ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 4, с. 75–83

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.958

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ОБРАЗЦА СЛОИСТОГО ДВУХФАЗНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА[1]

© 2023 г. А. А. Егорова[a,*], А. С. Шамаев[b,**]

[a] МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

[b] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: alena.egorova@gmail.com

**e-mail: sham@rambler.ru

Поступила в редакцию 07.03.2023 г.
После доработки 24.03.2023 г.
Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача граничного управления одномерными колебаниями эффективной (усредненной) среды, соответствующей двухфазной среде, состоящей из периодически чередующихся слоев упругого и вязкоупругого материалов с долговременной памятью или различных вязкоупругих материалов с трением Кельвина–Фойгхта и с долговременной памятью. Усредненная модель описывается краевой задачей для интегродифференциального уравнения. Показано, что для этой модели силовым воздействием за один конец полосы невозможно привести за конечное время (в отличие от уравнения колебаний струны) колебания в состояние покоя. Формулируется гипотеза о возможности приведения в состояние покоя указанного объекта с помощью силовых воздействий, распределенных по всей длине объекта.

DOI: 10.31857/S0002338823040030, **EDN:** OCGDZR

Введение. Исследуется проблема приведения в состояние покоя за конечное время одномерных поперечных или продольных колебаний для усредненной (эффективной) модели слоистого композита, занимающих полосу $0 < x_1 < \pi$. Эта эффективная модель соответствует колебаниям в слоистой двухфазной среде, состоящей из периодически чередующихся слоев упругого и вязкоупругого материалов с долговременной памятью или различных вязкоупругих материалов с трением Кельвина–Фойгхта и свойствами долговременной памяти. Усреднение происходит по малому параметру $\varepsilon > 0$, равной толщине каждого периодически повторяющегося слоя и много меньшей толщины образца композита. Предполагается, что колебания распространяются вдоль оси Ox_1 перпендикулярно (если они параллельны плоскости Ox_2x_3) или параллельно слоям (если последние параллельны плоскости Ox_1x_2 или Ox_1x_3).

Силовое воздействие прилагается к одному краю полосы $0 < x_1 < \pi$ и рассматривается вопрос о возможности приведения в состояние покоя системы для любых начальных условий (см. рис. 1).

Для корректной постановки начально-краевой задачи о колебаниях в слоистой двухфазной среде и соответствующей усредненной модели используются результаты работ [1–3]. Рассматриваемая усредненная модель содержит нестационарные интегро-дифференциальные уравнения. Из анализа спектра собственных одномерных колебаний в усредненной среде в публикациях [4–6] вытекает, что спектр имеет предельные точки с конечными координатами, откуда следует бесконечность значения характеристики плотности множества собственных значений. Далее доказывается, что система экспоненциальных функций, соответствующая точкам из спектра, не может быть минимальной на любом конечном отрезке. Согласно результатам работы [7], рассматриваемая задача управления неразрешима. Вообще, бесконечное значение характеристики плотности собственных значений оказывается препятствием к управляемости за границу области.

[1] Работа поддержана грантом РНФ № 21-110151.

Рис. 1. Эффективная модель слоистого композита, с приложением силового воздействия с одного конца

В статье описывается происхождение рассматриваемых систем из так называемых “задач усреднения”, хотя такие задачи возникают и в других областях механики и физики. Усредненные (или “эффективные”) модели для микронеоднородных комбинированных сред, состоящих из упругого или вязкоупругого материала и вязкой или слабовязкой жидкости, а также различных комбинаций вязкоупругих материалов, были построены в [1–3, 8–14]. Спектральному анализу усредненных моделей комбинированных сред посвящены работы [5, 6, 14]. В некоторых случаях, например в [1–3], усредненные модели описывают колебания в сплошных (предельных) вязкоупругих материалах с долговременной памятью. Управляемость за границу одномерными колебаниями в таких материалах зависит от структуры спектра уравнения. Структуры спектров некоторых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости, были исследованы, например, в [6, 15, 16].

Задачи распределенного управления для систем, где уравнения не содержат интегральные слагаемые, изучены ранее в монографии [17]. Было показано, что малой силой, приложенной ко всей области, можно привести в покой колебания мембран и пластин.

Проблемы управления механическими системами, где соответственные уравнения содержат интегральные слагаемые, рассмотрены в [18]. В ней было сформулировано условие, при котором движение, описываемое уравнением теплопроводности с интегральной “памятью”, невозможно с помощью граничного управления привести в состояние покоя за конечное время. Условие состоит в существовании корня некоторой аналитической функции комплексного переменного (именно преобразования Лапласа от ядра свертки) в области его голоморфности.

В то же время если управляющее воздействие прилагается ко всей области, то задача приведения колебаний в покой может быть разрешима, и даже в ряде случаев наличие интегральных членов типа свертки способствует сокращению времени приведения системы в заданное состояние, по сравнению со временем приведения к покою системы без нелокальных слагаемых. С помощью спектрального метода в [19] было сделано построение такого управления для случая, если ядро свертки состоит из суммы конечного числа убывающих экспонент. Заметим, что это свойство управляемости по всей области для систем с интегродифференциальным уравнением, где ядро свертки состоит из конечной суммы экспоненциально убывающих функций, является “негрубым”: в [20] показано, что можно найти малое возмущение ядра свертки, при котором свойство управляемости данной системы по всей области теряется. Вопросы управляемости систем со слагаемыми типа свертки были также рассмотрены в работах [21–23].

Возможность *управления за границу* области была установлена впервые в монографии [24], где были получены результаты, относящиеся к уравнению колебания струны и уравнению теплопроводности. Эти результаты были далее обобщены на многомерный случай в [25]. Управление *за границу области* для системы с нелокальными членами типа свертки является, как правило, свойством исключительным. Другими словами, существуют такие начальные состояния, из которых за конечное время нельзя привести систему в заданное состояние (например, в полный покой), прилагая управление к части области, в которой задана система, или к границе области. Данное свойство была замечено в [18] применительно к одномерным по пространственным переменным системам. Результаты этой работы указывают на то, что если управление прилагается к части области или к ее границе, то свойство полной управляемости выполняется только для некоторого класса систем интегродифференциальных уравнений. Как показано в [21], управление за границу также возможно в системе, описываемой уравнением Гуртина–Пипкина, когда ядро свертки состоит из одной убывающей экспоненты.

Казалось бы, что наличие слагаемых типа свертки, которые соответствуют внутреннему трению в материале, могли бы способствовать затуханию колебаний при воздействии на него через границу области, но этого не происходит. Более того, эта сумма из убывающих экспонент является препятствием к приведению системы в заданное состояние с помощью граничного управления.

В следующем разделе поясним происхождение рассматриваемых систем с последействием в теории композиционных материалов и исследуем задачу граничного управления для усредненной системы.

1. Математическая модель слоистого композита. Рассмотрим ограниченную полосу $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с гладкой границей, заполненную двухфазной микронеоднородной средой с периодической структурой. Возьмем в качестве ячейки периодичности куб εY, где $Y = (0,1)^3$ – единичный куб, а величина $\varepsilon > 0$ много меньше линейных размеров области Ω. Обозначим через $\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}$ подмножества области Ω, занятые соответственно первой и второй фазой среды с ε-периодической структурой. Будем предполагать, что первой фазой может быть упругий материал (УМ), либо вязкоупругий материал с трением Кельвина–Фойгхта (ВУМ I), либо вязкоупругий материал с памятью, но без трения Кельвина–Фойгхта (ВУМ II), либо вязкоупругий материал, обладающий и тем и другим свойством вязкости (ВУМ III). Второй фазой могут быть вязкоупругие материалы всех перечисленных видов. Это означает, что уравнения состояния в $\Omega_{1\varepsilon}, \Omega_{2\varepsilon}$ имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkh}^{(s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_{kh}(u^{\varepsilon}) + b_{ijkh}^{(s)} e_{kh}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right) - d_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) * e_{kh}(u^{\varepsilon}),$$

$$x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s = 1,2.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3, $u^{\varepsilon}(x,t)$ – вектор перемещений, $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ – компоненты тензора напряжений, $e_{kh}(u^{\varepsilon})$ – компоненты тензора деформаций:

$$e_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right),$$

знаком * обозначена свертка двух функций по переменной t:

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t-\tau) g_2(\tau) d\tau,$$

$a_{ijkh}^{(s)}(y)$, $b_{ijkh}^{(s)}(y)$ – Y-периодические гладкие функции, для которых выполнены условия симметрии:

$$a_{ijkh}^{(s)(y)} = a_{jikh}^{(s)(y)} = a_{khij}^{(s)}(y), \quad s = 1,2,$$

$$b_{ijkh}^{(s)}(y) = b_{jikh}^{(s)}(y) = b_{khij}^{(s)}(y), \quad s = 1,2,$$

и положительной определенности

$$a_{ijkh}^{(s)}(y)\xi_{kh}\xi_{ij} \geq \alpha_1^{(s)}\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_1^{(s)} > 0, \quad s = 1,2.$$

$$b_{ijkh}^{(s)}(y)\xi_{kh}\xi_{ij} \geq \alpha_2^{(s)}\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha_2^{(s)} > 0, \quad s = 1,2.$$

Тензор $d^s(y,t)$ представим в виде произведения

$$d_{ijkh}^{(s)}(y,t) = V_s(t) w_{ijkh}^{(s)}(y),$$

где $V_s(t)$ – убывающая функция следующего вида:

$$V_s(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n^{(s)} e^{-\gamma_n^{(s)} t}, \quad v_n^{(s)}, \quad \gamma_n^{(s)} \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma_i^{(s)} < \gamma_j^{(s)}, \quad i < j,$$

$w^{(s)}(y)$ – тензор, компоненты которого являются Y-периодическими гладкими функциями и удовлетворяют условиям симметрии:

$$w_{ijkh}^{(s)}(y) = w_{jikh}^{(s)}(y) = w_{khij}^{(s)}(y).$$

Для различных видов фазы $\Omega_{s\varepsilon}$ верны следующие равенства:

1) УМ: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \equiv 0, d^{(s)}(y,t) \equiv 0$;

2) ВУМ I: $a^{(s)}(y) \neq 0,\ b^{(s)}(y) \neq 0, d^{(s)}(y,t) \equiv 0$;

3) ВУМ II: $a^{(s)}(y) \neq 0,\ b^{(s)}(y) \equiv 0, d^{(s)}(y,t) \neq 0$;

4) ВУМ III: $a^{(s)}(y) \neq 0, b^{(s)}(y) \neq 0, d^{(s)}(y,t) \neq 0$.

Математическая модель, описывающая колебания в слоистой двухфазной среде, имеет вид

$$\rho^{\varepsilon}(x)\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + f_i(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$[u^{\varepsilon}]_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^{\varepsilon}]_{S_\varepsilon} = 0, \quad S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}, \tag{1.2}$$

$$u^{\varepsilon}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$u^{\varepsilon}(x,0) = \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

В ряде работ, в том числе в [1–3], были выведены эффективные модели для колебания композита со слоями из различных комбинаций рассматриваемых материалов. В них было показано, что если колебания проходят параллельно слоям и хотя бы один из слоев содержит ненулевой тензор вязкости Кельвина–Фойгхта (ВУМ I, ВУМ III), то, за исключением некоторых специальных случаев, эффективная модель соответствует ВУМ III. А если колебания перпендикулярны слоям, то наличие трения Кельвина–Фойгхта в исходной модели не влечет его присутствие в усредненной модели. Для того чтобы усредненный материал обладал трением Кельвина–Фойгхта, необходимо, чтобы *оба* материала в исходной модели имели данное свойство. Если в обеих фазах нет интегральных членов (например, в комбинациях ВУМ I + ВУМ I или УМ + ВУМ I), то в усредненной модели присутствует слагаемое в виде свертки с *одной* убывающей экспонентой. Если хотя бы в одной из фаз есть интегральный член, то в усредненной модели ядро свертки равно сумме не менее двух экспоненциально убывающих функций.

Таким образом, математическая модель, описывающая одномерные колебания усредненной среды вдоль оси Ox_1, имеет следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1,t), \quad x_1 \in (0;\pi), \quad t > 0, \tag{1.5}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad t > 0, \quad u(x_1,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,0) = 0, \tag{1.6}$$

где $u(x_1,t)$ – смещение точки по оси x_1 в момент времени t; $f(x_1,t)$ – внешняя сила, направленная вдоль оси Ox_1; $\alpha, \beta, g(t)$ – соответственно эффективные коэффициенты упругости, вязкости и усредненное ядро релаксации. Их значения зависят от толщины слоев, характеристик материалов исходной среды и от расположения слоев относительно направления колебания. Заметим, что функция $g(t)$ равна некоторой конечной сумме убывающих экспонент.

Сходимость решений допредельных задач (1.1)–(1.4) к усредненной задаче (1.5)–(1.6) доказана в [26].

Т е о р е м а 1. Пусть $u^{\varepsilon}(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.4). Тогда при $\varepsilon \to 0$ для всех $t \in [0,T]$

$$u^{\varepsilon}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{в} \quad (L_2(0;\pi))^3,$$

$$\left\| u^{\varepsilon}(x,t) - u(x,t) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right\|_{(H^1(0;\pi))^3} \to 0,$$

где $u(x,t)$ – решение усредненной задачи (1.5)–(1.6),

$$u_1(x,y,t) = Z^{kh}(y)\frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x,t) + W^{kh}(y,t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x,t),$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y), W^{kh}(y,t)$ – решения периодических задач, соответствующих различным моделям двухфазных сред.

Из этой теоремы следует, что выводы о приближенном поведении решения задачи для многослойного композита рассматриваемого вида можно сделать из анализа поведения решений усредненной задачи.

2. Задача граничного управления для эффективной (усредненной) модели слоистого композита. Рассмотрим теперь следующую задачу управления для приведенных выше эффективных моделей слоистого композита:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \in (0;\pi), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = v(t), \quad u(\pi,t) = 0; \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$$u(x_1,0) = \varphi_0(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,0) = \varphi_1(x_1). \tag{2.3}$$

Целью задачи управления является нахождение функции $v(t) \in L_2(0,+\infty)$, приводящей систему в покой за конечное время. Говорят, что система, описываемая краевой задачей (2.1)–(2.3), *приводима в покой*, если для любых начальных условий $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1)$ можно найти функцию $v(t)$, тождественно равную нулю на множестве $t : t > T$ для некоторого $T > 0$, такого, что соответствующее решение $u(x_1,t)$ задачи (2.1)–(2.3) также при данном управлении обратилось в ноль на множестве $t : t > T$.

Заметим, что в [18, 21] была показана неразрешимость задачи управления за один конец вязкоупругой струны с долговременной памятью в случае $\beta = 0$, если некоторая комплексная аналитическая функция, связанная с ядром, имеет корни или ядро релаксации $g(t)$ равно конечной сумме убывающих экспонент, причем количество слагаемых должно быть не меньше двух. Но если рассматривать ядро, состоящее из одной убывающей экспоненты, то можно привести пример, когда управление за один край струны все же возможно. В дальнейшем будем считать, что $\beta \neq 0$.

Приведем необходимое определение из [21].

Определение. Система функций $\{e^{\mu_j t}\}_{j=1}^{+\infty}, \mu_j \in \mathbb{C}, j = 1,2,\ldots,$ называется *минимальной* в $L_2(0,T)$, если по норме этого пространства никакая из этих функций не может быть приближена линейной комбинацией остальных функций из этой системы.

Пусть $\{\mu_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – счетный набор комплексных чисел. Определим характеристику плотности этого множества как

$$A^*(\mu_j) = \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{\pi}{R}\int_0^R \frac{n(\tau)}{\tau}d\tau,$$

где $n(\tau)$ – количество чисел из набора $\{\mu_j\}_{j=1}^{+\infty}$, попавших в круг радиуса R. В работе [7] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. Если $A^*(\mu_j) = +\infty$, то система $\{e^{\mu_i t}\}_{i=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0,T]$ не является минимальной для любого $T > 0$.

С помощью данной леммы покажем, что рассматриваемая система не может быть приведена в состояние покоя за конечное время.

Пусть $v \in L_2(0,T)$ с произвольным $T > 0$ и $\varphi_0, \varphi_1 \in L_2(0,\pi)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если для спектра $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ системы (2.1)–(2.3) характеристика $A^*(\lambda_i) = +\infty$, тогда для произвольных начальных условий $\varphi_0, \varphi_1 \in L_2(0,\pi)$ управление в покой за граничную точку невозможно.

Доказательство. Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$w(x_1,t) = u(x_1,t) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) v(t).$$

Тогда для новой неизвестной функции $w(x_1,t)$ получаем следующую краевую задачу:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \beta \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} - g(t) * \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \rho \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad x_1 \in (0;\pi), \quad t > 0, \tag{2.4}$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0; \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$w(x_{1,0}) = \varphi_0(x_1) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) v(0), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,0) = \varphi_1(x_1) - \left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) \frac{\partial v}{\partial t}(0). \tag{2.7}$$

Лемма 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – спектр задачи (2.4)–(2.7). Тогда, если система функций $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{+\infty}$ не является минимальной на $[0,\mathrm{T}]$, то систему (2.4)–(2.7) невозможно привести в состояние покоя за конечное время $\mathrm{T} > 0$ управлением через граничную точку при произвольных начальных условиях.

Доказательство. Предположим, что задача управления (2.4)–(2.7) разрешима для любых начальных условий $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1) \in L_2(0,\pi)$. Решение будем искать в виде

$$w(x_1,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(t) \sin kx_1.$$

Подставив его в (2.4)–(2.7) и приравнивая множители при соответствующих слагаемых с $\sin kx_1, k = 1,2,\ldots$, получим

$$\rho \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \alpha k^2 w_k + \beta k^2 \frac{\partial w_k}{\partial t} - g(t) * w_k k^2 = -\rho \frac{2}{\pi k} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad t > 0, \tag{2.8}$$

$$w_k(0) = \varphi_{0k} - \frac{2v(0)}{\pi k}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t}(0) = \varphi_{1k} - \frac{2}{\pi k} \frac{\partial v}{\partial t}(0), \tag{2.9}$$

где $\varphi_{0k}, \varphi_{1k}$ – коэффициенты разложения функций $\varphi_0(x_1), \varphi_1(x_1)$ в ряд Фурье.

Сделаем преобразование Лапласа (2.8)–(2.9) и получим следующие равенства:

$$\widehat{w_k}(\lambda) = \frac{-\frac{2\rho}{\pi k} \hat{v}(\lambda) \lambda^2 + \rho(\varphi_{0k} + \varphi_{1k}) + \frac{2k}{\pi} \beta v(0) - \beta \varphi_{0k} k^2}{\rho \lambda^2 + \beta k^2 \lambda + \alpha k^2 - \hat{g}(\lambda) k^2}, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{2.10}$$

где $\widehat{w_k}(\lambda), \hat{v}(\lambda), \hat{g}(\lambda)$ – преобразования Лапласа функций $w_k(t), v(t), g(t)$ соответственно.

В силу теоремы Винера–Пэли функции $\widehat{w_k}(\lambda)$ должны быть целыми, поэтому верхняя часть выражения (2.10) должна обращаться в ноль на корнях знаменателя, а эти корни – спектр задачи (2.4)–(2.7). Следовательно, справедливы равенства:

$$\hat{v}(\lambda) \equiv \int_0^T v(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{\rho \pi k(\varphi_{0k} + \varphi_{1k}) + 2k^2 \beta v(0) - \beta \pi \varphi_{0k} k^3}{2\rho \lambda^2} \tag{2.11}$$

при $\lambda \in \{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$. По предположению леммы система функций $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{+\infty}$ не является минимальной на отрезке $[0,T]$. Следовательно, существует функция, которую можно представить в виде линейной комбинации остальных функций этой системы. Тогда появится условие связи между правыми частями равенства (2.11) для разных λ, что противоречит выполнению равенства для произвольных начальных условий. Лемма 2 доказана.

Таким образом, из лемм 1 и 2 следует, что для доказательства невозможности управления за граничную точку системы (2.1)–(2.3) достаточно показать, что $A^*(\lambda_j)$ бесконечна. Из работ [4–6] следует, что в спектре рассматриваемой модели присутствуют бесконечные накопления. Следовательно, упомянутое свойство выполняется. Теорема 2 доказана.

Следует отдельно заметить, что на первый взгляд диссипация механической энергии за счет внутреннего трения в вязкоупругих слоях композита должна способствовать быстрейшему приведению в состояние покоя управляемой системы. Ведь в работе [24], результаты которой дали первый толчок к исследованию управляемости систем с распределенными параметрами, доказана управляемость в состояние покоя для модели струны без диссипации, а кажется, что трение должно только помогать управляемости. Однако это совершенно не так. Как правило, внутреннее трение является препятствием к управляемости. При этом трение о внешнюю среду препятствием к управляемости не является.

В дальнейшем планируется изучение управляемости рассмотренной системы (1.5)–(1.6) за всю область или часть области. В [22] доказана управляемость системы с ядром последействия в виде суммы конечного числа убывающих экспонент при отсутствии трения Кельвина–Фойгхта. Доказательство управляемости основано на представлении решения в виде ряда, аналогичного ряду Фурье для решения уравнения колебаний струны. Если в системе присутствует трение Кельвина–Фойгхта, то такое представление решения в виде аналога ряда Фурье также имеет место. Из результатов диссертации [27] следует представление решения задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда из экспонент. Приведем соответствующее утверждение.

Будем считать, что плотность $\rho \equiv 1$. Тогда спектр задачи (2.1)–(2.3) совпадает со спектром оператор-функции:

$$L_0(\lambda) := \lambda^2 - \beta\lambda\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \hat{g}(\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Пусть

$$l_n(\lambda) := \lambda^2 + \beta n^2\lambda + \alpha n^2 - \hat{g}(\lambda)n^2.$$

Полагаем, что ядро релаксации имеет вид

$$g(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t},$$

где выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_j} < 1.$$

В [16] доказывается, что для каждого натурального n число невещественных корней функции $l_n(\lambda)$ не более двух, причем они являются комплексно-сопряженными. Из этого следует, что спектр рассматриваемой задачи (2.1)–(2.3) имеет не более чем счетное число точек, причем в [27] показано, что невещественные точки спектра локализуются в некоторой области, полностью лежащей в левой полуплоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $\nu(L_0)$ это число невещественных точек спектра. Тогда решение задачи (2.1)–(2.3) может быть представлено в виде следующей суммы:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\nu(L_0)}\frac{(\lambda_n^+ + \beta n^2)\varphi_{0n} + \varphi_{1n}}{l_n'(\lambda_n^+)}e^{\lambda_n^+ t}\sin nx_1 + \sum_{n=1}^{\nu(L_0)}\frac{(\lambda_n^- + \beta n^2)\varphi_{0n} + \varphi_{1n}}{l_n'(\lambda_n^-)}e^{\lambda_n^- t}\sin nx_1$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda_{nk}}{l_n'(\lambda_{nk})}e^{\lambda_{nk}t}\right)\varphi_{0n}\sin nx_1$$
$$+\beta\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{l_n'(\lambda_{nk})}e^{\lambda_{nk}t}\right)n^2\varphi_{0n}\sin nx_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{l_n'(\lambda_{nk})}e^{\lambda_{nk}t}\right)\varphi_{1n}\sin nx_1,$$

где $\lambda_n^{\pm}, \lambda_{nk}$ – соответственно невещественные и вещественные точки спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$:

$$-\gamma_k < \lambda_{nk} < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \gamma_0 := 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С помощью этого представления можно по аналогии со случаем отсутствия трения Кельвина–Фойгхта показать возможность управляемости с помощью распределенного воздействия на всю область.

Следует заметить, что для данного случая в совокупности функций, по которым ведется разложение решения, как правило, лишь конечное число осциллирует, остальные же с экспоненциальной скоростью стремятся к нулю без колебаний. Это следствие наличия в системе трения Кельвина–Фойгхта. Таким образом можно в явном виде представить распространяющуюся в композите волну, только погасить ее граничным воздействием для произвольных начальных условий невозможно. Однако это можно сделать с помощью распределенного по всему объему силового воздействия.

Отдельная область исследования – изучение проблем управляемости с помощью сил, приложенных к движущейся подобласти. В ряде случаев переход от управления через неподвижную подобласть к движущейся подобласти позволяет утверждать, что имеет место управляемость (см. [28] и приведенную там литературу). Эти исследования основаны на анализе ряда тонких спектральных свойств рассматриваемых систем с интегральным последействием.

Заключение. При асимптотическом усреднении двухфазных слоистых сред с диссипацией в зависимости от направления колебаний (перпендикулярно или параллельно слоям) наличие вязкости приводит к системе с интегро-дифференциальными уравнениями и трением Кельвина–Фойгхта. Установлено, что одномерные колебания невозможно привести в состояние покоя за конечное время приложением воздействия на один конец полосы. На основании приведенной выше теоремы о сходимости решений исходной модели к решениям усредненной утверждается, что управление за границу колебаниями по одному направлению в полосе двухфазной слоистой среды также невозможно.

Тем не менее, можно предполагать, что задача минимизации амплитуды колебаний на некотором отрезке разрешима численными методами, хотя, вероятно, это потребует значительных вычислительных ресурсов.

В виде гипотезы приводится утверждение о разрешимости задачи управляемости в случае, когда ограниченная по абсолютной величине управляющая сила приложена ко всей области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // Докл. АН. 2011. Т. 436. № 2. С. 199–202.
2. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 92–103.
3. *Шумилова В.В.* Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 3. С. 451–454.
4. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журнал индустр. математики. 2012. Т. 15. № 4. С. 124–134.
5. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгхта // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 2. С. 282–290.
6. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в теории вязкоупругости // Пробл. матем. анализа. 2012. Вып. 63. С. 189–192.
7. *Седлецкий А.М.* Негармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры 2006. Т. 96. С. 106–211.
8. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
9. *Nguetseng G.* Asimptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanics // SIAM J. Math. Analys. 1990. V. 21. № 6. P. 1396–1414.
10. *Gilbert R.P., Mikeli A.* Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed. Pt I // Nonlinear Analys. 2000. T. 40. P. 185–212.
11. *Clopeau Th., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikeli A.* Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed. Pt II // Math. and Comput. Modelling. 2001. V. 33. P. 821–841.
12. *Мейрманов А.М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 3. С. 645–667.

13. *Meirmanov A.* A Description of Seismic Acoustic Wave Propagation in Porous Media via Homogenization // SIAM J. Math. Anal. 2008. V. 40. № 3. P. 1272–1289.
14. *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 75–114.
15. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Совр. математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36–65.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin-Pipkin Type Equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. P. 2296–2306.
17. *Chernousko F.L.* Bounded Control in Distributed-Parameter Systems // J. Applied Mathematics and Mechanics. 1992. V. 56. № 5. P. 707–723.
18. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
19. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by String Equation with Memory // J. Dynamical and Control Systems. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
20. *Романов И.В.* Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 58–61.
21. *Romanov I., Shamaev A.* Some Problems of Distributed and Boundary Control for System with Integral Aftereffect // J. Mathematical Sciences. 2018. V. 234. № 4. P. 470–484.
22. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System Governed by Wave Equation with Memory // arXiv. Doi
https://doi.org/1503.04461
23. *Shamaev A., Romanov I.* Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two-Dimensional Wave Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2021. V. 188. № 3. P. 925–938.
24. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
25. *Lions J.L.* Exact Controllability. Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
26. *Шумилова В.В.* Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 3. С. 441–454.
27. *Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгхта, возникающих в теории вязкоупругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук по специальности 1.1.1 2022. https://istina.msu.ru/dissertations/507229766/.
28. *Biccari U., Micu S.* Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019. V. 265. № 2. P. 1376–1422.