ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 6, с. 3–32

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ ОГРАНИЧЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ[1]

Д. Н. Ибрагимов[a],*, А. Н. Сиротин[a],**

[a]Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: rikk.dan@gmail.com

**e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.
После доработки 28.04.2023 г.
Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача построения множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат за фиксированное время, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат за фиксированное время, для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление. Доказано представление множеств достижимости и 0-управляемости в виде линейных преобразований суперэллипсоидальных множеств конечной и бесконечной размерности. Предложен конструктивный метод описания искомых множеств на основе аппарата опорных полуплоскостей, в том числе и для предельных множеств достижимости и управляемости. В случае евклидовых пространств описание получено в явном виде. Приведены примеры. Для трехмерной системы управления движением спутника на околокруговой орбите произведено моделирование множеств достижимости.

DOI: 10.31857/S0002338823050086, **EDN:** OHKBDH

Введение. При исследовании динамических систем зачастую приходится учитывать различные ограничения, наложенные на управляющие воздействия, что приводит к тому, что далеко не все терминальные состояния являются достижимыми из заданного начального даже за бесконечное время. В результате классических условий управляемости Калмана оказывается недостаточно, чтобы сделать вывод о достижимости того или иного терминального состояния. В связи с чем представляется актуальной разработка методов, позволяющих формировать конструктивное описание множеств достижимости, т.е. множеств терминальных состояний, в которые можно перевести систему из начала координат, и 0-управляемости, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат, за конечное число шагов, а также оценки предельных множеств достижимости и 0-управляемости [1]. Процедура построения произвольных множеств управляемости, для которых терминальное состояние не фиксировано, может быть за счет сдвига системы координат сведена к задаче построения множеств 0-управляемости. Множества 0-управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления для систем с дискретным временем [2–4].

На данный момент известны результаты построения множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞-нормы. В частности, доказано, что в случае линейных ограничений на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [2]. Для их предельных аналогов сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [5], а в ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [6, 7] или принципа максимума [8]. Также к новым результатам относится описание предельных множеств достижи-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-01014).

мости и 0-управляемости в виде многогранников для систем с ограничениями на функцию управления в смысле l_1-нормы [9].

Однако для более общего случая l_p-нормы с произвольным значением параметра $p \in (1;+\infty)$ известные результаты являются неприменимы, что связано в первую очередь со строгой выпуклостью ограничений и невозможностью представления искомых множеств в полиэдральной форме. Напротив, эффективным оказывается их описание на основе аппарата суперэллипсоидальных множеств конечной [10, 11] и бесконечной размерностей, что тесно связано со строго выпуклым анализом [12, 13], выпуклым программированием [14], теорией нормированных пространств [15] и линейных операторов [16].

В статье изучаются вопросы построения множеств достижимости и 0-управляемости с суммарным ограничением на управление в смысле l_p-нормы. Удается в явном виде описать опорное полупространство и точку касания для произвольного множества достижимости или 0-управляемости за конечное или бесконечное число шагов. Это позволяет применить аппарат полиэдральной аппроксимации [17–19] для описания внутренних и внешних оценок искомых множеств в виде многогранников и использовать их для решения различных задач управления дискретными системами.

В разд. 1 производится постановка задачи. В разд. 2 изучаются различные свойства образов конечномерных и бесконечномерных суперэллипсоидальных множеств при линейном отображении в $\mathbb{R}^n$. В разд. 3 доказывается, что каждое множество 0-управляемости и достижимости представимо в виде образа суперэллипсоидального множества при линейном невырожденном преобразовании, что позволяет сформулировать их свойства на основе результатов разд. 2 и конструктивно описать опорную гиперплоскость для произвольного опорного вектора. Существенным является доказательство необходимых и достаточных условий ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости. В разд. 4 для частного случая евклидовых пространств описание множеств достижимости и 0-управляемости построено явно в виде эллипсоидальных множеств. В разд. 5 приведены примеры, демонстрирующие полученные теоретические результаты. В разд. 6 рассмотрена система управления движением спутника на околокруговой орбите, для которой построены множества достижимости на основе разработанных методов.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная система с дискретным временем и ограниченным скалярным управлением:

$$
\begin{gathered}
x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\
x(0) = x_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u(k)|^p \le 1,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}$ — скалярное управление, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ — матрицы системы, $p \in (1;+\infty)$ — параметр, определяющий тип суммарного ограничения на управление.

В ряде случаев будет использовано предположение о том, что система (1.1) управляема по Калману, т.е. выполнено условие

$$
\operatorname{rank}(b|Ab|\ldots|A^{n-1}b) = n. \tag{1.2}
$$

Хотя некоторые свойства будут также справедливы и для систем (1.1), не удовлетворяющих (1.2).

Обозначим для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{Y}_p(N)$ множество достижимости системы (1.1), т.е. множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за N шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$
\mathcal{Y}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} bu(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \le 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{1.3}
$$

Аналогично для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{X}_p(N)$ обозначим множество 0-управляемости системы (1.1), т.е. множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за N шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_p(N) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} b u(k), \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^p \leq 1 \right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Цель статьи – построить множества (1.3) и (1.4) и описать их свойства. В том числе интерес представляют предельные свойства множеств (1.3) и (1.4), т.е. необходимо изучить свойства предельных множеств $\mathcal{Y}_{p,\infty}, \mathcal{X}_{p,\infty} \subset \mathbb{R}^n$ достижимости и 0-управляемости системы (1.1) соответственно. Здесь $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ – множество тех состояний, в которые можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов из 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{Y}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_p(N). \tag{1.5}$$

Аналогично $\mathcal{X}_{p,\infty}$ – множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1.1) за конечное число шагов в 0 посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}_{p,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_p(N). \tag{1.6}$$

2. Дополнительные построения. Предельные множества $\mathcal{X}_{p,\infty}$ и $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ могут быть представлены с точностью до замыкания в виде проекции шара из нормированного пространства l_p на конечномерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Пространство числовых последовательностей l_p и норма в нем определяются следующим образом [15, разд. 1, §2, Гл. III]:

$$l_p = \left\{ (u_1, u_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty \right\}, \qquad p \in (1; +\infty),$$

$$\|u\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

Числа p и q являются двойственными по Гельдеру:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пространство $\mathbb{R}^N$ будем полагать евклидовым, наделенным скалярным произведением по формуле:

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Линейную, выпуклую и коническую оболочки произвольного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $\mathrm{Lin}\,\mathcal{U}$, $\mathrm{conv}\,\mathcal{U}$ и $\mathrm{cone}\,\mathcal{U}$ соответственно. Под $\dim \mathcal{U}$, $\partial \mathcal{U}$, $\mathrm{int}\,\mathcal{U}$ и $\overline{\mathcal{U}}$ будем понимать размерность, множество граничных точек, множество внутренних точек и замыкание $\mathcal{U}$. Для произвольного линейного подпространства $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^N$ обозначим через $\mathbb{L}^{\perp}$ его ортогональное дополнение, т.е. множество всех векторов из $\mathbb{R}^N$, ортогональных каждому вектору из $\mathbb{L}$. Также для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ под $\ker A \subset \mathbb{R}^N$ будем понимать ее ядро:

$$\ker A = \{ x \in \mathbb{R}^N : Ax = 0 \}.$$

Обозначим через $\mathscr{E}_p(N) \subset \mathbb{R}^N$ суперэллипсоидальное множество размерности N:

$$\mathscr{E}_p(N) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N : \left(\sum_{i=1}^{N} |u_i|^p \right)^{1/p} \le 1 \right\}.$$

Для произвольной последовательности $\{b_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного $N \in \mathbb{N}$ определим матрицу $B_N = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^{n\times N}$ и множество $\mathscr{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathscr{U}_p(B_N) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} u_j b_j : (u_1, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{E}_p(N) \right\}.$$

Л е м м а 1. Пусть $p_2 > p_1 > 1$. Тогда

$$\mathscr{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathscr{U}_{p_2}(B_N).$$

Доказательство леммы 1 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

По построению $\mathscr{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой образ $\mathscr{E}_p(N)$ при воздействии линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathscr{U}_p(B_N) = B_N \mathscr{E}_p(N). \tag{2.1}$$

Л е м м а 2. $\mathscr{U}_p(B_N)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. Если $\operatorname{rank} B_N = n$, то $\mathscr{U}_p(B_N)$ строго выпукло.

Лемма 2 является следствием более общего свойства выпуклых множеств: при любом линейном преобразовании относительно внутренние точки выпуклого множества преобразуются в относительно внутренние точки образа выпуклого множества. В случае если линейное отображение является сюръекцией (т.е. описывается матрицей полного ранга), а исходное множество имеет непустую внутренность, то относительно внутренние точки заменяются в утверждении на внутренние [12, теорема 6.6].

Вектор $f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ называется опорным к выпуклому множеству $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial\mathscr{U}$ [13, 1.8, Гл. 1], если

$$\mathscr{U} \subset \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : (f, \tilde{x}) \le (f, x)\}, \qquad (f, x) = \sup_{\tilde{x}\in\mathscr{U}} (f, \tilde{x}).$$

Нормальным конусом $\mathscr{N}(x, \mathscr{U})$ выпуклого множества $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \partial\mathscr{U}$ называется множество всех векторов, опорных к $\mathscr{U}$ в x:

$$\mathscr{N}(x, \mathscr{U}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \sup_{\tilde{x}\in\mathscr{U}} (f, \tilde{x}) = (f, x) \right\}.$$

Для произвольной внутренней точки $x \in \operatorname{int}\mathscr{U}$ нормальный конус представляет собой пустое множество:

$$\mathscr{N}(x, \mathscr{U}) = \varnothing.$$

Согласно определению нормального конуса, справедлив критерий принадлежности некоторой точки $x \in \mathscr{U}$ внутренности выпуклого множества $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$: включение $x \in \operatorname{int}\mathscr{U}$ верно тогда и только тогда, когда $\mathscr{N}(x, \mathscr{U}) = \varnothing$.

Л е м м а 3. Пусть $\operatorname{rank} B_N = n$. Тогда для любого $x \in \partial\mathscr{U}_p(B_N)$ верно, что:

1) $\dim \mathscr{N}(x, \mathscr{U}_p(B_N)) = 1$;

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathscr{N}(x^*(f), \mathscr{U}_p(B_N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}|(f,b_i)|^q\right)^{1/p}}\sum_{i=1}^{N}b_i|(f,b_i)|^{q-1}\operatorname{sign}(f,b_i).$$

Леммы 1–3 определяют основные свойства множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4), такие, как строгая выпуклость, гладкость границы и монотонность. Более того, при помощи леммы 3 можно восстановить произвольную точку на границе множества и гиперплоскость, опорную к множеству в данной точке, чего достаточно для построения сколь угодно точных внутренних и внешних полиэдральных оценок исследуемого множества [17]. Однако в случае описания предельных множеств достижимости и 0-управляемости данные утверждения оказываются неэффективны. Принципиальным вопросом в изучении множеств (1.5) и (1.6) являются необходимые и достаточные условия их ограниченности.

Пусть $\mathscr{E}_p(\infty)$ – шар радиуса 1 с центром в 0 в l_p:

$$\mathscr{E}_p(\infty) = \left\{u \in l_p : \left(\sum_{j=1}^{\infty}|u_j|^p\right)^{1/p} \le 1\right\}.$$

Рассмотрим последовательность векторов $B' = (b_1, b_2, \ldots)$ из $\mathbb{R}^n$ в качестве линейного оператора $B' : l_p \to \mathbb{R}^n$:

$$B'u = \sum_{j=1}^{\infty}b_j u_j.$$

Вообще говоря, оператор B' может быть определен не на всем пространстве l_p. Через $\mathscr{D}_{B'} \subset l_p$ обозначим множество всех векторов, на которых B' определен. В ряде случаев будет существенно наличие свойства сюръекции B', для выполнения которого достаточно предположить аналогичное условию (1.2) равенство

$$\operatorname{rank}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = n. \tag{2.2}$$

Последовательность B' можно рассмотреть в качестве упорядоченного набора n числовых последовательностей $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots)$, $i = \overline{1,n}$:

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Поэтому B' является элементом пространства $\mathbb{R}^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}^\infty$. Исследование ограниченности оператора B' связано со свойствами последовательностей $y^1, \ldots, y^n$, его формирующих. В частности, важнен класс всех B', удовлетворяющих представлению (2.3), в котором для каждого $i = \overline{1,n}$ справедливо условие $y^i \in l_q$. Такой класс обозначим через l_q^n, а через $\mathscr{U}_p(B')$ – образ шара $\mathscr{E}_p(\infty)$ при воздействии отображения B':

$$\mathscr{U}_p(B') = \left\{\sum_{j=1}^{\infty}b_j u_j : u \in \mathscr{E}_p(\infty) \cap \mathscr{D}_{B'}\right\}. \tag{2.4}$$

Л е м м а 4. Допустим, что $\mathscr{U}_p(B')$ определяется соотношениями (2.4). Тогда множество $\mathscr{U}_p(B')$ ограничено тогда и только тогда, когда верно включение $B' \in l_q^n$.

Л е м м а 5. Пусть $B' \in l_q^n$. Тогда справедливо включение

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathscr{U}_p(B_N)} \subset \mathscr{U}_p(B').$$

В общем случае множества $\mathcal{U}_p(B')$ и $\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)$ не совпадают. Покажем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $B' = (b_1, b_2, \ldots) \in l_q$ – произвольная нефинитная последовательность. Рассмотрим $x = \|B'\|_{l_q}$. Тогда

$$(B')^{-1}(\{x\}) = \left\{u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j = \|B'\|_{l_q}\right\} \subset l_p.$$

В силу неравенства Гельдера гиперплоскость $(B')^{-1}(\{x\})$ является опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество, то существует единственная точка касания $\tilde{u} \in (B')^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{E}_p(\infty)$:

$$\tilde{u} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}}(|b_1|^{q-1}\operatorname{sign} b_1, |b_2|^{q-1}\operatorname{sign} b_2, \ldots).$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{q-1} b_j \operatorname{sign} b_j = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = \|B'\|_{l_q}^{q-q/p} = \|B'\|_{l_q},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{u}_j|^p = \left(\frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q/p}}\right)^p \sum_{j=1}^{\infty} \left||b_j|^{q-1} \operatorname{sign} b_j\right|^p = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{qp-p} = \frac{1}{\|B'\|_{l_q}^{q}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q = 1,$$

$$\{\tilde{u}\} = (B')^{-1}(x) \cap \mathcal{E}_p(\infty).$$

Тогда $x \in \mathcal{U}_p(B')$, но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности B' и $\tilde{u}$ по построению не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\mathcal{U}_p(B') \neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Существенным в примере 1 является свойство строгой выпуклости множества $\mathcal{E}_p(\infty)$, из которого следует единственность точки касания любой опорной к $\mathcal{E}_p(\infty)$ гиперплоскости. Аналогичные рассуждения для $p \in \{1, \infty\}$ некорректны.

Результат примера 1 справедлив для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 6. Пусть

$$B' = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots \end{pmatrix} \in l_q^n.$$

Тогда для всех $i = \overline{1, n}$, таких, что $y^i \in l_q$ не финитна, верно включение

$$\tilde{x} = B'\tilde{u} \in \mathcal{U}_p(B') \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}}\left(|b_{i1}|^{q-1}\operatorname{sign} b_{i1}, |b_{i2}|^{q-1}\operatorname{sign} b_{i2}, \ldots\right).$$

Следствие 1. Пусть справедливы предположения леммы 6. Тогда равенство

$$\mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда последовательности $y^1,\ldots,y^n \in l_q$ финитны.

Л е м м а 7. Допустим, что $B' \in l_q^n$. Тогда равенство

$$\operatorname{int}\mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)$$

верно тогда и только тогда, когда для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\dim \operatorname{Lin}\{b_N, b_{N+1},\ldots\} = n.$$

Л е м м а 8. Пусть выполнено условие (2.2), $B' \in l_q^n$. Тогда для любого $x \in \partial\mathcal{U}_p(B')$ верно, что:

1) $\dim \mathcal{N}(x,\mathcal{U}_p(B')) = 1$;

2) для произвольного $f \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ справедливы соотношения

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f),\mathcal{U}_p(B')),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(f,b_i)|^q\right)^{1/p}}\sum_{i=1}^{\infty}b_i|(f,b_i)|^{q-1}\operatorname{sign}(f,b_i).$$

Лемма 4 определяет необходимые и достаточные условия того, чтобы предельное множество $\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)$ оказалось ограниченным. Следствие 1 и лемма 7 вместе предлагают необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на последовательность B', чтобы данное предельное множество оказалось замкнутым или открытым. При этом лемма 5 гарантирует, что с точностью до замыкания оно будет совпадать с $\mathcal{U}_p(B')$, а лемма 8 позволяет восстановить произвольную точку на границе этого множества и гиперплоскость, опорную к нему в данной точке, чего достаточно для построения внутренних и внешних полиэдральных аппроксимаций $\mathcal{U}_p(B')$.

3. Свойства множеств достижимости и 0-управляемости. На основе результатов разд. 0 имеется возможность описать структуру множеств достижимости (1.3) и 0-управляемости (1.4).

Л е м м а 9. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются соотношениями (1.3) и (1.4) соответственно, $N \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если $B_N = (b, Ab,\ldots,A^{N-1}b) \in \mathbb{R}^{n\times N}$, то справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N);$$

2) если $\det A \neq 0$, $B_N = (A^{-1}b, A^{-2}b,\ldots,A^{-N}b) \in \mathbb{R}^{n\times N}$, то верно равенство

$$\mathcal{X}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N).$$

Т е о р е м а 1. Пусть семейства множеств $\{\mathcal{Y}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$ для системы (1.1) определяются, согласно (1.3) и (1.4) соответственно: Тогда:

1) если $N_2 > N_1$, то $\mathcal{Y}_p(N_1) \subset \mathcal{Y}_p(N_2)$;

2) если $p_2 > p_1$, то $\mathcal{Y}_{p_1}(N) \subset \mathcal{Y}_{p_2}(N)$, $N \in \mathbb{N}$;

3) $\mathcal{Y}_p(N)$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество;

4) если выполнено условие (1.2) и $N \geq n$, то для любых $x \in \partial\mathcal{Y}_p(N)$ и $f \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ верны соотношения:

$$\dim \mathcal{N}(x,\mathcal{Y}_p(N)) = 1,$$

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f),\mathcal{Y}_p(N)),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{N-1} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{N-1} A^i b |(f, A^i b)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, A^i b);$$

5) если $\det A \neq 0$, то пункты 1–4 также справедливы и для семейства множеств $\{\mathcal{X}_p(N)\}_{N=0}^{\infty}$. В п. 4 граничная точка $x^*(f) \in \partial\mathcal{X}_p(N)$ определяется соотношениями

$$f \in \mathcal{N}(x^*(f), \mathcal{X}_p(N)),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} |(f, A^{-i} b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{N} A^{-i} b |(f, A^{-i} b)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, A^{-i} b).$$

Жордановым базисом матрицы A называется набор линейно независимых векторов h_1, ..., $h_n \subset \mathbb{R}^n$, который задает преобразование подобия матрицы A в ее вещественную жорданову каноническую форму [20, разд. 3.4, Гл. 3]. Такой базис единственен с точностью до ненулевых сомножителей и порядка векторов $h_1, \ldots, h_n$, и каждый базисный вектор соответствует некоторой жордановой клетке, т.е. некоторому собственному значению матрицы A. Если разбить элементы жорданова базиса на три множества по критерию того, соответствуют ли они собственному значению матрицы A большему, равному или меньшему 1 по модулю, то получится определить следующие три инвариантных подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \operatorname{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{=1} = \operatorname{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| = 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \operatorname{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

Теорема 2. Пусть множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.5). Тогда $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$b \in \mathbb{L}_{<1}.$$

Если $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

1) $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ строго выпукло;

2) для любых $x \in \partial\mathcal{Y}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = 1;$$

3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{Y}_{p,\infty}),$$

$$y^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=0}^{\infty} A^i b |(f, A^i b)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, A^i b);$$

4) опорная функция $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ иммет вид

$$s(f, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. Пусть множество $\mathcal{X}_{p,\infty}$ определяется соотношением (1.6). Тогда $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{L}_{>1}.$$

Если $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено и справедливо условие (1.2), то:

1) $\mathcal{X}_{p,\infty}$ строго выпукло;

2) для любых $x \in \partial\mathcal{X}_{p,\infty}$

$$\dim \mathcal{N}(x, \mathcal{X}_{p,\infty}) = 1;$$

3) для любых $f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ верны соотношения:

$$f \in \mathcal{N}(y^*(f), \mathcal{X}_{p,\infty}),$$

$$x^*(f) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, A^{-i}b)|^q\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}b|(f, A^{-i}b)|^{q-1}\operatorname{sign}(f, A^{-i}b);$$

4) опорная функция $\mathcal{X}_{p,\infty}$ иммет вид

$$s(f, \mathcal{X}_{p,\infty}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, A^{-i}b)|^q\right)^{1/q}.$$

Следствие 2. Пусть множества $\mathcal{Y}_{p,\infty}$, $\mathcal{X}_{p,\infty}$ определяются соотношениями (1.5) и (1.6) соответственно. Тогда:

1) если все собственные значения матрицы A меньше по модулю, чем 1, то $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ ограничено;

2) если все собственные значения матрицы A больше по модулю, чем 1, то $\mathcal{X}_{p,\infty}$ ограничено.

Хотя теоремы 2 и 3 предлагают необходимые и достаточные условия ограниченности множеств (1.5) и (1.6), использование данных утверждений может быть затруднено в связи с необходимостью построения жорданова базиса A. В свою очередь следствие 2, будучи лишь достаточным условием ограниченности, позволяет обойтись исключительно вычислением собственных значений матрицы A. Также применение теорем 2 и 3 для построения опорных полупространств к множествам (1.5) и (1.6) проблематично в общем случае, так как требует вычисления точной суммы ряда. С другой стороны, теоремы 2 и 3 определяют опорные функции множеств (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности явным образом.

4. Частный случай евклидовых пространств. Рассмотрим случай $p = 2$. Данное допущение позволяет описать множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ и $\mathcal{U}_2(B')$ в терминах скалярного произведения. С учетом (2.1) и (2.4) верно равенство $\mathcal{U}_2(B_N) = (B_N, 0, \ldots)\mathcal{E}_2(\infty)$, откуда в силу леммы 9 следует, что каждое из множеств (1.3)–(1.6) является линейным преобразованием шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$, что позволяет явным образом описать их структуру.

Лемма 10. Пусть справедливо (2.2), $N \geq n$, $H_N = (B_N B_N^{\mathrm{T}})^{-1}$. Тогда верно представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_N x) \leq 1\}.$$

С учетом леммы 9 лемма 10 позволяет описать множества достижимости $\mathcal{Y}_2(N)$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_2(N)$ системы (1.1), удовлетворяющей условию (1.2), явно в виде эллипсоидальных множеств для любого $N \geq n$. Также процедуру их построения благодаря лемме 9 можно проводить рекуррентно.

Лемма 11. Пусть $\det A \neq 0$, выполнено условие (1.2) и $N \geq n$. Тогда существуют положительно определенные и симметрические матрицы $H_{\mathcal{X},N}, H_{\mathcal{Y},N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},N} x) \leq 1\}, \\ \mathcal{X}_2(N) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},N} x) \leq 1\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$H_{\mathcal{Y},N+1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} - \frac{(A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b b^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},N} A^{-1}}{1 + b^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},N} A^{-1} b},$$

$$H_{\mathcal{X},N+1} = A^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},N} A - \frac{A^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},N} b b^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},N} A}{1 + b^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},N} b}.$$

Согласно леммам 9 и 5, множества (1.5) и (1.6) в случае их ограниченности, необходимые и достаточные условия которой определяются теоремами 2 и 3, с точностью до замыкания совпадают с образом шара $\mathcal{E}_2(\infty) \subset l_2$ при некотором линейном преобразовании, т.е. являются эллипсоидальными множествами. При этом их структура может быть вычислена в результате решения алгебраического дискретного уравнения Риккати [21].

Т е о р е м а 4. Пусть $\det A \neq 0$ и выполнено условие (1.2). Тогда:

1) если $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{Y},\infty} x) \le 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{Y},\infty} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{Y},\infty} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} - (b^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1})^{\mathrm{T}} (1 + b^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1} b)^{-1} (b^{\mathrm{T}} (A^{-1})^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{Y},\infty} A^{-1});$$

2) если $\mathcal{X}_{2,\infty}$ ограничено, то

$$\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{\mathcal{X},\infty} x) \le 1\},$$

где положительно определенная и симметрическая матрица $H_{\mathcal{X},\infty} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$H_{\mathcal{X},\infty} = A H_{\mathcal{X},\infty} A - (b^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},\infty} A)^{\mathrm{T}} (1 + b^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},\infty} b)^{-1} (b^{\mathrm{T}} H_{\mathcal{X},\infty} A).$$

5. Примеры. В данном разделе приведены примеры множеств 0-управляемости и достижимости для различных систем. В качестве иллюстраций множеств используются их внутренние полиэдральные оценки, построенные на основе п. 4, 5 теоремы 1:

$$\operatorname{conv}\{y^*(f_1), \dots, y^*(f_m)\} \subset \mathcal{Y}_p(N),\ f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}.$$

В случае $pn = 2$ искомые множества будут построены точно при помощи лемм 10 и 11.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9\cos(2) & 0.9\sin(2) \\ -0.9\sin(2) & 0.9\cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

На базе п. 4 теоремы 1 построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты проиллюстрированы на рис. 1–4.

П р и м е р 3. Рассмотрим систему (1.1) размерности $n = 2$ со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Согласно п. 4 теоремы 1, построим множества достижимости для различных значений $N \in \mathbb{N}$ и $p \in (1; +\infty)$. Графически результаты представлены на рис. 5–8.

П р и м е р 4. С учетом леммы 9 и условий (5.1) на рис. 1–4 приведены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}, \quad b = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} \cos(2) - \sin(2) \\ \cos(2) + \sin(2) \end{pmatrix}.$$

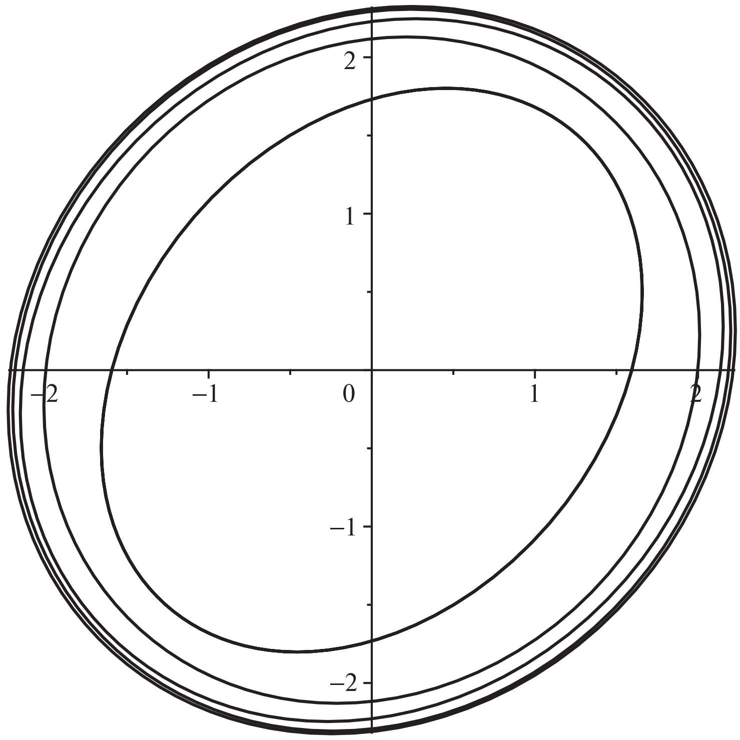

Рис. 1. Множества $\mathcal{Y}_2(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Аналогично, в силу леммы 9 и условий (5.2), на рис. 5–8 изображены множества 0-управляемости системы (1.1) с матрицами

$$A = \frac{100}{81}\begin{pmatrix} 0.9 & -1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{81} \\ \dfrac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

6. Система управления спутником. Рассмотрим систему управления движением спутника, расположенного на околокруговой орбите, представленную в [22]. Предполагается, что коррекция орбиты осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы направлены по касательной к траектории движения и исполняются без ошибок через равные промежутки времени. На энергетические ресурсы двигателей наложены суммарные ограничения.

Круговая орбита, на которой должен находиться спутник, описывается значениями радиуса орбиты r_0, радиальной скорости v_{R0} и трансверсальной скорости v_{T0}. Обозначим отклонения реальных значений радиуса орбиты и составляющих скорости от номинальных параметров движения следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r - r_0, \\ \Delta v_R &= v_R - v_{R0}, \\ \Delta v_T &= v_T - v_{T0}. \end{aligned}$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений, представляющая движение спутника, согласно [22], имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\dot{r} &= \Delta v_R, \\ \Delta\dot{v}_R &= \Delta r + 2\Delta v_T, \\ \Delta\dot{v}_T &= -\Delta v_R. \end{aligned} \tag{6.1}$$

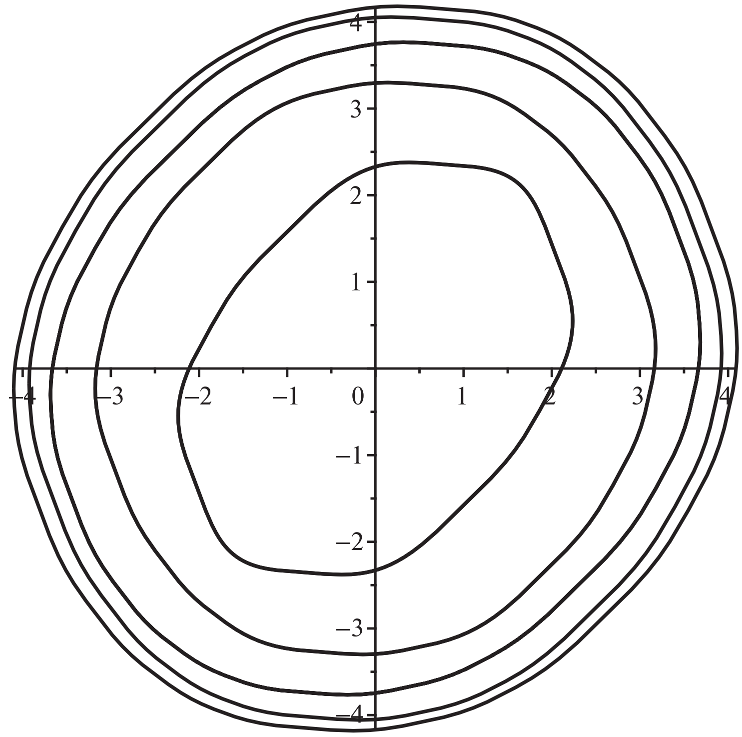

Рис. 2. Множества $\mathcal{Y}_4(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Поскольку управление подается импульсно через равные промежутки времени $t_0 > 0$, то можно рассматривать в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(kt_0), \Delta v_R(kt_0), \Delta v_T(kt_0))^{\mathrm{T}}$ в моменты времени kt_0, т.е. непосредственно перед выполнением $(k+1)$-го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет решить систему линейных дифференциальных уравнений (6.1) явно и перейти к конечно-разностным соотношениям вида (1.1) с матрицами системы:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos t_0 + 2 & \sin t_0 & -2\cos t_0 + 2 \\ \sin t_0 & \cos t_0 & 2\sin t_0 \\ \cos t_0 - 1 & -\sin t_0 & 2\cos t_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\cos t_0 + 2 \\ 2\sin t_0 \\ 2\cos t_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Для исследования на ограниченность предельных множеств управляемости и достижимости построим жорданов базис матрицы A и вычислим ее собственные значения:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm it_0}.$$

Отсюда следует, что $b \in \mathbb{L}_{=1} = \mathbb{R}^3$, и, согласно теоремам 2 и 3, рассматриваемая система управления обладает неограниченными предельными множествами достижимости и управляемости. Если предположить, что на мощность корректирующих импульсов наложены суммарные квадратичные ограничения, т.е. $p = 2$, то возможно построить множество достижимости, согласно леммам 9 и 10. При выборе $N = 20$ и $t_0 = 0.25$ множество $\mathcal{Y}_2(20)$, изображенное на рис. 9, представляет собой эллипсоид, описываемый следующей матрицей квадратичной формы:

$$H_{20} = \begin{pmatrix} 0.1210 & -0.0151 & 0.1686 \\ -0.0151 & 0.0247 & -0.0217 \\ 0.1686 & -0.0217 & 0.2486 \end{pmatrix}.$$

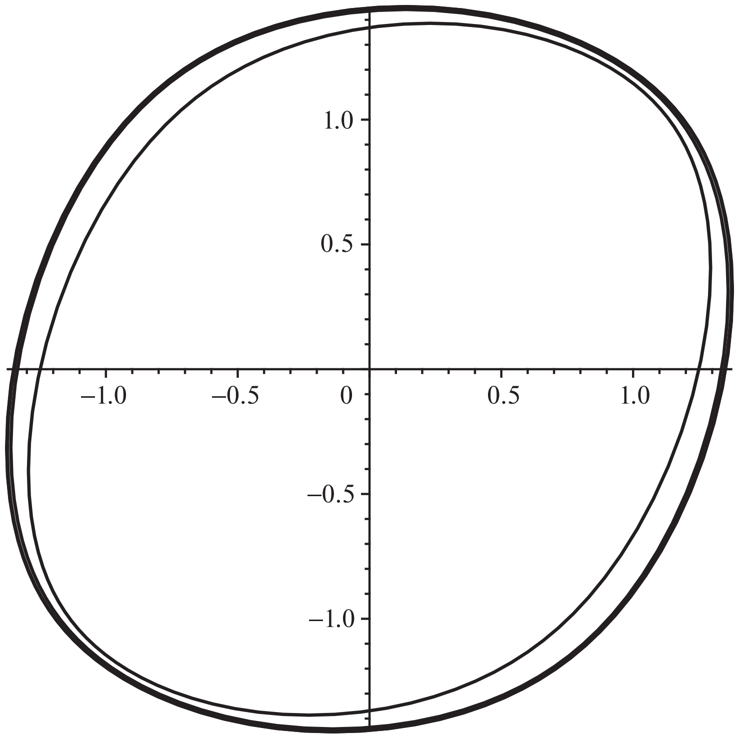

Рис. 3. Множества $\mathcal{Y}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.1), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Заключение. Обсуждаются некоторые свойства множеств достижимости и 0-управляемости для стационарной линейной дискретной системы с суммарным ограничением на управление.

Представлены общие свойства образов суперэллипсоидальных множеств при линейных преобразованиях. В частности, получено конструктивное описание этих множеств через аппарат опорных полупространств в виде леммы 3. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности, замкнутости или открытости предельных множеств достижимости и 0-управляемости (леммы 4–7).

Продемонстрировано, что множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов могут быть описаны в виде образа суперэллипсоидального множества при фиксированном линейном преобазовании, а их предельные аналоги представляют собой с точностью до замыкания образ шара из l_p при линейном отображении в $\mathbb{R}^n$. Данный факт позволяет воспользоваться общими свойствами для описания множеств достижимости и 0-управляемости. Приведено точное описание множеств достижимости и 0-управляемости в виде эллипсоидальных множеств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого тела $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащего 0 в качестве внутренней точки, обозначим через $\mu(x, \mathcal{U})$ функционал Минковского [15, разд. 3, §2, Гл. III]:

$$\mu(x, \mathcal{U}) = \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\}.$$

Произвольное замкнутое выпуклое тело $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$, содержащее 0 в качестве внутренней точки, в силу теоремы Минковского [15, теорема 3, разд. 3, §2, Гл. III] допускает представление

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}) \le 1\}. \qquad (\text{П.1})$$

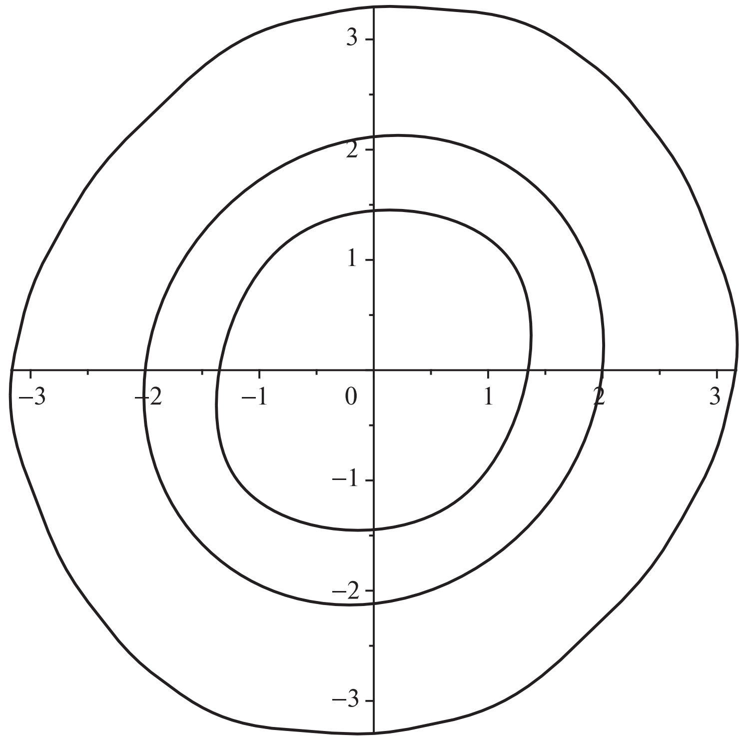

Рис. 4. Множества $\mathcal{Y}_{4/3}(8)$, $\mathcal{Y}_2(8)$, $\mathcal{Y}_4(8)$ для системы (1.1), (5.1)

Л е м м а 12. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. Включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 12. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению функционала Минковского

$$x \in \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_1 \subset \mu(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_2,$$

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{U}_2\} = \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Допустим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(x, \mathcal{U}_1) \geq \mu(x, \mathcal{U}_2).$$

Тогда в силу (П.1)

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_1) \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x, \mathcal{U}_2) \leq 1\} = \mathcal{U}_2.$$

Лемма 12 доказана.

Л е м м а 13. Пусть $p_2 > p_1 > 0$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

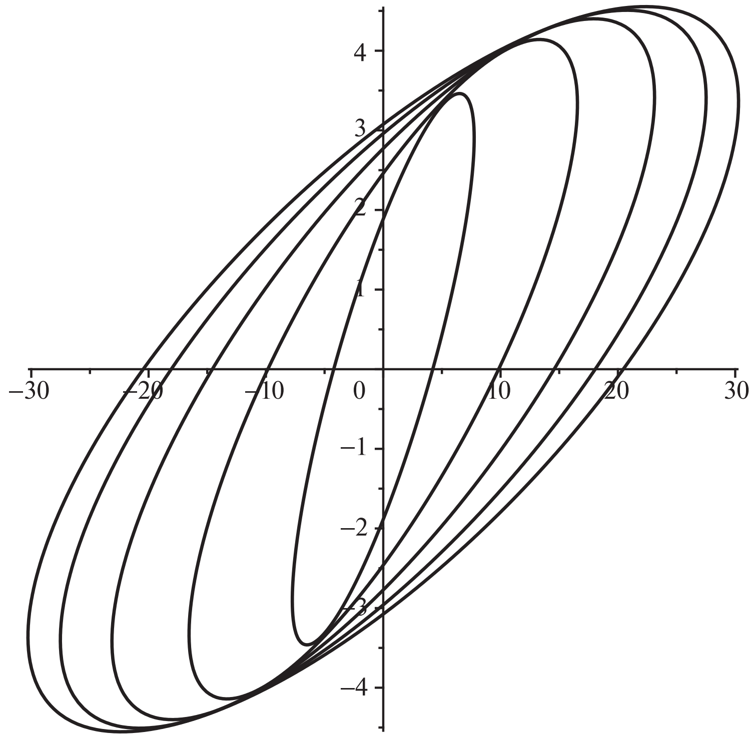

Рис. 5. Множества $\mathcal{Y}_2(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 13. Для произвольного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ рассмотрим функцию $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$f(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Функция f на области определения является непрерывно дифференцируемой. Тогда для доказательства леммы 13 достаточно показать, что $f'(p) \le 0$ для всех $p > 0$. Обозначим через $\overline{\ln}|t|$ функцию следующего вида:

$$\overline{\ln}|t| = \begin{cases} \ln|t|, & t \ne 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$f'(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\exp\left\{ \frac{1}{p} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) \right\} \right) =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{p} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) \right\} \left(-\frac{1}{p^2} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i|^p \overline{\ln}|x_i| \right)}{p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \left(-\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) \ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i|^p \overline{\ln}|x_i|^p \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p-1} \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i|^p \left(\overline{\ln}|x_i|^p - \ln\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right) \right) \right] \le 0,$$

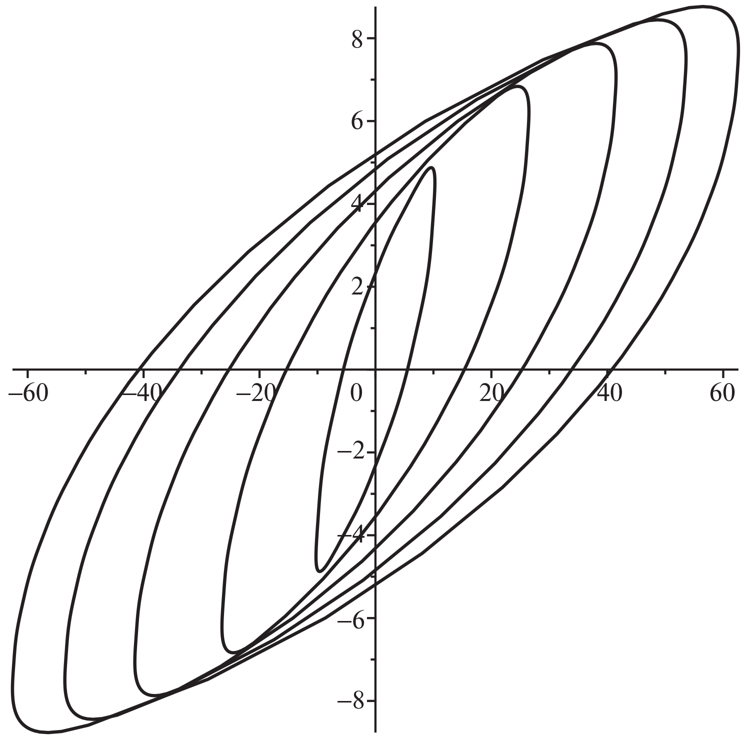

Рис. 6. Множества $\mathcal{Y}_4(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

так как для всех $i = \overline{1, n}$

$$\overline{\ln}|x_i|^p \leq \ln\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right).$$

Лемма 13 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. В силу леммы 13 для каждого $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|u_j|^{p_1}\right)^{1/p_1} \geq \left(\sum_{j=1}^{N}|u_j|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

Поскольку для произвольного $p \in (1; +\infty)$

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^{N}|u_j|^{p}\right)^{1/p},$$

то, согласно лемме 12, верно включение $\mathcal{E}_{p_1}(N) \subset \mathcal{E}_{p_2}(N)$. С учетом представления (2.1) также справедливо включение $\mathcal{U}_{p_1}(B_N) \subset \mathcal{U}_{p_2}(B_N)$.

Лемма 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Пусть $x^1, x^2 \in \mathcal{U}_p(B_N)$, $\lambda \in (0; 1)$. В силу (2.1) существуют u^1, $u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$, такие, что $x^1 = B_N u^1$, $x^2 = B_N u^2$. Поскольку $\mathcal{E}_p(N)$ выпукло, то $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \mathcal{E}_p(N)$. С учетом (2.1)

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = B_N(\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2) \in B_n \mathcal{E}_p(N) = \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\mathcal{U}_p(B_N)$ выпукло.

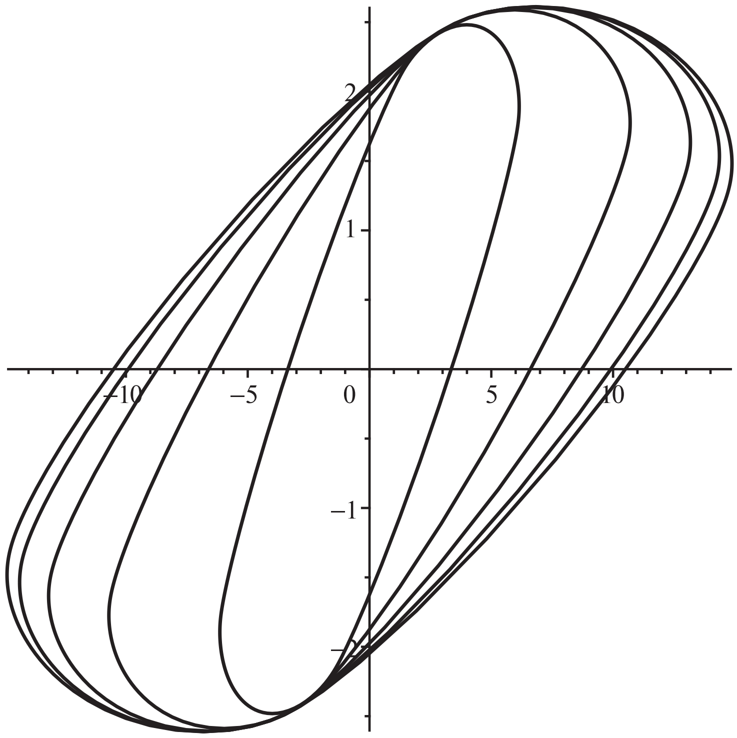

Рис. 7. Множества $\mathcal{Y}_{4/3}(N)$ для системы (1.1), (5.2), $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Предположим, что $\operatorname{rank} B_N = n$. Поскольку при $p \in (1;+\infty)$ множество $\mathcal{E}_p(N)$ строго выпукло, то $\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2 \in \operatorname{int}\mathcal{U}$, т.е. существует открытый шар $O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2) \subset \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1)

$$B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N).$$

Так как $\operatorname{rank} B_N = n$, существует открытый шар

$$O_\delta(B_N(\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2)) \subset B_N O_\varepsilon(\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2) \subset \mathcal{U}_p(B_N),$$

т.е. $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \operatorname{int}\mathcal{U}_p(B_N)$. Следовательно, $\mathcal{U}_p(B_N)$ по определению строго выпуклое.

Замкнутость и ограниченность следует из того факта, что по определению $\mathcal{U}_p(B_N)$ представляет собой образ замкнутого и ограниченного множества $\mathcal{E}_p(N)$ под действием непрерывного линейного отображения $B_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ [15, разд. 2, §5, Гл. IV].

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Как показано в [4], лемма 5 для произвольного выпуклого и компактного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, линейного ограниченного оператора $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ и точки $u \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}(Au, A\mathcal{U}) = (A^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathcal{N}(u,\mathcal{U})) \cup (\ker A^{\mathrm{T}} \setminus \{0\}).$$

Если в данном равенстве положить $A = B_N$, $\mathcal{U} = \mathcal{E}_p(N)$, то получим соотношения

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) = (B_N^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N))) \cup (\ker B_N^{\mathrm{T}} \setminus \{0\}). \qquad (\text{П.2})$$

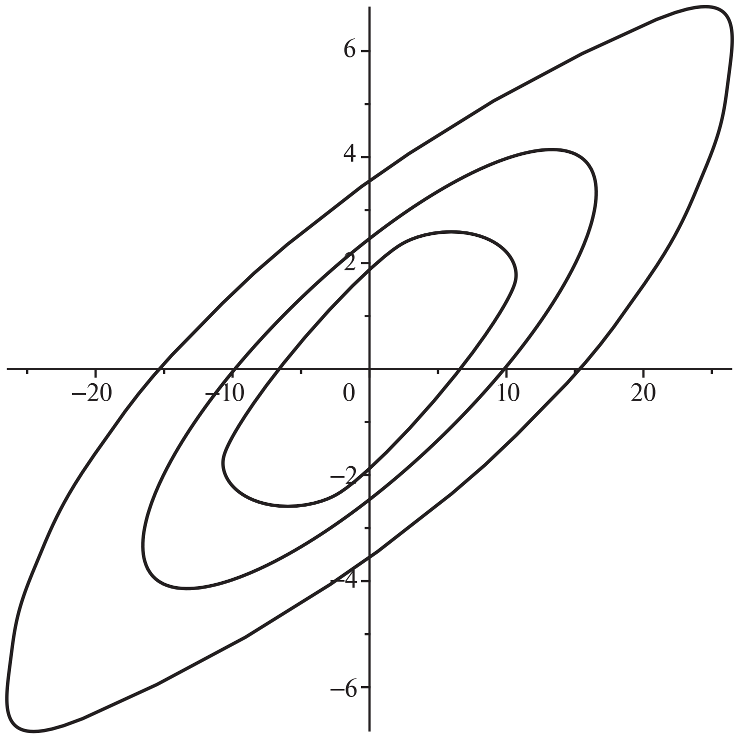

Рис. 8. Множества $\mathcal{Y}_{4/3}(8)$, $\mathcal{Y}_2(8)$, $\mathcal{Y}_4(8)$ для системы (1.1), (5.2)

Так как при $p \in (1;+\infty)$ функционал Минковского множества $\mathcal{E}_p(N)$ является гладкой функцией по первому аругменту:

$$\mu(u, \mathcal{E}_p(N)) = \left(\sum_{j=1}^{N} |u_j|^p\right)^{1/p},$$

то нормальный конус множества $\mathcal{E}_p(N)$ в любой граничной точке $u \in \partial\mathcal{E}_p(N)$ представляет собой коническую оболочку градиента функционала Минковского в точке u [12, теорема 25.6]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{E}_p(N)) = \operatorname{cone}\{\nabla_u \mu(u, \mathcal{E}_p(N))\} \setminus \{0\} = \left\{\alpha\left(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1 \;\ldots\; |u_N|^{p-1}\operatorname{sign}u_N\right)^{\mathrm{T}} : \alpha > 0\right\}.$$

С учетом того, что $\operatorname{rank} B_N = n$ и $\ker B_N^{\mathrm{T}} = \{0\}$, в силу (П.2) верны равенства

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) = (B_N^{\mathrm{T}})^{-1}(\{\alpha(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1 \;\ldots\; |u_N|^{p-1}\operatorname{sign}u_N)^{\mathrm{T}} : \alpha > 0\}) =$$
$$= \bigcup_{\alpha>0} (B_N^{\mathrm{T}})^{-1}(\{\alpha(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1 \;\ldots\; |u_N|^{p-1}\operatorname{sign}u_N)^{\mathrm{T}}\}) =$$
$$= \operatorname{cone}\{f \in \mathbb{R}^n : B_N^{\mathrm{T}} f = (|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1 \;\ldots\; |u_N|^{p-1}\operatorname{sign}u_N)^{\mathrm{T}}\} \setminus \{0\}.$$

Поскольку $\operatorname{rank} B_N = \operatorname{rank} B_N^{\mathrm{T}} = n$, то уравнение

$$B_N^{\mathrm{T}} f = \left(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1 \;\ldots\; |u_N|^{p-1}\operatorname{sign}u_N\right)^{\mathrm{T}}$$

имеет либо одно, либо нуль решений. Иначе говоря,

$$\dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \le 1.$$

При этом в случае $B_N u \in \partial\mathcal{U}_p(B_N)$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \ne \varnothing, \qquad \dim \mathcal{N}(B_N u, \mathcal{U}_p(B_N)) \ge 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 3.

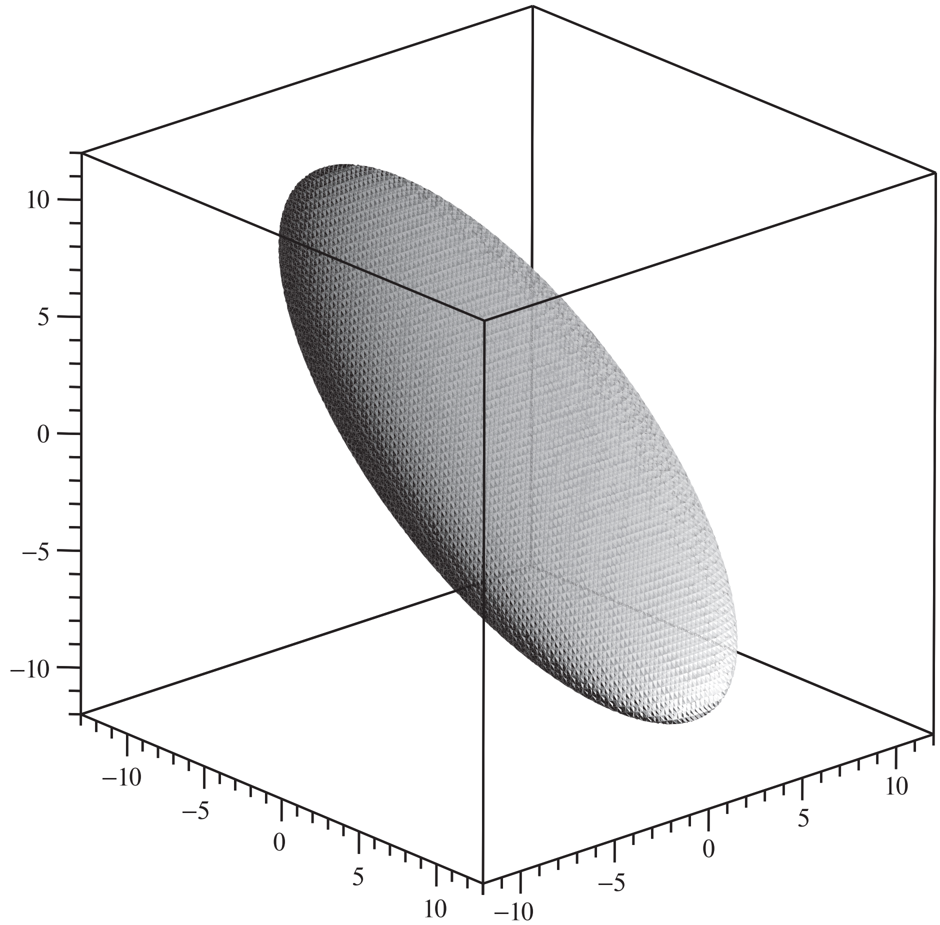

Рис. 9. Множество $\mathcal{Y}_2(20)$ для системы управления движением спутника

Для доказательства второго утверждения леммы 3, согласно определению опорного вектора, достаточно показать, что $x^*(f)$ является точкой максимума (f, x) при условии $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$.

Учитывая, что

$$B_N^{\mathrm{T}} f = \big((f, b_1) \ \dots \ (f, b_N)\big)^{\mathrm{T}},$$

получим следующую цепочку равенств:

$$\arg \max_{x \in \mathcal{U}_p(B_N)} (f, x) = B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (f, B_N u) = B_N \arg \max_{u \in \mathcal{E}_p(N)} (B_N^{\mathrm{T}} f, u) =$$

$$= \frac{\big(b_1 \ \dots \ b_N\big)}{\left(\sum_{i=1}^{N} |(f, b_i)|^q\right)^{1/p}} \begin{pmatrix} |(f, b_1)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_1) \\ \vdots \\ |(f, b_N)|^{q-1} \operatorname{sign}(f, b_N) \end{pmatrix} = x^*(f).$$

Второе утверждение леммы 3 доказано.

Доказательство леммы 4. Представим B' следующим образом:

$$B' u = \big((y^1, u), \dots, (y^n, u)\big)^{\mathrm{T}}, \quad u \in l_p,$$

где $y^1, \dots, y^n$ – некоторые линейные функционалы.

Пусть верно включение $B' \in l_q^n$. В силу [15, разд. 3, §3, Гл. IV] для всех $i = \overline{1,n}$ функционалы $y^i : l_p \to \mathbb{R}$ являются ограниченными и определенными на всем l_p, т.е.

$$\sup_{\|u\|_{l_p} \le 1} |(y^i, u)| = C_i < \infty, \quad \mathcal{D}_{B'} = l_p.$$

Отсюда, согласно определению ограниченного оператора [15, разд. 2, §5, Гл. IV], следует ограниченность множества $\mathcal{U}_p(B')$ в $\mathbb{R}^n$ в смысле нормы

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|.$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ – конечномерное пространство, то все нормы в нем эквивалентны [15, разд. 3, Гл. III], а следовательно, $\mathcal{U}_p(B')$ ограничено в $\mathbb{R}^n$ в смысле любой нормы.

Пусть $B' \not\subseteq l_q^n$, что равносильно существованию $j = \overline{1,n}$, такого, что $y^j \not\subseteq l_q$. Согласно [15, разд. 3, §2, Гл. IV], y^j не является ограниченным функционалом в l_p, что с учетом [15, разд. 2, §1, Гл. IV] предполагает его неограниченность на $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда найдется последовательность $\{u^{(N)}\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_p(\infty)$, на которой функционал y^j определен, но при этом неограничен, т.е. для всех $C > 0$ можно подобрать число $N_C \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|(y^j, u^{(N_C)})| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)}\right| > 2C.$$

С другой стороны, в силу сходимости ряда существует $K_C \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left|\sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)}\right| < C.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{K_C} y_k^j u_k^{(N_C)}\right| \ge \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)}\right| - \left|\sum_{k=K_C+1}^{\infty} y_k^j u_k^{(N_C)}\right| > C. \tag{П.3}$$

Пусть

$$\tilde{u}^{(M)} = (u_1^{(N_M)}, \ldots, u_{K_M}^{(N_M)}, 0, \ldots).$$

Тогда верно включение $\{\tilde{u}^{(M)}\}_{M\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_p(\infty) \cap \mathcal{D}_{B'}$, так как для каждого $M \in \mathbb{N}$ последовательность $\tilde{u}^{(M)}$ финитна. Однако с учетом (П.3) справедливы соотношения

$$\left\|B'\tilde{u}^{(M)}\right\|_\infty = \max_{i=1,n}\left|\left(y^i, \tilde{u}^{(M)}\right)\right| \ge \left|(y^j, \tilde{u}^{(M)})\right| = \left|\sum_{k=1}^{K_M} y_k^j u_k^{(N_M)}\right| > M.$$

Поскольку $\left\{B'\tilde{u}^{(M)}\right\}_{M\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_p(B')$, согласно (2.4), то множество $\mathcal{U}_p(B')$ неограничено в смысле нормы $\|\cdot\|_\infty$, а следовательно, неограничено в $\mathbb{R}^n$ в смысле любой нормы в силу их эквивалентности.

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть $x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N)$, т.е. существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, такой, что $x \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$. Откуда в силу (2.1) существует $(u_1, \ldots, u_{\tilde{N}})^{\mathrm{T}} \in \mathcal{E}_p(\tilde{N})$, удовлетворяющий равенству

$$x = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} u_j b_j.$$

Но тогда $(u_1, \ldots, u_{\tilde{N}}, 0, \ldots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, что в силу (2.4) равносильно включению $x \in \mathcal{U}_p(B')$. Отсюда следует, что

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathcal{U}_p(B').$$

Поскольку по условию $B' : l_p \to \mathbb{R}^n$ является ограниченным оператором, то с учетом (2.4) множество $\mathcal{U}_p(B')$ замкнуто, так как является образом замкнутого множества $\mathcal{E}_p(\infty)$. Тогда

$$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)} \subset \overline{\mathcal{U}_p(B')} = \mathcal{U}_p(B').$$

Произвольный $x \in \mathcal{U}_p(B')$ – предельная точка множества $\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)$. Согласно (2.4), найдется $u = (u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такой, что $x = B'u$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим $u^{(N)} \in \mathbb{R}^N$:

$$u^{(N)} = (u_1, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}}.$$

По построению $u^{(N)} \in \mathcal{E}_p(N)$. Тогда в силу (2.1) верно включение

$$\{B_N u^{(N)}\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathbb{R}^n.$$

При этом в смысле любой нормы в $\mathbb{R}^n$ с учетом неравенства Гельдера справедливы соотношения

$$\|B'u - B_N u^{(N)}\| = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k u_k\right\| \le \sum_{k=N+1}^{\infty}\|b_k\||u_k| \le \left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\|b_k\|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Сходимость выполняется, потому что оба сомножителя являются остатками сходящихся рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III], где ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|b_k\|^q$ сходится, поскольку $B' \in l_q^n$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p$ сходится, так как $u \in \mathcal{E}_p(\infty)$. Получаем

$$\mathcal{U}_p(B') \subset \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathcal{U}_p(B_N)}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $y^i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots) \in l_q$ не финитна для некоторого $i = \overline{1,n}$. Вычислим норму $\tilde{u} \in l_p$:

$$\|\tilde{u}\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{|b_{ij}|^{q-1}\operatorname{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}}\right|^p\right)^{1/p} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^{qp(1-1/q)}\right)^{1/p}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^q\right)^{1/q\cdot q/p}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = 1.$$

Тогда по определению $\tilde{u} \in \mathcal{E}_p(\infty)$ и в силу (2.4)

$$\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B').$$

Рассмотрим следующую гиперплоскость:

$$\mathcal{H}_i = \left\{u \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}u_j = \|y^i\|_{l_q}\right\} \subset l_p.$$

По построению

$$\tilde{x}_i = (y^i, \tilde{u}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|b_{ij}|^{q-1} b_{ij}\operatorname{sign} b_{ij}}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|b_{ij}|^q}{\|y^i\|_{l_q}^{q/p}} = \|y^i\|_{l_q}^{q-q/p} = \|y^i\|_{l_q}.$$

В силу неравенства Гельдера [15, разд. 2, §1, Гл. IV]

$$\max_{u\in\mathcal{E}_p(\infty)}(y^i, u) \le \max_{\|u\|_{l_p}\le 1}\|y^i\|_{l_q}\|u\|_{l_p} \le \|y^i\|_{l_q} = (y^i, \tilde{u}).$$

Тогда гиперплокость $\mathcal{H}_i$ является опорной к множеству $\mathcal{E}_p(\infty)$ в точке $\tilde{u} \in \partial\mathcal{E}_p(\infty)$. Так как $\mathcal{E}_p(\infty)$ представляет собой строго выпуклое множество при $p \in (1;+\infty)$, то $\tilde{u}$ – единственная точка касания [4, лемма 3]:

$$\{\tilde{u}\} = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{E}_p(\infty).$$

Другими словами, для любой $u \in \mathcal{E}_p(\infty)\backslash\{\tilde{u}\}$ верно неравенство $(B'u)_i = (y_i, u) < (y_i, \tilde{u}) = \tilde{x}_i$. Следовательно, $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B')$ имеет единственный прообраз при отображении B', но при этом не существует $N \in \mathbb{N}$, такого, что $x \in \mathcal{U}_p(B_N)$, так как последовательности y^i и $\tilde{u}$ по условию не являются финитными. Окончательно получим, что

$$\tilde{x} \not\in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство следствия 1. Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из леммы 6 и того факта, что в случае финитности всех $y^1, \ldots, y^n \in l_q$ существует $N_0 \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\mathcal{U}_p(B_{N_0}) = \mathcal{U}_p(B_N) = \mathcal{U}_p(B'), \quad N \geq N_0.$$

Лемма 14 ([3]). Для любого $f \in l_q\backslash\{0\}$ вектор

$$u^* = \frac{1}{\|f\|_{l_q}^{q/p}}\left(|f_1|^{q-1}\operatorname{sign} f_1, |f_2|^{q-1}\operatorname{sign} f_2, \ldots\right)$$

является единственным решением оптимизационной задачи

$$(f, u) \to \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)}.$$

Доказательство леммы 7. Рассмотрим произвольный

$$\tilde{x} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть для всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\dim \operatorname{Lin}\{b_N, b_{N+1}, \ldots\} = n$. Тогда существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что $\tilde{x} \in \mathcal{U}_p(B_{\tilde{N}})$, что в силу (2.1) и (2.4) эквивалентно существованию $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{\tilde{N}}, 0, \ldots) \in \mathcal{E}_p(\infty)$, такого, что верно равенство

$$\tilde{x} = B_{\tilde{N}}\left(\tilde{u}_1 \; \ldots \; \tilde{u}_{\tilde{N}}\right)^{\mathrm{T}} = B'\tilde{u}.$$

Рассмотрим произвольный $f \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Тогда с учетом леммы 14

$$\max_{x \in \mathcal{U}_p(B')}(f, x) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)}(f, B'u) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty}(f, b_j)u_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|(f, b_j)|^q\right)^{1/q},$$

$$u^* = \arg\max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty}(f, b_j)u_j = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|(f, b_j)|^q\right)^{1/p}}\left(|(f, b_1)|^{q-1}\operatorname{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1}\operatorname{sign}(f, b_2), \ldots\right).$$

При этом u^* – единственная точка максимума, т.е. для всех $u \in \mathcal{E}_p(\infty)\backslash\{u^*\}$ верны соотношения

$$(f, B'u^*) = \sum_{j=1}^{\infty}(f, b_j)u_j^* > \sum_{j=1}^{\infty}(f, b_j)u_j = (f, B'u). \tag{П.4}$$

Следовательно, не существует $u \in \mathcal{E}_p(\infty)\backslash\{u^*\}$, такого, что $B'u^* = B'u$. Равенство $B'u^* = B'\tilde{u}$ верно тогда и только тогда, когда $u^* = \tilde{u}$. Это эквивалентно следующим условиям:

$$(f, b_j) = 0, \quad j > \tilde{N},$$

$$f \in \operatorname{Lin}^{\perp}\{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \ldots\},$$

что в силу условия $f \neq 0$ равносильно неравенствам

$$\dim \mathrm{Lin}^{\perp}\{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \ldots\} \geq 1,$$

$$\dim \mathrm{Lin}\{b_{\tilde{N}+1}, b_{\tilde{N}+2}, \ldots\} < n.$$

Получили противоречие. Иначе говоря, равенство $u^* = \tilde{u}$ невозможно, что с учетом (П.4) и определения нормального конуса означает, что для всех $f \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$\max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x) = (f, B'u^*) > (f, B'\tilde{u}) = (f, \tilde{x}),$$

$$\mathcal{N}(\tilde{x}, \mathcal{U}_p(B')) = \varnothing.$$

Тогда из определения нормального конуса $\tilde{x} \in \mathrm{int}\, \mathcal{U}_p(B')$, т.е.

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \subset \mathrm{int}\, \mathcal{U}_p(B'),$$

что с учетом леммы 5 приводит к равенству

$$\mathrm{int}\, \mathcal{U}_p(B') = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Пусть существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\dim \mathrm{Lin}\{b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots\} < n.$$

Тогда

$$\dim \mathrm{Lin}^{\perp}\{b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots\} \geq 1,$$

$$\mathrm{Lin}^{\perp}\{b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots\} \backslash \{0\} \neq \varnothing.$$

Выберем произвольный $f \in \mathrm{Lin}^{\perp}\{b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots\} \backslash \{0\}$ и построим $u^* \in \mathcal{E}_p(\infty)$ следующего вида:

$$u^* = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |(f, b_j)|^q\right)^{1/p}} \left(|(f, b_1)|^{q-1} \mathrm{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1} \mathrm{sign}(f, b_2), \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{N} |(f, b_j)|^q\right)^{1/p}} \left(|(f, b_1)|^{q-1} \mathrm{sign}(f, b_1), \ldots, |(f, b_N)|^{q-1} \mathrm{sign}(f, b_N), 0, \ldots\right).$$

В силу леммы 14

$$(f, B'u^*) = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} \sum_{j=1}^{\infty} (f, b_j) u_j = \max_{u \in \mathcal{E}_p(\infty)} (f, B'u) = \max_{x \in \mathcal{U}_p(B')} (f, x).$$

Поскольку с учетом (2.4) $B'u^* \in \mathcal{U}_p(B')$, то, согласно определению нормального конуса, $f \in \mathcal{N}(B'u^*, \mathcal{U}_p(B'))$, откуда следует, что

$$B'u^* \in \partial \mathcal{U}_p(B').$$

Однако по построению u^* финитна и $B'u^* \in \mathcal{U}_p(B_N)$. Тогда

$$B'u^* \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N) \backslash \mathrm{int}\, \mathcal{U}_p(B'),$$

$$\mathrm{int}\, \mathcal{U}_p(B') \neq \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{U}_p(B_N).$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 8. В силу [15, разд. 3, §2, Гл. IV] $B' : l_p \to \mathbb{R}^n$ является линейным и ограниченным оператором. Согласно [4], лемма 5, для строго выпуклого множества $\mathscr{E}_p(\infty)$ и произвольного $u \in \mathscr{E}_p(\infty)$ верно равенство

$$\mathcal{N}(B'u, B'\mathscr{E}_p(\infty)) = (B'^*)^{-1}(\mathcal{N}(u, \mathscr{E}_p(\infty))) \cup (\ker B'^* \setminus \{0\}),$$

где через $B'^* : \mathbb{R}^n \to l_q$ обозначен оператор, сопряженный к B' [15, разд. 5, §5, Гл. IV]. В силу (2.2) справедливо условие $\ker B'^* = \{0\}$. Так же, как продемонстрировано в [4], пример 1,

$$\mathcal{N}(u, \mathscr{E}_p(\infty)) = \operatorname{cone}\{(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\operatorname{sign}u_2, \ldots)\}\setminus\{0\}.$$

Тогда с учетом представления (2.4)

$$\mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) = (B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\operatorname{sign}u_2, \ldots) : \alpha > 0\right\}\right) =$$

$$= \bigcup_{\alpha>0}(B'^*)^{-1}\left(\left\{\alpha(|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\operatorname{sign}u_2, \ldots)\right\}\right) =$$

$$= \operatorname{cone}\left\{f \in \mathbb{R}^n : B'^* f = (|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\operatorname{sign}u_2, \ldots)\right\}\setminus\{0\}.$$

Поскольку справедливо условие (2.2), уравнение

$$B'^* f = (|u_1|^{p-1}\operatorname{sign}u_1, |u_2|^{p-1}\operatorname{sign}u_2, \ldots)$$

имеет либо одно, либо нуль решений, т.е.

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \le 1.$$

При этом в случае $B'u \in \partial\mathcal{U}_p(B')$ с учетом определения нормального конуса справедлива нижняя оценка:

$$\mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \ne \varnothing,$$

$$\dim \mathcal{N}(B'u, \mathcal{U}_p(B')) \ge 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 8.

С другой стороны,

$$\arg\max_{x \in \mathcal{U}_p(B')}(f, x) = B' \arg\max_{u \in \mathscr{E}_p(\infty)}(f, B'u) = B' \arg\max_{u \in \mathscr{E}_p(\infty)}(B'^* f, u) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|(f, b_i)|^q\right)^{1/p}} B'\left(|(f, b_1)|^{q-1}\operatorname{sign}(f, b_1), |(f, b_2)|^{q-1}\operatorname{sign}(f, b_2), \ldots\right).$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 14.

С учетом определения B' второе утверждение леммы 8 доказано.

Доказательство леммы 9. Доказательство леммы вытекает непосредственно из определений (1.3), (1.4) и определения множеств $\mathscr{E}_p(N)$ и $\mathcal{U}_p(B_N)$.

Доказательство теоремы 1. Пункт 1 следует из определения множеств достижимости (1.3) и управляемости (1.4) пункт 2 – из лемм 1 и 9, пункт 3 – из леммы 2, пункт 4 – из лемм 2 и 3 и п. 1 леммы 9. Аналогично пункт 5 вытекает из тех же лемм при использовании п. 2 леммы 9.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим ограниченность $\mathcal{Y}_{p,\infty}$. Пусть $h_1, \ldots, h_n \subset \mathbb{R}^n$ – жорданов базис матрицы A, а вектор b допускает разложение $b = \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_n h_n$. Обозначим через $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ невырожденную матрицу, задающую преобразование подобия A к ее вещественной жордановой форме [20, разд. 3.4, Гл. 3]:

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \qquad (\text{П.5})$$

где каждый блок J_i соответствует либо вещественному собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, \qquad (\text{П.6})$$

либо соответствует паре комплексно-сопряженных собственных значений $r\mathrm{e}^{\pm i\varphi} \in \mathbb{C}$ матрицы A и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} r_iA_{\varphi_i} & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_iA_{\varphi_i} & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_iA_{\varphi_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_iA_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, \qquad A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.7})$$

Заметим, что в случае (П.7) n_i четное. Также в силу представления (П.5) включения $(b, Ab, A^2b, \ldots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \ldots) \in l_q^n$ равносильны.

Согласно определению жорданова базиса, $S^{-1}b = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$. Сгруппируем координаты вектора $S^{-1}b$ в соответствии с размерностями и расположением жордановых клеток в разложении (П.5) и введем следующие обозначения:

$$S^{-1}b = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,n_1}, \ldots, \alpha_{m,1}, \ldots, \alpha_{m,n_m})^{\mathrm{T}},$$
$$J^kS^{-1}b = (\alpha_{1,1}(k), \ldots, \alpha_{1,n_1}(k), \ldots, \alpha_{m,1}(k), \ldots, \alpha_{m,n_m}(k))^{\mathrm{T}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом разложения (П.5) для любых $i = \overline{1,m}$ верно соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i} \end{pmatrix}.$$

1. В случае (П.6) для всех $k \geq n_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-2}\lambda_i^{k-n_i+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{n_i-3}\lambda_i^{k-n_i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_k^j обозначено число сочетаний из k по j:

$$C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Получим представление

$$\alpha_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{n_i} \alpha_{i,l} C_k^{l-j} \lambda_i^{k-l+j}, \quad j = \overline{1,n_i}.$$

Если $|\lambda_i| < 1$ и $k > 2(n_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$|\alpha_{i,j}(k)| \le \sum_{l=j}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{l-j} |\lambda_i|^{k-l+j} \le \sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}| C_k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \le$$

$$\le \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i-1)!} \frac{k!}{(k-n_i+1)!} |\lambda_i|^{k-n_i+1} \le \frac{\sum_{l=1}^{n_i} |\alpha_{i,l}|}{(n_i-1)!} k^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-n_i+1}.$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1, Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \ldots) \in l_q$.

Пусть $|\lambda_i| \ge 1$ и существует $j = \overline{1, n_i}$, такой, что $\alpha_{i,j} \ne 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = n_i$ или $\alpha_{i,j+1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$. Тогда

$$\alpha_{i,j}(k) = \alpha_{i,j} \lambda_i^k,$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \ldots) \not\in l_q$.

Если $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \ldots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.6) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) \cdots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $|\lambda_i| < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

2. В случае (П.7) учтем, что n_i четное, и введем обозначения

$$\tilde{n}_i = \frac{n_i}{2}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1} \\ \alpha_{i,2j} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} \alpha_{i,2j-1}(k) \\ \alpha_{i,2j}(k) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Для всех $k \ge \tilde{n}_i - 1$ справедливо представление

$$J_i^k = \begin{pmatrix} r_i^k A_{k\varphi} & C_k^1 r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & C_k^2 A_{(k-2)\varphi} r_i^{k-2} & \cdots & C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} A_{(k-\tilde{n}_i+1)\varphi} \\ 0 & r_i^k A_{k\varphi} & C_k^i r_i^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & \cdots & C_k^{\tilde{n}_i-2} r_i^{k-\tilde{n}_i+2} A_{(k-\tilde{n}_i+2)\varphi} \\ 0 & 0 & r_i^k A_{k\varphi} & \cdots & C_k^{\tilde{n}_i-3} r_i^{k-\tilde{n}_i+3} A_{(k-\tilde{n}_i+3)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_i^k A_{k\varphi} \end{pmatrix},$$

Следовательно, получим представление

$$\tilde{\alpha}_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}, \quad j = \overline{1, \tilde{n}_i}.$$

Если $r_i < 1$ и $k > 2(\tilde{n}_i - 1)$, то также справедливы оценки

$$\max\{|\alpha_{i,2j-1}(k)|, |\alpha_{i,2j}(k)|\} \le \|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| \le \sum_{l=j}^{\tilde{n}_i} \|A_{(k-l+j)\varphi} \tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{l-j} r_i^{k-l+j} \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\| C_k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \le \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i-1)!} \frac{k!}{(k-\tilde{n}_i+1)!} r_i^{k-\tilde{n}_i+1} \le \frac{\sum_{l=1}^{\tilde{n}_i} \|\tilde{\alpha}_{i,l}\|}{(\tilde{n}_i-1)!} k^{\tilde{n}_i-1} r_i^{k-\tilde{n}_i+1}.$$

Откуда с учетом определения пространства l_q и критериев сходимости числовых рядов [23, разд. 4, §1. Гл. III] следует, что $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \ldots) \in l_q$ и $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \ldots) \in l_q$.

Пусть $r_i \geq 1$ и существует $j = \overline{1, \tilde{n}_i}$, такой, что $\|\tilde{\alpha}_{i,j}\| \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что $j = \tilde{n}_i$ или $\|\tilde{\alpha}_{i,j+1}\| = \ldots = \|\tilde{\alpha}_{i,\tilde{n}_i}\| = 0$. Тогда

$$\|\tilde{\alpha}_{i,j}(k)\| = \|A_{k\varphi}\tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k = \|\tilde{\alpha}_{i,j}\| r_i^k,$$

т.е. $(\|\tilde{\alpha}_{i,j}\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(1)\|, \|\tilde{\alpha}_{i,j}(2)\|, \ldots) \not\in l_q$. Отсюда с учетом неравенства Минковского следует, что хотя бы одна последовательность $(\alpha_{i,2j-1}, \alpha_{i,2j-1}(1), \alpha_{i,2j-1}(2), \ldots)$ или $(\alpha_{i,2j}, \alpha_{i,2j}(1), \alpha_{i,2j}(2), \ldots)$ не принадлежит l_q.

Если $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$, то при любых значениях $r_i \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{i,j}(k) = 0, \quad j = \overline{1, n_i},$$

т.е. $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(1), \alpha_{i,j}(2), \ldots) = 0 \in l_q$.

Получаем, что в случае (П.7) включение

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,1}(1) & \alpha_{i,1}(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{i,n_i} & \alpha_{i,n_i}(1) & \alpha_{i,n_i}(2) & \cdots \end{pmatrix} \in l_q^{n_i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо $r_i < 1$, либо $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$.

Окончательно, включения $(b, Ab, A^2b, \ldots) \in l_q^n$ и $(S^{-1}b, JS^{-1}b, J^2S^{-1}b, \ldots) \in l_q^n$, равносильные, согласно (П.5), справедливы тогда и только тогда, когда $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n_i} = 0$ для всех $i = \overline{1, m}$, которые соответствуют собственным значениям матрицы A по модулю не меньшим 1, т.е. $b \in \mathbb{L}_{<1}$. В силу лемм 4, 5 и п. 1 леммы 9 данный факт эквивалентен ограниченности $\mathcal{Y}_{p,\infty}$.

С учетом определения (1.5) и леммы 5 множество $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ с точностью до замыкания совпадает с $\mathcal{U}_p(B')$, если $B' = (b, Ab, A^2b, \ldots)$. Тогда остальные свойства $\mathcal{Y}_{p,\infty}$ следуют из леммы 8. А выражение для опорной функции вытекает непосредственно из ее определения:

$$s(f, \mathcal{Y}_{p,\infty}) = \sup_{x \in \mathcal{Y}_{p,\infty}} (f, x) = (f, y^*(f)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |(f, A^i b)|^q \right)^{1/q}.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим вопросы ограниченности $\mathcal{X}_{p,\infty}$. Если $\det A = 0$, то у матрицы A существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Тогда, согласно (1.4) верно включение $\mathrm{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_p(1)$, что с учетом (1.6) приводит к включению $\mathrm{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_{p,\infty}$, откуда следует, что $\mathcal{X}_{p,\infty}$ неограничено. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица A^{-1}, собственные значения которой взаимнообратны собственным значениям A [20, Гл. I]. Отсюда ясно, что доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, если заменить A на A^{-1}.

Доказательство следствия 2. Доказательство следствия 2 вытекает из теорем 2, 3 и того факта, что $\det A \neq 0$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A отличны от нуля [20, утверждение 1.1.7].

Обозначим через $H^* : l_2 \to l_2$ оператор, сопряженный к линейному и ограниченному оператору $H : l_2 \to l_2$ [15, разд. 6, §5, Гл. IV].

Лемма 15. Пусть линейные и ограниченные операторы $H_{11} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H_{12} : \mathbb{R}^n \to l_2$, $H_{22} : l_2 \to l_2$, такие, что $H : l_2 \to l_2$ является линейным, ограниченным, положительно определенным и самосопряженным оператором, где

$$Hu = (H_{11}(u_1, \ldots, u_n) + H_{12}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots), H_{12}(u_1, \ldots, u_n) + H_{22}^*(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)),$$

$$Pu = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathcal{U} = \{u \in l_2 : (u, Hu) \leq 1\}.$$

Тогда

$$P\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \le 1\}.$$

Доказательство леммы 15. В силу положительной определенности и самосопряженности оператора H оператор H_{22} также является положительно определенным и самосопряженным. Тогда $(u, H_{22}u) > 0$ для всех $u \in l_2 \setminus \{0\}$, H_{22} обратим [16, разд. 4, гл. X]. Рассмотрим цепочку равенств

$$P\mathcal{U} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : \big((x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots), H(x_1, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots)\big) \le 1\Big\} =$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in l_2 : (x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u) \le 1\Big\} =$$

$$= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} \big((x, H_{11}x) + 2(H_{12}x, u) + (u, H_{22}u)\big) \le 1\Big\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \min_{u \in l_2} \Big((x, H_{11}x) - (H_{22}^{-1}H_{12}x, H_{12}x) + (u + H_{22}^{-1}H_{12}x, H_{22}(u + H_{22}^{-1}H_{12}x))\Big) \le 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : (x, H_{11}x) - (x, H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12}x) \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_{11} - H_{12}^* H_{22}^{-1} H_{12})x) \le 1\}.$$

Лемма 15 доказана.

Доказательство леммы 10. Для случая $N > n$ выберем $B' = (B_N, 0, \ldots) : l_p \to \mathbb{R}^n$, определим матрицу $\hat{B}_N = (b_{n+1}, \ldots, b_N) \in \mathbb{R}^{n \times (N-n)}$ и оператор $\tilde{B} : l_p \to l_p$:

$$\tilde{B}u = (B' u, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots).$$

В силу (2.2) оператор $\tilde{B}$ обратим. Тогда

$$\tilde{B}\mathcal{E}_2(N) = \Big\{u \in l_2 : (\tilde{B}^{-1}u, \tilde{B}^{-1}u) \le 1\Big\} = \Big\{u \in l_2 : (u, (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}u) \le 1\Big\}.$$

Поскольку

$$\tilde{B}^{-1}u = (B_n^{-1}(u_1, \ldots, u_n) - B_n^{-1}B(u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots), u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots),$$

где $B = (0, 0, \ldots)$ для $N = n$ и $B = (\hat{B}_N, 0, \ldots)$ для $N > n$, положительно определенный и самосопряженный оператор $H = (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{B}^{-1}$ допускает представление, описанное в лемме 15:

$$H_{11} = (B_n^{-1})^{\mathrm{T}} B_n^{-1} = H_n,$$

$$H_{12} = -B^*(B_n^{-1})^{\mathrm{T}} B_n^{-1} = -B^* H_n,$$

$$H_{22} = B^*(B_n^{-1})^{\mathrm{T}} B_n^{-1}B + I = B^* H_n B + I.$$

Отсюда, согласно лемме 15, представление множества $\mathcal{U}_2(B_N)$ для случая $N = n$ следует непосредственно. Для случая $N > n$ при учете того, что в силу финитности последовательности B справедливо соотношение

$$Bu = \hat{B}_N \left(u_{n+1} \ \ldots \ u_N\right)^{\mathrm{T}},$$

вытекает представление

$$\mathcal{U}_2(B_N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, (H_n - H_n\hat{B}_N(\hat{B}_N^{\mathrm{T}} H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^{\mathrm{T}} H_n)x) \le 1\}.$$

При этом, согласно тождеству Шермана–Моррисона–Вудбери [24, §5.1, Гл. 5], верно равенство

$$H_n - H_n\hat{B}_N(\hat{B}_N^{\mathrm{T}} H_n \hat{B}_N + I)^{-1} \hat{B}_N^{\mathrm{T}} H_n = (B_N B_N^{\mathrm{T}})^{-1} = H_N.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 16. Пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметрическая и положительно определенная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – эллипсоид:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}} Hx \le 1\}.$$

Тогда

$$\mathcal{Y} = \left\{\alpha_1 b + \alpha_2 x : x \in \mathcal{X}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \le 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}\left(H - \frac{Hbb^{\mathrm{T}}H}{1 + b^{\mathrm{T}}Hb}\right)x \le 1\right\}.$$

Доказательство леммы 16. По построению $\mathcal{Y}$ является выпуклым множеством и $0 \in \operatorname{int}\mathcal{Y}$. Построим функционал Минковского $\mu(y,\mathcal{Y})$. Согласно определению, вычисление функционала Минковского сводится к решению следующих эквивалентных оптимизационных задач:

$$\mu(y,\mathcal{Y}) = \min\{\gamma > 0 : y = \alpha_1 b + \alpha_2 x, x^{\mathrm{T}}Hx = 1, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \gamma^2\} =$$
$$= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : \alpha_2 x = \alpha_1 b - y, (\alpha_2 x)^{\mathrm{T}}H(\alpha_2 x) = \alpha_2^2\} =$$
$$= \min\{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} : (\alpha_1 b - y)^{\mathrm{T}}H(\alpha_1 b - y) = \alpha_2^2\} = \min_{\alpha_1\in\mathbb{R}}\sqrt{\alpha_1^2 + (\alpha_1 b - y)^{\mathrm{T}}H(\alpha_1 b - y)} =$$
$$= \min_{\alpha_1\in\mathbb{R}}\sqrt{\alpha_1^2(1 + b^{\mathrm{T}}Hb) - 2\alpha_1 b^{\mathrm{T}}Hy + y^{\mathrm{T}}Hy} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{b^{\mathrm{T}}Hy}{1 + b^{\mathrm{T}}Hb}\right)^2(1 + b^{\mathrm{T}}Hb) - 2\frac{b^{\mathrm{T}}Hy}{1 + b^{\mathrm{T}}Hb}b^{\mathrm{T}}Hy + y^{\mathrm{T}}Hy} =$$
$$= \sqrt{y^{\mathrm{T}}Hy - \frac{y^{\mathrm{T}}Hbb^{\mathrm{T}}Hy}{1 + b^{\mathrm{T}}Hb}} = \sqrt{y^{\mathrm{T}}\left(H - \frac{y^{\mathrm{T}}Hbb^{\mathrm{T}}Hy}{1 + b^{\mathrm{T}}Hb}\right)y}.$$

С учетом (П.1)

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n : \mu(y,\mathcal{Y}) \le 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : (\mu(y,\mathcal{Y}))^2 \le 1\}.$$

Лемма 16 доказана.

Доказательство леммы 11. Представления (4.1) корректны в силу лемм 9 и 10. С учетом (2.1) справедлива цепочка равенств

$$\mathcal{Y}_2(N+1) = \left\{\sum_{k=0}^{N}A^k bu_k : \sum_{k=0}^{N}u_k^2 \le 1\right\} = \left\{u_0 b + A\sum_{k=0}^{N-1}A^k bu_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^{N}u_k^2 \le 1\right\} =$$
$$= \left\{u_0 b + \alpha x : x \in A\mathcal{Y}_2(N), u_0^2 + \alpha^2 \le 1\right\} = \left\{y \in \mathbb{R}^n : (y, H_{\mathcal{Y},N+1}y) \le 1\right\}.$$

Здесь последнее равенство обусловлено леммой 16 и равенством

$$A\mathcal{Y}_2(N) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,(A^{-1})^{\mathrm{T}}H_{\mathcal{Y},N}A^{-1}x) \le 1\}.$$

В силу леммы 9 описание $\mathcal{X}_2(N+1)$ строится аналогично при замене A на A^{-1} и b на $A^{-1}b$.

Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Представление $\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty}$ и $\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ в форме эллипсоидальных множеств в случае их ограниченности следует из леммы 15 с учетом леммы 9 и предположения (1.2).

Согласно лемме 9, и представлению (2.4), верны равенства

$$\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}A^k bu_k : \sum_{k=0}^{\infty}u_k^2 \le 1\right\} = \left\{u_0 b + A\sum_{k=0}^{\infty}A^k bu_{k+1} : u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}u_k^2 \le 1\right\} =$$
$$= \left\{u_0 b + \alpha x : x \in A\overline{\mathcal{Y}}_{2,\infty}, u_0^2 + \alpha^2 \le 1\right\},$$

$$\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k} bu_k : \sum_{k=1}^{\infty}u_k^2 \le 1\right\} = \left\{u_1 A^{-1}b + A^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k} bu_{k+1} : u_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty}u_k^2 \le 1\right\} =$$
$$= \left\{u_1 A^{-1}b + \alpha x : x \in A^{-1}\overline{\mathcal{X}}_{2,\infty}, u_1^2 + \alpha^2 \le 1\right\}.$$

Откуда в силу леммы 16 следуют представления для $H_{\mathcal{Y},\infty}$ и $H_{\mathcal{X},\infty}$ через соответствующие алгебраические дискретные уравнения Риккати.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АиТ. 2015. № 9. С. 3–30.
3. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.
4. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.
5. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.
6. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2022. № 126. Доступ в журн. http://trudymai.ru/published.php.
7. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
8. *Gayek J.E., Fisher M.E.* Approximating Reachable Sets for n-Dimensional Linear Discrete Systems // IMA J. Mathematical Control and Information. 1987. V. 4. № 2. P. 149–160.
9. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1-ограничениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 3–21.
10. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // IEEE-CGA. 1981. V. 1. № 1. P. 11–23.
11. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // J. Geophysical Research. 1973. V. 78. № 11. P. 1753–1759.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
13. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элменты выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 440 с.
14. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. 716 p.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012. 570 с.
16. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 663 с.
17. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010. 119 с.
18. *Sonnevend G.* Asymptotically Optimal, Sequential Methods for the Approximation of Convex, Compact Sets in R-n in the Hausdorff Metrics // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. 1980. V. 35. № 2. P. 1075–1089.
19. *Gainanov D.N., Chernavin P.F., Rasskazova V.A.* Convex Hulls in Solving Multiclass Pattern Recognition Problem // Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 12096. P. 390–401.
20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 667 с.
21. *Lancaster P., Rodman L.* The Algebraic Riccati Equation. Oxford: Clarendon Press, 1995. 477 p.
22. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т.* Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез и управление. М.: МАИ, 2000. 568 с.
23. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, 1981. 544 с.
24. *Householder A.S.* The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Waltham: Blaisdell, 1964. 257 p.