

О ДВИЖЕНИИ НА КОНЬКАХ РОБОТА, УПРАВЛЯЕМОГО ВНУТРЕННИМ МАХОВИКОМ¹

© 2023 г. Л. А. Климина^а, Е. С. Шалимова^{а,*}

^аНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 17.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Рассматривается движение по шероховатой плоскости осесимметричного робота, управляемого при помощи установленного на нем маховика. Предполагается, что корпус робота контактирует с плоскостью в трех точках, при этом в двух точках действует сила сухого анизотропного трения, а в третьей трение изотропно. Строится управление внутренним маховиком, которое обеспечивает движение объекта в заданном направлении. Изучается зависимость средней скорости центра масс робота от параметров системы.

DOI: 10.31857/S0002338823030071, EDN: EUMHEG

Введение. Изучение и создание новых типов устройств, которые приводятся в движение за счет перемещения внутренних масс, представляет собой актуальную задачу. Подвижные элементы таких устройств не контактируют с внешней средой, что позволяет использовать эти аппараты в агрессивных условиях.

Основы теории перемещения объектов с подвижными внутренними массами в различных средах заложены в таких работах, как [1–3], при этом данные аппараты могут иметь как неизменную, так и переменную геометрию. Управление движением может производиться разными способами. Например, в работах [4–6] оно осуществляется с помощью ротора и материальной точки, движущейся по прямой, а также в [5–7] рассматривается управление телом при помощи материальной точки, перемещающейся в плоскости. Для аппаратов с подвижными внутренними массами могут ставиться различные задачи управления, такие, как перемещение из заданного исходного положения в заданное конечное положение [6, 7] или движение вдоль заданного направления [8–10].

При перемещении роботов подобного типа по поверхности весьма существенное значение представляют тип и количество опор, характер трения между опорами и поверхностью. В частности, опоры с анизотропным трением могут способствовать формированию такого поля сил, которое поддерживает направленное продвижение аппарата. В качестве примера, наглядно демонстрирующего данный эффект, можно привести задачу о движении саней Чаплыгина с подвижным внутренним маховиком. В данном случае имеет место “предельная” степень анизотропии трения в опоре, полностью исключающая наличие скорости опорной точки по одному из направлений, связанных с корпусом объекта. Управление санями Чаплыгина при помощи внутреннего маховика рассмотрено в [11, 12]. Показано существование периодического режима продвижения аппарата, безреверсного по отношению к целевому направлению, проведена аналогия с перемещением похожего робота в жидкости, собран и протестирован макет. Качественные динамические эффекты, возникающие в подобных неголономных системах (в частности, для саней Чаплыгина с подвижными внутренними массами), описаны в [13, 14], при этом учитываются сила и момент вязкого трения, приложенные в опорной точке.

При решении практических задач динамики робота, использующего анизотропию трения для перемещения по поверхности, наиболее реалистичной представляется такая модель контакта, которая допускает скольжение опор в произвольном направлении, но учитывает зависимость

¹ Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

сухого трения в точке контакта от ориентации вектора скорости этой точки относительно системы координат, связанной с корпусом. Отметим, что анизотропия трения может быть связана со структурой (геометрией) опоры (конек Чаплыгина моделирует предельный случай такой анизотропии), а также может быть сформирована за счет целенаправленного изменения величины нормальной реакции. Во втором случае управление нормальной реакцией может осуществляться за счет перемещения внутренних масс, как, например, в публикациях [15, 16].

Остановимся подробнее на случае анизотропии сухого трения, связанной с геометрией опор. Робот с анизотропным сухим трением в одной опоре, управляемый внутренним маховиком, рассмотрен в [17]. При этом использована модель трения, предложенная в [18]. Описано влияние смещения центра масс и частоты вынуждающего воздействия (управляющего момента, приложенного к маховику) на среднюю скорость движения. Отдельно обсуждается предельный переход к случаю робота с коньком Чаплыгина.

В работе представлен робот с твердотельным корпусом на трех опорах, в двух из которых действует анизотропное сухое трение, описываемое моделью из [18]. Подобно статьям [11, 12, 17] управление аппаратом осуществляется посредством внутреннего маховика. Новизна рассматриваемой задачи обеспечивается наличием двух (а не одной) анизотропных опор, а также отличием модели трения от большинства известных исследований аппаратов с неизменяемой внешней геометрией, управляемых подвижными внутренними массами (аналогичное трение применено в модели подобного робота только в [17]). Показывается возможность безреверсного по отношению к целевому направлению продвижения аппарата, исследуется зависимость средней скорости от параметров конструкции и закона управления. В частности, демонстрируется возможность увеличения средней скорости продвижения аппарата по сравнению со случаем одной анизотропной опоры.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение робота в горизонтальной плоскости. Корпус робота имеет массу m_1 , центральный момент инерции J_1 и симметричен относительно вертикальной плоскости, проходящей через прямую $S\eta$, где S — центр масс. Корпус робота опирается на неподвижную шероховатую плоскость тремя точками A , B и C . В системе отсчета $S\xi\eta$, связанной с корпусом, точки A , B и C имеют координаты $(b, -a)$, $(-b, -a)$, $(0, c)$ соответственно (рис. 1).

Внутри корпуса установлен сбалансированный маховик с центром масс в точке S и проходящей через него вертикальной осью собственного вращения; m_2 — масса маховика, J_2 — центральный момент инерции. Маховик приводится в движение мотором, статор которого будем считать частью корпуса робота.

Опишем движение рассматриваемого аппарата в неподвижных горизонтальных осях Ox . Положение робота в них задается координатами (X, Y) центра масс S , а также углом φ поворота корпуса, который отсчитывается от положительного направления Ox до $S\xi$, и углом θ поворота маховика относительно корпуса робота.

В опорах A , B и C действуют силы сухого трения $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$, а также силы нормальной реакции $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_C$. Какие-либо другие внешние воздействия на робот отсутствуют. Трение в опорах

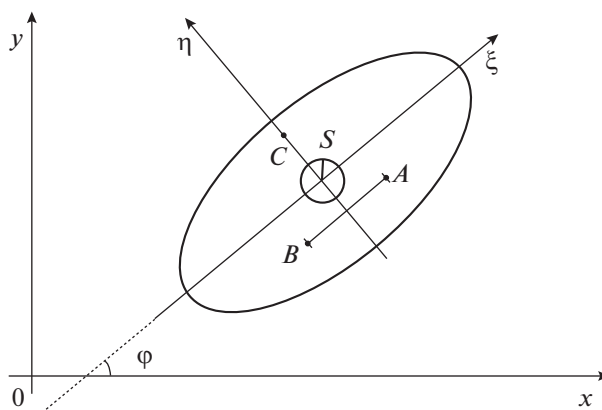


Рис. 1. Робот на горизонтальной плоскости

предполагается в общем случае анизотропным, соответствующая модель приведена в следующем разделе статьи.

Запишем для системы твердых тел, состоящей из корпуса и маховика, второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox , помимо этого и для корпуса, и для маховика используем закон изменения кинетического момента относительно центра масс S :

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{X} &= F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx}, \\(m_1 + m_2)\ddot{Y} &= F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy}, \\(m_1 + m_2)g &= N_A + N_B + N_C, \\J_1\dot{\omega}_1 &= -U + [\mathbf{SA}, \mathbf{F}_A]_z + [\mathbf{SB}, \mathbf{F}_B]_z + [\mathbf{SC}, \mathbf{F}_C]_z, \\J_2(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) &= U.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь $\omega_1 = \dot{\phi}$ — угловая скорость корпуса робота, ω_2 — угловая скорость маховика относительно корпуса, $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Cx}, F_{Cy}$ — компоненты сил трения $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}_C$ соответственно, N_A, N_B, N_C — величины реакции опоры в точках A, B и C , g — величина ускорения свободного падения, U — управляющий момент, приложенный к маховику, индекс z при векторном произведении обозначает проекцию на вертикальную ось Oz , дополняющую оси Ox и Oy до правой ортогональной системы координат.

Управляющий момент U требуется выбрать таким образом, чтобы организовать определенное движение робота. В качестве основной задачи управления будем рассматривать продвижение робота в положительном направлении оси Oy , т. е. обеспечение установившегося движения робота, при котором средняя (по времени на большом промежутке времени) скорость центра масс (а следовательно, и любой другой точки) имеет положительную проекцию на ось Oy , среднее отклонение центра масс от оси Oy является нулевым и скорости точек A, B и C не обращаются в ноль.

По аналогии с другими робототехническими системами, управляемыми внутренним маховиком, будем строить момент U следующим образом [17, 19]:

$$\begin{aligned}U &= \begin{cases} U_{\max}, & \tilde{U} \geq U_{\max}, \\ \tilde{U}(t), & U_{\max} \geq \tilde{U} \geq U_{\min}, \\ U_{\min}, & \tilde{U} \leq U_{\min}, \end{cases} \\ \tilde{U} &= k_1 \text{sign}(\sin(2\pi\kappa t)) + k_2\phi + k_3X.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь κ — частота вынуждающего воздействия, k_1 — его амплитуда, k_2 и k_3 — коэффициенты обратной связи, введенные для того, чтобы обеспечить нулевое значение среднего отклонения курса от заданного направления, $U_{\max}$ и $U_{\min}$ — ограничения на управляющий момент.

2. Модель сил трения в опорах. Основное внимание в статье будет уделено случаю, когда трение в “передней” опоре C изотропно (шаровая опора), а трение в “задних” опорах A и B анизотропно. Условно будем называть каждую опору с анизотропным сухим трением “коньком”. Для объяснения такого выбора далее будет проведено сравнение указанного случая с вариантами, когда все три опоры шаровые и когда все три — коньки.

Итак, пусть в шаровой опоре C действует сухое изотропное кулоновское трение с коэффициентом трения ε :

$$\mathbf{F}_C = -\varepsilon \frac{\mathbf{v}_C}{v_C} N_C, \quad N_C = \frac{(m_1 + m_2)ga}{(a + c)}.\tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}_C$ — вектор скорости точки C , v_C — абсолютная величина скорости точки C . Значение нормальной реакции в опоре вычисляется с учетом расположения трех опорных точек относительно центра масс.

В точках A и B действует анизотропное сухое трение, при этом анизотропия связана со свойствами опор, а не поверхности, по которой движется робот. Используем модель анизотропии трения, предложенную в [18]. Аналогичная модель рассматривалась, например, в работах [20, 21]. Необходимо отметить, что широко распространены и различные иные модели анизотропного трения, например [22, 23].

Изложим применяемую далее модель. Для описания анизотропии в [18] введено понятие тензора трения. В нашем случае считаем, что оси тензора трения для любого из коньков параллельны осям $S\xi\eta$. Тогда при движении конька вдоль направления $S\xi$ или $S\eta$ сила трения описывается классическим выражением для сухого кулоновского трения с коэффициентом трения μ или ε соответственно. При движении в произвольном направлении проекции силы трения F_i , $i = \{A, B\}$, на главные оси тензора трения $S\xi$, $S\eta$ определяются выражением

$$\begin{pmatrix} F_{i\xi} \\ F_{i\eta} \end{pmatrix} = -\frac{N_i}{v_i} \Theta \begin{pmatrix} v_{i\xi} \\ v_{i\eta} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad N_i = \frac{(m_1 + m_2)gc}{2(a + c)}, \quad i = \{A, B\}, \quad (2.2)$$

где $v_{i\xi}$, $v_{i\eta}$ — компоненты скорости v_i соответствующей точки в системе координат $S\xi\eta$, N_i — величина нормальной реакции в данной точке. Далее предполагаем, что $\mu > \varepsilon$. Условно будем считать, что в каждой из точек A и B находится конек, лезвие которого параллельно оси $S\eta$. Он может представлять собой, например, полукруг, опирающийся на плоскость в одной точке.

Отметим, что коэффициент трения в шаровой опоре C равен меньшему из коэффициентов трения, характеризующих конек. Иными словами, допускаем, что технические возможности позволяют при создании робота реализовать в опоре относительно небольшой коэффициент трения величины ε , однако в двух опорах коэффициент трения, отвечающий направлению $S\xi$, намеренно увеличен (значительно) и составляет $\mu > \varepsilon$.

Преобразуем теперь систему уравнений (1.1), описывающую движение корпуса. Она примет вид:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{X} &= F_{A\xi} \cos \varphi - F_{A\eta} \sin \varphi + F_{B\xi} \cos \varphi - F_{B\eta} \sin \varphi + F_{C\xi} \cos \varphi - F_{C\eta} \sin \varphi, \\ (m_1 + m_2) \ddot{Y} &= F_{A\xi} \sin \varphi + F_{A\eta} \cos \varphi + F_{B\xi} \sin \varphi + F_{B\eta} \cos \varphi + F_{C\xi} \sin \varphi + F_{C\eta} \cos \varphi, \\ J_1 \ddot{\omega}_1 &= -U + (bF_{A\eta} + aF_{A\xi} - bF_{B\eta} + aF_{B\xi} - cF_{C\xi}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) совместно с соотношениями (2.1) и (2.2) составит предмет дальнейших исследований.

3. Пример режима направленного продвижения. Рассмотрим модель со следующими значениями геометрических и инерционных параметров: полная масса робота $m_1 + m_2 = 0.5$ кг, момент инерции корпуса робота $J_1 = 0.002$ кг · м², геометрические параметры $a = 0.1$ м, $b = 0.1$ м, $c = 0.1$ м. Ускорение свободного падения полагаем равным $g = 9.81$ м/с², коэффициенты трения $\varepsilon = 0.1$ (в опоре C и вдоль каждого из коньков) и $\mu = 0.7$ (поперек каждого из коньков).

Пусть коэффициенты в законе управления (1.2) принимают следующие значения:

$$k_1 = 0.1 \text{ Нм}, \quad k_2 = 0.01 \text{ Нм}, \quad k_3 = -0.1 \text{ Н}, \quad \kappa = 0.6 \text{ с}^{-1},$$

при этом считаем, что величина управляющего момента ограничена значениями $U_{\min} = -0.1$ Нм, $U_{\max} = 0.1$ Нм.

Такое управление обеспечивает движение робота вдоль направления Oy . На рис. 2 изображена траектория движения центра масс робота на плоскости (X, Y) за время $t = 60$ с. В начальный момент времени робот находится в начале координат, при этом он ориентирован в сторону положительного направления оси Oy ($\varphi = 0$). Компоненты скорости в начальный момент времени $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0.01$ м/с, угловая скорость $\omega(0) = 0$. Однако даже если изначально развернуть робота в сторону отрицательного направления оси Oy ($\varphi = \pi$) и задать ненулевую начальную скорость в этом направлении, то управление при данных параметрах выведет его на движение в сторону положительного направления Oy . Можно убедиться, что в описываемом случае средние затраты мощности на поддержание установившегося движения составляют примерно 0.14 Вт. На рис. 3 показано изменение компонент скорости робота за время $t = 60$ с. Среднее значение компоненты $\dot{X}(t)$ на установившемся режиме движения равно нулю (рис. 3, а). Среднее значение компоненты $\dot{Y}(t)$ на установившемся режиме движения составляет примерно 0.08 м/с, и при этом она не меняет знак, т.е. такое движение безреверсное (рис. 3, б).

Приведенный пример демонстрирует, что выбранное управление при некотором наборе значений параметров системы (он может быть обеспечен на практике) действительно переводит систему в режим движения, задача реализации которого была поставлена.

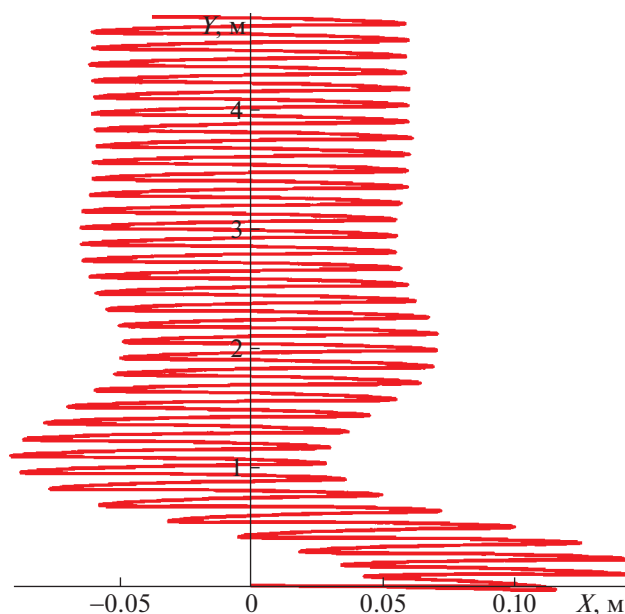


Рис. 2. Пример траектории центра масс робота на двух коньках и шаровой опоре

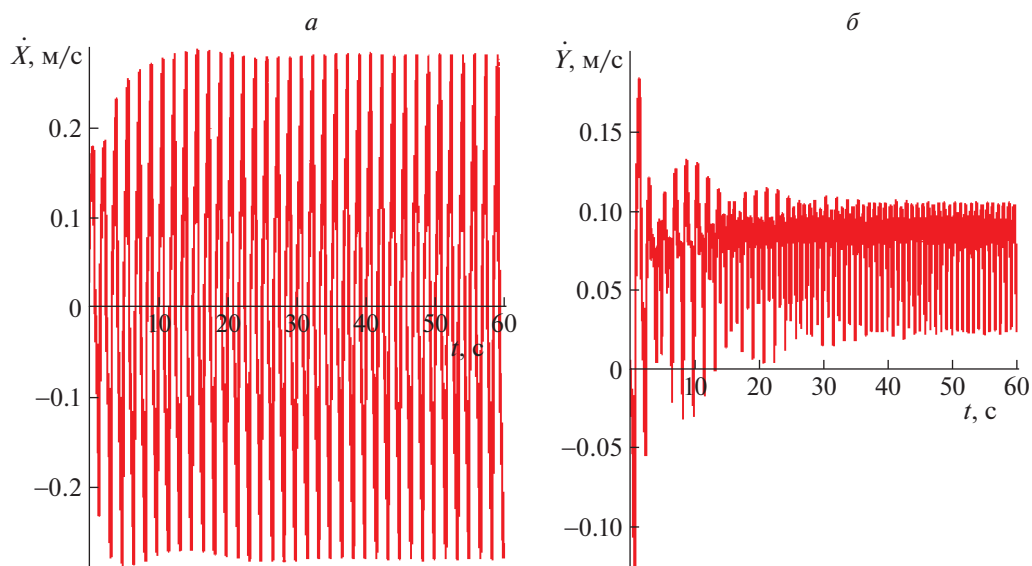


Рис. 3. Пример зависимости компоненты скорости от времени: *a* — по оси *OX*, *б* — по оси *OY*

4. Параметрическое исследование установившихся режимов. На примере робота с геометрическими и инерционными параметрами и управлением, рассмотренными в разд. 3, изучим влияние различных параметров системы на среднюю скорость движения робота вдоль заданного направления.

Сначала убедимся, что для увеличения скорости продвижения робота на установившемся режиме действительно целесообразно использовать комбинацию двух типов опор: шаровая передняя опора и два конька. Предположим, что в отличие от основного изучаемого случая в точке *C* трение анизотропно, т.е. в ней тоже находится конек. В этом случае управление, выбранное в разд. 3, не будет обеспечивать желаемого движения.

Теперь предположим, что все три опоры изотропны. В этом случае при выбранных ранее параметрах и управлении робот будет совершать движение в направлении прямой, параллельной

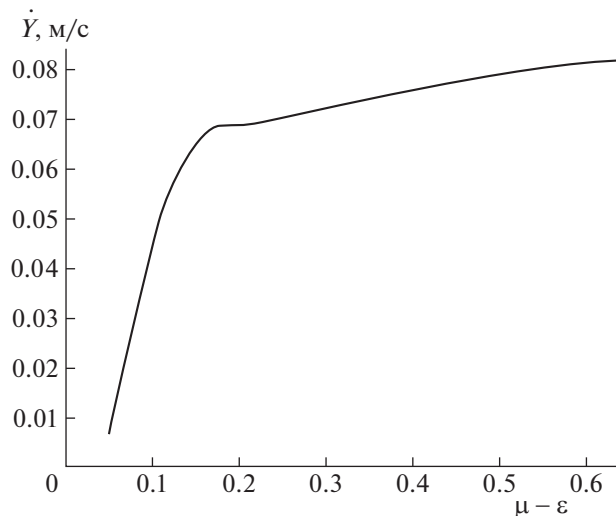


Рис. 4. Примеры зависимости средней скорости установившегося движения от разности коэффициентов трения поперек и вдоль конька

оси Oy . Корректировка коэффициентов в законе управления выведет робот на желаемый установившийся режим, при этом значение средней скорости центра масс на установившемся движении будет в несколько раз меньше, чем в случае, когда две задние опоры анизотропны.

Рассмотрим теперь влияние разности коэффициентов трения поперек и вдоль коньков задних опор на среднюю скорость продвижения робота. Такая зависимость представлена на рис. 4. Передняя опора при этом предполагается шаровой, коэффициент трения в ней равен коэффициенту трения вдоль конька $\epsilon = 0.1$. Управляющий момент выбран таким же, как в разд. 3. Варьируется коэффициент трения μ поперек конька. При разности $\mu - \epsilon$ меньше 0.05 такое управление не позволит реализовать желаемый установившийся режим (движение будет происходить вдоль прямой, параллельной оси Oy), поэтому такие значения разности не рассматривались. Из рисунка можно видеть, что средняя скорость возрастает с увеличением разницы между коэффициентами трения. Иными словами, при фиксированном значении ϵ увеличение коэффициента трения μ поперек конька приводит к увеличению средней скорости центра масс на установившемся режиме движения.

Посмотрим теперь, как будет меняться средняя скорость движения в зависимости от геометрических параметров робота. Будем изменять расстояние a между центром масс S и отрезком AB , соединяющим точки, в которых находятся коньки, при этом зафиксируем расстояние $2b = 0.2$ м между точками A и B и расстояние $c = 0.1$ м от центра масс S до точки C . Соответствующая зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния a изображена на рис. 5, а. При $a = 0$ (в случае, когда центр масс лежит на отрезке AB) и значениях a , близких к нулю, выбранное управление не позволяет реализовать желаемый установившийся режим, поэтому эти случаи выброшены из рассмотрения. Из рисунка можно видеть, что при заданных параметрах максимум средней скорости достигается при $a^* \approx 0.06$ м, и он примерно равен 0.195 м/с.

Далее будем изменять расстояние b от точек A и B до оси симметрии корпуса робота, при этом предположим, что расстояния $a = 0.1$ м и $c = 0.1$ м фиксированы. Зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния b показана на рис. 5, б. При заданных параметрах максимум средней скорости, равный приблизительно 0.09 м/с, достигается при $b^* \approx 0.08$ м.

Теперь проварируем расстояние c между опорой C и центром масс S . Расстояния $a = 0.1$ м и $b = 0.1$ м при этом фиксированы. На рис. 5, в показана зависимость средней скорости установившегося движения от расстояния c . При $c = 0$ (точка C совпадает с центром масс S) и значениях c , близких к нулю, выбранное управление не позволяет реализовать желаемый установившийся режим, поэтому такие значения c не рассматривались. Максимум средней скорости при заданных параметрах достигается при $c^* \approx 0.06$ м и равен примерно 0.09 м/с.

Можно видеть, что, хотя ни один из геометрических параметров, приведенных в первоначальном примере, не является оптимальным при фиксированных двух других, выбранные

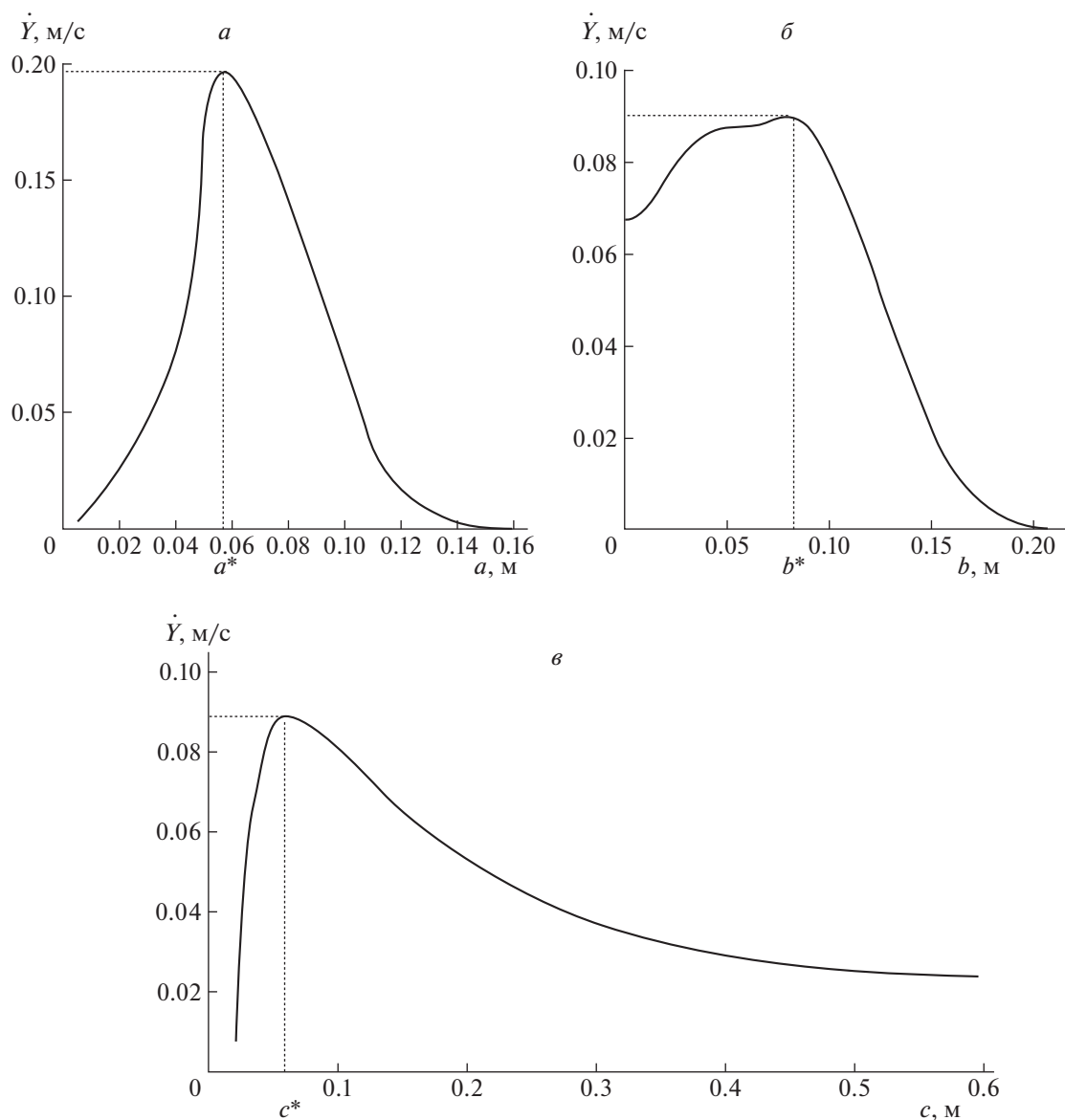


Рис. 5. Примеры зависимости средней скорости установившегося движения от геометрических параметров системы

значения обеспечивают безреверсное установившееся движение с достаточно хорошей величиной средней скорости на нем.

Рассмотрим также влияние на среднюю скорость частоты вынуждающего воздействия. Зафиксируем геометрические параметры $a = 0.1$ м, $c = 0.1$ м, коэффициенты управления $k_1 = 0.1$ Нм, $k_2 = 0.01$ Нм, $k_3 = -0.1$ Н и будем варьировать величину b и частоту вынуждающего воздействия κ . На рис. 6 изображены кривые зависимости средней скорости установившегося движения от расстояния b от каждого из коньков *A* и *B* до оси симметрии корпуса робота при частотах $\kappa = 0.3$ с⁻¹ (штриховая линия), $\kappa = 0.45$ с⁻¹ (пунктирная линия), $\kappa = 0.6$ с⁻¹ (сплошная линия) и $\kappa = 0.7$ с⁻¹ (штрихпунктирная линия). Можно видеть, что при всех этих значениях максимум по величине средней скорости достигается при ненулевом значении расстояния b , что указывает на целесообразность использования двух задних коньков, а не одного, как в случае аппаратов, представленных в [11, 12].

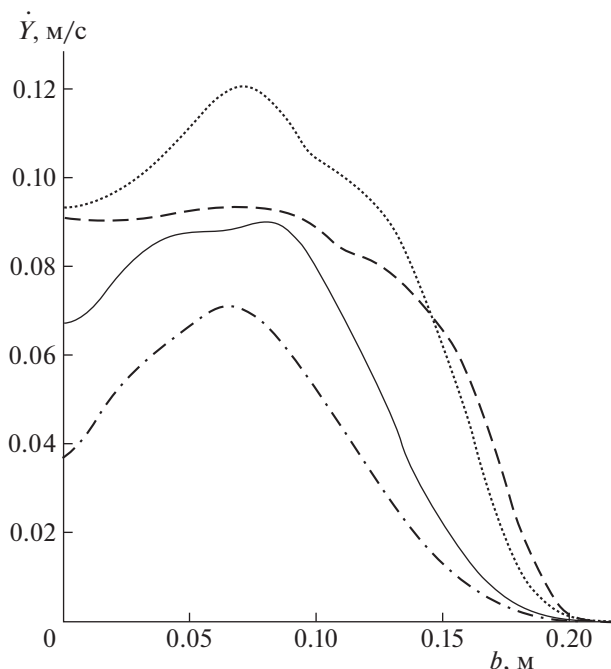


Рис. 6. Зависимости средней скорости установившегося движения от расстояния b при различных частотах вынуждающего воздействия.

Также из рис. 6 видно, что при $\kappa = 0.3 \text{ с}^{-1}$ и $\kappa = 0.45 \text{ с}^{-1}$ для всех значений расстояния между коньками средняя скорость направленного движения выше, чем при $\kappa = 0.6 \text{ с}^{-1}$. Однако при заданных геометрических параметрах режимы, соответствующие управлению с такими вынуждающими частотами, не будут безреверсными. Увеличение же частоты до $\kappa = 0.7 \text{ с}^{-1}$ приведет к снижению средней скорости направленного движения при всех значениях расстояния b .

Заключение. Рассмотрен осесимметричный робот, управляемый с помощью сбалансированного внутреннего маховика и контактирующий с опорной плоскостью в трех точках. В двух опорах сухое трение анизотропно, в третьей — изотропно. Построена математическая модель такой системы и продемонстрировано существование управления, обеспечивающего безреверсное движение описанной системы в заданном направлении. Исследовано влияние анизотропии трения, геометрических параметров конструкции и частоты вынуждающего воздействия на движение робота.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 33–44.
2. Козлов В.В., Рамоданов С.М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // ДАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 478–481.
3. Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T. A Bug on a Raft: Recoil Locomotion in a Viscous Fluid // J. Fluid Mechanics. 2011. V. 669. P. 527–556.
4. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
5. Черноусько Ф.Л. Плоское движение тела под влиянием подвижных внутренних масс // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. XI Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 354–361.
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
7. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады Академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. С. 69–74.

8. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
9. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. № 1. С. 3–22.
10. *Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю.* О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
11. *Kelly S.D., Fairchild M.J., Hassing P.M., Tallapragada P.* Proportional Heading Control for Planar Navigation: The Chaplygin Beanie and Fishlike Robotic Swimming // American Control Conference (ACC). Montreal, 2012. P. 4885–4890.
12. *Kelly S., Abajian-Guerrero R., Grover J., Travers M., Choset H.* Planar Motion Control, Coordination and Dynamic Entrainment in Chaplygin Beanies // Proc. ASME Dynamic Systems and Control Conference. Atlanta, 2018.
13. *Borisov A.V., Kuznetsov S.P.* Regular and Chaotic Motions of a Chaplygin Sleigh Under Periodic Pulsed Torque Impacts // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. P. 792–803.
14. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S.* Fermi-like Acceleration and Power-law Energy Growth in Nonholonomic Systems // Nonlinearity. 2019. V. 32. № 9. P. 3209.
15. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.S.* Construction of Control Algorithm in the Problem of the Planar Motion of a Friction-powered Robot with a Flywheel and an Eccentric Weight // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 89. P. 1517–1527.
16. *Dosaev M.* Algorithm for Controlling an Inertioid Robot with a Flywheel and an Unbalance in Conditions of Restrictions on the Angular Acceleration of the Unbalance // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 109. P. 797–807.
17. *Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 152–161.
18. *Zmitrowicz A.* Mathematical Descriptions of Anisotropic Friction // Intern. J. Solids and Structures. 1989. V. 25. № 8. P. 837–862.
19. *Golovanov S., Klimina L., Dosaev M., Selyutskiy Y., Holub A.* A Trimaran Controlled by an Internal Flywheel // 16th Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. Moscow, 2022. P. 1–2.
20. *Вильке В.Г.* Об анизотропном сухом трении и неудерживающих неголономных связях // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 3–12.
21. *Козлов В.В.* Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 855–868.
22. *Карапетян А.В., Шишков А.А.* Динамика конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим анизотропным трением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 2. С. 61–63.
23. *Steindl A., Edelmann J., Plöchl M.* Limit Cycles at Oversteer Vehicle // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 99. № 1. P. 313–321.