ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 1, с. 3–17

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.926,517.922

ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

 А. А. Щеглова

Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В.М. Матросова, Иркутск, Россия

e-mail: shchegl@icc.ru

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
После доработки 09.08.2022 г.
Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается круг вопросов, связанных с импульсной переходной матрицей системы линейных дифференциально-алгебраических уравнений. Для систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами показано, что эта матрица представима в виде суммы импульсных переходных матриц ее дифференциальной и алгебраической подсистем. Найден вид невырожденной замены переменных, которая не влияет на вид импульсной переходной матрицы. Реализации этой матрицы предлагается искать в классе дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 с разделенными дифференциальной и алгебраической составляющими. Получены необходимые и достаточные условия реализуемости импульсной переходной матрицы в классе алгебраических систем. Обсуждается вопрос о способах построения и о размерности минимальных реализаций такой матрицы при различных предположениях.

DOI: 10.31857/S0002338823010092, **EDN:** JASOTZ

0. Введение. Рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{0.1}$$

$$y(t) = V(t)x(t), \tag{0.2}$$

где $A(t), B(t)$ – известные $(n \times n)$-матрицы; $x(t)$ – искомая n-мерная вектор-функция; $U(t)$ и $V(t)$ – заданные матрицы размеров $n \times l$ и $m \times n$ соответственно; $u(t)$ – l-мерная вектор-функция управления; $y(t)$ – m-мерный выход. Предполагается, что элементы матричных коэффициентов системы (0.1), (0.2) являются бесконечно-дифференцируемыми на T функциями: $A(t)$, $B(t)$, $U(t)$, $V(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$.

Основным допущением служит необратимость матрицы $A(t)$ для всех значений $t \in T$: $\det A(t) \equiv 0$. Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Сложность внутренней структуры ДАУ характеризует целочисленная величина $r : 0 \le r \le n$, называемая *индексом*. Точное определение индекса сформулировано в разд. 2.

Системы вида (0.1), (0.2) используются при математическом моделировании во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования [1, с. 19], химической кинетике [2], теории переноса нейтронов [1, с. 21], гидродинамике [3, с. 86; 4], теплотехнике [5], теории электронных схем и электрических цепей [6, с. 259; 7], механике [8] и др.

Импульсная переходная матрица системы дифференциальных уравнений представляет собой функцию выхода при нулевом начальном состоянии и управляющем воздействии в виде дельта-функции Дирака. Она находит широкое применение в теории управления и при исследовании различных инженерных систем (см., в частности, [9, с. 5–50; 10, с. 36–92; 11, с. 13–39; 12–14].

Проблема анализа и синтеза импульсных переходных матриц для нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной

$$x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad y(t) = V(t)x(t), \tag{0.3}$$

в настоящее время хорошо изучена. Для таких систем в книге [15, с. 131–201] систематически изложены важнейшие аспекты теории: вид и свойства импульсных переходных матриц, условия эквивалентности и реализуемости, построение минимальных реализаций и их связь со свойствами управляемости и наблюдаемости (см. также [16–20]). Эта теория получила свое развитие применительно к конкретным прикладным областям в работах [13, 14, 21]. Способы построения импульсных переходных матриц и описание с их помощью различных технических и экономических объектов, моделируемых системами вида (0.3), можно найти в работах [22, с. 50–78; 23–25].

Данная статья посвящена изучению свойств импульсной переходной матрицы системы (0.1), (0.2), а также построению ее реализаций. ДАУ анализируются в предположениях, обеспечивающих существование линейного дифференциального оператора, действие которого преобразует (0.1) в систему индекса 1, множество решений которой совпадает с множеством решений системы (0.1). Показано, что импульсная переходная матрица в этом случае представляет собой сумму импульсных переходных матриц дифференциальной и алгебраичекой подсистем. В силу данного обстоятельства реализацию такой матрицы предлагается строить в классе ДАУ индекса 1 с разделенными дифференциальной и алгебраической составляющими. Для ДАУ, имеющих одинаковую внутреннюю структуру, получены условия эквивалентности при нулевом начальном состоянии, что позволяет указать вид невырожденной замены переменной, не влияющей на вид импульсной переходной матрицы.

Показано, что импульсная переходная матрица алгебраической подсистемы ДАУ представляет собой линейную комбинацию дельта-функции и ее производных с матричными коэффициентами. Вводится специальная матрица $\mathscr{W}(t)$, которая вычисляется по этим коэффициентам. Доказано, что для реализуемости импульсной переходной матрицы в классе алгебраических систем необходимо и достаточно разложимости $\mathscr{W}(t)$ на произведение двух матриц. Рассматриваются способы построения минимальных реализаций и связь между минимальностью реализации и наличием у нее свойств управляемости и наблюдаемости при различных предположениях на ранг и гладкость матрицы $\mathscr{W}(t)$.

Результаты, представленные в работе, носят теоретический характер, но могут послужить основой для построения соответствующих алгоритмов.

1. Структурная форма для системы ДАУ. Приведены вспомогательные сведения из структурной теории нестационарных ДАУ.

Для системы (0.1) определим $(n(r+1)\times n)$-матрицы

$$\mathscr{A}_r(t) = \mathrm{col}(C_0^0 A(t), C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t), \ldots, C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t)),$$

$$\mathscr{B}_r(t) = \mathrm{col}(B(t), B'(t), \ldots, B^{(r)}(t)),$$

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\Lambda_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O \\ C_1^1 A(t) & O & \ldots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \ldots & C_r^r A(t) \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$-матрицу

$$\mathscr{D}_r(t) = (\mathscr{B}_r(t) \quad \mathscr{A}_r(t) \quad \Lambda_r(t)).$$

Здесь и далее $C_i^j = i!/(j!(i-j)!)$ – биномиальные коэффициенты, O – нулевая матрица соответствующего размера, $f'(t) = \dfrac{d}{dt} f(t)$, $f^{(j)}(t) = \left(\dfrac{d}{dt}\right)^j f(t)$.

Предположим, что для некоторого r $(0 \le r \le n)$ выполняется условие

$$\mathrm{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const} \quad \forall t \in T$$

и в матрице $\mathscr{D}_r(t)$ имеется неособенный для всех $t \in T$ минор порядка $n(r+1)$, включающий в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и все столбцы матрицы $\mathscr{A}_r(t)$. Такой минор будем называть *разрешающим минором*.

О п р е д е л е н и е 1. Наименьшее значение $r \leq n$, при котором в $\mathcal{D}_r(t)$ имеется разрешающий минор, называется *индексом неразрешенности* ДАУ (0.1).

Обозначим через $\mathcal{M}_r(t)$ квадратную порядка $n(r+1)$ подматрицу матрицы $\mathcal{D}_r(t)$, определителем которой является разрешающий минор.

Введем обозначение

$$\begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix} = A(t)Q, \quad \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \end{pmatrix} = B(t)Q, \tag{1.1}$$

где Q – матрица перестановок столбцов[1], такая, что все столбцы матрицы

$$\mathcal{B}_{2,r}(t) = \mathrm{col}(B_2(t), B_2'(t), \ldots, B_2^{(r)}(t)) \tag{1.2}$$

входят в разрешающий минор, а столбцы $\mathrm{col}(B_1(t), B_1'(t), \ldots, B_1^{(r)}(t))$ не входят в этот минор. Блоки $B_2(t)$ и $A_2(t)$ из (1.1), (1.2) имеют размеры $n \times d$ где $d = nr - \lambda$. О построении матрицы Q см. в [27].

Л е м м а 1 [28]. Пусть:

1) $\mathrm{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const}\ \forall t \in T$;

2) в матрице $\mathcal{D}_r(t)$ имеется разрешающий минор.

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{1.3}$$

с бесконечно дифференцируемыми на T коэффициентами $R_j(t)$, $j = \overline{0,r}$, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{R}\left[A(t)Q\varphi'(t) + B(t)Q\varphi(t)\right] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix}\varphi'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix}\varphi(t) \tag{1.4}$$

для всех значений $t \in T$ и для любой n-мерной вектор-функции $\varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$. Здесь E_d – единичная матрица порядка d, Q – матрица перестановок из (1.1),

$$\mathrm{col}\left(J_2(t), J_1(t)\right) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t) \end{pmatrix} \mathrm{col}(B_1(t), B_1'(t), \ldots, B_1^{(r)}(t)).$$

При этом коэффициенты оператора (1.3) вычисляются по формуле [29]

$$\begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O & \ldots & O \end{pmatrix} \mathcal{M}_r^{-1}(t). \tag{1.5}$$

Л е м м а 2. [28] Пусть выполнены предположения леммы 1 и

$$\mathrm{rank}\Lambda_{r+1}(t) = \mathrm{rank}\Lambda_r(t) + n \quad \forall t \in T.$$

Тогда существует оператор $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)d/dt$, такой, что

$$\mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^{r} R_j(t)\varphi^{(j)}(t)\right] = \varphi(t) \quad \forall \varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathbf{R}),$$

где $L_0(t), L_1(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ – $(n \times n)$-матрицы.

Другими словами, в предположениях леммы 2 оператор (1.3) имеет левый обратный оператор $\mathcal{L}$.

2. Импульсная переходная матрица. Предположим, что для ДАУ (0.1) выполнены все предположения леммы 2, а элементы управления $u(t)$ являются достаточно гладкими на T функциями.

Подействуем на систему (0.1) оператором (1.3), коэффициенты которого определяются формулой (1.5). Принимая во внимание свойство (1.4) этого оператора, получим систему

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}\frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}x(t) + \sum_{j=0}^{r} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j (U(t)u(t)) = 0. \tag{2.1}$$

Разобъем матрицы $R_j(t)$ на блоки размера $(n-d) \times n$ и $d \times n$ соответственно:

$$R_j(t) = \mathrm{col}\left(R_{1,j}(t), R_{2,j}(t)\right), \quad j = \overline{0,r}.$$

Обозначим

$$Q^{-1}x(t) = \mathrm{col}\left(x_1(t), x_2(t)\right), \tag{2.2}$$

[1] О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [26, с. 127, 128].

где $x_1(t)$ – $(n-d)$-мерная, а $x_2(t)$ – d-мерная вектор-функция,

$$\mathbf{d}_r[u(t)] = \operatorname{col}\left(u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)\right),$$

$$\left(V_1(t)\ V_2(t)\right) = V(t)Q, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{U}_i(t) = \left(U_{i,0}(t), U_{i,1}(t), \ldots, U_{i,r}(t)\right), \quad i = 1,2,$$

$$U_{1,j}(t) = \sum_{i=j}^{r} C_i^j R_{1,i}(t) U^{(i-j)}(t), \quad U_{2,j}(t) = \sum_{i=j}^{r} C_i^j R_{2,i}(t) U^{(i-j)}(t), \quad j = \overline{0,r}. \tag{2.4}$$

Тогда систему (2.1), (0.2) можно записать в виде

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \mathcal{U}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.5}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.6}$$

$$y(t) = V_1(t)x_1(t) + V_2(t)x_2(t). \tag{2.7}$$

По построению решения систем (0.1) и (2.5), (2.6) связаны матрицей перестановок Q (см. (2.2)). Согласно лемме 2, оператор $\mathcal{R}$ имеет левый обратный оператор, поэтому любое решение ДАУ (0.1) является решением системы (2.5), (2.6) и наоборот.

По этой причине общее решение системы (0.1) может быть представлено как

$$x(t) = Q\left\{\begin{pmatrix} E_{n-d} \\ -J_2(t) \end{pmatrix}\left(X(t)X^{-1}(t_0)x_1(t_0) - X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\mathcal{U}_1(\tau)\mathbf{d}_r[u(\tau)]d\tau \right) - \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)]\right\},$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений системы

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0. \tag{2.8}$$

В случае равновесной системы ($x_1(t_0) = 0$) с учетом (2.3) из (0.2) получим

$$y(t) = V(t)x(t) = \left(V_2(t)J_2(t) - V_1(t)\right) X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\mathcal{U}_1(\tau)\mathbf{d}_r[u(\tau)]d\tau - V_2(t)\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)]. \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{J}$, действующий на достаточно гладкую матрицу $\Phi(t)$ соответствующего размера по правилу

$$\mathcal{J}[\Phi](t) = \Phi(t)J_1(t) + \Phi'(t).$$

Будем считать $\mathcal{J}^0[\Phi](t) = E_{n-d}$, тогда

$$\mathcal{J}[E_{n-d}](t) = J_1(t), \quad \mathcal{J}^2[E_{n-d}](t) = \mathcal{J}[\mathcal{J}[E_{n-d}](t)](t) = J_1^2(t) - J_{1'}(t)$$

и т.д.

Для нахождения импульсной переходной матрицы равновесной системы (0.1), (0.2) зададим на i-м входе импульсное воздействие

$$u(t) = \operatorname{col}\left(0, \ldots, 0, \delta(t-\tau), 0, \ldots, 0\right),$$

где $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака. Тогда на выходе получим величину

$$\omega_i(t,\tau) = \omega_{i,1}(t,\tau) + \omega_{i,2}(t,\tau), \tag{2.10}$$

$$\omega_{i,1}(t,\tau) = \left(V_2(t)J_2(t) - V_1(t)\right) X(t)X^{-1}(\tau)\left(\sum_{k=0}^{r}\mathcal{J}^k[E_{n-d}](\tau)\left(\sum_{j=k}^{r}(-1)^j C_j^{j-k} R_{1,j}^{(j-k)}(\tau)\right)\right) w_i(\tau), \tag{2.11}$$

$$\omega_{i,2}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{j=k}^{r}(-1)^{j-k} C_j^{j-k}\left(V_2(\tau)R_{2,j}(\tau)\right)^{(j-k)}\right) w_i(\tau)\delta^{(k)}(t-\tau), \quad i = \overline{1,l}. \tag{2.12}$$

Здесь $w_i(t)$ – i-й столбец матрицы $U(t)$: $U(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_l(t))$, $\left(V_2(\tau)R_{2,j}(\tau)\right)^{(j-k)} = \left(V_2(t)R_{2,j}(t)\right)^{(j-k)}\big|_{t=\tau}$.

Формулы (2.10)–(2.12) получены с использованием свойств дельта-функции:

$$g(t)\delta^{(k)}(t-\tau) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i g^{(i)}(\tau)\delta^{(k-i)}(t-\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta^{(k)}(t-\tau)dt = (-1)^k g^{(k)}(\tau) \quad \forall g(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}).$$

Импульсная переходная матрица системы (0.1), (0.2) будет иметь вид

$$\Omega(t,\tau) = \left(\omega_1(t,\tau)\ \omega_2(t,\tau)\ \ldots\ \omega_l(t,\tau)\right)$$

или с использованием (2.10)–(2.12) –

$$\Omega(t,\tau) = \Omega_1(t,\tau) + \Omega_2(t,\tau), \tag{2.13}$$

где

$$\Omega_1(t,\tau) = \left(V_1(t) - V_2(t)J_2(t)\right) X(t)X^{-1}(\tau)\left(\sum_{k=0}^{r}\mathcal{J}^k[E_{n-d}](\tau)\left(\sum_{j=k}^{r}(-1)^j C_j^{j-k} R_{1,j}^{(j-k)}(\tau)\right)\right)U(\tau), \tag{2.14}$$

$$\Omega_2(t,\tau) = \sum_{k=0}^{r} W_k(\tau)\delta^{(k)}(t-\tau), \tag{2.15}$$

$$W_k(\tau) = -\sum_{j=k}^{r}(-1)^{j-k}C_j^{j-k}\left(V_2(\tau)R_{2,j}(\tau)\right)^{(j-k)}U(\tau), \quad k = \overline{0,r}. \tag{2.16}$$

Обратимся к системе (2.5)–(2.7). В результате замены переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ -J_2(t) & E_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

уравнения (2.5)–(2.7) примут вид ДАУ с полностью разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами:

$$z_1'(t) + J_1(t)z_1(t) + \mathcal{U}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.17}$$

$$z_2(t) + \mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{2.18}$$

$$y(t) = \left(V_1(t) - V_2(t)J_2(t)\right)z_1(t) + V_2(t)z_2(t). \tag{2.19}$$

Используя вид общего решения

$$z_1(t) = X(t)X^{-1}(t_0)z_1(t_0) - X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)\mathcal{U}_1(\tau)\mathbf{d}_r[u(\tau)]d\tau, \quad z_2(t) = -\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)],$$

при $z_1(t_0) = 0$ для выхода системы (2.17)–(2.19) получим представление (2.9). Таким образом, системы (0.1), (0.2), (2.5)–(2.7) и (2.17)–(2.19) будут иметь одну и ту же импульсную переходную матрицу (2.13)–(2.16).

Для систем (2.17) и (2.18) зададим выходы

$$y_1(t) = \left(V_1(t) - V_2(t)J_2(t)\right)z_1(t), \tag{2.20}$$

$$y_2(t) = V_2(t)z_2(t). \tag{2.21}$$

Легко видеть, что функция (2.19), вычисляемая по формуле (2.9), есть сумма соответствующих представлений для выходов систем (2.17), (2.20) и (2.18), (2.21). По этой причине импульсная переходная матрица системы (0.1), (0.2) находится как сумма импульсных переходных матриц ее дифференциальной и алгебраической подсистем.

Таким образом, доказан следующий результат.

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены все предположения леммы 2. Тогда ДАУ (0.1), (0.2), (2.5)–(2.7) и (2.17)–(2.19) имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу $\Omega(t,\tau)$ вида (2.13)–(2.16). При этом в (2.13) $\Omega_1(t,\tau)$ есть импульсная переходная матрица диференциальной подсистемы (2.17), (2.20) системы (0.1), (0.2), а $\Omega_2(t,\tau)$ – импульсная переходная матрица ее алгебраической подсистемы (2.18), (2.21).

3. Эквивалентность систем. Изучается вопрос о том, какой должна быть замена переменных в системе ДАУ для того, чтобы импульсная переходная матрица осталась без изменений. Эта проблема тесно связана с понятем эквивалентности систем [15, с. 79].

Рассмотрим ДАУ

$$\tilde{A}(t)\frac{d}{dt}\xi(t) + \tilde{B}(t)\xi(t) + \tilde{U}(t)u(t) = 0, \quad t \in T, \tag{3.1}$$

$$y(t) = \tilde{V}(t)\xi(t), \tag{3.2}$$

в которых матричные коэффициенты $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t), \tilde{U}(t), \tilde{V}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ имеют те же размеры, что и соответствующие коэффициенты системы (0.1), (0.2).

Определение 2. ДАУ (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) *эквивалентны при нулевом начальном состоянии*, если при нулевых начальных данных и при одинаковых входных сигналах они имеют одинаковые выходные сигналы.

Из определения 2 следует, что эквивалентные при нулевом начальном состоянии системы имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу. Об эквивалентности систем ДАУ имеет смысл говорить лишь в том случае, если они имеют одинаковую внутреннюю структуру, которая для ДАУ, удовлетворяющих предположениям леммы 2, представлена формой (2.5)–(2.7).

Пусть системы (0.1) и (3.1) удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда ДАУ (0.1) имеют одни и те же решения, что и система (2.5)–(2.7), а ДАУ (3.1), (3.2) эквивалентны в смысле решений системе

$$\xi_1'(t) + \tilde{J}_1(t)\xi_1(t) + \tilde{\mathcal{U}}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{3.3}$$

$$\xi_2(t) + \tilde{J}_2(t)\xi_1(t) + \tilde{\mathcal{U}}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{3.4}$$

$$y(t) = \tilde{V}_1(t)\xi_1(t) + \tilde{V}_2(t)\xi_2(t), \tag{3.5}$$

где $\operatorname{col}(\xi_1(t), \xi_2(t)) = \tilde{Q}^{-1}\xi(t)$, $\tilde{Q}$ – матрица перестановок.

Определение 3. Будем говорить, что системы (0.1) и (3.1), удовлетворяющие всем предположениям леммы 2, *имеют одинаковую структуру*, если совпадают их индексы неразрешенности и все матричные коэффициенты структурных форм (2.5), (2.6) и (3.3), (3.4) попарно имеют одинаковые размеры.

Утверждение 1. Пусть для ДАУ (0.1) и (3.1) выполняются условия леммы 2. Кроме того, они имеют один и тот же индекс неразрешенности r и одинаковые ранги λ соответствующих матриц $\Lambda_r(t)$. Тогда эти системы имеют одинаковую структуру.

Справедливость утверждения вытекает из равенства $d = nr - \lambda$, где d – размерность вектор-функций $x_2(t)$ и $\xi_2(t)$ в системах (2.5), (2.6) и (3.3), (3.4).

Осуществим в (2.5)–(2.7) замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & O \\ S(t) & P_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где $P_1(t),\ P_2(t),\ S(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, квадратные блоки $P_1(t)$ и $P_2(t)$ (порядков соответственно $n - d$ и d) обратимы при всех $t \in T$, а $S(t)$ – произвольная $(n-d)\times d$-матрица. В результате получим систему

$$z_1'(t) + P_1^{-1}(t)\left(P_1'(t) + J_1(t)P_1(t)\right)z_1(t) + P_1^{-1}(t)\mathcal{U}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{3.7}$$

$$P_2^{-1}(t)\left(J_1(t)P_1(t) + S(t)\right)z_1(t) + z_2(t) + P_2^{-1}(t)\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0. \tag{3.8}$$

$$y(t) = \left(V_1(t)P_1(t) + V_2(t)S(t)\right)z_1(t) + V_2(t)P_2(t)z_2(t). \tag{3.9}$$

Используя вид общего решения системы (3.7), (3.8), нетрудно получить представление для выхода (3.9) при $z_1(t_0) = 0$:

$$y(t) = \left(V_2(t)J_2(t) - V_1(t)\right)P_1(t)Z(t)\int_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)P_1^{-1}(\tau)\mathcal{U}_1(\tau)\mathbf{d}_r[u(\tau)]d\tau - V_2(t)P_2^{-1}(t)\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)], \tag{3.10}$$

где $Z(t)$ – фундаментальная матрица решений системы

$$z_1'(t)(t) + P_1^{-1}(t)\left(P_1'(t) + J_1(t)P_1(t)\right)z_1(t) = 0. \tag{3.11}$$

По построению фундаментальные матрицы решений систем (3.11) и (2.8) связаны тождеством

$$Z(t) = P_1^{-1}(t)X(t). \tag{3.12}$$

Подставив (3.12) в (3.10), получим представление (2.9). Это доказывает эквивалентность при нулевом входе систем (2.5)–(2.7) и (3.7)–(3.9). Приравнивая соответствующие матричные коэффициенты систем (3.3)–(3.5) и (3.7)–(3.9), получим следующий результат.

Л е м м а 3. Если существуют матрицы $P_1(t)$, $P_2(t)$, $S(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что для всех $t \in T$ выполняются соотношения

$$\det P_1(t) \neq 0, \quad \det P_2(t) \neq 0, \tag{3.13}$$

$$\tilde{J}_1(t) = P_1^{-1}(t)\left(J_1(t)P_1(t) + P_1'(t)\right), \quad \tilde{J}_2(t) = P_2^{-1}(t)\left(J_2(t)P_1(t) + S(t)\right), \tag{3.14}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_1(t) = P_1^{-1}(t)\mathcal{U}_1(t), \quad \tilde{\mathcal{U}}_2(t) = P_2^{-1}(t)\mathcal{U}_2(t), \tag{3.15}$$

$$\tilde{V}_1(t) = V_1(t)P_1(t) + V_2(t)S(t), \quad \tilde{V}_2(t) = V_2(t)P_2(t), \tag{3.16}$$

то системы (2.5)–(2.7) и (3.3)–(3.5) эквивалентны при нулевом начальном состоянии.

Из изложенного выше следует, что замена переменных (2.2), (3.6), где Q – матрица перестановок из (1.1), не влияет на вид импульсной переходной матрицы системы (0.1), (0.2).

Т е о р е м а 2. Пусть для систем (0.1) и (3.1) выполняются все предположения леммы 2. При этом совпадают индексы неразрешенности этих систем и ранги λ соответствующих матриц $\Lambda_r(t)$. Если существуют матрицы $P_1(t)$, $P_2(t)$, $S(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что для всех $t \in T$ выполняются соотношения (3.13)–(3.16), то системы (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) эквивалентны при нулевом начальном состоянии.

С л е д с т в и е 1. В предположениях теоремы 2 системы (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу.

4. Реализация импульсной переходной матрицы. Согласно теореме 1, любые ДАУ (0.1), (0.2), удовлетворяющие предположениям леммы 2, имеют импульсную переходную матрицу вида (2.13), в которой $\Omega_1(t,\tau)$ является импульсной переходной матрицей дифференциальной подсистемы (2.17), (2.20), а $\Omega_2(t,\tau)$ – импульсной переходной матрицей алгебраической подсистемы (2.18), (2.21). По этой причине реализацию импульсной переходной матрицы (2.13) можно строить в виде (2.17)–(2.19). Очевидно, что для этого нужно построить реализации импульсных переходных матриц $\Omega_1(t,\tau)$ и $\Omega_2(t,\tau)$.

В данной работе не затрагиваются вопросы, связанные с реализацией матрицы $\Omega_1(t,\tau)$, поскольку в настоящее время эта проблема детально изучена. Например, в книге [15, гл. 4–6] рассматривается задача синтеза системы вида (0.3), реализующей наперед заданную импульсную переходную матрицу. Приведены необходимые и достаточные условия реализуемости и минимальности реализации. Предложен алгоритм практической проверки реализуемости импульсной переходной матрицы и алгоритм построения минимальной реализации [15, с. 191–198].

Заметим, что из (0.3) легко получить реализацию вида (2.17). Для этого достаточно разбить матрицу $U(t)$ на блоки соответствующего размера, при необходимости добавив нулевые столбцы. При этом $J_1(t) = B(t)$, $\mathcal{U}_1(t) = U(t)$, $z_1(t) = x(t)$, $t \in T$.

Перейдем к анализу импульсной переходной матрицы (2.15), (2.16). Принимая во внимание (2.4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$W_r(t) = -V_2(t)U_{2,r}(t), \tag{4.1}$$

$$W_{r-1}(t) + C_r^{r-1}W_r'(t) = -V_2(t)U_{2,r-1}(t) \tag{4.2}$$

$$W_{r-2}(t) + C_{r-1}^{r-2}W_{r-1}'(t) + C_r^{r-2}W_r''(t) = -V_2(t)U_{2,r-2}(t), \tag{4.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$W_0(t) + C_1^0W_1'(t) + C_2^0W_2''(t) + \ldots + C_r^0W_r^{(r)}(t) = -V_2(t)U_{2,0}(t). \tag{4.4}$$

Здесь для нахождения производных, присутствующих в выражениях (4.2)–(4.4) по левую сторону от знака равенства, использованы формулы (2.16).

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathcal{W}(t) = \left(\sum_{j=0}^{r} C_j^0 W_j^{(j)}(t) \ \ \dots \ \ W_{r-1}(t) + C_r^{r-1} W_r'(t) \ \ W_r(t) \right). \tag{4.5}$$

В обозначениях (4.5), (2.4) равенства (4.1)–(4.4) можно записать в виде

$$\mathcal{W}(t) = -V_2(t)\mathcal{U}_2(t). \tag{4.6}$$

Заметим, что для любой заданной матрицы (2.15), используя формулу (4.5), всегда можно построить матрицу $\mathcal{W}(t)$ и наоборот. Построение реализации импульсной переходной матрицы (2.15) напрямую связано с построением разложения вида (4.6).

Т е о р е м а 3. Импульсная переходная матрица

$$\Omega_2(t,\tau) = \sum_{k=0}^{r} W_k(\tau)\delta^{(k)}(t-\tau), \tag{4.7}$$

где $W_k(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $k = \overline{0,r}$, имеет реализацию

$$z_2(t) + \mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \tag{4.8}$$

$$y_2(t) = V_2(t)z_2(t) \tag{4.9}$$

($\mathcal{U}_2(t), V_2(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$) тогда и только тогда, когда существует разложение (4.6) матрицы (4.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть импульсная переходная матрица (4.7) имеет реализацию вида (4.8), (4.9). В этом случае для коэффициентов этой реализации справедливы тождества (4.1)–(4.4), которые можно записать в виде (4.6).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для матрицы (4.5) справедливо разложение (4.6). Разобъем $\mathcal{U}_2(t)$ на $r+1$ блок размера $d \times l$: $\mathcal{U}_2(t) = \left(U_{2,0}(t), U_{2,1}(t), \dots, U_{2,r}(t)\right)$, тогда равенство (4.6) можно представить в виде (4.1)–(4.4). Запишем систему (4.8), (4.9), в которой коэффициенты являются элементами разложения (4.6). В силу (4.1)–(4.4) импульсная переходная матрица для ДАУ (4.8), (4.9) будет иметь вид (4.7). Таким образом, (4.8), (4.9) суть реализация импульсной переходной матрицы (4.7). Теорема 3 доказана.

5. Управляемость и наблюдаемость. Построение минимальной реализации импульсной переходной матрицы тесно связано со свойствами управляемости и наблюдаемости.

О п р е д е л е н и е 4. Систему (0.1) будем называть *управляемой* на отрезке T, если для любых $\theta_0, \theta_1 \in T$ и $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ найдется достаточно гладкое управление $u(t)$, такое, что решение ДАУ (0.1) существует и удовлетворяет условиям $x(\theta_0) = x_0$, $x(\theta_1) = x_1$.

О п р е д е л е н и е 5. Система (0.1), (0.2) называется *наблюдаемой* на отрезке T, если по известному на T достаточно гладкому выходу $y(t)$ единственным образом можно восстановить $x(t_*)$ в любой точке $t_* \in T$.

Т е о р е м а 4. Пусть в (4.8), (4.9) $\mathcal{U}_2(t), V_2(t) \in \mathbf{C}(T)$.

1. Система (4.8) управляема на отрезке T тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{U}_2(t)$ имеет полный ранг по строкам для всех $t \in T$.

2. Система (4.8), (4.9) наблюдаема на отрезке T тогда и только тогда, когда матрица $V_2(t)$ имеет полный ранг по столбцам для всех $t \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1. В соответствии с определением 4 управляемость системы (4.8) означает существование достаточно гладкого управления $u(t)$, такого, что

$$z_0 = -\mathcal{U}_2(\theta_0)\mathbf{d}_r[u(\theta_0)], \quad z_1 = -\mathcal{U}_2(\theta_1)\mathbf{d}_r[u(\theta_1)] \tag{5.1}$$

для любых векторов $z_0, z_1 \in \mathbf{R}_d$ и любых значений $\theta_0, \theta_1 \in T$ (d – размерность вектор-функции $z_2(t)$). Здесь $\mathbf{d}_r[u(\theta_0)] = \mathbf{d}_r[u(t)]|_{t=\theta_0}$. Покажем, что в этом случае $\operatorname{rank}\mathcal{U}_2(t) = d \ \forall t \in T$.

Предположим, что $\exists\theta_0 \in T$: $\operatorname{rank}\mathcal{U}_2(\theta_0) < d$. Тогда найдется обратимая матрица P_*, такая, что

$$P_*\mathcal{U}_2(\theta_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2,*} \\ O \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{U}_{2,*}$ имеет полный ранг по строкам. Умножив первое из равенств (5.1) слева на P_*, получим

$$\begin{pmatrix} z_{1,*} \\ z_{2,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2,*} \\ O \end{pmatrix}\mathbf{d}_r[u(\theta_0)],$$

где $\operatorname{col}(z_{1,*}, z_{2,*}) = P_*z_0$. В этом случае рассматриваемое равенство (5.1) будет выполнено не для всех z_0, а только для тех, в которых $z_{2,*} = 0$. Получили противоречие. Следовательно, матрица $\mathcal{U}_2(t)$ имеет полный строчный ранг d во всех точках $t \in T$.

Пусть $\operatorname{rank}\mathcal{U}_2(t) = d$ $\forall t \in T$. Легко видеть, что векторы

$$\mathbf{d}_r[u(\theta_0)] = -\mathcal{U}_2^{\mathrm{T}}(\theta_0)(\mathcal{U}_2(\theta_0)\mathcal{U}_2^{\mathrm{T}}(\theta_0))^{-1}z_0, \quad \mathbf{d}_r[u(\theta_1)] = -\mathcal{U}_2^{\mathrm{T}}(\theta_1)(\mathcal{U}_2(\theta_1)\mathcal{U}_2^{\mathrm{T}}(\theta_1))^{-1}z_1 \tag{5.2}$$

удовлетворяют уравнениям (5.1). В (5.2) управление будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{r}\alpha_j(t-\theta_0)^j + \sum_{j=0}^{r}\beta_j(t-\theta_1)^j, \tag{5.3}$$

где $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}^l$ – неизвестные векторы. Нетрудно показать, что в результате подстановки (5.3) в (5.2) получим систему алгебраических уравнений, однозначно разрешимую относительно коэффициентов $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}^l$, $j = \overline{0,r}$. Таким образом, для любых $\theta_0, \theta_1 \in T$ и $z_0, z_1 \in \mathbf{R}^d$ указан способ построения управления, удовлетворяющего равенствам (5.1). Это означает, что система (4.8) управляема на отрезке T.

2. Наблюдаемость системы (4.8), (4.9) означает, что из уравнения (4.9) при каждом $t \in T$ единственным образом определится $z_2(t)$ для любого заданного $y(t)$. Покажем, что в этом случае матрица $V_2(t)$ будет иметь полный ранг d по столбцам при всех $t \in T$.

Предположим противное, т.е. что $\exists t_* \in T$: $\operatorname{rank}V_2(t_*) < d$. Тогда существует обратимая матрица S_*, такая, что

$$V_2(t_*)S_* = \begin{pmatrix} V_* & O \end{pmatrix},$$

где V_* имеет полный ранг по столбцам.

Положим в (4.9) $t = t_*$, $z_2(t_*) = S_*\operatorname{col}(z_{1,*}, z_{2,*})$, где $z_{1,*}, z_{2,*}$ – некоторые векторы соответствующих размерностей. В результате получим уравнение

$$y(t_*) = V_*z_{1,*},$$

из которого единственным образом определится только компонента: $z_{1,*} = (V_*^{\mathrm{T}}V_*)^{-1}V_*^{\mathrm{T}}y(t_*)$, а $z_{2,*}$ может быть произвольным. Получили противоречие. Следовательно, $\operatorname{rank}V_2(t) = d$ $\forall t \in T$.

Наоборот. Пусть матрица $V_2(t)$ имеет полный ранг по столбцам для любого $t \in T$. Тогда из (4.8) можно единственным образом найти вектор $z_2(t)$:

$$z_2(t) = (V_2^{\mathrm{T}}(t)V_*(t))^{-1}V_*^{\mathrm{T}}(t)y(t).$$

Это означает, что система (4.8), (4.9) наблюдаема на отрезке T. Теорема 4 доказана.

6. Минимальная реализация в случае постоянного ранга матрицы $\mathcal{W}(t)$.

О п р е д е л е н и е 6. *Размерностью* реализации будем называть размерность ее вектора состояния.

О п р е д е л е н и е 7. Реализация импульсной переходной матрицы называется *минимальной*, если она имеет наименьшую из возможных размерность вектора состояния.

В случае, когда матрица $\mathcal{W}(t)$ имеет на T постоянный ранг, можно показать, что (4.7) всегда имеет управляемую и наблюдаемую реализацию, которая будет минимальной.

Утверждение 2 [30, с. 39]. Пусть прямоугольная матрица $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ и

$$\operatorname{rank}\mathcal{W}(t) = d = \text{const} \quad \forall t \in T. \tag{6.1}$$

Тогда существуют матрицы соответствующих размеров $\Phi(t), \Psi(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что $\det\Phi(t) \neq 0$, $\det\Psi(t) \neq 0$ и

$$\Phi(t)\mathcal{W}(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \forall t \in T.$$

Теорема 5. Пусть $W_k(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $k = \overline{0,r}$. Импульсная переходная матрица (4.7) имеет управляемую и наблюдаемую реализацию вида (4.8), (4.9) тогда и только тогда, когда справедливо условие (6.1). При этом d – размерность реализации.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что условие (6.1) выполнено. В соответствии с утверждением 2 найдется обратимая для всех $t \in T$ матрица $\Psi(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такая, что

$$\mathcal{W}(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} V_2(t) & O \end{pmatrix},$$

где матрица $V_2(t)$ состоит из d столбцов и $\operatorname{rank}V_2(t) = d$. Положим

$$\mathcal{U}_2(t) = -\begin{pmatrix} E_\rho & O \end{pmatrix}\Psi^{-1}(t).$$

Тогда

$$-V_2(t)\mathcal{U}_2(t) = \mathcal{W}(t). \tag{6.2}$$

По построению матрица $V_2(t)$ имеет полный ранг по столбцам, а $\mathcal{U}_2(t)$ – по строкам для всех $t \in T$, поэтому, согласно теореме 4, реализация (4.8), (4.9) будет управляема и наблюдаема.

Необходимость. Пусть существует управляемая и наблюдаемая реализация (4.8), (4.9) импульсной переходной матрицы (4.7), такая, что $V_2(t)$, $\mathcal{U}_2(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$. В соответствии с теоремой 4 матрицы $V_2(t)$ и $\mathcal{U}_2(t)$ будут иметь при всех $t \in T$ полный ранг d по столбцам и строкам соответственно. При этом справедливо тождество (6.2).

Согласно утверждению 2, найдутся обратимые матрицы $\Phi(t), \Psi(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что

$$\Phi(t)V_2(t) = \begin{pmatrix} E_d \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{2,r}(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \end{pmatrix}.$$

Отсюда, принимая во внимание представление (6.2), получим

$$\Phi(t)\mathcal{W}(t)\Psi(t) = -\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Обратимость матриц $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ гарантирует выполнение условия (6.1). Теорема 5 доказана.

Следствие 2. Пусть $W_k(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $k = \overline{0,r}$, и импульсная переходная матрица (4.7) имеет управляемую и наблюдаемую реализацию (4.8), (4.9). Тогда эта реализация будет иметь минимальную размерность из возможных.

Доказательство. Допустим, что система (4.8), (4.9) – управляемая и наблюдаемая реализация импульсной переходной матрицы (4.7). По теореме 5 это означает, что справедливо тождество (6.2), где матрицы $V_2(t)$ и $\mathcal{U}_2(t)$ имеют при всех $t \in T$ полный ранг d по столбцам и строкам соответственно. Тогда, согласно доказательству теоремы 5, $\operatorname{rank}\mathcal{W}(t) = d$. Покажем, что эта реализация минимальна.

Допустим, что имеется реализация меньшего размера $\hat{d} < d$ с соответствующими матрицами $\hat{V}_2(t)$ и $\hat{\mathcal{U}}_2(t)$, состоящими из $\hat{d}$ столбцов и $\hat{d}$ строк соответственно. Тогда по теореме 3

$$-\hat{V}_2(t)\hat{\mathcal{U}}_2(t) = \mathcal{W}(t). \tag{6.3}$$

Из (6.3) следует, что $\operatorname{rank}\mathcal{W}_r(t) \le \hat{d}$. Получили противоречие. Таким образом, управляемая и наблюдаемая реализация имеет минимальную размерность вектора состояния. Следствие 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть $W_k(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $k = \overline{0,r}$, и выполняется условие (6.1). Тогда любая минимальная реализация (4.8), (4.9) импульсной переходной матрицы (4.7) будет управляема и наблюдаема на отрезке T.

Доказательство. Допустим, что существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности d, которая не является управляемой на отрезке T. Согласно теореме 3, это означает, что существует $t_* \in T : \operatorname{rank}\mathcal{U}_2(t_*) = d_* < d$. В силу (6.2) $\operatorname{rank}\mathcal{W}(t_*) \le d_* < d$. Получили противоречие. Следовательно, минимальная реализация всегда управляема на отрезке T.

Случай наличия минимальной реализации, не являющейся наблюдаемой, рассматривается аналогично. Утверждение 3 доказано.

Наиболее простой способ построить минимальную реализацию возможен, если в дополнение к условию (6.1) предположить, что в матрице $\mathcal{W}(t)$ имеется d линейно независимых для всех $t \in T$ столбцов.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\mathcal{W}(t) = (\bar{\mathcal{W}}_1(t)\ \bar{\mathcal{W}}_2(t)),$$

где матрица $\bar{\mathcal{W}}_1(t)$ состоит из d линейно независимых для всех $t \in T$ столбцов.

Умножим $\mathcal{W}(t)$ справа на матрицу $\Psi(t)$, фигурирующую в формулировке утверждения 2:

$$\mathcal{W}(t)\Psi(t) = (\bar{\mathcal{W}}_1(t)\ \bar{\mathcal{W}}_2(t))\Psi(t) = (\bar{\mathcal{W}}_1(t)\ O).$$

Очевидно, что $\Psi(t)$ будет иметь следующую структуру:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} E_\rho & \Psi_1(t) \\ O & \Psi_2(t) \end{pmatrix},$$

где блок $\Psi_2(t)$ обратим при всех $t \in T$. Тогда

$$\bar{\mathcal{W}}_2(t) = -\bar{\mathcal{W}}_1(t)\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t). \tag{6.4}$$

Таким образом,

$$\mathcal{W}(t) = \bar{\mathcal{W}}_1(t)(E_\rho; -\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t)).$$

Для построения реализации (4.8), (4.9) положим

$$V_2(t) = -\bar{\mathcal{W}}_1(t), \quad \mathcal{U}_2(t) = (E_\rho; -\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t)).$$

Другими словами, выберем в матрице $\mathcal{W}(t)$ d линейно независимых для всех $t \in T$ столбцов, они будут составлять матрицу $-V_2(t)$. Соотношение (6.4) означает, что остальные столбцы матрицы $\mathcal{W}(t)$ линейно выражаются через эти линейно независимые столбцы. Поэтому j-й столбец матрицы $\mathcal{U}_2(t)$ будет состоять из коэффициентов разложения j-го столбца матрицы $\mathcal{W}(t)$ по столбцам матрицы $-V_2(t)$.

7. Минимальная реализация в случае переменного ранга матрицы $\mathcal{W}(t)$. Если $\mathcal{W}(t)$ имеет на T переменный ранг, то минимальная реализации может не быть управляемой или наблюдаемой. Рассмотрим пример индекса 1.

Пример 1. Пусть импульсная переходная матрица имеет вид

$$\Omega_2(t,\tau) = W_0(\tau)\delta(t-\tau), \quad W_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix},$$

где скалярные функции $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ обладают следующим свойством: $\alpha(t) = 0$, если $\beta(t) \ne 0$. Таким образом, $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ обращаются в ноль либо по очереди, либо одновременно, вследствие чего матрица $W_0(t)$ имеет на T переменный ранг. При этом структура множеств перемены ранга может быть выбрана сколь угодно сложной. Заметим, что в классе аналитических функций невозможно построить функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, обладающие указанным выше свойством.

Заметим, что матрица $\mathcal{W}(t) = W_0(t)$ не имеет линейно зависимых (равно как и линейно независимых) для всех $t \in T$ строк.

Построим несколько разложений $\mathcal{W}(t) = -V_2(t)\mathcal{U}_2(t)$:

1) $V_2(t) = -E_2$, $\mathcal{U}_2(t) = W_0(t)$;

2) $V_2(t) = -W_0(t)$, $\mathcal{U}_2(t) = E_2$;

3) $V_2(t) = -\begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{U}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}$;

4) $V_2(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Соответствующая реализация (4.8), (4.9) в случае 1 будет наблюдаемой, но не будет управляемой, в случае 2 она будет управляемой, но не будет наблюдаемой, в случаях 3 и 4 реализация не является ни наблюдаемой, ни управляемой. Очевидно, что при этом размерность вектора состояния $z_2(t)$ в системе (4.8) уменьшить невозможно, т.е. все эти реализации минимальны.

Рассмотрим вопрос о размерности минимальной реализации в случае, когда элементы матрицы $\mathcal{W}(t)$ – аналитические функции: $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^A(T)$.

Т е о р е м а 6. Пусть $W_k(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $k = \overline{0, r}$, и $\max\limits_{t \in T} \operatorname{rank}\mathcal{W}(t) = d$. Тогда для импульсной переходной матрицы (4.7)

1) существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности d, управляемая на T;

2) существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности d, наблюдаемая на T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [30, с. 40], что для матрицы $\mathcal{W}(t)$ с аналитическими коэффициентами найдутся обратимые для любого $t \in T$ матрицы $\Phi(t)$, $\Psi(t) \in \mathbf{C}^A(t)$, такие, что

$$\Phi(t)\mathcal{W}(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{W}}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

где $\bar{\mathcal{W}}(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ – $(d \times d)$-матрица, $\max\limits_{t \in T} \operatorname{rank}\bar{\mathcal{W}}(t) = d$.

Положим

$$V_2(t) = -\Phi^{-1}(t)\begin{pmatrix} \bar{\mathcal{W}}(t) \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \end{pmatrix}\Psi^{-1}(t).$$

Принимая во внимание представление (7.1), нетрудно убедиться в справедливости тождества (6.2). Очевидно, что матрица $\mathcal{U}_2(t)$ будет иметь $\forall t \in T$ полный ранг по строкам d. Согласно теореме 4, это означает, что соответствующая реализация (4.8), (4.9) управляема на T. По построению эта реализация будет иметь минимальную из возможных размерность вектора состояния d.

Если положить

$$V_2(t) = -\Phi^{-1}(t)\begin{pmatrix} E_d \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2(t) = (\bar{\mathcal{W}}(t)\ O)\Psi^{-1}(t),$$

то нетрудно убедиться, что соответствующая система (4.8), (4.9) является реализацией импульсной переходной матрицы (4.7) минимальной размерности d. Поскольку матрица $V_2(t)$ имеет $\forall t \in T$ полный ранг по столбцам, в соответствии с теоремой 4 система (4.8), (4.9) наблюдаема на T. Теорема 6 доказана.

Перейдем к более общему случаю $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$.

Л е м м а 4. Пусть $F(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ – некоторая матрица. Тогда существуют обратимые для всех $t \in T$ матрицы $\bar{\Phi}(t), \bar{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ соответствующих размеров, такие, что

$$\bar{\Phi}(t)F(t)\bar{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & \bar{F}(t) & O \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где блок $\bar{F}(t)$ не имеет обратимых при всех $t \in T$ подматриц и не имеет линейно зависимых для всех $t \in T$ столбцов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выделим в матрице $F(t)$ обратимую для всех $t \in T$ подматрицу $F_1(t)$ максимально возможного порядка. С помощью матриц перестановок Φ_1 и Ψ_1 переставим в $F(t)$ строки и столбцы таким образом, чтобы

$$\Phi_1 F(t)\Psi_1 = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_3(t) & F_4(t) \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

В результате умножения слева и справа соответственно на матрицы

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(t) & O \\ -F_3(t)F_1^{-1}(t) & E \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} E & -F_1^{-1}(t)F_2(t) \\ O & E \end{pmatrix}$$

(7.3) приобретет вид

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & F_4^{[1]}(t) \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

где $F_4^{[1]}(t) = -F_3(t)F_1^{-1}(t)F_2(t) + F_4(t)$. Пусть $\Psi_4^{[1]}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ обратимая для всех $t \in T$ матрица, зануляющая в $F_4^{[1]}(t)$ все линейно зависимые для всех $t \in T$ столбцы. В результате умножения (7.4) справа на матрицу

$$\Psi_3(t) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & \Psi_4^{[1]}(t) \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{pmatrix} E & O & O \\ O & F_4^{[2]}(t) & O \end{pmatrix},$$

где блок $F_4^{[2]}(t)$ не имеет линейно зависимых для всех $t \in T$ столбцов.

Продолжим процесс, осуществляя описанные выше преобразования над матрицей $F_4^{[2]}(t)$ и т.д. Наконец, придем к матрице вида (7.2). При этом $\bar{\Phi}(t)$ представляет собой произведение всех матриц, на которые в процессе преобразований производилось умножение слева, а $\bar{\Psi}(t)$ – произведение всех матриц, на которые умножали справа. По построению эти матрицы будут обратимы при всех T и будут иметь бесконечно дифференцируемые на T коэффициенты. Лемма 4 доказана.

По лемме 4 для $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ найдутся обратимые для всех $t \in T$ матрицы $\bar{\Phi}(t), \bar{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что

$$\bar{\Psi}(t)\mathcal{W}(t)\bar{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O & O \\ O & \bar{\mathcal{W}}(t) & O \end{pmatrix},$$

где блок $\bar{\mathcal{W}}(t)$ состоит из κ_2 столбцов, не имеет обратимых при всех $t \in T$ подматриц и не имеет линейно зависимых для всех $t \in T$ столбцов.

Аналогичным образом можно доказать, что для $\mathcal{W}(t)$ найдутся обратимые для всех $t \in T$ матрицы $\hat{\Phi}(t), \hat{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, такие, что

$$\hat{\Psi}(t)\mathcal{W}(t)\hat{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O \\ O & \hat{\mathcal{W}}(t) \\ O & O \end{pmatrix},$$

где блок $\hat{\mathcal{W}}(t)$ сотоит из κ_4 столбцов, не имеет обратимых при всех $t \in T$ подматриц и не имеет линейно зависимых для всех $t \in T$ строк. Заметим, что в общем случае $\kappa_1 + \kappa_2 \neq \kappa_3 + \kappa_4$.

П р и м е р 2. Пусть $\mathscr{W}(t) = W_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix}$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – скалярные функции из примера 1. Очевидно, что матрица $\mathscr{W}(t)$ не содержит обратимых подматриц для любого $t \in T$ или линейно зависимых при всех $t \in T$ столбцов. Здесь $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$, $\kappa_2 = 2$, $\kappa_4 = 1$.

Т е о р е м а 7. Пусть $W_k(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$, $k = \overline{0, r}$. Тогда для импульсной переходной матрицы (4.7)

1) существует управляемая на T реализация размерности $\kappa_1 + \kappa_2$;

2) существует наблюдаемая на T реализация размерности $\kappa_3 + \kappa_4$.

При этом реализация размерности $\kappa = \min\{\kappa_1 + \kappa_2, \kappa_3 + \kappa_4\}$ будет минимальной.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. Для построения управляемой реализации следует положить

$$V_2(t) = -\bar{\Phi}^{-1}(t)\begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O \\ O & \bar{\mathscr{W}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{U}_2(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O & O \\ O & E_{\kappa_2}(t) & O \end{pmatrix}\bar{\Psi}^{-1}(t),$$

а для построения наблюдаемой реализации –

$$V_2(t) = -\hat{\Phi}^{-1}(t)\begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O \\ O & E_{\kappa_4} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \mathscr{U}_2(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O & O \\ O & \hat{\mathscr{W}}(t) & O \end{pmatrix}\hat{\Psi}^{-1}(t).$$

Теорема 7 доказана.

Возвратимся к примеру 2. В управляемой реализации

$$V_2(t) = -\begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{U}_2(t) = E_2,$$

а в наблюдаемой –

$$V_2(t) = -1, \quad \mathscr{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Последняя будет иметь минимальную размерность вектора состояния.

Заключение. Рассматриваются нестационарные ДАУ (0.1) в предположениях, обеспечивающих существование линейного дифференциального оператора, преобразующего (0.1) в систему индекса неразрешенности 1, которая имеет то же множество решений, что и исходная система. Такое преобразование позволяет разделить ДАУ на дифференциальную и алгебраическую части. Импульсная переходная матрица в этом случае представляет собой сумму (2.13) импульсных переходных матриц дифференциальной (2.17), (2.20) и алгебраической (2.18), (2.21) подсистем. Импульсная переходная матрица алгебраической подсистемы имеет вид (4.7).

Реализация импульсной переходной матрицы в случае систем ДАУ имеет свою специфику. Для построения реализации матрицы (4.7) в классе алгебраических систем (4.8), (4.9) в рассмотрение вводится матрица $\mathscr{W}(t)$ (см. (4.5)), свойства которой определяют размерность минимальной реализации, а также ее управляемость и наблюдаемость.

Оказалось, что необходимым и достаточным условием существования у импульсной переходной матрицы (4.7) управляемой и наблюдаемой реализации (4.8), (4.9) является постоянство ранга матрицы $\mathscr{W}(t)$. При этом любая минимальная реализация будет управляема и наблюдаема, а ее размерность $d = \operatorname{rank}\mathscr{W}(t)$. В этом случае способ построения минимальной реализации наиболее простой.

Отказ от постоянства ранга матрицы $\mathscr{W}(t)$ осложняет ситуацию. Если элементы матрицы $\mathscr{W}(t)$ – аналитические функции, то $d = \max\limits_{t \in T} \operatorname{rank}\mathscr{W}(t)$ и можно гарантировать существование либо управляемой, либо наблюдаемой минимальной реализации. Если $\mathscr{W}(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ имеет переменный ранг, то управляемая и наблюдаемая реализации импульсной переходной матрицы (4.7) также существуют, но могут иметь разные размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. *Sibuya Jr.Y.* Some Global Properties of Matrises of One Variable // Math. Ann. 1965. V. 61. № 1. P. 67–77.
3. *Коновалов А.Н.* Задача фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.

4. *Бояринцев Ю.Е., Бояринцева Т.П.* Замечания о неявной разностной схеме, аппроксимирующей систему уравнений Стокса // Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Изд-во СЭИ СО АН СССР, 1983. С. 140–152.

5. *Серов Е.П., Корольков Б.П.* Динамика парогенератора. М.: Энергоиздат, 1981.

6. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988.

7. *Сенди К.* Современные методы анализа электрических систем. М.: Энергия, 1971.

8. *Eich-Soellner E., Führer C.* Numerical Methods in Multibody Dynamics. Stuttgard: B.G. Teubner, 1998.

9. *Носов Г.В., Калганова В.А., Кулешова Е.О.* Теоретические основы электротехники. Ч. 2. Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2012.

10. *Андрюшин А.В., Сабанин В.Р., Смирнов Н.И.* Управление и инноватика в теплоэнергетике. М.: МЭИ, 2011.

11. *Борисов Б.М., Большаков В.И., Маларев В.И., Проскуряков Р.М.* Математическое моделирование и расчет систем управления техническими объектами. СПб.: Изд-во С.-Петербургск. гос. горного ин-та, 2002.

12. *Балакирев В.С., Дудников Е.Г., Цирлин А.М.* Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М.: Энергия, 1967.

13. *Hatemi-J. A.* Assymmetric Generalized Impulse Responses with an Application in Finance // Economic Modelling. 2014. V. 36(C). P. 18–22.

14. *Pesaran H.H., Shin Y.* Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models // Economucs Letters. 1988. V. 58. № 1. P. 17–29.

15. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974.

16. *Борский В.* О свойствах импульсных переходных матриц систем с переменными параметрами // АиТ. 1959. Т. 20. № 7. С. 848–855.

17. *Мальчиков С.В.* О синтезе линейных систем автоматического управления с переменными параметрами // АиТ. 1959. Т. 20. № 12. С. 1588–1594.

18. *Kalman R.* Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // J. SIAM Control. 1963. V. 1. № 2. P. 152–192.

19. *SilvermanL., Meadows H.* Equivalence and Synthesis of Time-variable Linear Systems // Proc. IV Annual Allerton Conf. Allerton, 1966. P. 776–784.

20. *Youla D.* The Synthesis of Linear Dynamical Systems from Prescribed Weighting Patterns // J. SIAM Appl. Math. 1966. V. 14. № 3. P. 527–549.

21. *Lükepohl H.* Impulse Response Function. Berlin: Springer, 2008.

22. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 2003.

23. *Певзнер Л.Д.* Теория систем управления. М.: Горная книга, 2002.

24. *Горелик В.Ю., Тафт В.А., Хейфец С.Б.* Определение импульсной переходной функции с периодическими параметрами с помощью обобщенного метода Хилла // АиТ. 1977. № 8. С. 12–24.

25. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972.

26. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

27. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // АиТ. 2017. № 5. С. 36–55.

28. *Щеглова А.А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.

29. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений с переменными коэффициентами // Проблемы математического анализа. 2019. № 5. С. 36–55.

30. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.