ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 6, с. 124–136

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.6

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ СПЕЦИФИКА КОНКУРЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА

© 2023 г. В. С. Каплан[a], Н. М. Новикова[b,*], И. И. Поспелова[a,**]

[a]Факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[b]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: novikova@gse.cs.msu.ru

**e-mail: ipospelova05@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
После доработки 04.07.2023 г.
Принята к публикации 31.07.2023 г.

Рассматривается проблематика выработки и оптимизации правил аукциона спектра. Проведено сравнительное теоретическое исследование двух вариантов ценообразования: 1-й и 2-й цены для закрытого одностороннего аукциона спектра. Построена игровая модель аукциона, учитывающая возможность появления участников-фрирайдеров, бесплатно использующих частоты, купленные другим таким участником. Найдены в аналитическом виде все равновесия Нэша для возникающих игр. Показано существенное отличие игр между потенциальными фрирайдерами от игр, содержащих хотя бы одного обычного игрока. Доказано, что при исключении игроками доминируемых стратегий складывающаяся на аукционе цена лота определяется его ценностью для обычных участников, а в случае когда в игре все участники готовы стать фрирайдерами, цена покупки равна минимальной цене участия. Обсуждается влияние информированности участников о величинах ценности лота у партнеров на исход игры. Полученные теоретические свойства согласуются с результатами экспериментов для аукционов спектра, описанными в научной литературе.

Ключевые слова: игра с фрирайдерами, аукцион спектра, правило Викри, правило первой цены, равновесие Нэша, доминирование стратегий, эффективность по Парето, выявление предпочтений

DOI: 10.31857/S0002338823060057, **EDN:** GQEKGT

Введение. Построение управляющих систем представляет собой важную и сложную проблему не только, когда речь идет о технических системах, но и в не меньшей (если не в большей) степени, когда речь идет об управлении в системах, включающих лиц, самостоятельно принимающих решения, в совокупности определяющие функционирование системы как единого целого или, к примеру, общий доход. Такие задачи управления охватывают в том числе и разработку механизмов конкурентного отбора, в частности, правил проведения аукционов в самых разных сферах [1–4]. Оптимальных правил, вообще говоря, не существует, но всегда актуально исследование принимаемых правил на наличие тех или иных хороших свойств, к которым, к примеру, относится существование равновесия. Другим понятием, полезным при выработке коллективных решений, является их эффективность – оптимальность по Парето. Об эффективности трудно говорить в реальных условиях, когда интересы участника известны только ему самому (и то неполностью). Поэтому первоочередным свойством механизма управления коллективом участников, преследующих собственные цели, должно быть выявление предпочтений, предполагающее, что механизм стимулирует их к искреннему (честному) поведению, согласно своим интересам, например, к подаче на аукцион заявок с ценой, равной истинной ценности товара для участника. Далее покажем, что это значит для конкретной практической проблемы.

В последнее время в научной литературе появляется все больше и больше работ, посвященных аукционам, в которых некоторая уполномоченная организация (продавец) распределяет между заинтересованными лицами (покупателями) выделенные частотные диапазоны спектра электромагнитного излучения для передачи информации на этих частотах [4–9]. Подобные аукционы, как правило, радиочастот называются аукционами спектра (spectrum auctions) и проводятся регулярно – на очередной период времени. Однако далеко не во всех работах учитывается разделение покупателей на две группы: использующих приобретенное право на передачу как исключительное (лицензионное) только для себя (тип l) и допускающих к купленным ими частотам всех желающих (тип u). Тип участника аукциона спектра покупатель выбирает для себя сам в зависимости от своих дальнейших целей, и его выбор не обязательно одинаков для разных диапазонов частот [10–12]. Наличие среди покупателей более одного u-участника меняет их поведение на аукционе спектра, поскольку стать фрирайдером может оказаться выгоднее, чем приобрести лот на аукционе (в случае если его выиграет другой u-участник). В результате аукцион демонстрирует снижение цен.

Для предсказания итогов аукциона и (или) объяснения его свойств используется математический аппарат исследования операций и теории игр [13–15]. Целью нашей статьи является применение его к односторонним аукционам спектра, которые будем моделировать игрой покупателей. С теоретико-игровой точки зрения интерес представляет изучение игры с фрирайдерами в бескоалиционной постановке, соответствующей закрытому аукциону (когда игроки не знают ставок друг друга). Следуя [11], для аукциона спектра сравним два вида правил: 1-й и 2-й цены [3, 15, 16], что дает две игровые модели. Общие сведения по теоретико-игровому подходу приводятся в разд. 1, где также подробно разбирается решение игр для закрытого аукциона спектра без фрирайдеров, т.е. среди покупателей не более одного u-участника. Основные результаты получены в разд. 2 для игровых моделей аукциона со всеми u-игроками и в разд. 3, где изучены всевозможные варианты игр с одним l-игроком и остальными (двумя и более) u-игроками. В разд. 4 обсуждаем обобщения на случай нескольких l-игроков и u-игроков. В Заключении подводим итоги и формулируем направления дальнейших исследований.

Рассмотрение проводится для аукциона, на котором лоты (диапазоны частот) разыгрываются независимо, т.е. продажа одного не влияет на продажу другого тому же покупателю. Для покупателей делаем упрощающее предположение, что покупка одного лота не препятствует покупке другого, размещаемого в ту же сессию, т.е. что можно пренебречь бюджетными ограничениями на покупку нескольких частотных диапазонов сразу. Мало того, как отмечено в [11], относительно одного диапазона участник может иметь тип l, а по отношению к другому быть u-игроком. Вследствие чего будем формально считать, что за каждый лот проходят отдельные торги. Это не только упрощает теоретический анализ аукциона [17], но и позволяет понять влияние фрирайдеров на стабилизацию его проведения безотносительно к проблемам комбинированного аукциона (с множеством лотов и победителей). Так что в данной статье ограничимся решением игр, соответствующих закрытому аукциону спектра, в котором разыгрывается один лот, уделяя главное внимание моделированию фрирайдерства и теоретико-игровому анализу специфики его проявления для двух основных вариантов ценообразования на подобных аукционах. Отметим, что третий из общепринятых вариантов – аукцион Викри–Кларка–Гровса [18] в случае одного лота эквивалентен аукциону 2-й цены.

Что касается одновременной торговли многими лотами (частотными диапазонами), как это принято Федеральной комиссией по коммуникациям и связи США (FCC), то еще в [19, 20] была продемонстрирована тенденция к сговору покупателей в этом случае, даже для аукциона закрытого типа. Историю и развитие аукционных правил FCC см. также в [21] и в ряде других статей из [5]. Они дают наглядное представление о важности задачи построения управляющих механизмов в условиях рыночного распределения частотного спектра.

1. Теоретико-игровое моделирование закрытого аукциона размещения в классической постановке – без фрирайдеров. Предположим, что неделимый товар, или *лот* (в нашем случае – частотный диапазон) продается на закрытом аукционе покупателю, заявившему готовность заплатить за него максимальную по сравнению с остальными покупателями цену (цена в заявке называется *бид*). Обозначим через x_i бид i-го участника (далее также – игрока i), $i = \overline{1,n}$. Пусть при равенстве максимальных бидов лот достается покупателю с наименьшим номером. Таким образом, в аукционе побеждает игрок

$$i(x) \overset{\text{def}}{=} \min\left\{i^0 \mid i^0 \in \operatorname{Arg}\max_{i=\overline{1,n}} x_i\right\}, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n)$ – вектор бидов конкурирующих за данный лот покупателей, называемый также *исходом* игры. Введем ограничение на биды $x_i \geq b_0$, предполагая, что меньшие значения торговая площадка не допускает к участию в аукционе, $b_0 > 0$. Получим $X_i = \{x_i \geq b_0\}$ – множество стратегий каждого игрока i. В качестве решения игры будем рассматривать понятие равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре [22], поскольку оно задает наиболее широкое множество исходов, которые потенциально могут быть реализованы в отсутствие сговора (без побочных платежей). Действительно, для неравновесного исхода всегда найдется игрок, которому выгодно изменить свой бид в условиях закрытого аукциона.

О п р е д е л е н и е 1. Исход x^0 называется *равновесным* в игре с функциями выигрыша φ_i, если

$$\forall i = \overline{1,n} \quad x_i^0 \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i, x_{-i}^0).$$

Здесь и далее вектор x с индексом $-i$ обозначает набор стратегий (бидов) всех остальных игроков, кроме i-го, а с индексом $-N$ – набор компонент вектора x с индексами не из N $\forall N \subset \{1,2,\ldots,n\}$. Указание на функцию выигрыша будем опускать, если это не приводит к недопониманию.

Допустим, что ценность лота для игрока i равна V_i и $V_1 > V_2 > \ldots > V_n > b_0$ (нестрогие неравенства несколько усложняют, но принципиально не меняют рассуждения). Считаем, что игроки не знают V_i друг друга, но либо им, либо торговой площадке (продавцу) известен порядок их номеров для определения (1.1). (От условия монотонности V_i тоже можно отказаться, но мы его сохраняем для упрощения изложения.) Правила аукциона задают цену $p(x)$, которую заплатит игрок $i(x)$, купивший лот, согласно (1.1), $p(x) \le x_{i(x)}$. В игре без фрирайдеров (когда среди покупателей не более одного u-игрока) функции выигрыша определяются по формуле

$$\varphi_{i(x)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \varphi_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \forall i \ne i(x), \tag{1.2}$$

отличающейся в зависимости от варианта аукциона только для игрока-победителя.

В аукционе 1-й цены $p_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_{i(x)}$, т.е. игрок $i(x)$ платит свой (победивший) бид. Следуя [15] (упр. 2, гл. III), нетрудно доказать, что все равновесные исходы x^0 в соответствующей игре представимы в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_j^0 \le x_1^0$ $\forall j$ и $\exists i > 1$: $x_i^0 = x_1^0$. Они приносят победу игроку 1, и его выигрыш $\varphi_1(x^0)$ может оказаться любым числом от 0 до $V_1 - V_2$ в зависимости от выбора x_{-1}^0 конкурентами. Учтем, что рациональным игрокам нет смысла подавать заявки $x_i > V_i$, поскольку покупка лота в таком случае принесет им убытки. Тогда если знать V_2 и порядок номеров, то игроку 1 можно выбрать $x_1 = V_2$ и рассчитывать на максимальный выигрыш в равновесии для этой игры. В противном случае, снижая x_1 по сравнению с V_1, он рискует проиграть лот. Так что в аукционе 1-й цены при общих предположениях неинформированности трудно выйти на конкретное равновесное решение без сговора. Парето-оптимальным, т.е. эффективным (не улучшаемым одновременно для всех покупателей [13, 14]) исходом, в данной игре является $b^0 \stackrel{\text{def}}{=} (b_0,\ldots,b_0)$, однако в закрытом аукционе каждому выгодно от него отклониться, выбрав x_i чуть побольше, чтобы выиграть лот, значит, исход b^0 не относится к равновесным.

В аукционе 2-й цены (аукционе Викри) победитель платит цену, равную заявке игрока, следующего за ним по величине бида, а при равенстве бидов – свою цену в заявке:

$$p_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_{j(x)}, \quad j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{ j \ne i(x) \mid j \in \operatorname{Arg}\max_{j \ne i(x)} x_j \right\} \tag{1.3}$$

и $\varphi_{i(x)} = V_{i(x)} - x_{j(x)} \ge 0$. В (1.3) и далее для удобства изложения обозначение $j(x)$ применяется к ценообразующему для $i(x)$ игроку с минимальным номером.

На основе того же упр. 2 из гл. III [15] заключаем, что для игры (1.1)–(1.3) множество равновесий по Нэшу, в отличие от аукциона 1-й цены, содержит эффективные исходы x^*:

$$x^*(1) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^*, b_0,\ldots,b_0) \quad \forall x_1^* \ge V_2, \quad x^*(i) \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^* \ge V_1,\ x_{-i}^* = b_{-i}^0) \quad \forall i > 1, \tag{1.4}$$

при которых любой участник i может выиграть лот, заплатив за него минимальную цену b_0, так как $x^*_{j(x^*)} = b_0$ для любого исхода x^* из (1.4). Другие (непаретовские) равновесные исходы строятся аналогично и могут приводить к покупке лота любым i-м участником по любой превышающей b_0 цене $p \le V_i$. Указанная группа исходов соответственно каждому i состоит из x^0 с $x_i^0 \ge V_1$ и $x^0_{j(x^0)} = p \in (b_0, V_i]$ или (при $i = 1$) с $x_1^0 \ge V_2$ и $x^0_{j(x^0)} = p \in (b_0, \min(V_1, x_1^0))]$. Для таких x^0 выполнено $i = i(x^0)$ по (1.1), $x_j^0 \le p$ $\forall j \ne i$ и $p_2(x^0) = p$ из (1.3), а $\varphi_i(x^0) = V_i - p \ge 0$ из (1.2) ($i = \overline{1,n}$).

Из приведенного описания множества равновесных исходов трудно понять, что будет реализовано (и оценить выигрыш продавца), но здесь помогает еще одно хорошее свойство аукциона Викри в игре без фрирайдерства. Это — наличие равновесия в доминирующих стратегиях и существование самих доминирующих стратегий в игре [15].

Определение 2. Стратегия $x_i \geq b_0$ игрока i *доминирует* его стратегию $x_i^- \geq b_0$ в игре с функциями выигрыша φ_i, если $\forall j \neq i$, $\forall x_j \geq b_0$ $\varphi_i(x) \geq \varphi_i(x_i^-, x_{-i})$ и $\exists x_{-i}^-$ с компонентами $x_j^- \geq b_0$: $\varphi_i(x_i, x_{-i}^-) > \varphi_i(x^-)$. При этом стратегия x_i^- называется *доминируемой*. Стратегия $x_i^+ \geq b_0$ игрока i называется *доминирующей* в игре с функциями выигрыша φ_i, если $\forall x_i \geq b_0, \forall j \neq i$, $\forall x_j \geq b_0$ $\varphi_i(x_i^+, x_{-i}) \geq \varphi_i(x)$.

Аукцион Викри для рассматриваемого случая считается *выявляющим предпочтения*, потому что именно искренние стратегии игроков $x_i = V_i$ оказываются доминирующими в игре для аукциона (1.1)–(1.3), т.е. $x_i^+ = V_i$, и такой вектор $x^+ = (V_1, \ldots, V_n)$ входит для аукциона 2-й цены в состав равновесных исходов, что обеспечивает стабильность поведения покупателей на рассматриваемом аукционе без фрирайдеров. Однако это равновесие в доминирующих стратегиях, хотя и устойчиво, и обосновано на уровне индивидуального поведения (выбора стратегий), но не будет оптимальным по Парето. Действительно, игрок-победитель $i(x^+) = 1$ заплатит $p_2(x^+) = V_2 > b_0$ и получит выигрыш $\varphi_1(x^+) = V_1 - V_2 < V_1 - b_0 = \varphi_1\left(x^*(1)\right)$, а остальные игроки, проигрывающие лот, не изменят своих результатов по сравнению с исходами $x^*(1)$, указанными в (1.4). Значит, любой равновесный исход $x^*(1)$ доминирует по Парето равновесие x^+. Тем не менее, возможность практической реализации $x^*(1)$ тоже не очевидна в отсутствие побочных платежей.

Для гарантий x^+ торговой площадке (продавцу лота) правильно не только не раскрывать информацию о V_i, но и скрыть порядок номеров игроков. Тогда если игроки не знают, кто из них имеет 1-й номер, т.е. для кого из покупателей истинная ценность V_i данного лота на самом деле больше, то в попытке реализовать каждым свой эффективный исход $x^*(i)$ они выберут на основе (1.4) $x_i^* = V_i$, надеясь, что именно у него V_1, и в итоге придут к x^+. Чтобы номер игрока, выигрывающего лот в случае нескольких максимальных бидов, был участникам заранее не известен и при этом они могли проверить отсутствие манипулирования со стороны продавца, достаточно договориться бросать жребий после возникновения равенства. Какой бы игрок ни выигрывал лот при равенстве бидов по установленным правилам, исход x^+ приносит победу игроку с максимальной ценностью лота для него. (Согласно сделанным выше предположениям, считаем, что такой игрок — игрок 1.)

В данных условиях исследуем, как меняется ситуация при наличии фрирайдерства. Фактически, фрирайдерство возникает в аукционе спектра с двумя и более u-участниками, каждый из которых готов воспользоваться лотом за счет другого такого же. Это приводит для соответствующих игроков к изменению функции выигрыша по сравнению с (1.2). Рассмотрим такие игры формально для различных возможных случаев.

2. Результаты теоретико-игрового моделирования закрытого аукциона спектра среди потенциальных фрирайдеров. Пусть все покупатели — участники аукциона спектра — имеют тип u, т.е. готовы стать фрирайдерами. Их функции выигрыша по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока-победителя, который все также определяется по формуле (1.1) и для которого выигрыш совпадает с заданным формулой (1.2), но в части остальных покупателей их выигрыши меняются, начиная превышать результат от победы на аукционе. Поэтому изменим на ψ обозначение функции выигрыша, чтобы учесть фрирайдеров (не победивших на аукционе u-игроков), и придем к формуле

$$\psi_{i(x)}(x) = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \psi_i(x) = V_i \quad \forall i \neq i(x), \tag{2.1}$$

где $p(x)$ равно $p_1(x)$ или $p_2(x)$, согласно разд. 1, для аукциона 1-й или 2-й цены соответственно.

Утверждение 1. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами множество равновесий Нэша состоит из единственного исхода $b^0 = (b_0, \ldots, b_0)$. Указанный исход также является равновесием в доминирующих стратегиях и оптимален по Парето.

Доказательство. Равновесность и эффективность b^0 очевидна. Компоненты b_0 этого вектора являются доминирующими стратегиями игроков, поскольку выиграть лот с большей платой хуже, а предложить меньшую цену нельзя по условию. Покажем, что других равновесных исходов нет (хотя при случайном выборе победителя равновесные векторы выигрышей покупателей будут существенно различаться). Действительно, пусть x – равновесие. Тогда если у игрока $i(x)$, победившего на аукционе, выбор $x_{i(x)} > b_0$, то, уменьшив бид, он обязательно увеличит свой выигрыш, что противоречит равновесности x. Отсюда максимальный бид в равновесии совпадает с b_0. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами множество равновесий Нэша состоит из исходов $x^0 = (x_1^0, b_0, \ldots, b_0)$ $\forall x_1^0 \geq b_0$. Указанные исходы также оптимальны по Парето. При этом равновесием в доминирующих стратегиях из них является лишь b^0.

Доказательство. В обозначениях (1.4) $x^0 = x^*(1)$, но без дополнительных ограничений на x_1^*. Равновесность и эффективность таких x^0 очевидна из того, что все они приводят к вектору выигрышей $(V_1 - b_0, V_{-1})$, которые максимальны для игроков $i > 1$, а игрок 1, выигрывающий лот, не может заплатить меньше b_0. Стратегия $x_1^0 > b_0$ игрока 1 доминируется бидом b_0 (при x_{-1}^- с $b_0 < x_j^- \leq x_1^0$ для некоторого игрока $j > 1$). Биды b_0 являются доминирующими стратегиями и остальных игроков. Понятно, что других равновесных исходов нет, поскольку при выборе $x_{j(x)} > b_0$ игроком $j(x)$, имеющим 2-ю цену в заявке, игроку 1 выгодно снизить свой бид, чтобы отдать ему лавры победителя. Если же игрок 1 и так применил стратегию b_0, то игроку, заявившему больше, будет выгодно снизить свой бид до b_0, чтобы не платить на аукционе в качестве победителя. Утверждение 2 доказано.

Из доказательств утверждений 1 и 2 можно заметить, что в отличие от аукциона без фрирайдеров лот выигрывает покупатель, который побеждает при равенстве бидов, а не обязательно тот, у кого самая высокая оценка лота. Поэтому здесь жеребьевка при равенстве еще более оправдана. Ценности лота вообще нигде не высвечиваются и не видны в заявках, т.е. для данного случая аукционы не будут выявляющими предпочтения. Из самих утверждений 1 и 2 следует, что в игре с потенциальными фрирайдерами продавец не получит более установленной минимальной цены b_0, какие бы правила аукциона им ни вводились. Иная картина возникает при наличии хотя бы одного l-игрока, так как u-игроки теряют свой выигрыш, когда он выигрывает лот. А тогда ставка b_0 перестает быть для них доминирующей стратегией. При этом их поведение и результат зависят от номера l-игрока, точнее, от его места в цепочке V_i. В следующем разделе рассмотрим возможные варианты.

3. Теоретико-игровое моделирование закрытого аукциона спектра, в котором кроме потенциальных фрирайдеров участвует l-игрок. Разберем три ситуации: l-игрок имеет максимальную ценность лота среди всех покупателей, l-игрок имеет минимальную ценность лота и ценность лота оказывается у него промежуточной (максимальное и минимальное значения V_i у u-игроков).

3.1. Максимальная ценность лота у l-игрока. Пусть игрок 1 соответствует покупателю типа l, а все остальные покупатели – участники аукциона спектра – имеют тип u, т.е. готовы стать фрирайдерами. Функции выигрыша игроков по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ (1.1) и для него не меняются, но для остальных игроков $i > 1$ появление l-игрока влияет на их выигрыш. Поэтому введем новое обозначение χ_i для функции выигрыша в этом пункте. Для игрока 1 имеем $\chi_1 = \varphi_1$, а для u-игроков $i > 1$ в отличие от (1.2) и (2.1) будет

$$\chi_{i(x)}(x) = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x)\ \chi_i(x) = \begin{cases} V_i, & \text{если} \quad i(x) \neq 1, \\ 0, & \text{если} \quad i(x) = 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно (см. разд. 1). По условиям разд. 1 $V_1 > V_i$ $\forall i > 1$, так что доказательство следующего утверждения 3 повторяет рассуждения разд. 1 для аукциона 1-й цены.

Утверждение 3. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком 1 в равновесии выигрывает l-игрок, и множество равновесий Нэша состоит из x^0, представимых в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_j^0 \leq x_1^0$ $\forall j$ и $\exists i > 1$: $x_i^0 = x_1^0$.

З а м е ч а н и е 1. Сложным равновесием, т.е. полученным после исключения игроками своих доминируемых стратегий [15], в данной игре будут исходы от $(V_2, V_2, b_0, \ldots, b_0)$ и до $(V_2, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, дающие все один и тот же вектор выигрышей $(V_1 - V_2, 0, \ldots, 0)$.

З а м е ч а н и е 2. Если в рассматриваемом аукционе действует иное, чем (1.1), правило выбора $i(x)$ при равенстве бидов, например случайный выбор, то левую границу отрезка для x_1^0 в утверждении 3 следует исключить из условий на равновесие.

Для аукциона Викри (1.1), (1.3), (3.1), как и в разд. 1, равновесные исходы могут приводить к покупке лота любым i-м участником по любой цене $p \in [b_0, V_i]$. Однако группа равновесных исходов x^0 несколько сужается (см. ниже утверждение 4). Тем не менее, в ней по-прежнему содержится исход в искренних стратегиях $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$, приносящий лот игроку 1 по цене V_2, хотя такие стратегии уже не являются доминирующими для u-игроков. Далее будем при анализе аукциона 2-й цены, как правило, использовать однотипное обозначение $x^0(i)$ для (различных!) равновесных исходов x^0, которые приводят к покупке лота игроком i, т.е. (и это будем обеспечивать по построению) $i(x^0(i)) = i$, согласно (1.1).

У т в е р ж д е н и е 4. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком 1 в равновесии выигрывает лот либо l-игрок 1 на равновесных исходах $x^0(1)$ с компонентами $x_1^0(1) \geq V_2$ и $x^0_{j(x^0(1))}(1) = p \in [b_0, \min\{x_1^0(1), V_1\}]$, либо любой u-игрок $i > 1$ на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \geq V_1$, $j(x^0(i)) = 1$ и $x_1^0(i) = p \in [b_0, V_i]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подтвердим сначала, что $x^0(1)$ – равновесие. По определению этого исхода выигрывает лот l-игрок 1, а все остальные (u-игроки) получают нулевой выигрыш. Но никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше (т.е. больше, чем V_2) и выиграв лот. Игроку 1 тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш. Теперь покажем, что $x^0(i)$ – равновесие. Для игрока $j \neq i$ увеличение бида сверх $x_i^0(i) \geq V_1$ не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот эту цену как вторую. Игрок i тоже не может снизить бид до p, чтобы передать лот другому u-игроку, так как $j(x^0(i)) = 1$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером – у l-игрока. В итоге исходы, указанные в утверждении 4, – равновесные, $x_j^0(i) \leq p\ \forall j \neq i,\ i = i(x^0(i)),\ p_2(x^0(i)) = p$, $\chi_i(x^0(i)) = V_i - p \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Убедимся, что других равновесий нет.

Предположим, что x – равновесный исход с $p(x) = p$. Сначала пусть $i(x) = 1$. Тогда $x_1 \geq p$, и если $p > V_1$, то игрок 1 увеличит значение $\chi_1(x)$, не купив лот (выбрав бид меньше p), значит $p \leq V_1$. Если $x_1 < V_2$, то игрок 2, выбрав бид между x_1 и V_2, получит положительный выигрыш от покупки лота – противоречие с равновесностью x. В результате пришли к условиям для $x^0(1)$. Пусть теперь $i(x) = i$, тогда аналогично предыдущему случаю $p \leq V_i$ и (чтобы игрок 1 не мог перебить его ставку с выгодой для себя) $x_i \geq V_1$. Кроме того, поскольку игрок i имеет тип u, то при $p > b_0$ он увеличит свой выигрыш, выбрав бид ниже p и передав лот другому u-игроку, если игрок $j(x)$, определенный в (1.3), имеет тип u. Остается только возможность равенства $j(x) = 1$, которое для $p = b_0$ выполняется автоматически. Опять пришли к условиям для $x^0(i)$, что завершает доказательство утверждения 4.

3.2. М и н и м а л ь н а я ц е н н о с т ь л о т а у l - и г р о к а. Рассмотрим противоположный случай, когда игрок n имеет тип l, а все остальные покупатели – участники аукциона спектра – имеют тип u, т.е. являются потенциальными фрирайдерами. Отличие от п. 3.1 состоит в том, что ценность лота для l-игрока $V_n < V_i\ \forall i < n$, т.е. минимальна. Значит, по предположению разд. 1 он выигрывает лот в последнюю очередь, что заметно меняет ситуацию. Сохранив формулу (1.1), переобозначим функции выигрыша игроков на ξ_i для такого случая. Тогда для l-игрока n имеем $\xi_n = \varphi_n$, а для u-игроков $i < n$

$$\xi_{i(x)} = V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x)\ \xi_i(x) = \begin{cases} V_i, & \text{если} \quad i(x) \neq n, \\ 0, & \text{если} \quad i(x) = n, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно (см. разд. 1).

Утверждение 5. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком n в равновесии покупает лот u-игрок, и множество равновесий Нэша состоит из исходов x^0, для которых $x_n^0 = b \in [V_n, V_1]$, $\exists i < n$ $(i = i(x^0))$: $x_i^0 = b \le V_i$, а у остальных u-игроков $j < n$ $(j \ne i)$ их $x_j^0 < b$.

Доказательство. Данные x^0 – равновесные исходы: l-игрок n не может увеличить свой 0-й выигрыш (с бидом сверх V_1 он окажется в минусе, а с меньшей ставкой он лот не выиграет из-за бида игрока $i(x^0)$), в свою очередь u-игрок $i(x^0)$, уменьшив свой бид, получит 0, так как лот выиграет l-игрок n, остальные u-игроки имеют в x^0 свой максимум. Других равновесий нет. Действительно, если лот выиграет l-игрок n со ставкой больше V_n, ему выгодно ее снизить даже ценой потери лота, а при ставке x_n меньше V_1 u-игроку 1 выгодно, увеличив свой бид до цены в его заявке, выиграть лот. Поэтому l-игрок n не может победить в равновесии. Если же лот выигрывает u-игрок, то, значит, его бид не меньше цены в заявке l-игрока n и в случае "строго больше" ему выгодно спустить свой бид до этой цены. Из равенства бидов игрока n и игрока $i(x)$ в равновесии бид игрока n не может оказаться строго меньше V_n, поскольку игроку n стало бы выгодным поднять бид под V_n (не достигая этой величины), чтобы перехватить лот с положительным выигрышем. Получаем для n-й компоненты равновесных исходов условия, сформулированные в утверждении 5. Условия на биды игроков $j < n$, $j \ne i$ необходимы для того, чтобы у выигравшего лот u-игрока i не было повода отклониться от равновесия, передавая лот другому такому же. Утверждение 5 доказано.

Замечание 3. Если l-игрок n исключит свои доминируемые стратегии, то останутся лишь равновесия с $b = V_n$. Это приносит продавцу больше, чем для аукциона 1-й цены в разд. 2, но меньше, чем в п. 3.1 и разд. 1. Для аукциона Викри (см. следующее утверждение 6) вариантов выигрыша игроков в равновесии существенно больше, но при $n > 2$ среди равновесных исходов нет вектора искренних стратегий игроков, поскольку при искренней стратегии игрока 2 игроку 1 выгодней выбрать бид, равный V_n, а не V_1.

Утверждение 6. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком n в равновесии покупает лот по цене p либо l-игрок n на равновесных исходах $x^0(n)$ с $x_n^0(n) \ge V_1$ и $x^0_{j(x^0(n))}(n) = p \in [b_0, V_n]$, либо любой u-игрок $i < n$ на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \ge V_n$ и $j(x^0(i)) = n$ при $x_n^0(i) = p \in (b_0, V_i]$ и еще игрок 1 при $p = b_0$ на $x^0(1) = x^*(1)$ из (1.4), но с $x_1^* \ge V_n$.

Доказательство. Как и в доказательстве утверждения 4, $x^0(n)$ – равновесие, в котором выигрывает лот l-игрок n, а все остальные (u-игроки) получают нулевой выигрыш, и никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше или ниже. Игроку n тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш $V_n - p \ge 0$. И аналогично $x^0(i)$ – равновесие, так как:

1) для l-игрока n увеличение бида сверх $x_i^0(i) \ge V_n$ с целью победы в аукционе не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот именно эту цену как вторую;

2) u-игрок $i > 1$ $(i \ne n)$ тоже не может снизить бид до p, чтобы передать лот другому u-игроку, так как $j(x^0(i)) = n$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером – у l-игрока;

3) u-игрок $i = 1$ не может снизить бид до p, чтобы передать лот другому u-игроку, из-за того, что при $p > b_0$ по построению требуется $j(x^0(i)) = n$, т.е. второй по величине бид с минимальным номером – у l-игрока, а при $p = b_0$ лот останется у него самого – у игрока 1;

4) u-игроки $j \ne i$ – фрирайдеры, и больше этого им не выиграть.

В результате исходы, указанные в утверждении 6, являются равновесными, и притом $x_j^0(i) < x_n^0(i)$ $\forall j \ne i$, $j < n$, $x_n^0(i) = p$ для $i \ne n$, $i = i(x^0(i))$, $p_2(x^0(i)) = p$, $\xi_i(x^0(i)) = V_i - p \ge 0$ $(i = \overline{1,n})$. Доказательство того, что других равновесий нет, отличается от доказательства утверждения 4 лишь дополнительной необходимостью обосновать отсутствие в равновесии исходов $(x_i^0(i) \ge V_n, b_{-i}^0)$ для $1 < i < n$. Но подобный исход не будет равновесием в условиях утверждения 6, поскольку u-игроку i выгодней спустить свой бид до минимального и стать фрирайдером, отдав лот игроку 1, у которого тоже тип u. Утверждение 6 доказано.

3.3. Ценность лота у l-игрока — промежуточная. Исследуем общий для данного раздела случай. Пусть тип l у игрока l, а все остальные покупатели — участники аукциона спектра — имеют тип u, т.е. стремятся оказаться фрирайдерами. Победитель аукциона $i(x)$ определяется для исхода x по формуле (1.1). Функции выигрыша игроков будем обозначать через f_i, они по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ и для него не меняются. Для $i = l$ зададим $f_l \overset{\text{def}}{=} \varphi_l$, где φ_i удовлетворяет (1.2), а для u-игроков i $(i \neq l)$ воспользуемся формулой (3.3), обобщающей (3.1) и (3.2):

$$f_{i(x)}(x) \overset{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \neq i(x)\ f_i(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} V_i, & \text{если} \quad i(x) \neq l, \\ 0, & \text{если} \quad i(x) = l, \end{cases} \tag{3.3}$$

с $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно. По условиям разд. 1 $V_1 > V_l > V_i\ \forall i > l$.

Утверждение 7. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком $l > 1$ в равновесии покупает лот u-игрок, и множество равновесий Нэша состоит из таких x^0, для которых $x_l^0 = b \in [V_l, V_1]$ и $\exists i = i(x^0) < l$: $x_i^0 = b \leq V_i$, $x_j^0 < b\ \forall j < l,\ j \neq i$, $x_k^0 \leq b\ \forall k > l$.

Доказательство. Данные x^0 — равновесия, поскольку: l-игрок l не может увеличить свой 0-й выигрыш (выиграв лот с увеличением ставки, он окажется в минусе, а с уменьшением бида не выиграет аукциона), и u-игрок $i(x^0)$, уменьшив свой бид, получит 0, так как лот выиграет l-игрок l. Других равновесий нет. Действительно, если бы в равновесии лот выигрывал l-игрок l, то при цене в заявке больше V_l ему было бы выгодно ее снизить даже ценой потери лота, а при ставке меньше V_1 u-игроку 1 выгодно, увеличив свой бид до цены в его заявке, выиграть лот. Значит, любой l-игрок с номером $l \neq 1$ не может победить в равновесии для рассматриваемого аукциона. Тогда лот выигрывает u-игрок i с бидом b, не меньшим цены в заявке l-игрока l, и в случае "строго больше" ему выгодно спустить свой бид до этой цены, т.е. в равновесии их биды равны. Притом $b \leq V_i$ (иначе игрок i получил бы отрицательный выигрыш, что противоречит равновесию). В ситуации $b < V_l$ появляется возможность у игрока l поднять цену и выиграть лот, так что в равновесии его ставка не меньше V_l и $b \geq V_l$. Совмещая $V_l \leq b \leq V_i$, выводим $i < l$ в равновесии. Для остальных u-игроков j с $j < l$ $(j \neq i)$ их биды в рассматриваемом равновесии должны быть строго меньше b, а для игроков с номерами $k > l$ их ставки могут быть нестрого меньше b. Это нужно, чтобы игроку i было невыгодно отклоняться вниз от b (чтобы лот при его отклонении вниз переходил к игроку l). Утверждение 7 доказано.

Замечание 4. Если l-игрок l исключит свои доминируемые стратегии, то останутся лишь равновесия с $b = V_l$. Это приносит продавцу больше, чем для аукциона 1-й цены в разд. 2 и в п. 3.2, но меньше, чем в п. 3.1 и разд. 1.

Таким образом, для аукциона 1-й цены можно сделать вывод, что в ситуации, когда лот представляет максимальную ценность именно для игрока, имеющего тип l, наличие фрирайдеров не меняет выигрыша продавца и лот получает l-игрок 1. В остальных случаях выигрывают аукцион u-игроки, но продавец получает тем больше, чем выше ценность лота у l-игрока. Для аукциона Викри такой однозначной зависимости нет (см. утверждение 8): среди равновесных всегда имеется исход, приводящий к продаже лота по минимальной цене b_0, и исход, обеспечивающий покупку лота l-игроком. Последний фактор тоже стоит учитывать при выборе между аукционом 1-й и 2-й цены.

Утверждение 8. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроком $l > 1$ в равновесии выигрывает лот либо l-игрок l на равновесных исходах $x^0(l)$ с $x_l^0(l) \geq V_1$ и $x^0_{j(x^0(l))}(l) = p \in [b_0, V_l]$, либо любой u-игрок i на равновесных исходах $x^0(i)$ с $x_i^0(i) \geq V_l$ при $j(x^0(i)) = l$ и $x_l^0(i) = p \in (b_0, V_i]$ и еще дополнительно игрок 1 при $p = b_0$ на равновесных и оптимальных по Парето исходах $x^0(1) = x^*(1)$ из (1.4) с $x_1^* \geq V_l$.

Доказательство равновесности построенных исходов совпадает с доказательством утверждения 6 при замене n на l и ξ_i на f_i. И аналогичное обоснование проходит для того, что других равновесий нет. Для всех равновесных исходов из утверждения 8 имеем:

$x_j^0(i) \le p\ \forall j \ne i,\ \ x_j^0(i) < x_l^0(i)\ \ \forall j < l,\ \ j \ne i,\ \ x_l^0(i) = p$ для $i \ne l,\ \ i = i(x^0(i)),\ \ p_2(x^0(i)) = p$, $f_i(x^0(i)) = V_i - p \ge 0\ (i = \overline{1,n})$.

Разница между равновесными исходами аукциона Викри в этом разделе состоит лишь в небольших отличиях цен p, по которым лот может быть продан. Но из всех случаев, кроме п. 3.1 (когда игрок 1 имеет тип l), исход в искренних стратегиях включается в равновесие лишь при $l = 2$, т.е. когда тип l у игрока 2. В обоих вариантах лот достается игроку 1 (в п. 3.1 – l-игроку, а в п. 3.3 с $l = 2$ – u-игроку) и продавец получает цену V_2. Появление хотя бы одного l-игрока улучшает шансы продавца на получение равновесной цены выше минимальной, но не гарантирует от этого – в отличие от аукциона 1-й цены. И так же, как для аукциона 1-й цены, чем больше ценность лота для l-игрока (или для игрока 2, если $l = 1$), тем лучше продавцу. Далее увидим, что при множестве l-игроков заметное влияние на его результат оказывают такой игрок с минимальным номером l^0 и максимальная ценность лота для всей совокупности l-игроков (кроме игрока 1, у которого V_1 заменяется на V_2). Наилучшие возможности у продавца в игре с фрирайдерами будут при $l^0 \le 2$.

4. Результаты теоретико-игрового моделирования закрытого аукциона спектра между потенциальными фрирайдерами и l-игроками. Предположим, что тип l имеется у игроков $l \in L$ (участников с номерами из множества L), а все остальные покупатели – участники аукциона спектра (в количестве более одного) имеют тип u, т.е. рассчитывают стать фрирайдерами. Победитель аукциона $i(x)$ определяется для исхода x по формуле (1.1). Функции выигрыша игроков будем обозначать через F_i, они по-прежнему зависят от варианта аукциона только для игрока $i(x)$ и для него не меняются. Для $i = l \in L$ зададим $F_l \overset{\text{def}}{=} \varphi_l$, где φ_i удовлетворяет (1.2), а для u-игроков $i \notin L$:

$$F_{i(x)}(x) \overset{\text{def}}{=} V_{i(x)} - p(x) \quad \text{и} \quad \forall i \ne i(x) \quad F_i(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} V_i, & \text{если} \quad i(x) \notin L, \\ 0, & \text{если} \quad i(x) \in L, \end{cases} \tag{4.1}$$

при $p(x) = p_1(x)$ или $p_2(x)$ для аукционов 1-й и 2-й цены соответственно.

В аукционе 1-й цены решение игры различается в зависимости от типа игрока 1. Если $1 \in L$, то он и выигрывает лот в равновесии, а множество равновесий, как в утверждении 3, состоит из x^0, представимых в виде (x_1^0, x_{-1}^0) для $x_1^0 \in [V_2, V_1]$ при $x_j^0 \le x_1^0\ \forall j$ и $\exists i > 1$: $x_i^0 = x_1^0$. Действительно, такие исходы равновесные, а других равновесий нет по следующей причине. Для того, чтобы лот выиграл любой другой игрок $i > 1$ без убытка для себя, он должен подать заявку с ценой, не превышающей V_i, но это не даст равновесного исхода, поскольку игроку 1 будет выгодно поднять свой бид, чтобы выиграть самому.

И точно также если игрок 1 – u-игрок, то в равновесии лот получит какой-либо из u-игроков с номером $i(x^0) < l^0 \overset{\text{def}}{=} \min\{l \mid l \in L\}$ на одном из исходов x^0, аналогичных построенным в утверждении 7. А именно введем обозначения $b(x)$ для максимального бида l-игроков из соответствующих компонент исхода x: $b(x) \overset{\text{def}}{=} \max_{l \in L} x_l$, и $l(x)$ – для l-игрока с минимальным номером из имеющих бид $b(x)$, т.е. $l(x) \overset{\text{def}}{=} \min\{l \in L \mid x_l = b(x)\}$.

Утверждение 9. В аукционе 1-й цены между потенциальными фрирайдерами и l-игроками $l \in L$ при $1 \notin L$ выигрывает лот в равновесии один из u-игроков, и множество равновесий Нэша состоит из x^0, для которых $b(x^0) \in \left[V_{l^0}, V_1\right]$ и $\exists i = i(x^0) < l^0$: $x_i^0 = b(x^0) \le V_i$, а для остальных $j \notin L$ выполнено $x_j^0 < b(x^0)\ \ \forall j < l(x^0)\ \ (j \ne i)$ и $x_j^0 \le b(x^0)\ \ \forall j > l(x^0)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что данному условию на $i(x^0)$ при любых указанных бидах $b(x^0)$ удовлетворяет $i = 1$. Следовательно, множество определенных в утверждении 9 исходов x^0 не пусто. Также понятно, что каждый такой исход x^0 – равновесный. Действительно, игроку $i(x^0)$ не выгодно увеличивать свой бид (он и так выигрывает лот), а снижение ставки отдает лот l-игроку $l(x^0)$ (поскольку по построению бид $b(x^0)$ может остаться у u-игроков лишь с номерами $j > l(x^0)$), и это сводит к 0 выигрыш игрока $i(x^0)$. Остальные u-игроки $j \ne i(x^0)$ получают свой абсолютный максимум, т.е. не могут увеличить выигрыш. По условию $x^0_{i(x^0)} = b(x^0) \ge V_{l^0} > V_l$ никакому l-игроку не увеличить выигрыш, выбирая бид, превышающий $x^0_{i(x^0)}$, но иначе не выиграть лот, т.е. тоже не получить больше 0. Покажем, что других равновесий нет.

Пусть существует иное равновесие x. Если при этом игрок $i(x)$ победил на аукционе, то его бид не может быть больше $V_{i(x)}$, так как в противном случае его выигрыш меньше 0 и ему лучше снизить бид даже с потерей лота. Предположив, что $i(x)$ имеет тип l, получим, что цена в его заявке не превосходит $V_{l^0} < V_1$, а значит, игрок 1 может, выбрав бид в интервале (V_{l^0}, V_1), увеличить свой выигрыш (от 0 до положительного числа) — пришли к противоречию с равновесностью x. Как следствие: $i(x)$ имеет тип u.

Если бы бид игрока $i(x)$ был меньше $V_{l(x)}$, то l-игрок $l(x)$ сумел бы его перебить с выгодой для себя. Обратное неравенство для бида игрока $i(x)$ в равновесии предполагает $V_{l(x)} \le V_{i(x)}$, что возможно лишь при $i(x) < l(x)$. Из (1.1) $x_{i(x)} \ge b(x)$, но строгое превышение не дает равновесия, потому что выгодно снизить бид, определяющий плату за лот, хотя бы до $b(x)$. Отсюда получаем, что для равновесия необходимо равенство $x_{i(x)} = b(x)$, из которого вытекает $x_i \le b(x)\ \forall i$. Если бы, кроме $i(x)$, был другой u-игрок $j \not\in L$ с номером $j < l(x)$ и $x_j = b(x)$, то стратегия b_0 была бы лучше для игрока $i(x)$, чем $b(x)$, поэтому $x_j < b(x)\ \ \forall j < l(x)$. Теперь отметим, что при $b(x) < V_{l^0}$ l-игрок l^0 может выбрать бид больше $b(x)$ с выгодой для себя. В итоге $b(x) \ge V_{l^0}$ и, значит, $i(x) < l^0$. Увеличение $b(x)$ сверх V_1 приводит к отрицательному результату игрока $i(x)$, т.е. не дает равновесие. Получили для x все условия, предписанные утверждением 9 для x^0, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 5. Если игроки не будут использовать свои доминируемые стратегии (см. в разд. 1 определение 2), то множество равновесий в условиях утверждения 9 сокращается до x^0, задаваемых $b(x^0) = V_{l^0} = x^0_{l^0}$. Причем выиграть лот (и проиграть фрийдерство) может любой u-игрок i с $i < l^0$, а не только игрок 1, как в случае $L = \emptyset$ по утверждению 1. Все происходит из-за того, что подать заявку с ценой ниже b_0 участник не может, а ниже V_{l^0} может. Такая ситуация подталкивает к сговору u-игроков в аукционе 1-й цены. К сожалению, в игре с фрийдерами от этого не свободен и аукцион Викри.

У т в е р ж д е н и е 10. В аукционе 2-й цены между потенциальными фрийдерами и l-игроками $l \in L$, где $|L| < n-1$, в равновесии по Нэшу может выиграть лот любой игрок i, заплатив за него цену p на следующих исходах.

Равновесные исходы $x^0(l)$ при выигрыше l-игрока $l \in L$ имеют компоненты:

$$x^0_l(l) \ge V_1 \quad \text{и} \quad x^0_{j(x^0(l))}(1) = p \in [b_0, V_l], \quad \text{если} \quad l > 1,$$

$$x^0_1(1) \ge V_2 \quad \text{и} \quad x^0_{j(x^0(1))}(1) = p \in [b_0, \min\{x^0_1(1), V_1\}], \quad \text{если} \quad l = 1.$$

Равновесные исходы $x^0(i)$ при выигрыше u-игрока $i > 1$ $(i \not\in L)$ имеют компоненты:

$$x^0_i(i) \ge V_{l^0}, \quad j(x^0(i)) \in L \quad \text{и} \quad x^0_{j(x^0(i))}(i) = p, \quad \text{где} \quad p \in \begin{cases} [b_0, V_i], & \text{если} \quad 1 \in L, \\ (b_0, V_i], & \text{если} \quad 1 \not\in L, \end{cases}$$

а при выигрыше u-игрока $i = 1$ имеют вид

$$\left[\begin{array}{l} x^0(1) = x^*(1) \text{ из (1.4) с } x^*_1 \ge V_{l^0} \text{ и } p = b_0, \\ x^0(1) \text{ с } x^0_1(1) \ge V_{l^0}, \quad j(x^0(1)) \in L \text{ и } x^0_{j(x^0(1))}(1) = p \in (b_0, \min\{x^0_1(1), V_1\}]. \end{array}\right.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подтвердим, что построенные исходы равновесные.

1. Для $x^0(1)$ выигрывает лот игрок 1, и при $1 \in L$ все остальные игроки получают нулевой выигрыш, а при $1 \not\in L$ все u-игроки получают свой максимум, и лишь у l-игроков есть стимул улучшать нулевой выигрыш. Но в любом варианте никто из них не сможет свой выигрыш улучшить, выбрав бид выше $x^0_1(1)$ (т.е. больше V_2 при $1 \in L$ или больше V_{l^0} при $1 \not\in L$) и выиграв лот. Игроку 1

тоже нет смысла снижать цену в заявке, поскольку, проиграв лот, он не увеличит свой выигрыш. Действительно, при $1 \not\in L$ лот игрока 1 тогда достанется l-игроку $j(x^0(1))$, если $p > b_0$, а в случае $p = b_0$ лот останется у игрока 1 при любом снижении им цены в заявке.

2. Аналогично $x^0(l)$ – равновесие $\forall l \in L \backslash \{1\}$. Действительно, для любого игрока $j \neq l$ увеличение бида сверх $x_l^0(l) \geq V_1$ не даст положительного выигрыша, потому что ему придется заплатить за лот эту цену как вторую. И победивший l-игрок не может увеличить свой выигрыш, изменяя ставку.

3. Докажем, что $x^0(i)$ – равновесие $\forall i \not\in L$. Для игроков $l \in L$ увеличение бида сверх $x_i^0(i) \geq V_{l^0}$ не даст положительного выигрыша, потому что тогда им придется заплатить за лот эту цену $x_i^0(i)$ как вторую. Другим игрокам $j \neq i$ ($j \not\in L$) нет смысла менять цену в заявке в силу их фрирайдерства. Игрок i тоже не может снизить бид, чтобы передать лот другому u-игроку, так как $j(x^0(i)) \in L$ (т.е. второй по величине бид с минимальным номером находится у l-игрока – он и выиграет лот вместо игрока i).

В результате исходы, указанные в утверждении 10, – равновесные. Убедимся, что других равновесий нет. Предположим, что x – равновесный исход с $p_2(x) = p$.

Рассмотрим случай $1 \in L$, и пусть сначала $i(x) = 1$. Тогда из (1.1) $x_1 \geq p$. Если $p > V_1$, то, не купив лот (выбрав $x_1^0 < p$), игрок 1 может увеличить значение $F_1(x)$ согласно (4.1), поэтому в равновесии $p \leq V_1$. Если $x_1 < V_2$, то игрок 2, выбрав x_2^0 между x_1 и V_2, получит положительный выигрыш от покупки лота – противоречие с равновесностью x. В итоге пришли для x к условиям на $x^0(1)$, указанным в утверждении 10 при $1 \in L$. Пусть теперь $i(x) = l > 1$, $l \in L$, тогда аналогично предыдущему варианту цена лота $p \leq V_l$ и (чтобы игрок 1 не мог перебить его ставку с выгодой для себя) $x_l \geq V_1$. Опять пришли к условиям для $x^0(l)$. В оставшемся варианте $i(x) = i \not\in L$ аналогично предыдущему: $p \leq V_i$ и $x_i \geq V_{l^0}$ с учетом $l^0 = 1$ при $1 \in L$. Кроме того, поскольку игрок i имеет тип u, то при $p > b_0$ он увеличит свой выигрыш, выбрав бид ниже p и передав лот другому u-игроку, если игрок $j(x)$, определенный в (1.3), имеет тип u. Единственная возможность – $j(x) \in L$. При $p = b_0$ выполняется равенство $j(x) = 1$, которое тоже дает $j(x) \in L$ при $1 \in L$. Получили на x условия, установленные утверждением 10 для $x^0(i)$ в случае $1 \in L$. Так что никаких новых равновесий x не возникает.

Проверим, что при $1 \not\in L$ дополнительные равновесия тоже не появляются. При $i(x) = 1$ следует $x_1 \geq p$ и $p \leq V_1$, как и выше. Если $x_1 < V_{l^0}$, то игрок l^0, выбрав $x_{l^0}^0$ между x_1 и V_{l^0}, получит положительный выигрыш от покупки лота – противоречие с равновесностью x. (Игроки типа u не будут перебивать лот у игрока 1, имеющего тот же тип, в отличие от случая, рассмотренного ранее.) В результате пришли к условиям для $x^0(1)$ при $1 \not\in L$. При $i(x) = l \in L$ ничего не меняется по сравнению с $1 \in L$. Пусть $i(x) = i \not\in L$, $i > 1$, тогда, как и для предыдущего случая, $p \leq V_i$ и $x_i \geq V_{l^0}$, а также при $p > b_0$ в равновесии должно быть $j(x) \in L$. Однако при $p = b_0$ выполняется равенство $j(x) = 1$, которое позволяет игроку $i \neq 1$, снизив свой бид до b_0, передать лот игроку 1. Поэтому вариант $p = b_0$ не приводит к равновесию в данном случае. Получили условия, установленные утверждением 10 для $x^0(i)$ при $1 \not\in L$. Утверждение 10 полностью доказано.

Замечание 6. Для обоих аукционов, если игрок 1 (т.е. игрок с максимальной ценностью лота для него) имеет тип l, то он и будет бенефициаром, как в обычном аукционе без фрирайдеров, несмотря на то, что у u-игроков доминирующих стратегий нет. Но если игрок 1 – u-игрок, то при $2 \not\in L$ выбор им бида V_1 или V_2 уже ничем не обоснован, оптимальный по Парето исход b^0 – не равновесный, и очевидных бенефициаров нет. Игрок 1 типа u заинтересован в покупке лота другими u-игроками с номерами $i < l^0$, если такие имеются (т.е. если $l^0 > 2$). Это приводит к нестабильной ситуации – разным исходам в разных повторениях игры, что вполне способно вызвать постепенное снижение бидов и цены аукциона (в том числе за счет стремления участников к неформальным договоренностям). Таким образом можно объяснить картину цен, наблюдаемую в аукционах спектра, проводимых на практике и с помощью модельных торгов [4, 5].

Чисто теоретически, из утверждения 10 вытекает, что в аукционе 2-й цены ничего не мешает продавцу оказаться в равновесной ситуации продажи лота по минимальной цене b_0. Однако подобная ситуация заставляет подозревать сговор победителя аукциона с другими покупателями, причем не только с фрирайдерами, но и с участниками типа l, для которых в большей степени характерен индивидуализм (так как их интересует лицензионное приобретение лота – только для себя). Действительно, в равновесии l-игрок является вторым по убыванию бидов, т.е. ценообразующим в аукционе 2-й цены – для игрока, выигрывающего лот. Низкая цена p на аукционе предполагает, что все l-игроки подали заявки с небольшой ценой. Тем не менее, в отсутствие информированности игроков друг о друге следует учесть, что для l-игроков в аукционе Викри честные стратегии – доминирующие. (Доказательство ничем не отличается от рассуждений для случая игры без фрирайдеров.) Для неинформированных игроков выбор доминирующих стратегий соответствует рациональному поведению [15]. По условию $V_l > b_0$. Значит, выбор b_0 со стороны l-игроков не рационален, а свидетельствует о какой-то договоренности.

Для аукциона Викри, предположив, что l-игроки и игрок 1 применяют искренние стратегии, получим равновесный исход $(V_{L\cup\{1\}}, b^0_{-L\cup\{1\}})$ с ценой лота V_{l^0} при $1 \notin L$ и V_2 при $1 \in L$ – аналогично аукциону 1-й цены. Использование искренней стратегии u-игроком 1 менее объяснимо с точки зрения теории игр (см. замечание 6) во всех случаях, кроме $2 \in L$. Поэтому, когда $l^0 > 2$, продавцу лота особенно важно не допустить сговора l-игрока l^0 с u-игроками $i < l^0$ (у которых ценность лота выше). Для чего и служит закрытый аукцион. Если u-игроки $i < l^0$ не договорятся между собой, то в аукционе 2-й цены побеждает l-игрок – складывается одно из равновесий $x^0(l)$ из утверждения 10. Однако при $1 \notin L$ исходы (V_L, b^0_{-L}), соответствующие честным стратегиям l-игроков, не дадут равновесий, а стратегии $x^0_l(l)$ – не искренние (победитель в равновесии вынужден применить доминируемую стратегию). Так что правило 2-й цены при $l^0 > 2$ уже нельзя считать стратегически обоснованным.

Заключение. Наличие фрирайдеров существенно меняет свойства аукционов размещения (в том числе аукционов спектра). Если без них все преимущества имеет механизм Викри, то в аукционе среди фрирайдеров его преимущества сводятся на нет. Этим отчасти обусловливается и тот факт, что механизм Викри–Кларка–Гровса [18] не проявляет своих хороших свойств в комбинированных аукционах спектра (за несколько связанных лотов сразу и с несколькими победителями), поскольку он как раз обобщает на этот случай правило 2-й цены. Отметим, что когда связи между лотами в комбинированном аукционе существенны (например, одни дополняют другие, причем по-разному для разных игроков), возникает иная задача. Рассмотрим ее в наших дальнейших работах, поскольку она близка к проблеме учета технических связей, характерной для задачи построения рынка электроэнергии, которая успешно решена [2].

В разд. 3 было показано, что для продавца, распределяющего частоты на конкурентной основе покупателям, среди которых имеются фрирайдеры, важно участие хотя бы одного l-игрока – это несколько стабилизирует аукцион. Притом чем выше для таких игроков ценность лота, тем на более высокую цену реально надеяться продавцу. Ценность лота у иных игроков может иметь значение для продавца лишь в случае, когда они не знают весь профиль ценностей и свое место в нем, т.е. не способны представить свой шанс на победу и шансы на победу других u-игроков. Тогда им есть какой-то смысл в аукционе 2-й цены использовать свою искреннюю стратегию. Но в равновесии цену лота будет, как правило, определять заявка l-игрока, для которых в аукционе 2-й цены искренняя стратегия – доминирующая. И в этом – преимущество аукциона Викри для продавца, если ему удается обеспечить отсутствие информационного обмена, провоцирующего сговор.

Информированным об истинном профиле ценностей лота у других покупателей u-игрокам выгодно сговориться на заявки с минимальным бидом, выбрав из своей среды того, кто выиграет для них лот ценой потери фрирайдерства. Однако побочные платежи между ними будут заметны регулятору, а без них равновесные выигрыши оказываются слишком несимметричными, что затрудняет договоренность и приводит к желанию скрыть от партнеров истинную ценность лота для себя. Действительно, u-игрокам i, для которых ценность лота больше, чаще приходится покупать лот при искренних стратегиях l-игроков (в силу условия $p \le V_i$ на равновесные цены для победы игрока i и $p \ge V_l$ при честных стратегиях l-игроков l). Вопрос, что может дать для принятия решения u-игроками использование механизма Кларка–Гровса [15, 23], также находится в сфере наших будущих интересов.

В целом, полученное описание в явном виде множеств равновесий по Нэшу для ряда игр, соответствующих аукциону спектра, позволяет провести аналитику, подтверждающую или поясняющую результаты экспериментов с учетом игроков типа *u* и *l* из [10, 11]. При этом удается выявить влияние разных факторов по отдельности, как то: правил аукциона (включая выбор победителя при равных ставках), распределения *l*-игроков среди *u*-игроков по ценности лота для них, информированности покупателей о ставках друг друга, о типе (*u* или *l*) других участников, об упорядочении игроков по ценности лота для них и т.п. Многообразие построенных равновесных исходов служит обоснованием различий в поведении покупателей, не вызванных необходимостью приобретения связанных лотов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jackson M.* Mechanism Theory // Optimization and Operations Research / Ed. U. Derigs. V. 3. Oxford: EOLSS Publishers, 2003.
2. *Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнес Е.М., Новикова Н.М., Селезнев А.В., Удальцов Ю.А., Ширяева Л.В.* Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 2. С. 84–94.
3. *Васин А.А.* Математические модели рынков и аукционов. М.: МАКС Пресс, 2023.
4. *Сонин К.И.* Основы теории аукционов (Нобелевская премия по экономике 2020 года) // Вопросы экономики. 2021. № 1. С. 5–32.
5. Handbook of Spectrum Auction Design / Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
6. *Hu S., Shi R.* Analysis of Recent Development of Spectrum Auction and Forecast of Future Development // 3rd Intern. Conf. on Economic Management and Cultural Industry. V. 203. Guangzhou: Atlantis Press, 2021. P. 518–522.
7. *Dong X., Zhang Y., Guo Y., Gong Y., Shen Y., Ma J.* PRAM: a Practical Sybil-Proof Auction Mechanism for Dynamic Spectrum Access with Untruthful Attackers // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2021. V. 22. P. 1143–1156.
8. *Devi M., Sarma N., Deka S. K.* Multi-Winner Spectrum Allocation in Cognitive Radio Networks: A Single-Sided Auction Theoretic Modelling Approach with Sequential Bidding // Electronics. 2021. V. 10. P. 602–626.
9. *Dang Y., Li Z.* The Analysis and Discussion of Spectrum Auctions Based on Case Study // J. Education, Humanities and Social Sciences. 2022. V. 2. P. 181–185.
10. *Bykowsky M.M., Olson M., Sharkey W.W.* Efficiency Gains From Using a Market Approach to Spectrum Management // Information Economics and Policy. 2010. V. 22. P. 73–90.
11. *Sharkey W.W., Beltran F., Bykowsky M.M.* Comparing the Ability of Different Auction Mechanisms to Efficiently Designate Spectrum Between Licensed and Unlicensed Use // SSRN Electronic Journal. 2013. http://ssrn.com/abstract=2214022.
https://doi.org/10.2139/ssrn.2214022.
12. *Каплан В.С.* Специфика и теоретико-игровой анализ аукциона размещения частот // Тихоновские чтения. Научная конференция: тез. докл. М.: МАКС Пресс, 2022. С. 85.
13. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
14. *Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. М.: Академия, 2008.
15. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
16. *Vickrey W.* Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders // Journal of Finance. 1961. V. 16. No. 1. P. 8–37.
https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x
17. *Fookes N., McKenzie S.* Impact of Budget Constraints on the Efficiency of Multi-lot Spectrum Auctions // Handbook of Spectrum Auction Design. Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. P. 764–781.
18. *Edelman B., Ostrovsky M., Schwarz M.* Internet Advertising and the Generalized Second-price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords // American Economic Review. 2007. V. 97. No. 1. P. 242–259.
https://doi.org/10.1257/aer.97.1.242
19. *Weber R.J.* Making More from Less: Strategic Demand Reduction in the FCC Spectrum Auctions // J. Economics and Management Strategy. 1997. V. 6. No. 3. P. 529–548.
20. *Cramton P., Schwartz J.A.* Collusive Bidding: Lessons from the FCC Spectrum Auctions // J. Regulatory Economics. 2000. V. 17. P. 229–252.
21. *Milgrom P., Segal I.* Designing the US Incentive Auction // Handbook of Spectrum Auction Design. Eds M. Bichler, J. Goeree. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. P. 803–815.
22. *Nash J.F.* Non Cooperative Games // Annals of Math. 1951. V. 54. No. 2. P. 286–295.
23. *Maskin E.* Mechanism Design for Pandemics // Review of Economic Design. 2022. V. 26. No. 3. P. 255–259.