.Н. Тхай[a], **
[a]ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва, Россия
*e-mail: ivbar@ipu.ru
**e-mail: tkhaivn@ipu.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023 г.
После доработки 14.08.2023 г.
Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается множество многомерных консервативных систем, которое, как единая механическая система, допускает семейство одночастотных колебаний. Решается задача агрегирования множества систем в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем. Применяются слабые универсальные связи-управления. Ранее задача решалась для идентичных обратимых систем с одной степенью свободы.

Ключевые слова: агрегирование, консервативные системы, цикл, семейство колебаний, связи-управления

DOI: 10.31857/S0002338824010027, **EDN:** IXUIBX

AGGREGATION OF MULTIDIMENSIONAL CONSERVATIVE SYSTEMS WITH OSCILLATIONS

© 2024 I.N. Barabanov[a], *, V.N. Tkhai[a], **
[a] V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia
*e-mail: ivbar@ipu.ru
**e-mail: tkhaivn@ipu.ru

Submitted 31.05.2023 г.
Modified 14.08.2023 г.
Accepted 02.10.2023 г.

We consider the set of multidimensional conservative systems that admits a family of single-frequency oscillations when taken as a unified system. The problem of aggregation of a set of systems into a coupled system with an attractive cycle close to the oscillation of uncoupled systems is solved. Weak universal coupling controls are applied. Previously, the problem was solved for identical reversible one degree of freedom systems.

Keywords: aggregation, conservative systems, cycle, family of oscillations, coupling control

Введение. Агрегирование проводится для получения связанной системы с заданным свойством. Способы агрегирования сложных систем методом Ляпунова приводятся в [1]. В [2] для модели, содержащей слабо связанные подсистемы, предложено находить связи-управления, гарантирующие существование, устойчивость и стабилизацию колебания связанной системы. Тем самым задача агрегирования приводится к задаче управления. Идея [2] реализовывалась для механических систем в [3—6]. Агрегирование индентичных обратимых систем с одной степенью свободы, которые в частном случае являются консервативными, проводилось в [4]: в связанной системе конструировался притягивающий цикл. Предполагалось, что отдельная система обладает семейством невырожденных симметричных периодических движений

(СПД). Поэтому множество этих систем, рассматриваемое как единая механическая система, также допускает семейство невырожденных СПД. В данной статье результаты [4] распространяются на случай многомерных консервативных систем.

Связанные системы исследуются в различных областях знаний. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда. Некоторые другие примеры см. в [7—11].

1. Постановка задачи. Рассматривается система из m консервативных систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода: в i-й системе для вектора обобщенных координат применяется обозначение $q^i = (q_1^i,\ldots,q_{n_i}^i)^{\mathrm{T}}$. Предполагается, что отдельная система допускает одночастотное колебание.

Фазовое пространство отдельной консервативной системы симметрично относительно неподвижного множества системы $M^i = \{q^i, \dot{q}^i : \dot{q}^i = 0\}$. Скорость $\dot{q}^i$ на M^i обращается в нуль, а само движение симметрично относительно M^i и представляет собой СПД, которые образуют семейства $\Sigma^i(h_i)$ по параметру h_i. СПД описывается четной по времени функцией. Параметр h_i является постоянной интеграла полной механической энергии в i-й консервативной системе. Для невырожденных СПД период монотонно зависит от h_i. Задается семейство $\Sigma^i(h_i)$ невырожденных СПД.

Предполагается, что совокупность из m систем, рассматриваемая как одна система, допускает семейство $\Sigma(h)$ невырожденных СПД, параметром которого будет постоянная $h = h_1 + \ldots + h_m$ интеграла энергии всей системы. Через $T(h)$ обозначим период СПД на $\Sigma(h)$, а через $T^i(h_i)$ — периоды на $\Sigma^i(h_i)$. Существование $\Sigma(h)$ означает, что верны равенства $h_i = h_i(h)$, $T^i(h_i(h)) = T(h)$. В частном случае идентичных подсистем приведенные равенства выполняются очевидным образом. В [4] проведено агрегирование идентичных консервативных системы с одной степенью свободы.

Отдельная управляемая механическая система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом, построена в [12, 13]. При этом система замыкалась управлением с ε-малым коэффициентом усиления и стабилизируемое колебание было ε-близко к колебанию механической системы. Для множества механических систем малая сила становится в [3—6] слабой связью-управлением.

Ставится задача агрегирования рассматриваемых m консервативных систем в связанную систему с притягивающим циклом, близким к колебанию несвязанных систем. Находятся универсальные связи-управления между системами, которые пригодны для любой механической системы. При этом предполагается, что характеристические показатели семейств СПД $\Sigma^i(h_i)$ принадлежат мнимой оси.

2. Метод решения. Рассмотрим управляемую механическую систему, включающую m консервативных механических систем, и запишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^i}{\partial \dot{q}_s^i} - \frac{\partial L^i}{\partial q_s^i} = \varepsilon\sigma u_s^i(q,\dot{q}), \quad s = \overline{1,n_i}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

где L^i — Лагранжиан i-й системы, $u^i = (u_1^i,\ldots,u_{n_i}^i)^{\mathrm{T}}$ — вектор ее управления, при этом число σ равняется $+1$ или -1. Поскольку в связанной системе (2.1) рабочим режимом предполагается иметь притягивающий цикл, то функции $u_s^i(q,\dot{q})$ выбираются не зависящими явно от времени t. Сам цикл, по определению, представляет собой изолированное периодическое решение автономной системы.

В развиваемом подходе к агрегированию множество из m несвязанных консервативных механических систем рассматривается как одна консервативная система, допускающая семейство СПД $\Sigma(h)$. При этом цикл рождается из СПД семейства $\Sigma(h)$ при энергии $h = h^*$. Поэтому для системы (2.1) выбираются связи-управления

$$u_s^i = \left[1 - K(h^*)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(q_s^i)^2\right]\sum_{j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i,$$
$$r_{sj}^i = \text{const}, \quad i = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,n_i}, \tag{2.2}$$

которые представляют собой обобщение связей-управлений в [4] и в случае отдельной консервативной системы превращаются просто в управление [12—14].

Зависимость $K(h)$ является характеристикой семейства Σ и определяется из тождества

$$\int_0^{T(h)}\left[1 - K(h)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(q_s^i)^2\right]\sum_{i=1}^{m}\sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i \dot{q}_j^i \psi_j^i dt \equiv 0, \tag{2.3}$$

где ψ_j^i — решения сопряженной системы для уравнений в вариациях. При этом для консервативной системы в силу симметричности матрицы уравнений в вариациях для СПД решения сопряженной системы удовлетворяют равенствам $\psi_j^i = -\dot{q}_j^i$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n_i}$.

Изменение обобщенных координат q^i на семействе $\Sigma(h)$ дается функцией $q^i = \varphi^i(h,t)$. Поэтому из тождества (2.3) с учетом равенства нулю нечетной функции $\dot{\varphi}_j^i$ на концах интервала интегрирования получим:

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \theta(h,t)dt}{\int_0^{T(h)} \theta(h,t)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(\varphi_s^i)^2 dt}, \quad \theta = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i (\dot{\varphi}_j^i)^2.$$

С применением функции $K(h)$ из тождества (2.3) выводится амплитудное уравнение

$$I(h) \equiv \int_0^{T(h^*)}\left[1 - K(h^*)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(\varphi_s^i(h,t))^2\right]\theta(h,t)dt = 0, \tag{2.4}$$

дающее необходимое условие в первом приближении по μ существования $T(h^*)$-периодического решения системы (2.1), (2.2). Колебание рождается из СПД семейства $\Sigma(h)$ при $h = h^*$. Вычислим производную

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \chi\nu, \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = -\int_0^{T(h^*)} \theta(h^*,t)dt. \tag{2.5}$$

Тогда достаточное условие существования изолированного $T(h^*)$-периодического решения дается неравенством $\chi \neq 0$. В этом случае из СПД рождается едиственное колебание — цикл.

В [13] доказывается, что для отдельной системы выбором надлежащей матрицы $\left\|r_{sj}^i\right\|$ всегда реализуется орбитально асимптотически устойчивый цикл. При этом в управлении (2.2) в зависимости от знака производной χ используется множитель $\sigma = 1$ при $\chi < 0$ или $\sigma = -1$ при $\chi > 0$.

Заметим, что в связанной системе в (2.2) задается матрица $\left\|r_{sj}^i\right\|$ для каждой системы, а также реализуется связь между всеми системами (суммирование по индексу i). При этом как к отдельной консервативной системе, так и ко всей связанной системе применяется закон изменения полной механической энергии.

3. Законы изменения энергии. Полная механическая энергия в i-й системе меняется по закону

$$\frac{dE^i}{dt} = \varepsilon\sigma\left[1 - K(h^*)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_i}(q_s^i)^2\right]\sum_{s,j=1}^{n_i} r_{sj}^i(\dot{q}_j^i)^2, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.1}$$

Как следствие, из (3.1) выводится закон изменения энергии всего множества консервативных систем:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon\sigma\left[1 - K(h^*)\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_s}(q_s^i)^2\right]\sum_{i=1}^{m}\sum_{s,j=1}^{n_s} r_{sj}^i(\dot{q}_j^i)^2. \tag{3.2}$$

Тогда при малых $h - h^*$ из формул (2.4), (2.5), (3.2) вычисляется приращение ΔE полной энергии E за период $T(h^*)$:

$$\Delta E = \varepsilon\sigma\chi\nu(h - h^*) + o(\varepsilon). \tag{3.3}$$

Выберем в связях-управляниях (2.2) положительно-определенные матрицы $\left\|r_{sj}^i\right\|$. Тогда функция $\theta(h,t)$ в (2.4) принимает только отрицательные значения. Поэтому интеграл от этой функции, т.е. число ν в (2.5), будет положительным. Соотвественно в (3.3) выполняется $\nu > 0$. Согласно формуле (3.2), достаточным условием существования цикла является неравенство $\chi \neq 0$. Поэтому, выбирая знак числа σ так, чтобы выполнялось неравенство $\sigma\chi < 0$, получаем отрицательное приращение ΔE полной механической энергии на периоде $T(h^*)$.

Таким образом, положительно-определенные матрицы $\left\|r_{sj}^i\right\|$ и необходимый знак числа σ позволяют на траекториях системы (2.1), (2.2) все время уменьшать приращение энергии ΔE на отрезке $[0,T(h^*)]$. В соответствии с законами (3.1) формула вида (3.3) справедлива также для приращений ΔE^i энергий E^i.

Рассмотрим отображение $\tau : 0 \to T(h^*)$. В δ-окрестности цикла выполняется $|h - h^*| < \delta$, $|h_i - h_i^*| < \delta$, $i = \overline{1,m}$. Неравенства сохраняют справедливость при отображении. Поэтому $\Delta E \to 0$, $\Delta E^i \to 0$, $i = \overline{1,m}$. Значит, средние значения в пределе равняются нулю. Предельные функции получаются $T(h^*)$-периодическими, их средние значения равны постоянным интегралов для цикла.

4. Стабилизация цикла. Согласно [14, лемма П1], в многомерной системе можно выделить многообразие $\hat{\Sigma}^i$, соответствующее консервативной механической системе с одной степенью свободы, на котором собственно и реализуется семейство $\Sigma^i(h_i)$. В окрестности $\hat{\Sigma}^i$ механическая система описывается в обобщенных координатах переменными (x^i, y^i), где координатой x^i задается семейство $\Sigma^i(h_i)$: $y \equiv 0$ на $\hat{\Sigma}^i$. Поэтому $E^i = E_x^i + E_y^i$, где E_x^i — энергия консервативной системы.

При отображении τ приращения этих функций $\Delta E^i \to 0$, $\Delta E_x^i \to 0$, $\Delta E_y^i \to 0$, причем предельные функции E^i и E_x^i будут $T(h^*)$-периодическими. В случае принадлежности характеристических показателей мнимой оси функция E_y^i в окрестности точки $(y,\dot{y}) = (0,0)$ будет положительно-определенной. Поэтому из предельного перехода $\Delta E_y^i \to 0$ следует, что $E_y^i \to 0$. Следовательно, орбитально асимптотически устойчивый цикл связанной системы (2.1), (2.2) дается предельными замкнутыми кривыми на плоскостях $(x^i, \dot{x}^i)$, $i = \overline{1,m}$.

Таким образом, получается следующий основной результат. Пусть множество из m консервативных систем, рассматриваемое как одна система, допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений. Тогда задача агрегирования множества в связанную систему, допускающую притягивающий цикл, решается связями-управлениями (2.2) с положительно-определенными квадратичными формами, задаваемыми матрицами $\left\| r_{sj}^{i} \right\|$.

Замечание 1. При действии найденных связующих управлений осуществляется естественная стабилизация цикла связанной механической системы.

Замечание 2. В силу рождения цикла из СПД семейства $\Sigma(h)$ в связанной системе (2.1), (2.2) выполняется синхронизация колебаний консервативных систем по частоте и фазе.

Замечание 3. В частном случае консервативных систем с одной степенью свободы результат излагался в [3, 4].

Пример. Связанные уравнения Дюффинга. Нелинейные колебания точки упругого тела описываются уравнением Дюффинга. В дискретной модели получается система слабо связанных точек. Поэтому, согласно основному результату, при учете связи между точками упругое тело колеблется как одно целое в режиме притягивающего цикла.

Заключение. Множество многомерных консервативных систем, которое как одно целое допускает семейство одночастотных колебаний, агрегируется в связанную систему с притягивающим циклом. Используются универсальные связи-управления, пригодные для отдельной системы и множества систем, систем с одной и многими степенями свободы, консервативных и обратимых механических систем. При этом цикл связанной системы получается близким к колебанию множества несвязанных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. М.; Ижевск: URSS, 2012. 268 с.
2. *Тхай В. Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38—46.
3. *Barabanov I. N., Tkhai V. N.* Oscillations and Stability in the Coupled Mechanical System // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1959. P. 0120031.
4. *Barabanov I. N., Tkhai V. N.* Aggregation of Identical Mechanical Systems withOscillations // IOPConf.Ser.:Mater.Sci. Eng.2021. V. 1164. P. 012078.
5. *Барабанов И. Н., Тхай В. Н.* Стабилизация цикла в связанной механической системе // АиТ. 2022. № 1. С.67—76.
6. *Барабанов И. Н., Тхай В. Н.* Стабилизация колебаний связанных консервативных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 22—28.
7. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* Поперечные колебания стрежня, вызванные кратковременным продольным ударом // Докл. РАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37—41.
8. *Kovaleva A., Manevitch L. I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320. P. 1—8.
9. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794—803.
10. *Yakushevich L. V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879—886.
11. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270. P. 20—29.
12. *Тхай В. Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83—92.
13. *Тхай В. Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93—104.
14. *Тхай В. Н.* Режим цикла в связанной консервативной системе // АиТ. 2022. № 2. С. 90—106.