

*Известия*

ISSN 0002-3310

*Российской академии наук*

---

---

# ЭНЕРГЕТИКА



2023

6

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

---

Методы и модели оптимального управления теплоснабжающей системой с учетом надежности на основе метода множителей Лагранжа и марковского случайного процесса <i>В. А. Стенников, И. В. Постников, А. В. Пеньковский</i>	3
Методика создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков, предназначенных для проведения оптимизационных исследований автономных электроэнергетических систем <i>А. М. Клер, Е. Л. Степанова, П. В. Жарков</i>	17
Энергомассовые и теплоэлектрические характеристики преобразователя тока, выполненного на приборах плазменной электроэнергетики <i>Е. В. Онуфриева, В. В. Онуфриев</i>	31
Новые аналитические решения математических моделей теплового удара локально-неравновесного теплообмена <i>Э. М. Карташов, С. С. Крылов</i>	44
Рост парового пузырька в перегретой жидкости (эффект запираия давления) <i>Ю. Б. Зудин, Д. С. Уртенев</i>	61

---

---

# C O N T E N T S

---

Methods and Models for Optimal Managing of District Heating System Accounting Reliability Based on Lagrange Multiplier Method and Markov Random Process <i>V. A. Stennikov, I. V. Postnikov, and A. V. Penkovskii</i>	3
Method for Creating Mathematical Models of Heating Nuclear Power Units of Power Plants for Optimization Studies of Autonomous Electric Power Systems <i>A. M. Kler, E. L. Stepanova, and P. V. Zharkov</i>	17
Energy-Mass and Thermoelectric Characteristics of the Current Convertor, Made on the Devices of Plasma Electric Power Industry <i>E. V. Onufrieva and V. V. Onufriev</i>	31
New Analytical Solutions of Mathematical Models of Heat Shock of Local Non-Equilibrium Heat Transfer <i>E. M. Kartashov and S. S. Krylov</i>	44
Vapor Bubble Growth in a Superheated Liquid (Pressure Blocking Effect) <i>Yu. B. Zudin and D. S. Urtenov</i>	61

---

---

---

---

УДК 621.3.019.3:330.133.7:697.331:697.341

**МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕПЛОСНАБЖАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА  
И МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА**

© 2023 г. В. А. Стенников<sup>1</sup>, \*, И. В. Постников<sup>1</sup>, \*\*, А. В. Пеньковский<sup>1</sup>, \*\*\*

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики  
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

\*e-mail: sva@isem.irk.ru

\*\*e-mail: postnikov@isem.irk.ru

\*\*\*e-mail: penkoffsky@isem.irk.ru

Поступила в редакцию 20.08.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Основная цель исследования заключается в определении оптимального режима функционирования теплоснабжающей системы при минимизации эксплуатационных затрат на производство и распределение тепловой энергии с учетом ожидаемых экономических потерь от возможных недоотпусков тепловой энергии при отказах элементов системы. Для получения параметров, соответствующих такому режиму, предложен методический подход, заключающийся в совместном расчете узловых цен на тепловую энергию и показателей надежности в исследуемой системе при реализации различных аварийных состояний (отказов элементов). Определение узловых цен на тепловую энергию осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа, при этом расчет проводится с учетом различной стоимости производства на источниках тепловой энергии и распределения теплоносителя по тепловой сети. В рамках решаемой задачи в качестве узловых показателей надежности используются недоотпуски тепловой энергии потребителям в аварийных состояниях системы и соответствующие им экономические эквиваленты (ущерб). Оценка вероятностей реализации аварийных состояний осуществляется с помощью моделей марковского случайного процесса. Общей методической основой для моделирования теплогидравлических режимов в системе, в том числе аварийных, являются закономерности теории гидравлических цепей. Разработанные методы и модели, наряду с основной сформулированной задачей оптимального управления, позволяют на основе получаемых показателей идентифицировать наиболее “узкие” места в системе, соответствующие максимальным экономическим потерям от нарушения теплоснабжения потребителей. Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы теплоснабжающей системы с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации, сформулированы направления дальнейших исследований.

*Ключевые слова:* теплоснабжающая система, узловые цены на тепловую энергию, эксплуатационные затраты, надежность теплоснабжения потребителей, недоотпуск тепловой энергии, экономический ущерб, метод множителей Лагранжа, теория гидравлических цепей, марковский случайный процесс

DOI: 10.31857/S0002331023060055, EDN: QDPTXR

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Методология оптимального управления теплоснабжающими системами (ТСС) предполагает постановку и решение целого комплекса научно-методических и инженерных задач: определения оптимальной структуры и параметров этих систем, оптимальных режимов их функционирования, эффективного соотношения и загрузки централизованных и распределенных источников при эксплуатации, выбора оптимальных организационных форм взаимодействия субъектов теплового рынка, определения наиболее эффективных (технически и экономически) режимов функционирования, анализа и обеспечения надежности функционирования системы и многих других задач. В фундаментальных работах [1–3] приведены методические положения для решения многих из перечисленных проблем применительно к современным ТСС любой структуры и масштаба.

В данном исследовании выделяются два научно-методических направления в рамках оптимального управления ТСС: 1) определение экономически эффективных режимов функционирования системы и 2) анализ надежности системы в этих режимах. Постановка и решение этих задач рассматривается при условии объединения функций генерации, транспортировки и сбыта тепловой энергии в рамках так называемой “единой теплоснабжающей организации” (ЕТО) [4, 5]. Такая форма организации ТСС обеспечивает минимизацию экономических и технических рисков, стабилизирует системную надежность за счет комплексного контроля над источниками тепловой энергии (ИТ) и тепловыми сетями (ТС), обеспечивая согласование режимов их функционирования и планирования технического обслуживания. В рамках ЕТО финансовая рентабельность функционирования системы достигается путем минимизации стоимости производства и распределения тепловой энергии для покрытия спроса потребителей. Критерием экономической эффективности при этом выступает *узловая цена* – стоимость тепловой энергии в конкретной точке системы с учетом конфигурации сети и ограничений, возникающих при генерации и передаче тепловой энергии.

Известны несколько подходов к определению узловых цен в различных сферах приложения [6–8]. Так, для определения узловых цен в электроэнергетических системах получил распространение *метод множителей Лагранжа* [9–14], который применяется как инструмент определения узловых цен, обеспечивающих выполнение и устойчивость оптимального режима функционирования исследуемых систем. С учетом положительного опыта применения в электроэнергетике данный метод предлагается использовать и для оценки узловых цен на тепловую энергию при определении экономически эффективных режимов функционирования ТСС. Эффективность в данном случае определяется эксплуатационными затратами с учетом технологической специфики, свойств и ограничений системы. При этом важно, чтобы каждый из этих режимов соответствовал не только требованиям технико-экономической эффективности, но и надежности теплоснабжения потребителей. Для учета этого фактора решается вторая задача исследования – оценка (анализ) надежности функционирования ТСС, которая осуществляется на основе узлового подхода, предложенного в [15] и получившего развитие в работах [16–22]. В рамках решаемой проблемы в качестве *узловых показателей надежности* используются недоотпуски тепловой энергии потребителям в аварийных состояниях системы и соответствующие им экономические эквиваленты или ущербы [23]. Обоснование выбранной системы критериев приводится в методической части. Оценка вероятностей реализации аварийных состояний, связанных с отказами элементов системы, осуществляется с помощью моделей *марковского случайного процесса*, широко и эффективно применяемого при исследовании надежности различных технических систем, в том числе энергетических [15, 17–20, 24–27]. Общей методической основой в решении сформулированных выше задач являются модели *теории гидравлических цепей* (ТГЦ), используемые для описания потокорас-

пределения в системе в различных режимах функционирования, в том числе аварийных. Основы ТГЦ и ее приложения изложены в [1, 28, 29].

Таким образом, основная цель исследования состоит в определении оптимального режима функционирования ТСС при минимизации эксплуатационных затрат на производство и распределение тепловой энергии с учетом ожидаемых экономических потерь от возможных недоотпусков тепловой энергии при отказах элементов системы. Для получения соответствующих такому режиму параметров предложен методический подход, заключающийся в совместном расчете узловых цен на тепловую энергию и показателей надежности в исследуемой системе при реализации различных аварийных состояний, связанных с отказами элементов системы. Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы ТСС с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации, сформулированы направления дальнейших исследований.

## 2. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

### 2.1. Определение узловых показателей стоимости для расчетного безаварийного режима

Исходная задача формулируется как поиск оптимальных режимов функционирования ТСС по экономическому критерию, которому соответствуют минимальные затраты на производство и транспортировку тепловой энергии, определяемые в единицу времени. Целевая функция такой задачи может быть записана следующим образом:

$$z = \sum_{j \in J'} z_j(q_j) + z_{\text{net}}, \quad (1)$$

где  $j$  – номер узла ТСС;  $J'$  – подмножество узлов-источников, функционирующих в исследуемой системе ( $J$  – полное множество узлов, состоящее из источников и потребителей);  $z_j(q_j)$  – затраты на производство тепловой энергии на  $j$ -м ИТ, руб./ч;  $q_j$  – производительность  $j$ -го ИТ (в случае, если  $j \in J'$ ), ГДж/ч;  $z_{\text{net}}$  – затраты на транспортировку тепловой энергии или эксплуатационные затраты ТС, руб./ч.

Имеющийся опыт обработки фактических технико-экономических показателей функционирования ИТ различного типа показал, что в качестве аналитической функции эксплуатационных затрат с высокой точностью могут быть использованы аппроксимации этих данных в виде полинома второго порядка [30, 31]:

$$z_j(q_j) = \alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j, \quad j \in J', \quad (2)$$

где  $\alpha_j$  [руб. ч/(ГДж)<sup>2</sup>],  $\beta_j$  (руб./ГДж),  $\gamma_j$  (руб./ч) – коэффициенты аппроксимации функции затрат  $j$ -го ИТ. Полученная таким образом функция затрат является выпуклой, монотонно возрастающей и принимающей положительные значения при  $q_j \geq 0$ .

Эксплуатационные затраты ТС связаны, главным образом, с расходом электроэнергии на перекачку теплоносителя и определяются по следующей зависимости [1]:

$$z_{\text{net}} = \sum_{i \in I} z_i = (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i h_i, \quad (3)$$

где  $i$  – номер участка сети;  $I$  – множество участков сети;  $z_i$  – затраты для участка  $i$ , руб./ч;  $c_e$  – цена электроэнергии, руб./кВтч;  $x_i$  – расход теплоносителя на  $i$ -м участке сети, т/ч;  $h_i$  – величина потерь давления на  $i$ -м участке сети, м в.ст.;  $\eta_p$  – коэффициент полезного действия насосной установки, %.

Величины  $x_i$  и  $h_i$  определяются из решения системы уравнений, описывающей оптимальное потокораспределение в ТС [1, 28]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$\mathbf{SXx} = \mathbf{h}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица инцидентий линейно независимых узлов и участков сети;  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i)$  – вектор расходов теплоносителя на участках сети, т/ч;  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_j)$  – вектор расходов теплоносителя в узлах сети, т/ч;  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_i)$  – вектор потерь напоров на участках, м в.ст.;  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_i)$  – диагональная матрица гидравлических сопротивлений, м<sup>2</sup>/Г<sup>2</sup>;  $\mathbf{X} = \text{diag}(|x_1|, \dots, |x_i|)$  – диагональная матрица модулей расходов теплоносителя, т/ч.

При использовании выражений (2), (3) и (5) в целевой функции (1), с учетом перехода уравнений (4) к потокам тепловой энергии, получим следующую формализацию задачи оптимизации режимов в ТСС:

$$z = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j) + (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i^2 |x_i| s_i \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$\mathbf{Ax} = w\mathbf{q}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_j)$  – вектор расходов тепловой энергии в узлах сети, ГДж/ч;  $w = (c_w \Delta t)^{-1}$  – коэффициент перехода от массового потока теплоносителя к потокам тепловой энергии, где  $c_w$  – теплоемкость теплоносителя, ГДж/(т<sup>0</sup>С);  $\Delta t$  – температурный напор в сети (разность температур теплоносителя в подающем и обратном трубопроводе), <sup>0</sup>С.

Для решения задачи (6)–(7) предлагается использовать метод множителей Лагранжа, широко применяемый для решения оптимизационных задач в различных сферах приложения. Например, в работах [11, 12] на основе данного метода производится оптимизация установившихся режимов в электроэнергетических системах при заданной зависимости узловых цен на энергию от ценовых заявок и технических параметров системы. В настоящем исследовании используется аналогичный подход к расчету узловых (маржинальных) цен на тепловую энергию, основанный на оптимизации режимов ТСС по условиям оптимальности функции Лагранжа. Поскольку ограничения (7) линейны, то задача (6)–(7) является регулярной, а соответствующая функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j) + (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i^2 |x_i| s_i + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{Ax} - w\mathbf{q}). \quad (8)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_j)$  – вектор множителей Лагранжа, элементы которого интерпретируются как узловые цены на тепловую энергию, руб./ГДж. Обоснование этого утверждения и предлагаемого метода применительно к ТСС рассматривается в [32]. Согласно этому методу, вектор множителей Лагранжа (8) соответствует ограничениям оптимизационной задачи (6)–(7), а условия оптимальности ее решения соответствуют стационарности по каждой группе переменных  $q_j$ ,  $x_i$  и  $\Lambda_j$  и записываются следующим образом:

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{q}} = 2\alpha_j q_j + \beta_j - \Lambda_j = 0, \quad j \in J', \quad (9)$$

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{c_e}{362.7 \eta_p} [x_i^2 \text{sign}(x_i) s_i + 2x_i \text{sign}(x_i) s_i] + \sum_{j \in J} a_j \Lambda_j = 0, \quad i \in I, \quad (10)$$

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \mathbf{Ax} - w\mathbf{q} = 0. \quad (11)$$

Чтобы определить переменные суммарных затрат на производство и транспортировку тепловой энергии, необходимо решить систему уравнений (9)–(11). При решении системы уравнений определяются и двойственные переменные к соответствующим ограничениям. В результате определяются элементы вектора неопределенных множителей Лагранжа, являющиеся равновесными ценами на тепловую энергию для всех узлов системы, в том числе потребителей.

### 2.2. Определение узловых показателей стоимости и надежности для аварийного режима

Под *аварийным* (или *послеаварийным*) понимается такой режим, при котором ТСС функционирует при условии отказа некоторого ее элемента или одновременно нескольких элементов. В случае отказов элементов ИТ изменяются их производительности, что приводит к недоотпуску тепловой энергии в сеть. При отказах участков ТС снижается их пропускная способность или происходит полное их отключение – в итоге изменяется потокораспределение в системе. И то и другое приводит к снижению уровней подачи и в итоге недоотпуску тепловой энергии потребителям (обычно, некоторой группе потребителей). Для экономической интерпретации недоотпуска используется его эквивалент, который обычно называют *экономическим ущербом* [23] и определяют как количественную оценку последствий отказа в денежном выражении. Отметим, что последствия от недоотпуска тепловой энергии не могут быть полностью формализованы и выражены в виде финансовых потерь от ее реализации, с чем связана некоторая критика показателя экономического ущерба (далее – ущерба) среди специалистов по вопросам надежности теплоснабжения [15]. Тем не менее его величина имеет вполне достоверную корреляцию с потенциальными последствиями соответствующего отказа, включая не формализуемые, а вопрос с определением “реального” ущерба может быть частично решен введением коэффициентов, учитывающих категории потребителей по требованиям к надежности теплоснабжения, установленным в нормативах [33].

Обозначим через  $d_n$  суммарный ущерб от недоотпуска тепловой энергии потребителям системы в ее некотором аварийном состоянии  $n$  (далее – состоянии), руб./ч, который можно выразить следующим образом:

$$d_n = \sum_{j \in J''} d_{jn} = \sum_{j \in J''} c_{jn}(q_j - q_{jn}), \quad (12)$$

где  $J''$  – подмножество узлов-потребителей;  $d_{jn}$  – ущерб для некоторого потребителя  $j$  в состоянии  $n$ , руб./ч;  $c_{jn}$  – цена тепловой энергии в  $j$ -м узле в состоянии  $n$ , руб./ГДж;  $q_{jn}$  (для  $j \in J''$ ) – подача тепловой энергии потребителю  $j$  в состоянии  $n$ , ГДж/ч. Разница  $q_j - q_{jn}$  представляет собой уровень подачи тепловой энергии потребителю, соответствующее моделируемому состоянию  $n$ ; также применяется интерпретация данного показателя в относительном выражении –  $q_{jn}/q_j$  [15]. Определение интегрального или суммарного ожидаемого ущерба для потребителей с учетом возможности реализации каждого из рассматриваемых аварийных состояний требует привлечения вероятностных параметров этих состояний – этот вопрос подробно рассматривается в п. 2.3.

Итак, задача (6)–(7) для состояния  $n$ , характеризуемого узловыми показателями недоотпуска и соответствующего ущерба, с использованием выражения (12) может быть формализована следующим образом:

$$z_n = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_{jn}^2 + \beta_j q_{jn} + \gamma_j) + \frac{c_e}{362.7\eta_p} \sum_{i \in I} x_{in}^2 |x_{in}| s_i + \sum_{j \in J''} c_{jn}(q_j - q_{jn}) \rightarrow \min, \quad (13)$$

$$\mathbf{Ax}_n = w\mathbf{q}_n, \quad (14)$$

где  $z_n$  – эксплуатационные затраты с учетом ущерба от недоотпуска в некотором аварийном состоянии  $n$  системы, руб./ч;  $q_{jn}$  (для  $j \in J'$ ) – производительность  $j$ -го источника в состоянии  $n$ , ГДж/ч;  $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, \dots, x_{in})$  – вектор расходов теплоносителя на участках сети в состоянии  $n$ , т/ч;  $\mathbf{q}_n = (q_{1n}, \dots, q_{jn})$  – вектор расходов тепловой энергии в узлах сети в состоянии  $n$ , ГДж/ч. Для решения задачи (13)–(14) применяется методический подход, аналогичный описанному в разделе 2.1. В результате определяются узловые показатели стоимости (цены) и надежности (уровни подачи тепловой энергии потребителям, соответствующие недоотпускам и ущербы) для некоторого аварийного режима, соответствующего состоянию  $n$ . Далее рассмотрим некоторые факторы, относящиеся к оценке надежности, а также методические положения, позволяющие их учитывать в рамках решаемой проблемы.

Величины  $x_{in}$  и  $q_{jn}$  в различных состояниях системы определяются путем моделирования потокораспределения, устанавливающегося при отключении отказавшего элемента системы: в пределах ТС рассматриваются, главным образом, отказы участков сети, для ИТ – отказы оборудования или технологических агрегированных узлов, в зависимости от детализации схемы. В общем случае каждому состоянию  $n$  соответствует отказ некоторого элемента или группы элементов системы. В расчетах обычно ограничиваются рассмотрением состояний одновременного отказа не более одного элемента, что вполне соответствует условиям функционирования реальных ТСС [15].

Снижение подачи тепловой энергии потребителю, в зависимости от своего уровня и длительности, вплоть полного прекращения, может привести к недоотпуску тепловой энергии, который определяется по критерию снижения температуры внутреннего воздуха ниже некоторого минимально допустимого уровня  $t_{j\min}$ , °С [33]. При моделировании нарушений теплоснабжения потребителей в ТСС одним из важных факторов является наличие теплоаккумулирующего эффекта или тепловой инерции, который интерпретируется как *пассивный временной резерв* потребителя [15]. Для оценки суммарного по потребителям ущерба с учетом временного резерва запишем следующую формулу:

$$d_n = \sum_{j \in J''} c_{jn} [1 - (\Delta t_{jn} / \tau_{jn})] (q_j - q_{jn}), \quad (15)$$

где  $\Delta t_{jn}$  – величина временного резерва для потребителя  $j$ , ч, т.е. время, в течение которого при нарушении теплоснабжения температура внутреннего воздуха снижается до уровня  $t_{j\min}$ ;  $\tau_{jn}$  – время восстановления расчетного теплоснабжения в некотором аварийном состоянии  $n$ , ч.

Для большинства практических расчетов с приемлемой точностью допустимо принимать временной резерв одинаковым (усредненным) для всех потребителей –  $\Delta \bar{\tau}$ , ч. В таком случае выражение (15) можно представить следующим образом:

$$d_n = [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] \sum_{j \in J''} c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (16)$$

Количественная оценка временного резерва потребителей ( $\Delta t_{jn}$  или  $\Delta \bar{\tau}$ ), связанного с тепловой инерцией, осуществляется на основе аналитических зависимостей, описывающих теплофизический процесс остывания с использованием коэффициента тепловой аккумуляции, определяемого на основе геометрических и теплопроводных характеристик зданий. Эти вопросы подробно рассмотрены в работах [15] и [34].

### 2.3. Определение узловых показателей стоимости и надежности за период времени

В предыдущих разделах рассматривались экономические и надежностные показатели, определяемые для некоторого расчетного интервала времени, а именно за час соответственно тепловой нагрузке. Предложенные зависимости позволяют определить их значения для любого потребителя и состояния системы, соответствующего отказу некоторого элемента. В то же время для практических расчетов важно располагать *интегральными* значениями этих показателей, определяемых за некоторый расчетный период времени (для ТСС обычно отопительный сезон).

Так, интегральные эксплуатационные затраты за расчетный период времени с учетом ущерба для некоторого состояния  $n$  можно определить следующим образом:

$$Z_n = \sum_{k \in K} z_{kn} + D_n, \quad (17)$$

где  $z_{kn}$  – затраты, соответствующие расчетному интервалу времени  $k$ , руб./ч;  $K$  – множество расчетных интервалов, формирующих расчетный период;  $D_n$  – интегральное (суммарное) значение ожидаемого ущерба, соответствующее состоянию  $n$ , руб.

Аддитивность величин  $z_{kn}$  по интервалам обусловлена непрерывностью процесса теплоснабжения потребителей, когда объем потребления за расчетный период (соответственно, эксплуатационных затрат) соответствует сумме потреблений, определенных согласно графику нагрузок для рассматриваемых интервалов времени в рамках этого периода, что справедливо для любого моделируемого состояния системы.

Показатель  $D_n$  как показатель надежности не может быть определен прямым сложением по временным интервалам, поскольку имеет вероятностную компоненту, связанную с отказами элементов. Получение ожидаемого суммарного ущерба в некотором состоянии системы имеет вероятность, соответствующую вероятности реализации этого состояния, или, в частном случае, вероятности отказа элемента. С учетом этого положения предлагается следующее выражение для определения величины  $D_n$ :

$$D_n = p_n \tau_0 d_n = p_n \tau_0 [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] \sum_{j \in J''} c_{jn} (q_j - q_{jn}), \quad (18)$$

где  $p_n$  – вероятность состояния  $n$ ;  $\tau_0$  – длительность расчетного периода, ч.

Величина интегрального ущерба для некоторого потребителя может быть определена по следующей формуле, учитывающей вероятности реализации всех моделируемых состояний:

$$D_j = \tau_0 \sum_{n \in N} p_n [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (19)$$

Суммарный ущерб по системе (по всем состояниям и потребителям) может быть определен по следующей формуле:

$$D_\Sigma = \sum_{n \in N} D_n = \sum_{j \in J''} D_j = \tau_0 \sum_{n \in N} \sum_{j \in J''} p_n [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (20)$$

Если из выражений (18)–(20) исключить показатели стоимости  $c_{jn}$ , то получим аналогичные выражения для вычисления интегральных величин недоотпусков тепловой энергии за расчетный период, соответственно, для некоторого состояния, потребителя и суммарного по системе.

Вероятности состояний  $p_n$  определяются на основе модели *марковского случайного процесса*, описывающего эволюцию событий в системе. Обоснования применения данной модели для решения задач надежности теплоснабжения рассматриваются в [15–19]. Существуют различные формализации и виды марковских моделей. Используем для определения величин  $p_n$  следующую систему уравнений, описывающих ста-

ционарный марковский случайный процесс для условий *простейшего потока событий* [15, 35]:

$$p_n = \left[ \sum_{i \in I_n} (\lambda_i + \mu_i) \right]^{-1} \left[ \sum_{m \in N_n} p_m \sum_{i \in I_m} (\lambda_i + \mu_i) \right], \quad n \in N, \quad (21)$$

где  $i$  – номер элемента системы (в частном случае, участков ТС – см. п. 2.1);  $m$  – номер некоторого состояния системы, вводится вместе с индексом  $n$  в рамках модели случайного процесса;  $p_m$  – вероятность состояния  $m$ ;  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  – интенсивности отказов и восстановления элемента  $i$  соответственно,  $1/\tau$ ;  $I_n$  – подмножество элементов системы, отказ или восстановление которых соответствует переходу из состояния  $n$  в состояние  $m$ ;  $I_m$  – подмножество элементов, отказ или восстановление которых соответствует переходу из состояния  $m$  в состояние  $n$ ;  $N_n$  – подмножество состояний, из которых возможен прямой переход в состояние  $n$ .

Ранее, в п. 2.1, введенные индексы  $i$  и множество  $I$  соответствуют участкам сети и их множеству. В общем случае в рамках модели (21) могут рассматриваться не только элементы ТС (участки трубопроводов), но и элементы ИТ, функционирующих в составе исследуемой ТСС. В таком случае множество элементов  $I$  и множество рассматриваемых состояний системы  $N$  дополняются соответствующими компонентами, при этом отказы дополнительных элементов должны быть учтены на уровне физического моделирования последствий реализации аварийных состояний. Вместе с тем при анализе надежности большинства действующих ТСС вполне приемлемо ограничиваться моделированием элементов ТС, которые являются наиболее ненадежными как с точки зрения интенсивностей их отказов, значения которых в разы превышают соответствующие параметры элементов ИТ [15], что особенно проявляется на фоне высокой доли износа трубопроводов [36], так и последствий этих отказов, зачастую приводящих к длительным нарушениям теплоснабжения с большими потерями тепловой энергии [15, 36].

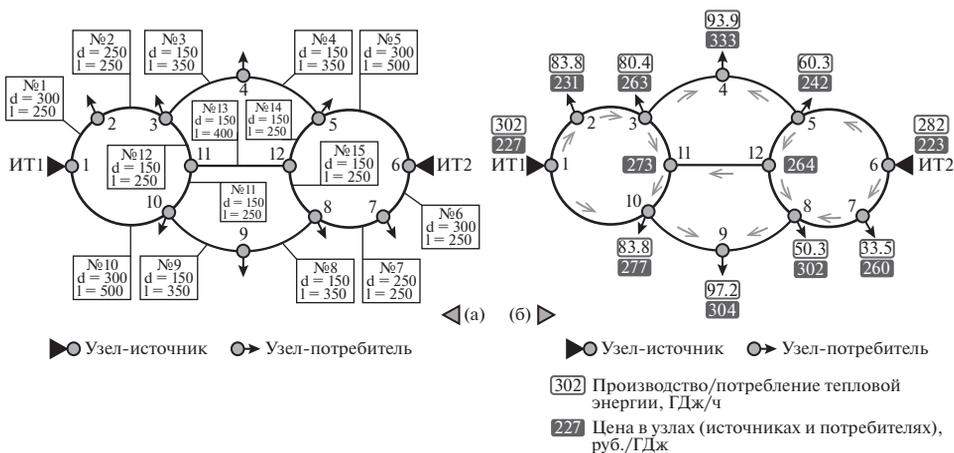
Уравнение (21) представлено в общей формулировке при условии, что количество аварийных состояний может не соответствовать количеству единичных отказов. Иначе говоря, такое условие допускает сложные состояния, соответствующие одновременному отказу нескольких элементов, при этом множество состояний  $N$  поглощает как число элементов, так и группу сложных состояний. Если множество состояний ограничивается единичными отказами, то каждая вероятность  $p_n$  соответствует вероятности отказа некоторого элемента –  $p_i$ , и модель (21) значительно упрощается [36]:

$$p_i = p_0 \lambda_i / \mu_i, \quad i \in I, \quad (22)$$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{-1}, \quad (23)$$

где  $p_0$  – вероятность полностью работоспособного состояния системы.

Допущение о возможности состояний только с одним отказавшим элементом вполне достоверно соответствует условиям функционирования исследуемых систем, что подтверждается статистическими данными по их аварийности [15]. Однако при анализе надежности ТСС с большим количеством источников, функционирующих на единые сети, а также услужением структуры действующих систем вследствие появления новых объектов, например, при их переходе к централизованно-распределенным системам с активными потребителями [22], вероятность сложных состояний повышается и этот фактор необходимо учитывать при моделировании случайного процесса.



**Рис. 1.** Тестовая схема ТСС: (а) основные параметры системы:  $d$  – диаметр участка ТС (м),  $l$  – протяженность участка ТС (м); (б) – распределение тепловой энергии и узловых цен в расчетном безаварийном режиме функционирования исследуемой ТСС.

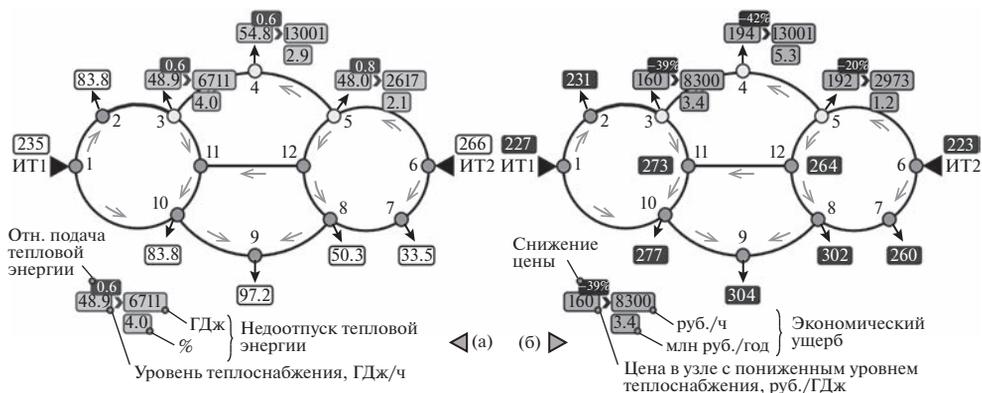
### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассматривается тестовая схема ТСС, представленная на рис. 1а. Схема состоит из 12-ти узлов, из которых два являются источниками (ИТ1 и ИТ2), 8 узлов – потребителями (узлы 2–5, 7–10). Расчетная нагрузка потребителей составляет 583 ГДж/ч, мощность ИТ1 – 302 ГДж/ч, ИТ2 – 282 ГДж/ч. Суммарная протяженность сетевой части системы равна 4800 м. Для всех участков ТС заданы необходимые для расчетов параметры: диаметры, длины, гидравлические сопротивления, параметры надежности (интенсивности отказов и восстановлений).

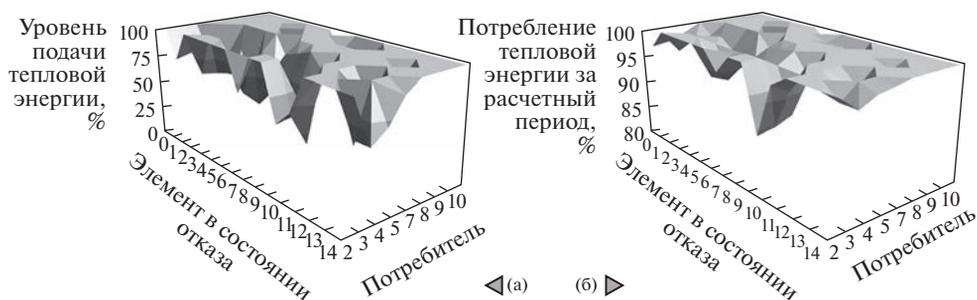
На рис. 1б представлены результаты решения задачи (6)–(7) для расчетного безаварийного режима функционирования исследуемой ТСС. На схеме представлены распределения потоков тепловой энергии и узловых цен с учетом оптимального потокораспределения в сети. Диапазон цен для потребителей соответствует значениям от 231 руб./ГДж (потребитель 2) до 333 руб./ГДж (потребитель 4). Также получены значения цен для каждого участка сети в соответствии со значениями затрат на перекачку теплоносителя (на рисунке не показаны). Суммарные эксплуатационные затраты для расчетного режима составляют 379.8 тыс. руб./ч: из них 38.5% соответствует производству тепловой энергии на ИТ1, 37.5% – на ИТ2 и 24% – транспортировке теплоносителя по сети. Решения получены в вычислительной среде GAMS, в которой написана соответствующая математическая модель исследуемой системы, позволяющая проводить расчеты для различных исходных условий и ограничений.

Проведены многовариантные расчеты аварийных режимов для исследуемой системы, соответствующих состояниям отказов ее элементов – участков ТС. Для каждого из моделируемых состояний определены узловые цены на тепловую энергию и экономические ущербы от возможного недоотпуска тепловой энергии потребителям.

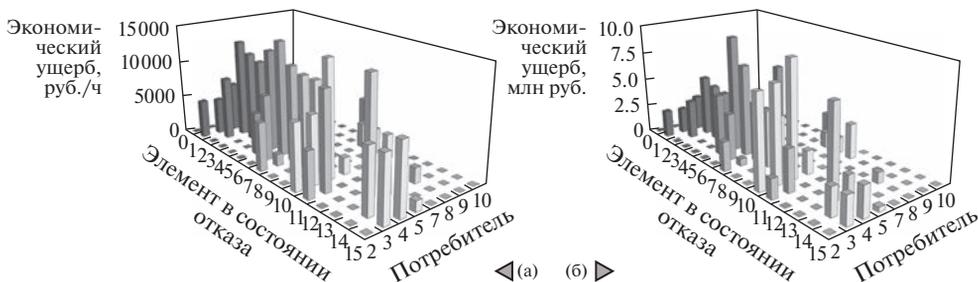
В каждом режиме при отказе некоторого участка сети, устанавливается соответствующее потокораспределение, определяющее подачу тепловой энергии потребителям. На рис. 2, для примера, приведен результат оценки аварийного режима, соответствующего отказу участка сети № 2 (см. рис. 1а). На схеме показаны изменения искомых технических (а) и экономических (б) показателей для потребителей с нарушением теплоснабжения в заданном аварийном режиме.



**Рис. 2.** Результаты моделирования одного из аварийных режимов, соответствующего отказу участка сети № 2 (см. рис. 1а): (а) уровни теплоснабжения потребителей и недоотпуск тепловой энергии; (б) распределение узловых цен и экономического ущерба.



**Рис. 3.** Уровни подачи (а) и объемы потребления (б) тепловой энергии в исследуемой ТСС в расчетном (позиция "0") и аварийных режимах функционирования, соответствующих состояниям отказов элементов системы.



**Рис. 4.** Значения интервального (а) и интегрального (б) экономического ущерба в исследуемой ТСС в расчетном (позиция "0") и аварийных режимах функционирования, соответствующих состояниям отказов элементов системы.

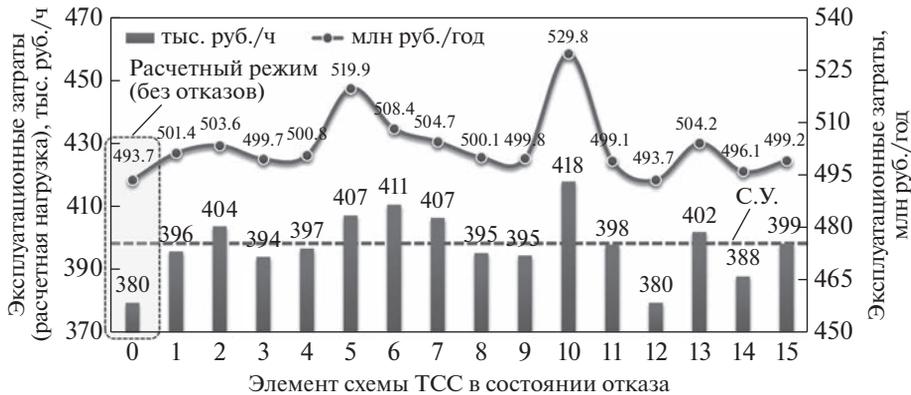


Рис. 5. Изменение эксплуатационных затрат в различных аварийных состояниях исследуемой схемы ТСС.

На рис. 3 в обобщенном виде показаны полученные технические (физические) показатели для расчетного (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих отказам элементов системы: на диаграмме (а) приведены уровни подачи тепловой энергии потребителям, а на диаграмме (б) – объемы потребления тепловой энергии в исследуемой системе за расчетный период. На рис. 4 в обобщенном виде показаны полученные экономические ущербы для расчетного (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих отказам элементов системы: на диаграмме (а) показаны значения интервального ущерба за час, на диаграмме (б) – значения ожидаемого интегрального ущерба за расчетный период. Из представленных графиков видно, что снижение уровня теплоснабжения, как и соответствующие ущербы, распределены неравномерно как по отказам элементов, так и по потребителям системы.

Значения суммарных эксплуатационных затрат, определенных по каждому аварийному режиму, показаны на рис. 5. Гистограмма представляет собой значения часовых значений, а график – величин, определенных за год. Например, суммарные эксплуатационные затраты для рассматриваемого на рис. 2 аварийного режима (отказ участка № 2), составляют 404 тыс. руб./ч, что на 6.4% больше значения, полученного для расчетного безаварийного режима. При этом величина суммарных годовых затрат для составляет 503.6 млн руб./год против 493.7 млн руб./год в расчетном режиме, т.е. прирост составляет около 2% (см. рис. 5).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальное функционирование и развитие ТСС предполагает решение широкого круга технических и экономических задач. Современные условия функционирования рынка тепловой энергии требуют выбора режима функционирования ТСС с минимальными эксплуатационными затратами, который определяется некоторым оптимальным распределением потоков и узловых цен тепловой энергии. С другой стороны, имеются требования к надежности теплоснабжения потребителей, которые могут ограничивать диапазон возможных режимов в системе, в том числе и наиболее рациональных с точки зрения экономических показателей. Описанный конфликт надежности и экономичности является распространенным свойством многих технических систем. Для разрешения данного конфликта в ТСС обычно применяется традиционный подход, когда условия по обеспечению надежности теплоснабжения используются в качестве ограничений при выборе структуры и параметров системы. В настоящем исследовании предложен другой подход, суть которого состоит в совместном моделиро-

вании экономических и надежностных показателей при реализации различных аварийных режимов функционирования системы. Сформулированы соответствующие математические постановки определения оптимального режима функционирования ТСС как для расчетного, так и аварийного режимов. В качестве целевой функции используются суммарные эксплуатационные затраты (на производство и распределение тепловой энергии), в том числе с учетом возможного экономического ущерба от недоотпуска тепловой энергии в аварийных режимах. Решение сформулированных математических задач основано на применении метода множителей Лагранжа, базовых моделей теории гидравлических цепей и моделей марковского случайного процесса. В результате для каждого моделируемого режима определяются оптимальное потоко-распределение, суммарные эксплуатационные затраты, соответствующие им узловые цены на тепловую энергию, уровни подачи тепловой энергии потребителям, недоотпуски тепловой энергии и соответствующие им величины экономического ущерба. Таким образом, по аналогии с узловыми ценами, для каждого узла определяются соответствующие показатели надежности, позволяющие идентифицировать наиболее “узкие” места в системе, соответствующие максимальным экономическим потерям от нарушения теплоснабжения потребителей. Это позволяет корректировать экономическую эффективность режима по условиям надежности, учитывая соответствующие нарушения теплоснабжения и их технические и экономические последствия. Получаемые решения могут быть полезными как при проектировании ТСС, так и обосновании их развития с учетом фактора надежности, а также при разработке оптимального резервирования исследуемых систем, в том числе с учетом различных организационных форм рынка тепловой энергии. Развитие методов и моделей для решения этих и других сопряженных задач, а также их апробация на схемах действующих ТСС, составляют предмет дальнейших работ в рамках данной тематики.

Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы ТСС с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации.

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0002) программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987.
2. Попырин Л.С., Светлов К.С., Беляева Г.М. и др. Исследование систем теплоснабжения. Москва: Наука, 1989.
3. Хрилев Л.С. Теплофикационные системы. Москва: Энергоатомиздат, 1988.
4. Федеральный закон от 27.07.2010 № 190-ФЗ (ред. от 01.05.2022) “О теплоснабжении”. Эл. интернет-ресурс. Ссылка (дата обращения 22.02.2023): [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_102975/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_102975/)
5. Стенников В.А., Пеньковский А.В. Теплоснабжение потребителей в условиях рынка: современное состояние и тенденции развития // ЭКО. 2019. № 3. С. 8–20.
6. Hogan W. Contract networks for electric power transmission // J. of Regulatory Economics. 1992. V. 4. P. 211–242.
7. Singh H., Hao S., Papalexopoulos A. Transmission congestion management in competitive electricity markets // IEEE Trans. on PWRs. 1998. V. 13(2). P. 672–680.
8. Замбрыцкая Е.С., Ямалетдинова А.У. Совершенствование существующей методики расчета регулируемых цен (тарифов) в сфере теплоснабжения // Молодой ученый. 2016. № 19. С. 449–453.
9. Stoft S. Power Systems Economics Designing Markets for Electricity. Wiley-IEEE Press, 2002.
10. Green R. Electricity Transmission Pricing – An International Comparison // Utilities Policy. 1997. V. 6(3). P. 177–184.
11. Васьковская Т.А. Показатели разницы узловых цен на оптовом рынке электроэнергии // Электричество. 2007. № 2. С. 23–27.
12. Васьковская Т.А. Вопросы формирования равновесных узловых цен оптового рынка электроэнергии // Электрические станции. 2017. № 1. С. 25–32.

13. Паламарчук С.И. Среднесрочное планирование выработки электроэнергии в электроэнергетических системах // Электричество. 2013. № 7. С. 2–10.
14. Булатов Б.Г., Каркунов В.О. Упрощенная модель определения узловых цен на рынке электроэнергии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. 2009. № 34. С. 23–31.
15. Сеннова Е.В., Смирнов А.В., Ионин А.А. и др. Надежность систем теплоснабжения. Новосибирск: Наука, 2000.
16. Стенников В.А., Постников И.В. Комплексный анализ надежности теплоснабжения потребителей // Известия РАН. Энергетика. 2011. № 2. С. 107–121.
17. Stennikov V.A., Postnikov I.V. Methods for the integrated reliability analysis of heat supply // Power Technology and Engineering. 2014. V. 47(6) P. 446–453.
18. Postnikov I., Stennikov V., Mednikova E., Penkovskii A. Methodology for optimization of component reliability of heat supply systems // Applied Energy. 2018. V. 227. P. 365–374.
19. Postnikov I. Application of the Methods for Comprehensive Reliability Analysis of District Heating Systems // Environmental and Climate Technologies. 2020. V. 24(3). P. 145–162.
20. Postnikov I., Stennikov V. Modifications of probabilistic models of states evolution for reliability analysis of district heating systems // Energy Reports. 2020. V. 6. P. 293–298.
21. Postnikov I. A reliability assessment of the heating from a hybrid energy source based on combined heat and power and wind power plants // Reliability Engineering & System Safety. 2022. V. 221. 108372.
22. Postnikov I. Methods for the reliability optimization of district-distributed heating systems with prosumers // Energy Reports. 2022. V. 9(1). P. 584–593.
23. Надежность систем энергетика. Сборник рекомендуемых терминов. Отв. ред. Н.И. Воропай. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005.
24. Jiang J., Zhang L., Wang Y. et al. Markov reliability model research of monitoring process in digital main control room of nuclear power plant // Safety Science. 2011. V. 49(6). P. 843–851.
25. Lisnianski A., Elmakias D., Hanoch B. A multi-state Markov model for a short-term reliability analysis of a power generating unit // Reliability Engineering and System Safety. 2012. V. 98. P. 1–6.
26. Sabouhi H., Abbaspour A., Fotuhi-Firuzabad M., Dehghanian P. Reliability modeling and availability analysis of combined cycle power plants // Int. J. of Electrical Power & Energy Systems. 2016. V. 79. P. 108–119.
27. Shahhosseini A., Olamaei J. An efficient stochastic programming for optimal allocation of combined heat and power systems for commercial buildings using // Thermal Science and Engineering Progress. 2019. V. 11. P. 133–141.
28. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
29. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992.
30. Penkovskii A., Stennikov V., Khamisov O. Optimum load distribution between heat sources based on the Cournot model // Thermal Engineering. 2015. V. 62. P. 598–606.
31. Penkovskii A., Stennikov V., Mednikova E., Postnikov I. Search for a market equilibrium of Cournot-Nash in the competitive heat market // Energy. 2018. V. 161. P. 193–201.
32. Стенников В.А., Хамисов О.В., Пеньковский Ф.В., Кравец А.А. Расчет узловых цен на тепловую энергию на основе метода неопределенных множителей Лагранжа // Энергетическая политика. 2022. № 4. С. 94–106.
33. СНиП 41-02-2003 “Тепловые сети”. М.: Госкомитет РФ по строительству и жилищно-коммунальному комплексу, 2000.
34. Соколов В.Я. Теплофикация и тепловые сети. М.: Издательство МЭИ, 1999.
35. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2006.
36. На ошибках – учимся? Обзор аварий, произошедших на тепловых сетях в отопительные периоды 2018–2019 и 2019–2020 гг. (по материалам СМИ из открытых источников). Новости теплоснабжения. 2020. № 3. С. 10–19.

### Methods and Models for Optimal Managing of District Heating System Accounting Reliability Based on Lagrange Multiplier Method and Markov Random Process

V. A. Stennikov<sup>a</sup>, \*, I. V. Postnikov<sup>a</sup>, \*\*, and A. V. Penkovskii<sup>a</sup>, \*\*\*

<sup>a</sup> Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

\*e-mail: sva@isem.irk.ru

\*\*e-mail: postnikov@isem.irk.ru

\*\*\*e-mail: penkovskiy@isem.irk.ru

The main purpose of the study is to determine the optimal condition of the district heating system functioning while minimizing the operating costs for the production and distribution

of thermal energy, accounting the expected economic damages from possible heating undersupplies in case of failures of system components. To identification the parameters corresponding to these conditions, a methodological approach is proposed, which consists in the comprehensive calculation of nodal prices for thermal energy and reliability indices for the studied system when different component failures. The determination of nodal prices for thermal energy is based on the Lagrange multiplier method, while the calculation is carried out accounting the different cost of production at heating sources and the distribution of thermal energy flows on the heating network. Within the framework of the studied methodological problem, heating undersupplies to consumers in emergency conditions of the system and the corresponding economic equivalents (damages) are used as reliability indices. Assessment of probabilities of emergency conditions (states) is carried out using models of the markov random process. The general methodological basis for modeling thermal-hydraulic conditions in the system, including emergency ones, are the models of the theory of hydraulic circuits. The developed methods and models, along with the main formulated problem of optimal managing, allow identifying "bottlenecks" in the studied system, corresponding to the maximum economic damages from heating undersupplies to consumers based on obtained reliability indices. A computational experiment was carried out using the proposed methodology. The results are analyzed, their graphical interpretations are presented, and directions for further research are formulated.

*Keywords:* district heating system, nodal price for thermal energy, operating cost, reliability of heating to consumers, heating undersupply, economic damage, Lagrange multiplier method, theory of hydraulic circuits, markov random process

УДК 621.039.4

**МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕПЛОФИКАЦИОННЫХ ЯДЕРНЫХ ЭНЕРГБЛОКОВ,  
ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОНОМНЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

© 2023 г. А. М. Клер<sup>1</sup>, Е. Л. Степанова<sup>1, \*</sup>, П. В. Жарков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия  
\*e-mail: step@isem.irk.ru

Поступила в редакцию 10.02.2023 г.

После доработки 16.06.2023 г.

Принята к публикации 23.06.2023 г.

В работе представлена двухэтапная методика создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков, предназначенных для проведения оптимизационных исследований автономных электроэнергетических систем. Первый этап включает разработку подробной модели ядерного энергоблока, обеспечивающей удовлетворительную точность описания протекающих в нем процессов и проведение оптимизационных расчетов для достаточно большого количества режимов работы. На втором этапе по результатам оптимизационных расчетов первого этапа строятся энергетические характеристики и зависимости, определяющие границы области допустимых решений в виде полиномов, и на их основе создается упрощенная математическая модель ядерного энергоблока, применимая для оптимизационных исследований автономных электроэнергетических систем. Для решения задачи поиска полинома предлагается двухшаговый подход. На первом шаге подбираются такие коэффициенты полинома, при которых достигается минимум максимального значения модуля разности функции, определенной с использованием полинома, и функции, определенной с использованием подробной модели энергоблока. На втором шаге модули отклонений ограничиваются значением, найденным на первом шаге, и минимизируется сумма модулей отклонений во всех точках. Разработанная авторами методика продемонстрирована на примере теплофикационного атомного энергоблока, предполагаемого к эксплуатации в климатических условиях Крайнего Севера.

*Ключевые слова:* теплофикационные ядерные энергоблоки, атомные электрические станции, паротурбинные установки АЭС, математические модели, энергетические характеристики, полиномы

DOI: 10.31857/S0002331023050047, EDN: PZWRDW

В Северных и Северо-Восточных регионах Российской Федерации (РФ) имеется несколько достаточно крупных автономных электроэнергетических систем (ЭЭС), таких как ЭЭС Чукотского автономного округа, ЭЭС Камчатского края, ЭЭС Магаданской и Сахалинской областей, Норильско-Таймырская ЭЭС и др. Кроме того имеются ЭЭС с достаточно слабыми связями с объединенными энергетическими системами (ОЭС), в которые они входят. Например, ЭЭС Якутии, имеющая связь с ОЭС Востока по двум воздушным линиям электропередачи (ВЛ) 220 кВ пропускной способностью до 200 МВт. При оптимизации режимов работы данных энергосистем их внешние

электрические связи могут быть зафиксированными, поскольку они малы, либо равны нулю. Для указанных электроэнергетических систем (которые в дальнейшем будем называть автономными) характерным является отпуск потребителям как электрической, так и тепловой энергии. Причем во многих случаях доставка органического топлива на такие теплоэлектроцентрали (ТЭЦ) осуществляется по достаточно сложным маршрутам, что обуславливает высокую цену данного топлива. В связи с этим для таких энергосистем перспективным является строительство атомных электрических станций (АЭС) с теплофикационными ядерными энергоблоками [1–6]. Такие станции позволяют повысить как экономическую эффективность, так и энергетическую безопасность соответствующих ЭЭС.

При исследовании автономных ЭЭС нужно проводить расчеты значительного числа режимов их работы. При этом необходимо решать задачу распределения электрических и тепловых нагрузок между оборудованием системы с учетом всех технических ограничений и топливных издержек. Особую сложность при проведении таких расчетов представляют энергосистемы с гидроэлектростанциями (ГЭС), имеющими водохранилища большой емкости, которые используются в качестве накопителей энергии. Решение этих задач может быть осуществлено на основе математического моделирования энергообъектов и согласованной оптимизации характерных режимов их работы.

При проведении оптимизационных исследований автономных ЭЭС возникает необходимость в определении топливных издержек энергоустановок в зависимости от электрических и тепловых нагрузок, а также ограничений на режимные параметры. При этом невозможно обойтись без математических моделей генерирующего оборудования, в частности, предполагаемых к эксплуатации теплофикационных ядерных энергоблоков. Такой энергоблок является достаточно сложным техническим объектом, состоящим из большого числа элементов оборудования, и его подробная математическая модель непосредственно не может использоваться для решения оптимизационной задачи распределения нагрузок в энергосистеме. В связи с этим возникает необходимость создания, с одной стороны, математической модели теплофикационного ядерного энергоблока, достаточно точно описывающей физические процессы, протекающие в его элементах, а с другой стороны, пригодной для проведения оптимизационных исследований энергосистемы в целом.

В данной работе предлагается методика создания таких моделей в два этапа. На первом этапе разрабатывается подробная математическая модель теплофикационного ядерного энергоблока, обеспечивающая удовлетворительную точность описания протекающих в нем процессов, и выполняются оптимизационные расчеты для достаточно большого количества режимов работы. На втором этапе по результатам оптимизационных расчетов первого этапа строятся энергетические характеристики и зависимости, определяющие границы области допустимых решений в виде полиномов, и на их основе создается упрощенная математическая модель ядерного энергоблока, применяемая для оптимизационных исследований автономных ЭЭС.

*Первый этап методики создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков.* На основе технологических схем элементов теплофикационного ядерного энергоблока и технической документации разрабатывается его подробная математическая модель. Выполняются оптимизационные исследования по критерию максимума отпуска полезной электрической энергии при заданной тепловой нагрузке потребителей и тепловой мощности реактора с учетом физико-технических ограничений на параметры установки. Решение этой задачи позволяет оценить эффективность режимов работы и получить достаточный набор параметров для дальнейшего построения энергетических характеристик. Математическая постановка данной задачи имеет следующий вид

$$\max N^{\text{Полез}}(x, y, Q_{\text{Кон}}^P, Q_{\text{Пов}}, P^{\text{Теп}}, t^{\text{НВ}}), \quad (1)$$

при ограничениях

$$H(x, y, Q_{\text{Кон}}^P, Q_{\text{Пов}}, P^{\text{Теп}}, t^{\text{НВ}}) = 0, \quad (2)$$

$$G(x, y, Q_{\text{Кон}}^P, Q_{\text{Пов}}, P^{\text{Теп}}, t^{\text{НВ}}) \geq 0, \quad (3)$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \quad (4)$$

где  $x$  – вектор независимых оптимизируемых параметров (расходы пара в конденсатор турбины, пара из регулируемых отборов турбины, давление пара перед регулирующими диафрагмами и др.);  $y$  – вектор зависимых вычисляемых параметров (расходы острого пара, пара из нерегулируемых отборов турбины, электрическую мощность турбины, давление в регулируемых отборах турбины и т.д.);  $N^{\text{Полез}}$  – полезная электрическая мощность энергоблока;  $Q_{\text{Кон}}^P$  – расчетная тепловая нагрузка потребителя, определенная при конструкторском расчете;  $Q_{\text{Пов}}$  – тепловая нагрузка потребителя, задаваемая в характерных режимах работы энергоблока;  $P^{\text{Теп}}$  – тепловая мощность реактора;  $t^{\text{НВ}}$  – температура наружного воздуха, задаваемая в характерных режимах работы энергоблока;  $H$  – вектор ограничений-равенств (включает уравнения, описывающие: технологические связи между элементами схемы, материальные и энергетические балансы, теплообмен и др., служит для определения вектора  $y$ );  $G$  – вектор ограничений-неравенств (включает ограничения на такие зависимые параметры, как расход острого пара, электрическую мощность турбины и т.д.);  $x^{\min}$ ,  $x^{\max}$  – векторы граничных значений оптимизируемых параметров.

При выполнении серии оптимизационных расчетов режимов работы теплофикационного ядерного энергоблока на первом этапе должны меняться такие параметры как: тепловая нагрузка потребителя  $Q_{\text{Пов}}$  и тепловая мощность реактора  $P^{\text{Теп}}$ .

*Второй этап методики создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков.* На втором этапе по результатам оптимизационных расчетов, полученных с помощью подробной математической модели ядерного энергоблока, строятся энергетические характеристики в виде полиномов. Следует отметить, что в основном для решения подобных задач применяют метод наименьших квадратов, который позволяет контролировать только среднее отклонение между расчетами (в данном случае между расчетами, выполненными с помощью подробной математической модели и расчетами по полиномам) максимальное отклонение этим методом не контролируется [7–10].

В настоящей работе для аппроксимации достаточно простыми зависимостями сложных нелинейных зависимостей, описываемых подробными математическими моделями, используется методический подход, позволяющий отслеживать как среднее отклонение, так и максимальное. Имеется функция от  $N$  параметров вида

$$f = f(x_1, \dots, x_N). \quad (5)$$

Для определения значения  $f$  при заданных значениях  $x_1, \dots, x_N$  используется подробная математическая модель. Задаются диапазоны изменения каждого параметра  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ , где  $x_i^{\max}$  – верхняя граница диапазона изменения  $x_i$ ,  $x_i^{\min}$  – нижняя граница диапазона изменения  $x_i$ . В диапазоне  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  задается  $M_i$  точек (как правило, равномерно расположенных в диапазоне). Причем точка  $x_i^1 = x_i^{\min}$ , а точка  $x_i^{M_i} = x_i^{\max}$ . В этом случае расстояние (шаг) между точками будет равен  $\Delta x_i = (x_i^{\max} - x_i^{\min}) / (M_i - 1)$ .

Координаты  $j$ -ой точки определяются из выражения

$$x_i^j = x_i^{\min} + \Delta x_i (j - 1). \quad (6)$$

В этом случае общее количество точек, для всех возможных сочетаний параметров  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  составит

$$M_{\Sigma} = M_1 M_1 \dots M_N. \quad (7)$$

Для каждого возможного сочетания параметров проводится расчет по подробной математической модели. В результате для  $k = 1, \dots, M_{\Sigma}$  определяются значения функции  $f^k$ , найденные при известных значениях параметров  $x_1^k, \dots, x_N^k$ . Исходную зависимость (5) будем представлять более простой зависимостью – полиномом  $S$ -ой степени от  $N$  переменных. Полиномом  $S$ -ой степени от  $N$  переменных представляет из себя сумму  $L$  слагаемых следующего вида

$$f^p = \sum_{l=1}^L \alpha_l \prod_{i=1}^N x_i^{k_i^l}, \quad (8)$$

где  $\alpha_l$  – коэффициент полинома при  $l$ -ом слагаемом;  $k_i^l$  – показатель степени  $i$ -ого параметра в  $l$ -ом слагаемом (показатели могут принимать значения  $0, 1, \dots, S$ );  $L$  – общее число слагаемых в полиноме, равное всем возможным наборам показателей степени  $N$  параметров отвечающих условиям:

$$\begin{aligned} k_1^l &= \{0, \dots, S\}, \\ k_2^l &= \{0, \dots, S\}, \dots, k_N^l = \{0, \dots, S\}, \\ k_1^l + k_2^l + \dots + k_N^l &\leq S. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом каждому слагаемому полинома соответствует свой набор целых показателей степеней для  $N$  переменных и свой коэффициент полинома. Полином (8) можно представить как функцию, зависящую от коэффициентов полинома  $\alpha_l$  и параметров  $x_i$  вида  $f^p = f^p(\alpha_1, \dots, \alpha_2, x_1, \dots, x_N)$ . Следует отметить, что  $f^p$  является линейной функцией от коэффициентов (при заданных значениях параметров  $x_i$ ) и нелинейной функцией от параметров (при заданных значениях коэффициентов полинома). Задача поиска полинома, наилучшим образом приближающего исходную зависимость, состоит в нахождении его коэффициентов. В настоящей работе используется следующий двухшаговый подход.

На первом шаге подбираются такие коэффициенты полинома, при которых достигается минимум максимального значения модуля разности (отклонения) функции определенной с использованием полинома и функции, определенной с использованием подробной математической модели. При этом максимальное значение модуля определяется по  $M_{\Sigma}$  точкам. Найденный минимум модуля максимального отклонения фиксируется. Следует отметить, что при этом часть модулей отклонений принимает максимальное значение, а остальные модули имеют меньшее в общем случае случайное значение.

На втором шаге модули отклонений ограничиваются значением, найденным на первом шаге, и минимизируется сумма модулей отклонений во всех  $M_{\Sigma}$  точках. Коэффициенты полинома, обеспечивающие решение задачи второго шага и принимаются в качестве коэффициентов, обеспечивающих наилучшее приближение к исходной зависимости. Они гарантируют как минимум максимального по модулю отклоне-

ния, так и минимум суммы модулей всех отклонений (или минимум среднего по модулю отклонения) при заданном модуле максимального отклонения.

Указанные задачи оптимизации, решаемые на первом и втором шагах, является задачами линейного программирования.

Задача I-ого шага (задача I)

$$\min_{a_1, \dots, a_L, x_{\text{вспом}}} x_{\text{вспом}}, \quad (10)$$

при условиях

$$x_{\text{вспом}} - \left( f_t - f_t^p(a_1, \dots, a_L, x_1^t, \dots, x_N^t) \right) \geq 0, \quad (11)$$

$$x_{\text{вспом}} + \left( f_t - f_t^p(a_1, \dots, a_L, x_1^t, \dots, x_N^t) \right) \geq 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} t &= 1, \dots, M_{\Sigma}, \quad \underline{a} \leq a_i \leq \bar{a}_{\Sigma}, \\ i &= 1, \dots, L; \quad 0 \leq x_{\text{вспом}} \leq \bar{x}_{\text{вспом}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\underline{a}, \bar{a}$  – минимальное и максимальное значение коэффициентов полинома,  $\bar{x}_{\text{вспом}}$  – максимальное значение параметра  $x_{\text{вспом}}$ . Обозначим значение  $x_{\text{вспом}}$  в точке решения

задачи I через  $x_{\text{вспом}}^*$ .

Задача II-ого шага (задача II) имеет вид

$$\min_{a_1, \dots, a_L, x_{\text{вспом}}} \sum_{t=1}^{M_{\Sigma}} x_{\text{вспом}}^t, \quad (14)$$

при условиях

$$x_{\text{вспом}}^t - \left( f_t - f_t^p(a_1, \dots, a_L, x_1^t, \dots, x_N^t) \right) \geq 0, \quad (15)$$

$$x_{\text{вспом}}^t + \left( f_t - f_t^p(a_1, \dots, a_L, x_1^t, \dots, x_N^t) \right) \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} t &= 1, \dots, M_{\Sigma}, \quad \underline{a} \leq a_i \leq \bar{a}_{\Sigma}, \\ i &= 1, \dots, L; \quad 0 \leq x_{\text{вспом}}^t \leq x_{\text{вспом}}^{t*}. \end{aligned} \quad (17)$$

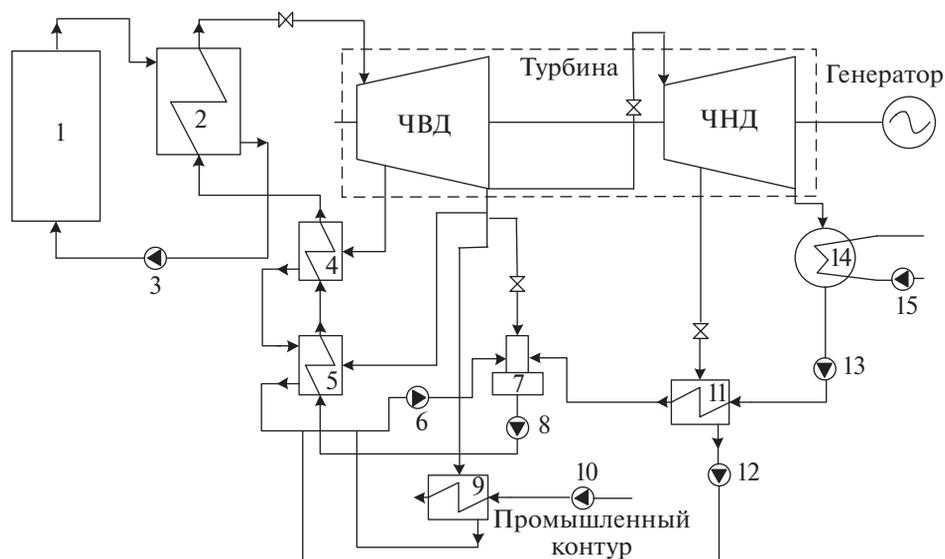
Обозначим вспомогательные параметры в точке решения задачи II через  $x_{\text{вспом}}^{t*}$ , а коэффициенты полинома через  $a_1^*, \dots, a_L^*$ . Средний модуль отклонений будет равен  $\Delta^{cp} = \left( \sum_{t=1}^{M_{\Sigma}} x_{\text{вспом}}^{t*} \right) / M_{\Sigma}$ . Оптимальный полином будет иметь вид

$$f_{\text{опт}}^p = f^p(a_1^*, \dots, a_L^*, x_1, \dots, x_N). \quad (18)$$

Таким образом, оптимальный полином обеспечивает на множестве из  $M_{\Sigma}$  точек максимальное по модулю отклонение  $x_{\text{вспом}}^*$  и среднее отклонение по модулю  $\Delta^{cp}$ .

Если точность приближения оказывается недостаточной, то следует увеличить степень полинома и решить задачу заново. Если же точность приближения слишком велика, то степень полинома следует уменьшить и тоже заново решить задачу.

В данной работе продемонстрирована практическая реализация методики создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков электростанций, предназначенных для проведения оптимизационных исследований автономных ЭЭС на примере теплофикационного атомного энергоблока с реакторной установкой (РУ) РИТМ-200 и парогурбинной установкой (ПТУ) мощностью 55 МВт. Согласно [11, 12] в работе рассматривается возможность эксплуатации данного энергоблока в одном из регионов Крайнего Севера – Республики Саха (Якутии).



**Рис. 1.** Упрощенная технологическая схема ПТУ ТК-50/55-3.4. 1 – реакторная установка; 2 – парогенератор (4 шт.); 3 – циркуляционные насосы первого контура; 4, 5 – подогреватели высокого давления; 7 – деаэра-тор; 8 – питательные насосы; 9 – сетевой подогреватель промышленного контура; 10 – насосы промышленного контура; 11 – подогреватель низкого давления; 6, 12, 13 – конденсатные насосы; 14 – конденсатор; 15 – циркуляционные насосы охлаждающей воды; ЧВД – часть высокого давления; ЧНД – часть низкого давления.

**Описание теплофикационного атомного энергоблока.** Исследуемый в работе энерго-блок включает в себя РУ РИТМ-200 из линейки РИТМ, разрабатываемой в ОКБМ имени И.И. Африкантова [13] и ПТУ максимальной мощностью 55 МВт. Данные об энергетической турбоустановке такой мощности, предназначенной для совместной работы с реактором РИТМ-200, отсутствуют, поэтому в рамках настоящей работы был выполнен конструкторский расчет данной турбоустановки. При этом за основу техно-логической схемы была принята схема ПТУ ТК-35/38-3.4 Калужского турбинного завода (КТЗ) [14], эксплуатируемой ранее в составе плавучего энергоблока с РУ КЛТ-40С. Раз-рабатываемая ПТУ условно называется ТК-50/55-3.4. На рис. 1 представлена схема энергоблока. ПТУ ТК-50/55-3.4 имеет теплофикационный отбор для обеспечения нужд горячего водоснабжения (ГВС) и отопления, а также два нерегулируемых отбора пара для подогрева питательной воды. Схемы подключения оборудования и распре-деления потоков воды и пара у данной ПТУ такие же, как и у ТК-35/38-3.4. В состав ПТУ ТК-50/55-3.4 входят теплообменные аппараты с площадью теплообменных по-верхностей нагрева и расходов теплоносителей, необходимых для обеспечения выра-ботки электрической мощности до 55 МВт и тепловой мощности до 30 Гкал/ч.

Для выполнения поставленных в работе задач созданы математические модели энергоблока с РУ РИТМ-200 и ПТУ ТК-50/55-3.4 для проведения их расчетов при но-минальных условиях и расчетов в широком диапазоне изменения электрических и тепловых мощностей. Модели расчета элементов оборудования ПТУ в номинальном режиме базируются на конструкторских расчетах и служат для определения геометри-ческих размеров подогревателей высокого и низкого давления (ПВД, ПНД), подогре-вателя сетевой воды и конденсатора турбины (площадей теплообменных поверхно-стей нагрева, диаметров и шагов труб теплообменных поверхностей нагрева), номи-

нальных расходов водяного пара, входных и выходных давлений пара в отсеках паровой турбины. В основе математической модели для расчетов при частичных нагрузках лежат поверочные расчеты элементов оборудования установки, выполняемые при задаваемых конструктивных параметрах с определением параметров воды и водяного пара. Конструкторская и поверочная математические модели ПТУ строятся на основе моделей: отсеков турбины, регенеративных подогревателей высокого и низкого давления, сетевых подогревателей промышленного контура, деаэратора, конденсатора, регулирующих диафрагм и насосов. Следует отметить, что конструктивные характеристики парогенератора (ПГ) РУ принимаются согласно имеющейся информации по РУ РИТМ-200. Математическая модель ПГ РУ для расчета при частичных нагрузках основана на поверочных расчетах теплообменных поверхностей парогенератора, таких как экономайзерный, испарительный и пароперегревательный участки. Результатом такого расчета является определение температур и энтальпий теплоносителя на входе и выходе, расхода, температуры и давления острого пара на выходе. Создана упрощенная математическая модель РУ, результатом проведения расчетов на которой является определение расхода ядерного топлива. При выполнении поверочных расчетов расход воды первого контура реактора принимался постоянным, равным расходу в номинальном режиме. В каждом из поверочных расчетов максимизировалась полезная электрическая мощность энергоблока при заданной тепловой мощности реактора, тепловой нагрузке потребителей и решалась задача оптимизации таких параметров как расход циркуляционной воды через конденсатор турбины, давление острого пара и пара перед диафрагмой регулируемого отбора и давление пара на входе в сетевой подогреватель (после дроссельного клапана данного подогревателя). При оптимизации учитывались ограничения в форме неравенств на неотрицательность всех конечных температурных напоров теплообменников, неотрицательность перепадов давлений на всех регулирующих органах (дроссельный клапан острого пара, дроссельные клапана пара, поступающего на деаэратор и сетевой подогреватель, дроссельное устройство (диафрагма) регулируемого отбора, на непревышение влажности пара на выходе из последнего отсека предельно допустимого значения. Создание математических моделей энергоблока и проведение оптимизационных расчетов осуществлялись с помощью программно-вычислительного комплекса (ПВК) Системы машинного построения программ (СМПП), созданного сотрудниками отдела Теплосиловых систем ИСЭМ СО РАН [15]. Для оптимизации использовался разработанный в ИСЭМ СО РАН метод ступенчатой оптимизации [16–18]. В соответствии с этим методом процесс решения системы алгебраических и трансцендентных уравнений, описывающий установившийся режим работы энергоблока совмещается с процессом оптимизации. При этом в состав оптимизируемых параметров включаются как «истинные» оптимизируемые параметры, так и параметры, обеспечивающие решение системы уравнений, описывающей установку в целом и подсистем уравнений, описывающих ее отдельные элементы. В состав ограничений-неравенств входят «истинные» неравенства и равенства, которыми заменяются ограничения-равенства (каждое равенство заменяется двумя неравенствами). В рассматриваемой задаче общее количество оптимизируемых параметров поверочной математической модели энергоблока составляет 43, ограничений-неравенств 155. Точное решение указанной системы достигается лишь в точке оптимума, что кардинально ускоряет процесс оптимизации, повышает его устойчивость и точность приближения к оптимуму.

**Результаты расчета режимов работы энергоблока, проводимые с помощью его подробной математической модели для номинального режима и при частичных нагрузках (первый этап методики).** Расчетные давления острого пара в отборах на ПВД и ПНД в регулируемом теплофикационном отборе и в конденсаторе турбины принимаются равными соответствующим давлениям в турбоустановке ТК-35/38-3.4. Расход воды в первом контуре, температура и давление данной воды на выходе из реактора, темпера-

**Таблица 1.** Основные конструктивные характеристики оборудования ПТУ ТК-50/55-3.4

Конструктивные характеристики	Значения
1-й подогреватель высокого давления:	
– наружный/внутренний диаметр труб, мм	20/16
– поперечный/продольный шаг труб, мм	32/28
– площадь теплообменной поверхности, м <sup>2</sup>	100
2-й подогреватель высокого давления:	
– наружный/внутренний диаметр труб, мм	20/16
– поперечный/продольный шаг труб, мм	32/28
– площадь теплообменной поверхности, м <sup>2</sup>	180
Подогреватель низкого давления:	
– наружный/внутренний диаметр труб, мм	16/14
– поперечный/продольный шаг труб, мм	26/22
– площадь теплообменной поверхности, м <sup>2</sup>	180
Сетевой подогреватель промышленного контура:	
– наружный/внутренний диаметр труб, мм	16/14
– поперечный/продольный шаг труб, мм	25/22
– площадь теплообменной поверхности, м <sup>2</sup>	200
Площадь теплообменной поверхности конденсатора, м <sup>2</sup> :	2600
Парогенератор РУ:	
– наружный/внутренний диаметр труб проточной части, мм	23/21
– поперечный/продольный шаг труб проточной части, мм	30/28
– наружный диаметр проточной части, мм	700
– диаметр центрального вытеснителя, мм	190
– площадь теплообменной поверхности, м <sup>2</sup> :	86

тура воды первого контура на выходе из парогенератора принимались по характеристикам РУ РИТМ-200. Оптимизационный расчет проводился при номинальном режиме работы энергоблока: расчетной температуре наружного воздуха равной  $-55^{\circ}\text{C}$ , тепловой нагрузке реактора – 175 МВт, тепловой нагрузке потребителей (промышленный контур) – 30 Гкал/ч. Расчетная температура прямой и обратной сетевой воды принималась равной  $120^{\circ}\text{C}$  и  $70^{\circ}\text{C}$  соответственно. Схема ГВС закрытая. Температура циркуляционной воды, поступающей в конденсатор турбины в отопительный период, задавалась равной  $5^{\circ}\text{C}$ , а в неотопительный период –  $10^{\circ}\text{C}$ . Конструктивные характеристики оборудования ПТУ ТК-50/55-3.4 и технические характеристики энергоблока в целом, полученные в результате проведения оптимизационного расчета в номинальном режиме, приведены в табл. 1 и 2.

С помощью математической модели поверочного расчета ядерного энергоблока была проведена серия оптимизационных расчетов режимов работы энергоблока при расчетных тепловых нагрузках ГВС и отопления равных 10 Гкал/ч, 20 Гкал/ч и 30 Гкал/ч, при тепловых нагрузках реактора в диапазоне от 175 МВт до 75 МВт с шагом 20 МВт, а так же при следующих температурах наружного воздуха:  $-55^{\circ}\text{C}$ ,  $-50^{\circ}\text{C}$ ,  $-40^{\circ}\text{C}$ ,  $-30^{\circ}\text{C}$ ,  $-20^{\circ}\text{C}$ ,  $-10^{\circ}\text{C}$ ,  $+1.5^{\circ}\text{C}$ ,  $+8^{\circ}\text{C}$  (отопительный период) и средней температуре наружного воздуха в неотопительный период  $+15^{\circ}\text{C}$ . В качестве примера в табл. 3 приведены основные результаты оптимизационных расчетов режимов работы энергоблока при расчетной тепловой нагрузке ГВС и отопления 30 Гкал/ч.

**Математическая модель теплофикационного ядерного энергоблока, предназначенная для проведения оптимизационных исследований автономной ЭЭС (второй этап методики).** В результате проведения серии оптимизационных расчетов режимов работы энергоблока с реактором РИТМ-200 и турбиной ТК-50/55-3.4, выполненных на первом эта-

**Таблица 2.** Основные технические характеристики энергоблока, полученные в результате расчета при номинальном режиме

Характеристики	Значения
Тепловая мощность ПГ, МВт	175
Паропроизводительность ПГ в номинальном режиме, т/ч	270
Параметры первого контура РУ в номинальном режиме:	
температура теплоносителя на входе в АЗ, °С	280
температура теплоносителя на выходе из АЗ, °С	325
давление теплоносителя, МПа	15.7
расход теплоносителя, т/ч	2300
Параметры второго контура в номинальном режиме:	
температура питательной воды на входе в ПГ, °С	162
температура водяного пара на выходе из ПГ, °С	295
давление пара после ПГ, МПа	3.83
Выработанная электрическая мощность в номинальном режиме, МВт	50
Давления пара на входе/выходе из отсеков турбины, после которых осуществляются отборы пара в номинальном режиме, МПа:	
– отсек перед 1-м отбором	3.49/1.05
– отсек перед 2-м отбором	1.05/0.36
– отсек перед 3-м отбором	0.36/0.04
– последний отсек	0.04/0.003
Расход пара через отсеки турбины, после которых осуществляются отборы пара в номинальном режиме, т/ч:	
– отсек перед 1-м отбором	270
– отсек перед 2-м отбором	257
– отсек перед 3-м отбором	168
– последний отсек	152
Расход ядерного топлива в номинальном режиме, т у.т./ч (кг нат.топ./ч)	21.5 (1.68 × 10 <sup>-2</sup> )
Расход охлаждающей воды через конденсатор в номинальном режиме, т/ч.	7344

пе, были получены данные, на основе которых в дальнейшем создается математическая модель ядерного энергоблока применимая для оптимизации ЭЭС в целом.

В настоящей работе упрощенная математическая модель ядерного энергоблока представляется в следующем виде.

$$G_{\text{Конд}}^{\text{П}} = f_{\text{Конд}}^{\text{П}} (N_{\text{Эл}}^{\Sigma}, Q_{\text{Теп}}^{\text{Пас}}, t^{\text{НВ}}), \quad (19)$$

$$P^{\text{Теп}} = f^{\text{Теп}} (N_{\text{Эл}}^{\Sigma}, Q_{\text{Теп}}^{\text{Пас}}, t^{\text{НВ}}), \quad (20)$$

$$N^{\text{СН}} = f^{\text{СН}} (N_{\text{Эл}}^{\Sigma}, Q_{\text{Теп}}^{\text{Пас}}, t^{\text{НВ}}), \quad (21)$$

$$G_{\text{Конд}}^{\text{П}} \geq G_{\text{Конд}}^{\text{Пmin}}, \quad N^{\text{Полез}} = N_{\text{Эл}}^{\Sigma} - N^{\text{СН}}, \quad (22)$$

$$P_{\text{min}}^{\text{Теп}} \leq P^{\text{Теп}} \leq P_{\text{max}}^{\text{Теп}}, \quad N_{\text{Элmin}}^{\Sigma} \leq N_{\text{Эл}}^{\Sigma} \leq N_{\text{Элmax}}^{\Sigma}, \quad (23)$$

$$U^{\text{Топ}} = k^{\text{Выг}} P^{\text{Теп}} S^{\text{ЯТ}} \tau_{\text{Реж}}, \quad (24)$$

где  $G_{\text{Конд}}^{\text{П}}$  – расход пара в конденсатор турбины;  $N_{\text{Эл}}^{\Sigma}$  – полная электрическая мощность ядерного энергоблока;  $Q_{\text{Теп}}^{\text{Пас}}$  – расчетная тепловая нагрузка потребителя;  $N^{\text{СН}}$  – электрическая мощность собственных нужд;  $G_{\text{Конд}}^{\text{Пmin}}$  – минимально-допустимый расход пара в конденсатор турбины;  $P_{\text{min}}^{\text{Теп}}, P_{\text{max}}^{\text{Теп}}$  – минимальное и максимальное значение

**Таблица 3.** Основные технические характеристики режимов работы энергоблока, полученные в результате поверочного расчета при расчетной тепловой нагрузке ГВС и отопления равной 30 Гкал/ч

Характеристики	Температура наружного воздуха, °С								неотопит. период
	-55	-50	-40	-30	-20	-10	+1.5	+8	
Тепловая нагрузка потребителей сетевой воды, Гкал/ч	30.0	28.4	25.2	22.0	18.8	15.6	11.92	9.84	4.8
Тепловая нагрузка ПГ, МВт	<b>175</b>								
Электрическая мощность энергоблока (полная), МВт	51.56	51.67	52.20	52.86	53.57	54.34	54.79	55.38	56.09
Электрическая мощность собственных нужд, МВт	0.70	0.73	0.76	0.78	0.80	0.79	0.78	0.78	0.86
Полезная электрическая мощность, МВт	50.86	50.94	51.44	52.08	52.77	53.55	54.01	54.60	55.22
Расход пара через последний отсек турбины, т/ч	157.9	161.8	167.2	172.7	178.1	183.3	190.8	193.8	203.1
Расход топлива, т у.т./ч (кг/ч)	21.5 ( $1.68 \times 10^{-2}$ )								
Тепловая нагрузка ПГ, МВт	<b>155</b>								
Электрическая мощность энергоблока (полная), МВт	44.74	45.50	46.12	46.78	47.45	48.13	48.92	49.37	50.15
Электрическая мощность собственных нужд, МВт	0.57	0.59	0.61	0.64	0.67	0.66	0.64	0.64	0.72
Полезная электрическая мощность, МВт	44.17	44.91	45.51	46.14	46.78	47.47	48.28	48.73	49.42
Расход пара через последний отсек турбины, т/ч	132.0	134.4	139.8	145.3	150.7	156.1	162.2	165.6	174.6
Расход топлива, т у.т./ч (кг/ч)	19.04 ( $1.48 \times 10^{-2}$ )								
Тепловая нагрузка ПГ, МВт	<b>135</b>								
Электрическая мощность энергоблока (полная), МВт	36.90	38.19	39.18	39.75	40.40	40.79	41.69	42.25	42.76
Электрическая мощность собственных нужд, МВт	0.50	0.51	0.53	0.56	0.59	0.58	0.57	0.57	0.69
Полезная электрическая мощность, МВт	36.40	37.68	38.65	39.19	39.81	40.21	41.12	41.68	42.07
Расход пара через последний отсек турбины, т/ч	109.4	111.4	116.3	121.9	127.3	133.6	139.2	143.7	151.7
Расход топлива, т у.т./ч (кг/ч)	16.5 ( $1.29 \times 10^{-2}$ )								
Тепловая нагрузка ПГ, МВт	<b>115</b>								
Электрическая мощность энергоблока (полная), МВт	29.08	30.42	32.18	32.71	33.37	33.98	34.70	35.08	35.17
Электрическая мощность собственных нужд, МВт	0.42	0.44	0.45	0.46	0.47	0.46	0.45	0.45	0.58
Полезная электрическая мощность, МВт	28.66	29.97	31.73	32.25	32.90	33.52	34.25	34.63	34.58
Расход пара через последний отсек турбины, т/ч	87.7	89.3	93.8	99.5	104.7	110.2	116.4	120.2	131.1
Расход топлива, т у.т./ч (кг/ч)	14.1 ( $1.1 \times 10^{-2}$ )								
Тепловая нагрузка ПГ, МВт	<b>95</b>								
Электрическая мощность энергоблока (полная), МВт	21.62	22.76	25.0	25.95	26.56	27.14	27.76	28.18	28.93
Электрическая мощность собственных нужд, МВт	0.26	0.27	0.29	0.34	0.41	0.40	0.40	0.40	0.47
Полезная электрическая мощность, МВт	21.36	22.49	24.71	25.61	26.15	26.74	27.36	27.78	28.46
Расход пара через последний отсек турбины, т/ч	64.8	66.6	70.6	75.8	81.1	86.5	92.7	96.2	105.0
Расход топлива, т у.т./ч (кг/ч)	11.6 ( $9.1 \times 10^{-3}$ )								

**Таблица 4.** Коэффициенты полинома по энергоблоку для определения расхода пара в конденсатор турбины (кг/с), тепловой нагрузки парогенератора (МВт), электрической мощности собственных нужд (МВт), как функции от электрической мощности энергоблока (МВт), расчетной тепловой нагрузки потребителя сетевой воды (Гкал/ч) и текущей температуры наружного воздуха (°С).

Номер слагаемого полинома	Степень параметра:			Коэффициенты полинома для определения:		
	электрической мощности энергоблока (полной)	расчетной тепловой нагрузки потребителей	температуры наружного воздуха	расхода пара в конденса- тор турбины	тепловой нагрузки па- рогенератора	электриче- ской мощно- сти собствен- ных нужд
1	0	0	0	49.860873	68.700000	0.000102
2	1	0	0	-4.809641	-4.250000	0.027500
3	0	1	0	136.510041	-0.146000	-0.008660
4	0	0	1	0.063887	0.378000	-0.000809
5	2	0	0	0.248303	0.303000	-0.000876
6	1	1	0	0.041196	0.051200	0.001340
7	1	0	1	-0.005241	-0.024100	0.000049
8	0	2	0	-25.106037	-0.024200	-0.000493
9	0	1	1	-0.006280	-0.034900	-0.000303
10	0	0	2	0.000462	-0.005990	-0.000081
11	3	0	0	-0.004579	-0.005540	0.000020
12	2	1	0	-0.001424	-0.001800	-0.000050
13	2	0	1	0.000194	0.000623	0.000000
14	1	2	0	0.000656	0.001190	0.000023
15	1	1	1	0.000272	0.000955	0.000011
16	1	0	2	0.000125	0.000259	0.000007
17	0	3	0	1.368427	0.000000	0.000000
18	0	2	1	0.000239	0.000605	0.000007
19	0	1	2	0.000005	-0.000048	0.000004
20	0	0	3	0.000127	-0.000066	0.000006
21	4	0	0	0.000031	0.000037	0.000000
22	3	1	0	0.000014	0.000018	0.000001
23	3	0	1	-0.000002	-0.000005	0.000000
24	2	2	0	-0.000004	-0.000008	0.000000
25	2	1	1	-0.000004	-0.000012	0.000000
26	2	0	2	-0.000001	-0.000001	0.000000
27	1	3	0	-0.000006	-0.000012	0.000000
28	1	2	1	0.000001	-0.000006	0.000000
29	1	1	2	-0.000002	-0.000006	0.000000
30	1	0	3	0.000000	0.000002	0.000000
31	0	4	0	-0.022802	0.000006	0.000000
32	0	3	1	-0.000003	-0.000004	0.000000
33	0	2	2	0.000003	0.000005	0.000000
34	0	1	3	0.000000	-0.000002	0.000000
35	0	0	4	0.000002	0.000000	0.000000

**Таблица 5.** Количество слагаемых полинома, максимального и среднего отклонения в зависимости от величины его степени для варианта определения расхода пара в конденсатор паровой турбины

Степень полинома	Количество слагаемых полинома	Максимальное отклонение	Среднее отклонение
2	10	1.340	0.578
3	20	0.863	0.410
4	35	0.457	0.230
5	56	0.343	0.197
6	84	0.243	0.157
7	120	0.190	0.128

тепловой мощности реактора;  $N_{\text{Эл} \min}^{\Sigma}$ ,  $N_{\text{Эл} \max}^{\Sigma}$  – минимальное и максимальное значение полной электрической мощности;  $U^{\text{Топ}}$  – топливные издержки;  $k^{\text{Выг}}$  – коэффициент выгорания ядерного топлива;  $S^{\text{ЯТ}}$  – цена ядерного топлива;  $\tau_{\text{Рсж}}$  – продолжительность режима работы. Зависимости  $f_{\text{Конд}}^{\text{П}}$ ,  $f^{\text{Теп}}$ ,  $f^{\text{СН}}$  представляются в виде полиномов четвертой степени от трех переменных ( $N_{\text{Эл}}^{\Sigma}$ ,  $Q_{\text{Теп}}^{\text{Пас}}$ ,  $t^{\text{НВ}}$ ). Коэффициенты этих полиномов представлены в табл. 4.

В табл. 5 в качестве примера для полинома определения расхода пара в конденсатор паровой турбины приведены значения максимального и среднего отклонения, а так же количества слагаемых полинома в зависимости от величины его степени.

Полученные на втором этапе полиномы оформляются в виде специальных подпрограмм и далее используются при создании математической модели автономной ЭЭС.

Представленный методический подход может быть использован и для создания математических моделей других источников электрической и тепловой энергии (теплофикационных паротурбинных, газотурбинных и парогазовых установок и др.), работающих в автономной ЭЭС.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведено описание двухэтапной методики создания математических моделей теплофикационных ядерных энергоблоков, предназначенных для проведения оптимизационных исследований автономных ЭЭС. Первый этап методики включает разработку подробной модели ядерного энергоблока, обеспечивающей удовлетворительную точность описания протекающих в нем процессов и проведение оптимизационных расчетов для достаточно большого количества режимов работы. На втором этапе по результатам оптимизационных расчетов первого этапа строятся энергетические характеристики и зависимости, определяющие границы области допустимых решений в виде полиномов и на их основе создается упрощенная математическая модель энергоблока, применимая для оптимизационных исследований автономных ЭЭС. Для решения задачи поиска коэффициентов полинома в работе предложен двухшаговый подход. На первом шаге подбираются такие коэффициенты полинома, при которых достигается минимум максимального значения модуля разности функции определенной с использованием полинома и функции, определенной с использованием подробной модели энергоблока. На втором шаге модули отклонений ограничиваются значением, найденным на первом шаге, и минимизируется сумма модулей отклонений во всех точках. Методика продемонстрирована на примере теплофикационного атомного энергоблока, предполагаемого к эксплуатации в климатических

условиях Крайнего Севера. Разработана его подробная математическая модель, проведены расчеты при различных тепловых мощностях реактора, различных расчетных тепловых нагрузках потребителя и температурах наружного воздуха, определены полные и полезные электрические мощности атомного энергоблока и часовой расход ядерного топлива. Результаты оптимизационных расчетов режимов работы установки, полученные с помощью ее подробной модели, являлись основой для построения энергетических характеристик в виде полиномов, которые используются для создания упрощенной модели энергоблока, применимой при оптимизационных исследованиях автономных ЭЭС в целом.

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0005, рег. № АААА-А21-121012190004-5) программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В.В. Обзор существующих и перспективных атомных станций малой мощности в Российской Федерации и за рубежом. Атомные станции малой мощности: новое направление развития энергетики. Под ред. акад. РАН А.А. Саркисова. М.: Наука, 2011. С. 159–178.
2. Санеев Б.Г., Иванова И.Ю., Тугузова Т.Ф., Франк М.И. Роль атомных станций малой мощности в зонах децентрализованного энергоснабжения на Востоке России. Атомные станции малой мощности: новое направление развития энергетики. Под ред. акад. РАН А.А. Саркисова. М.: Наука, 2011. С. 88–100.
3. Санеев Б.Г., Иванова И.Ю., Тугузова Т.Ф., Ижбулдин А.К. Автономные энергоисточники на севере Дальнего Востока: характеристика и направления диверсификации // Пространственная экономика. 2018. № 1. С. 101–116. <https://doi.org/10.14530/se.2018.1.101-116>
4. МАГАТЭ (2020). Advances in Small Modular Reactor Technology Developments, A supplement to: IAEA Advances Reactors Information System (ARIS), 2020 Edition, IAEA, Vienna [https://aris.iaea.org/Publications/SMR\\_Book\\_2020.pdf](https://aris.iaea.org/Publications/SMR_Book_2020.pdf)
5. Лебедева М.А. Состояние и перспективы развития возобновляемой энергетики в регионах Крайнего Севера России // Проблемы развития территории. 2021. Т. 25. № 4. С. 139–155. <https://doi.org/10.15838/ptd.2021.4.114.8>
6. Мельников Н.Н., Гусак С.А., Наумов В.А. Использование атомных станций малой мощности для энергоснабжения арктических месторождений твердых полезных ископаемых // Вестник Кольского научного центра РАН. 2017. № 1. С. 66–77.
7. Виноградов В.Н., Гай Е.В., Работнов Н.С. Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.
8. Белоногов О.Б. Обобщенная математическая модель электродвигателя постоянного тока и метод идентификации ее параметров // Известия РАН. Энергетика. 2013. № 1. С. 87–93.
9. Пикина Г.А., Бурцева Ю.С. Беспойсковая настройка линейных регуляторов на минимум квадратичного критерия // Теплоэнергетика. 2014. № 3. С. 23–27. <https://doi.org/10.1134/S0040363614030096>
10. Фетисова Ю.А., Ермоленко Б.В., Ермоленко Г.В., Киселева С.В. Определение параметров функции Вейбулла для оценки ветроэнергетического потенциала в условиях ограниченных исходных метеорологических данных // Теплоэнергетика. 2017. № 4. С. 13–20. <https://doi.org/10.1134/S0040363617040038>
11. Распоряжением Правительства Российской Федерации от 12 октября 2020 г. № 2634-р утвержден план мероприятий (“дорожная карта”) по развитию водородной энергетики в Российской Федерации до 2024 г. [Электронный ресурс]. URL: <https://minenergo.gov.ru/node/19194?ysclid=1a7pe9ikxz902009083> (Дата обращения: 11.01.2023).
12. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 5 августа 2021 г. № 2162-р “Концепция развития водородной энергетики в Российской Федерации”. [Электронный ресурс]. URL: <http://static.government.ru/media/files/5JFns1CDAKqYKzZ0mnRADAw2Nqcvsexl.pdf> (Дата обращения: 11.01.2023)
13. Официальный сайт Акционерного общества “ОКБМ имени И.И. Африкантова” [Электронный ресурс]. URL: <http://www.okbm.nnov.ru/business-directions/atomnye-stantsii-maloy-sredney-moshchnosti-i-plavuchie-atomnye-teploelektrostantsii/> (Дата обращения: 12.01.2023).
14. Официальный сайт ПАО “Калужский турбинный завод” [Электронный ресурс]. URL: [http://paoktz.ru/press/news/oao-quot-kaluzhskiy-turbinnyy-zavod-quot-zavershilo-izgotovlenie-oborudovaniya-dlya-pates/?sphrase\\_id=7942](http://paoktz.ru/press/news/oao-quot-kaluzhskiy-turbinnyy-zavod-quot-zavershilo-izgotovlenie-oborudovaniya-dlya-pates/?sphrase_id=7942) (Дата обращения: 13.01.2023).
15. Клер А.М., Торина Э.А. Оптимизационные исследования энергетических установок и комплексов. Новосибирск: Академическое издательство “Гео”, 2016. 298 с.

16. Клер А.М., Тюрина Э.А. Эффективные методы схемно-параметрической оптимизации сложных теплоэнергетических установок: разработка и применение. — Новосибирск: Академическое издательство “Гео”, 2018. 145 с.
17. Kler A.M., Zharkov P.V., Epishkin N.O. Parametric optimization of supercritical power plants using gradient methods // *Energy*. 2019. Vol. 189. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116230>
18. Клер А.М., Степанова Е.Л., Жарков П.В. Оценка эффективности режимов работы теплофикационной ГТУ при эксплуатации в климатических зонах с умеренно континентальным и резко континентальным климатом с учетом неопределенности цен на отпускаемую энергетическую продукцию // *Известия РАН. Энергетика*. 2021. № 3. С. 42–53. <https://doi.org/10.31857/S0002331021030079>

## Method for Creating Mathematical Models of Heating Nuclear Power Units of Power Plants for Optimization Studies of Autonomous Electric Power Systems

A. M. Kler<sup>a</sup>, E. L. Stepanova<sup>a, \*</sup>, and P. V. Zharkov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*  
*\*e-mail: step@isem.irk.ru*

The authors present a two-stage method for creating mathematical models of cogeneration nuclear power units for optimization studies of autonomous electric power systems. The first stage of the methodology includes the development of a detailed model of a nuclear power unit, which provides a satisfactory accuracy of the description of physical and technological processes, as well as optimization calculations of operating modes. At the second stage, the energy dependencies are built based on the results of optimization calculations of the first stage. Energy dependencies define the boundaries of the region of feasible solutions in the form of polynomials. A simplified mathematical model of a nuclear power unit for optimization studies of autonomous EPS is created using polynomials. To solve the problem of finding a polynomial, a two-step approach is proposed. At the first step, the polynomial coefficients are selected such that the minimum of the maximum value of the modulus of the difference between the function determined using the polynomial and the function determined using the detailed model of the power unit is reached. At the second step, the deviation modules are limited to the value found at the first step, and the sum of the deviation modules is minimized at all points. The two-stage technique developed by the authors is demonstrated on the example of a cogeneration nuclear power unit, which is supposed to be operated in the climatic conditions of the Far North.

**Keywords:** cogeneration nuclear power units, nuclear power plants, steam turbine plants of nuclear power plants, mathematical models, energy characteristics, polynomials

---

---

УДК 629.78.064.52:621.314.671

## ЭНЕРГОМАССОВЫЕ И ТЕПЛОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ТОКА, ВЫПОЛНЕННОГО НА ПРИБОРАХ ПЛАЗМЕННОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

© 2023 г. Е. В. Онуфриева<sup>1</sup>, \*, В. В. Онуфриев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)”, Москва, Россия

\*e-mail: onufryev@bmstu.ru

Поступила в редакцию 31.03.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

В космических энергодвигательных установках (ЭДУ) на основе низковольтного источника электроэнергии и высоковольтных электроракетных двигателей необходима система преобразования тока (СПТ). В качестве одного из элементов перспективных высокотемпературных СПТ рассматриваются высокотемпературные плазменные термоэмиссионные вентили (ВПТВ) плазменной электроэнергетики – сеточные ключевые элементы (СКЭ) и высоковольтные плазменные термоэмиссионные диоды (ВПТД). В работе проведено моделирование энергомассовых характеристик СПТ, построенной на СКЭ и ВПТД, использующих тепловые трубы (ТТ) для охлаждения, определены температурные режимы, в которых достигается минимальная удельная масса преобразователя тока. Определены значения удельной массы. Результаты работы могут быть использованы при разработке новых высокотемпературных СПТ космических энергодвигательных установок для электрической мощности от десятков до тысячи киловатт.

*Ключевые слова:* система преобразования тока, космическая энергодвигательная установка, вентиль, сеточный ключевой элемент, высоковольтный плазменный термоэмиссионный диод, электрическая мощность, температура

**DOI:** 10.31857/S0002331023060043, **EDN:** QDSWJR

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных направлений является создание транспортных аппаратов с энергодвигательными установками на основе ядерных энергетических установок и маршевых электроракетных двигательных установок (ЭРДУ), использование которых имеет большой, в том числе научный и коммерческий, потенциал [1–3]. В 80-ые гг. XX века в СССР были проведены лётно-космические испытания космических аппаратов “Плазма–А” с термоэмиссионным реактором преобразователем (ТРП) “Топаз” мощностью 5 кВт [4, 5], во время которых впервые было осуществлено питание электроракетных двигателей (ЭРД) от ядерного реактора. На основе этих ТРП разработаны проекты термоэмиссионных ЯЭУ 2-го поколения электрической мощностью от 25 до 100 кВт [5].

Особенности работы ТРП (высокая рабочая температура – до 2000 К и наличие ионизирующих излучений, тепловых потоков) предполагают высокие требования к

выбору СПТ, ее состава, конфигурации и элементной базы, условия ее функционирования, определяя массогабаритные характеристики всей ЭДУ и космического аппарата. Выходное рабочее напряжение перспективных ТРП электрической мощностью 50–300 кВт составляет 120–150 В, рабочее напряжение маршевой ЭРДУ, использующей ионные двигатели или двигатели с анодным слоем – 2500–3000 В, поэтому СПТ должна строиться по схеме: инвертирование напряжения постоянного тока (выходное ТРП) с помощью управляемых клапанов, повышение амплитуды инвертированного напряжения с помощью трансформатора, выпрямление повышенного напряжения с помощью неуправляемых клапанов. Значительную роль в обеспечении функционирования элементов СПТ играет система охлаждения и терморегулирования, именно ее массоэнергетические показатели существенно влияют на величину удельной массы СПТ [6–12]. Наиболее эффективной будет система преобразования тока с наименьшей удельной массой при рабочей температуре, обеспечивающая согласование электрических параметров ТРП и ЭРДУ [11, 12].

### УКРУПНЕННАЯ МАССОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТОКА НА ОСНОВЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ТЕРМОЭМИССИОННЫХ КЛАПАНОВ С ТЕПЛОВЫМИ ТРУБАМИ

Масса СПТ на основе ВПТВ складывается из следующих составляющих: массы силовой части – клапанов, трансформатора и других коммутирующих устройств, системы управления силовой частью (она с достаточной степенью точности может быть выражена в долях от массы силовой части), массы системы теплоотвода потерь электрической мощности на преобразователе [10, 11].

Масса силовой части преобразователя тока –  $M_{СПТ}^*$  может быть выражена через удельную массу ее элементов –  $\gamma_{iэл}$  (клапанов, силовых коммутаторов, конденсаторов и т.д.) и их электрическую мощность –  $N_{iэл}$ , удельную массу трансформатора СПТ –  $\gamma_{ТР}$  и его электрическую мощность –  $N_{эл.СПТ}$ :

$$M_{СПТ}^* = \left( \sum_i \gamma_{iэл} N_{iэл} + \gamma_{ТР} N_{эл.СПТ} \right). \quad (1)$$

Поскольку рабочее напряжение клапанов отличается в общем случае от напряжения преобразователя (которое чаще всего больше, чем рабочее напряжение клапана), то количество клапанов должно быть увеличено для обеспечения работоспособности и надежности. Это можно учесть коэффициентом –  $k_U$ , который определяется отношением величины выходного напряжения преобразователя –  $U_{СПТ}$  к рабочему напряжению –  $U_p$  клапана. Аналогично можно ввести коэффициент  $k_I$ , характеризующий число клапанов СПТ по току. Если принять:

$$k_U = \frac{U_{СПТ}}{U_p}, \quad k_I = \frac{N_{эл.СПТ}}{U_{СПТ} I_p}, \quad (2)$$

где  $I_p$  – рабочий ток клапана, то выражение для составляющей массы преобразователя электрической энергии ЭДУ – силовой части примет вид:

$$M_{СПТ}^* = \left( \gamma_{эл} \frac{N_{эл.СПТ}^2}{U_p I_p} + \gamma_{ТР} N_{эл.СПТ} \right). \quad (3)$$

Массу системы управления  $M_{СПТ}^{СУ}$  можно представить с учетом сделанных выше замечаний в следующем виде:

$$M_{СПТ}^{СУ} = \varphi \left( \gamma_{эл} \frac{N_{эл.СПТ}^2}{U_p I_p} + \gamma_{ТР} N_{эл.СПТ} \right), \quad (4)$$

здесь  $\varphi$  – коэффициент, который для традиционных преобразователей тока по многочисленным экспериментальным и проектным данным [6, 8, 10, 11]  $\varphi = 0.1...0.3$  для диапазона мощностей до 100–200 кВт.

Третья составляющая массы преобразователя тока – холодильника-излучателя –  $M_{ХИ СПТ}$  характеризуется рабочей температурой ХИ, так как от этого параметра существенно зависит площадь излучающей поверхности. Выразим массу  $M_{ХИ СПТ}$  системы теплоотвода преобразователя тока ЭДУ через функцию отводимой мощности потерь  $N_{пот}$ , которая определяется соотношением:

$$N_{пот} = (1 - \eta_{СПТ}) N_{эл.СПТ}. \quad (5)$$

Примем температуру ХИ СПТ постоянной –  $T_{ХИ СПТ}$ , степень черноты поверхности ХИ СПТ также считается заданной –  $\epsilon_{ХИ СПТ}$ . Выражение для площади ХИ СПТ примет вид:

$$F_{ХИ СПТ} = \frac{N_{пот}}{\sigma \epsilon_{ХИ СПТ} T_{ХИ СПТ}^4} = \frac{(1 - \eta_{СПТ}) N_{эл.СПТ}}{\sigma \epsilon_{ХИ СПТ} T_{ХИ СПТ}^4}, \quad (6)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана. Тогда масса системы теплоотвода – ХИ определяется по формуле:

$$M_{ХИ СПТ} = \frac{(1 - \eta_{СПТ}) N_{эл.СПТ}}{\sigma \epsilon_{ХИ СПТ} T_{ХИ СПТ}^4} \gamma_{ХИ СПТ}, \quad (7)$$

здесь  $\gamma_{ХИ СПТ}$  – удельная масса единицы площади ХИ. Отсюда следует, что:

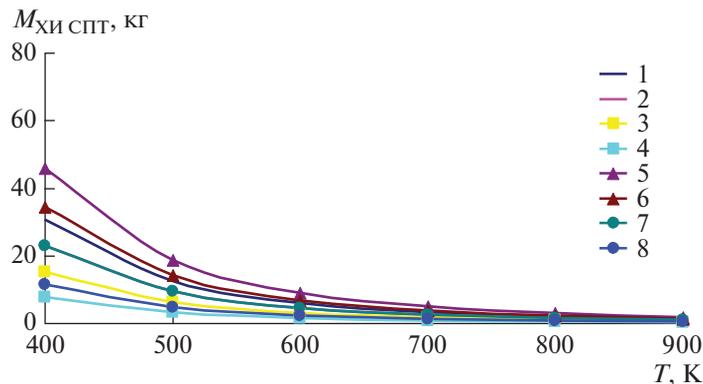
$$\gamma_{СПТ}^{ХИ} = \frac{(1 - \eta_{СПТ})}{\sigma \epsilon_{ХИ СПТ} T_{ХИ СПТ}^4} \gamma_{ХИ СПТ} \quad (8)$$

является удельной массой ХИ на единицу отводимой мощности. Зависимости массы ХИ СПТ от температуры представлены на рис. 1–2 при  $\epsilon_{ХИ СПТ} = 0.9$ .

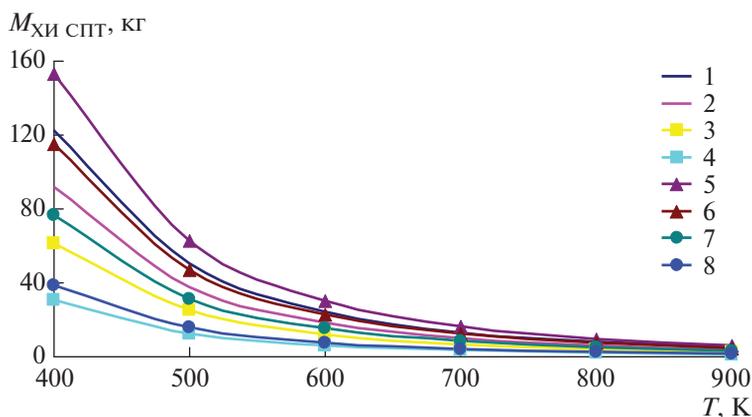
Из рис. 1–2 видно, что для  $N_{эл.СПТ} = 100$  кВт в диапазоне температур 500–800 К и  $\eta_{СПТ} = 0.8...0.95$  значения массы ХИ СПТ: при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 2$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 12.5...1.9$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 3$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 18.8...2.9$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 4$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 25...3.8$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 5$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 31.4...4.8$  кг. Для  $N_{эл.СПТ} = 200$  кВт в диапазоне температур 500–800 К и  $\eta_{СПТ} = 0.8...0.95$  значения массы ХИ СПТ: при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 2$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 25...3.8$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 3$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 37.6...5.7$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 4$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 50.2...7.7$  кг; при  $\gamma_{ХИ СПТ} = 5$  кг/м<sup>2</sup>  $M_{ХИ СПТ} = 62.7...9.6$  кг.

Результаты расчета показывают целесообразность использования высокотемпературной СПТ с температурой 700–800 К, ХИ которой имеет массу не более 10 кг. Вместе с тем массу преобразователя тока ЭДУ можно представить как функцию ее электрической мощности и температуры теплоотвода –  $T_{ХИ}$  (близкой к рабочей температуре СПТ):

$$M_{СПТ} = (1 + \varphi) \left( \gamma_{эл} \frac{N_{эл.СПТ}^2}{U_p I_p} + \gamma_{ТР} N_{эл.СПТ} \right) + \frac{(1 - \eta_{СПТ}) N_{эл.СПТ}}{\sigma \epsilon_{ХИ СПТ} T_{ХИ СПТ}^4} \gamma_{ХИ СПТ}. \quad (9)$$



**Рис. 1.** Зависимость массы ХИ СПТ от температуры,  $N_{\text{эл.СПТ}} = 100$  кВт: 1 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.8$ ; 2 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.85$ ; 3 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.9$ ; 4 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.95$ ,  $\gamma_{\text{ХИ СПТ}} = 2$  кг/м<sup>2</sup>; 5 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.8$ ; 6 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.85$ ; 7 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.9$ ; 8 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.95$ ;  $\gamma_{\text{ХИ СПТ}} = 3$  кг/м<sup>2</sup>.



**Рис. 2.** Зависимость массы ХИ СПТ от температуры,  $N_{\text{эл.СПТ}} = 200$  кВт: 1 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.8$ ; 2 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.85$ ; 3 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.9$ ; 4 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.95$ ,  $\gamma_{\text{ХИ СПТ}} = 4$  кг/м<sup>2</sup>; 5 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.8$ ; 6 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.85$ ; 7 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.9$ ; 8 –  $\eta_{\text{СПТ}} = 0.95$ ,  $\gamma_{\text{ХИ СПТ}} = 5$  кг/м<sup>2</sup>.

Аналогично можно выразить удельную массу СПТ как функцию удельных энерго-массовых характеристик ее силовых элементов, КПД и рабочей температуры:

$$\gamma_{\text{СПТ}} = (1 + \varphi)\gamma_{\text{В}} + \frac{(1 - \eta_{\text{СПТ}})}{\sigma \epsilon_{\text{ХИ СПТ}} T_{\text{ХИ СПТ}}^4} \gamma_{\text{ХИ СПТ}}, \quad (10)$$

где  $\gamma_{\text{В}}$  – удельная масса силовой части СПТ (вентилей и трансформатора).

Из выражения (10) для  $\gamma_{\text{СПТ}}$  следует, что рабочая температура преобразователя в явном виде присутствует для ХИ СПТ – системы теплоотвода, но нет явной связи с удельными характеристиками силовых элементов преобразователя. Следует отметить, что с ростом температуры потери в преобразователе тока растут, его КПД падает, вме-

сте с тем возрастает удельная масса силовой части преобразователя  $\gamma_B$  за счет снижения рабочего напряжения вентилях и соответственно увеличения их количества.

Результаты расчетно-теоретических и экспериментальных исследований показали, что для диапазона электрической мощности СПТ 100–200 (250) кВт энергетическая размерность единичного вентиля в зависимости от рабочего напряжения и температуры не превышает 25–75 кВт [15–18]. Таким образом, электрические характеристики перспективных высокотемпературных вентилях будут следующие:

- инвертор (управляемые вентилях) – рабочее напряжение 150 В, ток до 500 А;
- выпрямитель (высоковольтные вентилях) – рабочее напряжение до 2500–3000 В, ток до 30 А.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ТЕРМОЭМИССИОННЫХ ВЕНТИЛЕЙ НА ВЕЛИЧИНУ УДЕЛЬНОЙ МАССЫ СИСТЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТОКА

Особенностью СПТ на основе ВПТВ (СКЭ и ВПТД) является то, что в инверторе используются “токовые” вентилях – сеточные ключевые элементы, разработанные на интегральные токи до 450–500 А [13, 14], а в выпрямителе – высоковольтные плазменные термоэмиссионные диоды, являющиеся вентилями “напряжения”, разработанные на напряжение 1500–2500 В [15–18]. Таким образом в инверторной части при электрической мощности СПТ на основе ВПТВ 100–200 кВт сеточные ключевые элементы коммутируются параллельно по току, а в выпрямительной части – высоковольтные плазменные термоэмиссионные диоды коммутируются последовательно по напряжению. С учетом этих особенностей построения СПТ на основе ВПТВ проведем ее энергомассовое и теплоэлектрическое исследование.

Отвод тепла от вентилях осуществляется радиаторами охлаждения, выполненными в виде тепловых труб (ТТ) [19, 20], совмещенных с электродами. Положим, что ТТ выполнена цилиндрической конструкции, имеет длину  $L_{ТТ}$ , внешний диаметр  $D_{ТТ}$ , толщину стенки  $\delta_{ТТ}$  и сбрасывает излучение со всей боковой поверхности. Площадь теплосброса потерь электрической энергии одного СКЭ в инверторе определяется как:

$$I_{СКЭ} \delta U_{СКЭ} = \sigma \epsilon_{ТТ} T_{ТТ}^4 \pi D_{ТТ} L_{ТТ}, \quad (11)$$

где  $I_{СКЭ}$  – рабочий ток СКЭ;  $\delta U_{СКЭ}$  – падение напряжения на СКЭ;  $\epsilon_{ТТ}$  – степень черноты поверхности ТТ.

Умножим обе части (11) на  $(\rho_{ТТ})$  – плотность материала ТТ и толщину стенки ТТ ( $\delta_{ТТ}$ ):

$$I_{СКЭ} \delta U_{СКЭ} \rho_{ТТ} \delta_{ТТ} = \sigma \epsilon_{ТТ} T_{ТТ}^4 M_{ТТ.СКЭ}, \quad (11^*)$$

где  $M_{ТТ.СКЭ}$  – масса тепловой трубы для охлаждения одного СКЭ. Тогда масса всех ТТ для инвертора (охлаждения всех СКЭ) определится как:

$$M_{ТТ}^{СКЭ} = \frac{I_{СКЭ} \delta U_{СКЭ} \rho_{ТТ} \delta_{ТТ}}{\sigma \epsilon_{ТТ} T_{ТТ}^4} k_I. \quad (11^{**})$$

Удельная масса тепловых труб инвертора СПТ определится как:

$$\gamma_{ТТ}^{СКЭ} = \frac{M_{ТТ}^{СКЭ}}{N_{СПТ.СКЭ}^{пот}} = \frac{M_{ТТ}^{СКЭ}}{(1 - \eta_{инверт.}) N_{эл.СПТ}} = \frac{I_{СКЭ} \delta U_{СКЭ} \rho_{ТТ} \delta_{ТТ}}{(1 - \eta_{инверт.}) N_{эл.СПТ} \sigma \epsilon_{ТТ} T_{ТТ}^4} k_I, \quad (12)$$

где  $\eta_{инверт.}$  – КПД инвертора с учетом количества СКЭ.

Количество параллельно соединенных по току СКЭ в инверторе СПТ –  $k_I$  в этом случае может определено по формуле:

$$k_I = \frac{N_{\text{эл.СПТ}}}{U_{\text{СКЭ}}^{\text{СПТ}} I_{\text{СКЭ}}} \quad (13)$$

с учетом тока единичного сеточного ключевого элемента в инверторе и напряжения СПТ в инверторе –  $U_{\text{СКЭ}}^{\text{СПТ}}$ . В результате суммарная удельная масса ТТ всех сеточных ключевых элементов инвертора СПТ с учетом КПД инвертора –  $\eta_{\text{инверт.}}$ , (13) и (12) определится как:

$$\gamma_{\text{ТТ}}^{\text{СКЭ}} = \frac{\delta U_{\text{СКЭ}} \rho_{\text{ТТ}} \delta_{\text{ТТ}}}{U_{\text{СКЭ}}^{\text{СПТ}} (1 - \eta_{\text{инверт.}}) \sigma \epsilon_{\text{ТТ}} T_{\text{ТТ}}^4}. \quad (14)$$

Количество последовательно соединенных по напряжению ВПТД в выпрямителе СПТ определим по формуле – отношение выходного напряжения СПТ  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}}$  к рабочему напряжению  $U_{\text{ВПТД}}(T_{\text{ТТ}})$  единичного ВПТД с учетом температуры анода, охлаждаемого тепловой трубой (принимая  $T_{\text{ВПТД}} = T_{\text{ТТ}}$  – вентили имеют нижнюю температуру, равную температуре теплоотвода, то есть, самой тепловой трубы):

$$k_U = \frac{U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}}}{U_{\text{ВПТД}}(T_{\text{ТТ}})}, \quad (15)$$

где масса одной тепловой трубы для охлаждения ВПТД может быть найдена аналогично (11)–(11\*\*):

$$M_{\text{ТТ.ВПТД}} = \frac{I_{\text{ВПТД}} \delta U_{\text{ВПТД}} \rho_{\text{ТТ}} \delta_{\text{ТТ}}}{\sigma \epsilon_{\text{ТТ}} T_{\text{ТТ}}^4}, \quad (16)$$

$\delta U_{\text{ВПТД}}$  – падение напряжения на ВПТД;  $I_{\text{ВПТД}}$  – рабочий ток ВПТД.

Масса всех тепловых труб выпрямителя СПТ (по числу ВПТД) определится как:

$$M_{\text{ТТ}}^{\text{ВПТД}} = \frac{I_{\text{ВПТД}} \delta U_{\text{ВПТД}} \rho_{\text{ТТ}} \delta_{\text{ТТ}}}{\sigma \epsilon_{\text{ТТ}} T_{\text{ТТ}}^4} k_U. \quad (16^*)$$

Или:

$$M_{\text{ТТ}}^{\text{ВПТД}} = \frac{I_{\text{ВПТД}} \delta U_{\text{ВПТД}} \rho_{\text{ТТ}} \delta_{\text{ТТ}}}{\sigma \epsilon_{\text{ТТ}} T_{\text{ТТ}}^4} \frac{U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}}}{U_{\text{ВПТД}}(T_{\text{ТТ}})}. \quad (17)$$

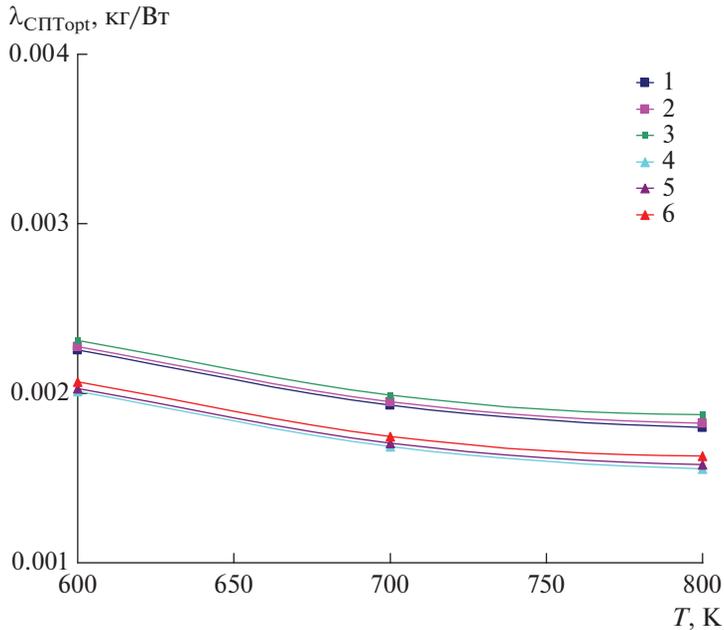
Учтем, что

$$N_{\text{эл.СПТ}} \cong \frac{1}{\eta_{\text{инверт.}} \eta_{\text{ТР}}} N_{\text{эл.СПТ}}^{\text{Выпр.}} = \frac{1}{\eta_{\text{инверт.}} \eta_{\text{ТР}}} I_{\text{ВПТД}} U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}},$$

потери в инверторе и трансформаторе учтены через их КПД:  $\eta_{\text{выпр.}}$ ,  $\eta_{\text{ТР}}$ .

Удельную массу тепловых труб выпрямителя СПТ можно записать аналогично (16) с учетом  $\eta_{\text{выпр.}}$  (КПД выпрямителя СПТ), потери мощности в инверторе и трансформаторе СПТ и (17):

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ТТ}}^{\text{ВПТД}} &= \frac{M_{\text{ТТ}}^{\text{ВПТД}}}{(1 - \eta_{\text{выпр.}}) \eta_{\text{инверт.}} \eta_{\text{ТР}} N_{\text{эл.СПТ}}} = \\ &= \frac{I_{\text{ВПТД}} \delta U_{\text{ВПТД}} \rho_{\text{ТТ}} \delta_{\text{ТТ}}}{(1 - \eta_{\text{выпр.}}) \eta_{\text{инверт.}} \eta_{\text{ТР}} N_{\text{эл.СПТ}} \sigma \epsilon_{\text{ТТ}} T_{\text{ТТ}}^4} \frac{U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}}}{U_{\text{ВПТД}}(T_{\text{ТТ}})}. \end{aligned} \quad (18)$$



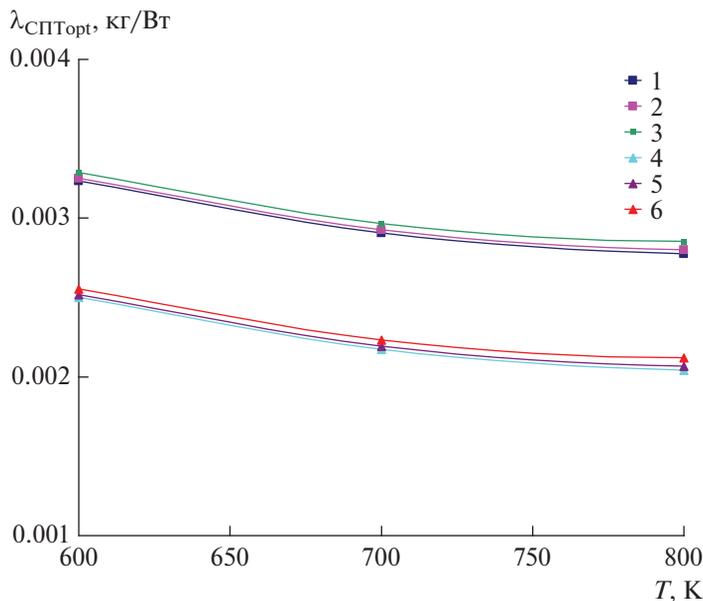
**Рис. 3.** Зависимость удельной массы СПТ от температуры ( $N_{эл.СПТ} = 100$  кВт,  $p_{СЭ} = 0.06$  Торр):  $I_{СКЭ} = 250$  А, 1 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 2000$  В, 2 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 3000$  В, 3 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 5000$  В;  $I_{СКЭ} = 500$  А, 4 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 2000$  В, 5 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 3000$  В, 6 –  $U_{ВПТД}^{СПТ} = 5000$  В.

В результате удельную массу СПТ на основе СКЭ и ВПТД можно определить как функцию удельных энергомассовых характеристик его силовых элементов, КПД и рабочей температуры:

$$\begin{aligned} \gamma_{СПТ} = & (1 + \varphi)\gamma_{СКЭ} \frac{N_{эл.СПТ}}{U_{СКЭ}I_{СКЭ}} + \gamma_{ТР} + \gamma_{ВПТД} \frac{U_{ВПТД}^{СПТ}}{U_{ВПТД}(T_{ТТ})} + \frac{\rho_{ТТ}\delta_{ТТ}}{\sigma\epsilon_{ТТ}T_{ТТ}^4} \times \\ & \times \left( \frac{\delta U_{СКЭ}}{U_{СКЭ}^{СПТ}(1 - \eta_{инверт.})} + \frac{\delta U_{ВПТД}}{U_{ВПТД}(T_{ТТ})(1 - \eta_{выпр.})} \right), \end{aligned} \quad (18^*)$$

где  $\gamma_{СКЭ}$ ,  $\gamma_{ВПТД}$ ,  $\gamma_{ТР}$  – удельные массы СКЭ, ВПТД, трансформатора соответственно.

Последние слагаемые в (18\*) представляют собой удельную массу эквивалентной тепловой трубы СПТ. Следует отметить, что для расчета характеристик СПТ необходимо задать рабочее напряжение инвертора (для ТРП 2-го поколения  $U_{ТРП} = U_{СКЭ}^{СПТ} = U_{СКЭ} = 150$  В) и напряжение ВПТД от температуры (для цезиевого и бариевого наполнения) [15–18]. Результаты исследования удельной массы СПТ на основе ВПТВ от его электрической мощности от температуры и электрической мощности (18\*) представлены на рис. 3–6. Зависимости удельной массы СПТ (давление пара цезия в МЭЗ ВПТД 0.06 Торр) получены при  $\epsilon_{ТТ} = 0.9$ ,  $\varphi = 0.1$ ;  $\gamma_{ТР} = 1$  кг/кВт,  $\gamma_{СКЭ} = 0.17$  кг/кВт,  $\gamma_{ВПТД} = 0.03$  кг/кВт,  $\eta_{инверт.} = 0.95$ ,  $\eta_{выпр.} = 0.99$ ,  $\delta U_{СКЭ} = 2.5$  В,  $\delta U_{ВПТД} = 2.5$  В, материал тепловой трубы молибден –  $\rho_{ТТ} = 10200$  кг/м<sup>3</sup>, толщина стенки –  $\delta_{ТТ} = 1$  мм.



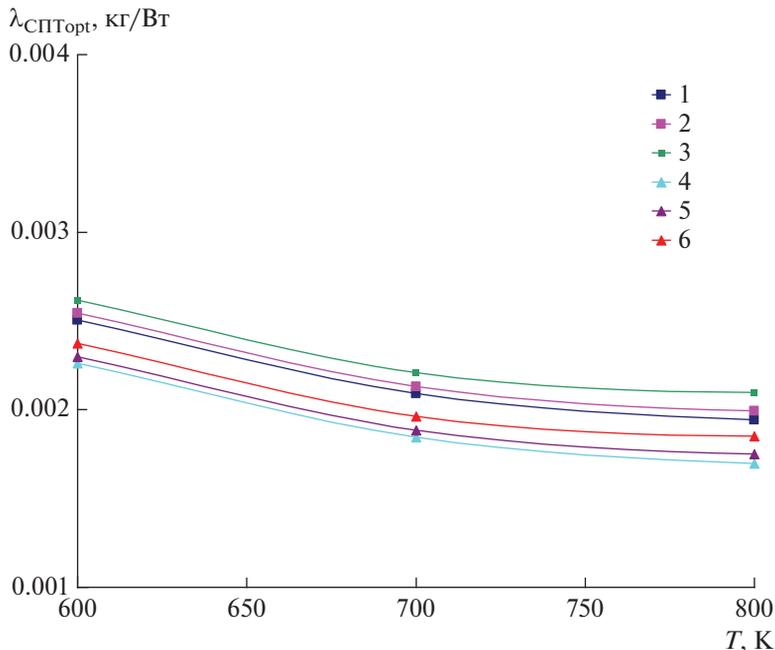
**Рис. 4.** Зависимость удельной массы СПТ от температуры ( $N_{\text{эл.СПТ}} = 300$  кВт,  $p_{\text{Cs}} = 0.06$  Торр):  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А, 1 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 2 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 3 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В;  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А, 4 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 5 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 6 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В.

Расчеты показывают, что для  $N_{\text{эл.СПТ}} = 100$  кВт и  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А в диапазоне температур 600–800 К минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ при  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В составляет  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2.3 \dots 1.6$  кг/кВт, а при  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В –  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2.3 \dots 2.1$  кг/Вт, при  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В –  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2.3 \dots 2.2$  кг/Вт. При  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А в этом же диапазоне температур при равных параметрах минимальная удельная масса СПТ составляет соответственно:  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2 \dots 1.7$  кг/кВт,  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2 \dots 1.8$  кг/кВт и  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 2.1 \dots 2$  кг/кВт. Для  $N_{\text{эл.СПТ}} = 300$  кВт и  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А в указанном диапазоне температур минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ увеличивается в 1.4–1.5 раз при прочих равных параметрах вентилей. При  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А в указанном диапазоне температур минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ увеличивается в 1.25–1.3 раз при прочих равных параметрах вентилей.

С увеличением давления пара цезия в МЭЗ ВПТД (до 0.08 Торр) минимальная удельная масса СПТ при  $I_{\text{СКЭ}} = 250 \dots 500$  А снижается до 1.7–2.1 кг/кВт –  $N_{\text{эл.СПТ}} = 100$  кВт и до 2.3–3 кг/кВт –  $N_{\text{эл.СПТ}} = 300$  кВт, рис. 5, 6.

При переходе на бариевое наполнение СКЭ и ВПТД обеспечивается снижение удельной массы СПТ на ВПТВ на 40–50% по сравнению с цезиевым при одновременном увеличении рабочей температуры СПТ до 900–950 К, рис. 7, 8. Отметим, что при этих параметрах теплофизического состояния вентилей (ВПТД) их рабочее напряжение составляет 2000–2500 В [16–18].

Зависимости удельной массы СПТ (при  $p_{\text{Ba}} = 0.008$  Торр) получены для диапазона электрической мощности  $N_{\text{эл.СПТ}} = 100 \dots 300$  кВт при  $\epsilon_{\text{ТТ}} = 0.9$ ,  $\phi = 0.1$ ;  $\gamma_{\text{ТР}} = 1$  кг/кВт,  $\gamma_{\text{СКЭ}} = 0.17$  кг/кВт,  $\gamma_{\text{ВПТД}} = 0.03$  кг/кВт,  $\eta_{\text{Инверт.}} = 0.95$ ,  $\eta_{\text{Выпр.}} = 0.99$ ,  $\delta U_{\text{СКЭ}} = 2.5$  В,



**Рис. 5.** Зависимость удельной массы СПТ от температуры ( $N_{\text{эл.СПТ}} = 100$  кВт,  $p_{\text{Сs}} = 0.08$  Торр):  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А, 1 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 2 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 3 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В;  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А, 4 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 5 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 6 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В.

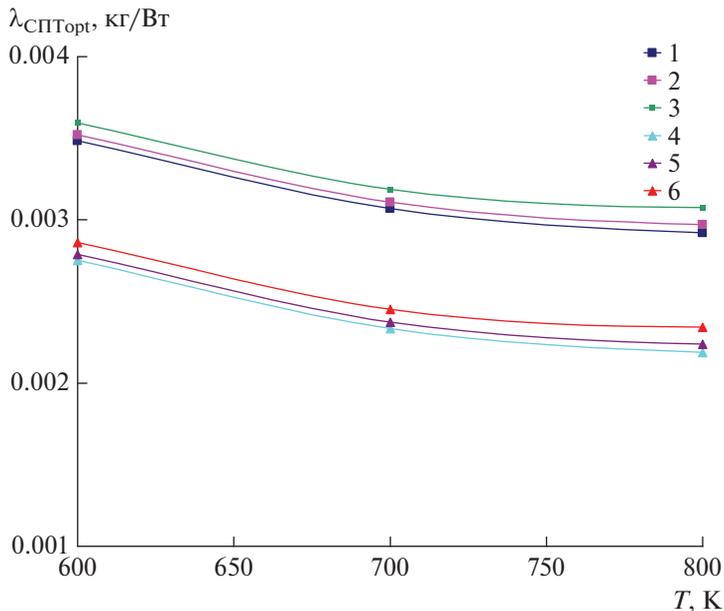
$\delta U_{\text{ВПТД}} = 2.5$  В, материал тепловой трубы молибден –  $\rho_{\text{ТТ}} = 10200$  кг/м<sup>3</sup>, толщина стенки –  $\delta_{\text{ТТ}} = 1$  мм.

Расчеты показывают, что для  $N_{\text{эл.СПТ}} = 100$  кВт и  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А в диапазоне температур 800–900 К минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ при  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000 \dots 5000$  В составляет  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 1.5 \dots 1.6$  кг/кВт. При  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А в этом же диапазоне температур при равных параметрах минимальная удельная масса СПТ составляет соответственно:  $\gamma_{\text{СПТопт}} = 1.75 \dots 1.8$  кг/кВт. Для  $N_{\text{эл.СПТ}} = 300$  кВт и  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А в указанном диапазоне температур минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ увеличивается в 1.3–1.35 раз при прочих равных параметрах вентилей и достигает 2.0 кг/кВт. При  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А в указанном диапазоне температур минимальная удельная масса СПТ на основе ВПТВ увеличивается в 1.25–1.3 раз при прочих равных параметрах вентилей и составляет 2.7–2.8 кг/кВт.

Таким образом, по сравнению с классическими полупроводниковыми СПТ и построенными на полупроводниках Si-C с рабочей температурой 400–500 К удельная масса снижается в 2–3 раза [11, 12].

### ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ПЛАЗМЕННЫХ ВЕНТИЛЕЙ

Проведенные исследования показали, что оптимальное значение температуры СПТ на основе ВПТВ для КА с ТРП лежит в диапазоне 500–900 К, при этом рабочее напряже-



**Рис. 6.** Зависимость удельной массы СРТ от температуры ( $N_{эл.СРТ} = 300$  кВт,  $p_{С3} = 0.08$  Торр):  $I_{СКЭ} = 250$  А,  $1 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 2000$  В,  $2 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 3000$  В,  $3 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 5000$  В;  $I_{СКЭ} = 500$  А,  $4 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 2000$  В,  $5 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 3000$  В,  $6 - U_{ВПТД}^{СРТ} = 5000$  В.

ние перспективной системы преобразования тока должно быть не ниже 2500 В. Чтобы обеспечить приемлемые значения  $\gamma_{СРТ}$ , необходимо использовать СКЭ и ВПТД с рабочим напряжением более 150 В и 1500 В соответственно.

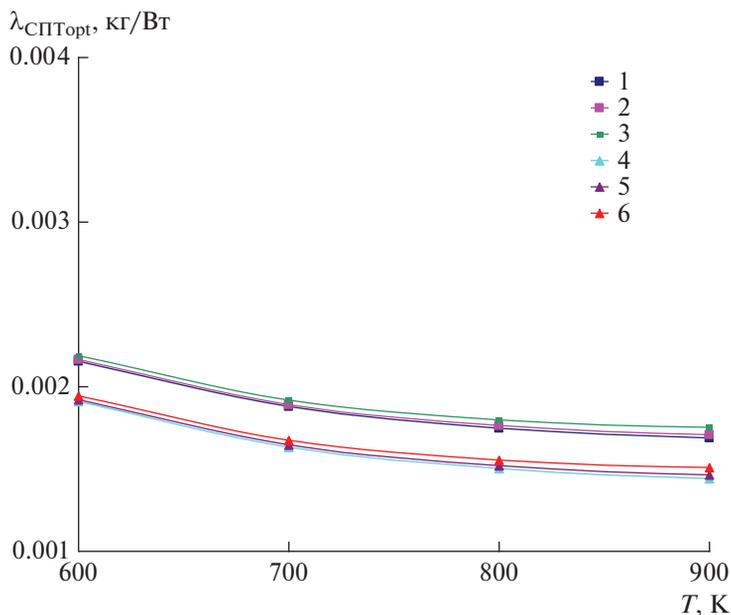
Использование классических низкотемпературных полупроводниковых вентиляей для системы преобразования тока КА с энергоустановкой на основе ТРП (в современной и ближайшей перспективе) обуславливает значительное увеличение удельной массы СРТ до 10–15 кг/кВт. Применение высокотемпературных полупроводниковых вентиляей с рабочей температурой 520–420 К позволит снизить удельную массу СРТ в 2–3 раза, но, как и в первом случае, такой СРТ требуется принудительное охлаждение, гермоконтейнер и радиационная защита.

Использование для КА с ТРП системы преобразования тока на основе ВПТВ и высокотемпературным трансформатором с удельной массой  $\gamma_{ВПТД} = 0.02...0.05$  кг/кВт способствует снижению общей массы инвертора и выпрямителя СРТ до 0.4–0.9 кг/кВт. Уменьшение удельной массы СКЭ и ВПТД до 0.01 кг/кВт при одновременном увеличении их рабочего напряжения до 5 кВ позволяет реализовать плазменную часть с удельной массой:

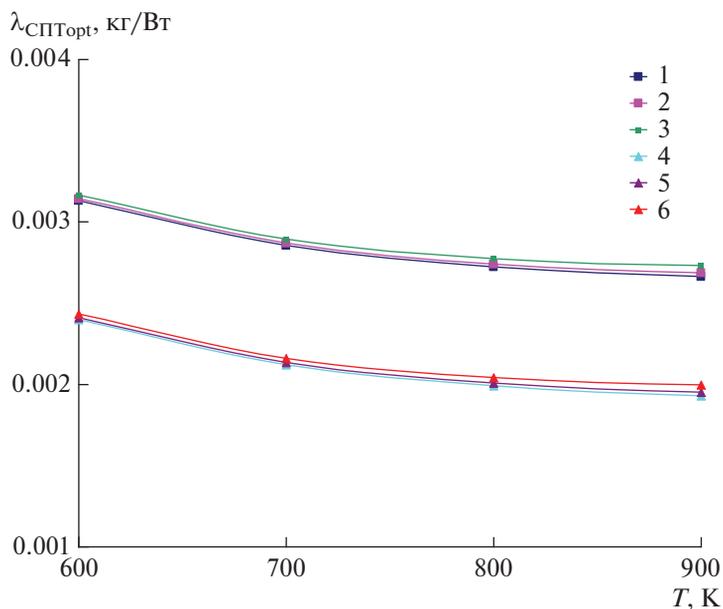
- $\gamma = 0.2$  кг/кВт (при рабочем напряжении СРТ 1–2 кВ);
- $\gamma = 0.6$  кг/кВт (при рабочем напряжении СРТ 5 кВ);
- $\gamma = 1...2$  кг/кВт (при рабочем напряжении СРТ 10 кВ).

В этой связи становится перспективным применение в мощных системах преобразования тока высокотемпературных плазменных термоэмиссионных вентиляей.

Как свидетельствуют зависимости удельной массы системы преобразования тока на основе высокотемпературных плазменных термоэмиссионных вентиляей (термо-



**Рис. 7.** Зависимость удельной массы СПТ от температуры ( $N_{\text{эл. СПТ}} = 100$  кВт,  $p_{Ba} = 0.008$  Торр):  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А, 1 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 2 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 3 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В;  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А, 4 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 5 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 6 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В.



**Рис. 8.** Зависимость удельной массы СПТ от температуры ( $N_{\text{эл. СПТ}} = 300$  кВт,  $p_{Ba} = 0.008$  Торр):  $I_{\text{СКЭ}} = 250$  А, 1 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 2 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 3 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В;  $I_{\text{СКЭ}} = 500$  А, 4 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 2000$  В, 5 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 3000$  В, 6 –  $U_{\text{ВПТД}}^{\text{СПТ}} = 5000$  В.

эмиссионные вентили с цезиевым или бариевым наполнением) от рабочей температуры, мощности и напряжения, они могут быть рекомендованы в качестве высокотемпературных силовых элементов перспективных преобразователей тока космических аппаратов с энергоустановкой на основе термоэмиссионного реактора-преобразователя.

## ВЫВОДЫ

1. Исследовано влияние температурного режима системы преобразования тока космической ЭДУ на ее энергомассовые характеристики и эффективность. Исследовано влияние температурного режима высоковольтных плазменных термоэмиссионных диодов СПТ на ее энергомассовые характеристики и эффективность с точки зрения потерь электрической мощности.

2. Показано, что диапазон рабочих температур высоковольтных плазменных термоэмиссионных диодов перспективных систем преобразования тока составляет 600–900 К, что существенно превышает температурный диапазон полупроводниковых вентилях и практически затрудняет или исключает их использование в составе мощных энергодвигательных установок вследствие значительной удельной массы. Перспективные системы преобразования тока космических энергодвигательных установок могут быть выполнены на СКЭ и ВПТД с цезиевым или бариевым наполнением.

3. Получены аналитические зависимости для определения количественного состава вентилях в системе преобразования тока космической энергодвигательной установки в зависимости от их теплового режима, рабочего напряжения и электрической мощности преобразователя тока, позволяющие рассчитать энергетическую размерность единичного вентиля, а также для расчета удельной массы СПТ на плазменных вентилях – СКЭ и ВПТД. Определены диапазоны удельных масс перспективных систем преобразования тока на основе вентилях плазменной термоэмиссионной электроэнергетики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев П.В., Жаботинский Е.Е., Никонов А.М.* Перспективы использования термоэмиссионных ЯЭУ для межорбитальных перелетов космических аппаратов в околоземном пространстве // *Атомная энергия*. 1992. Т. 73. № 5. С. 346–350.
2. Использование электроядерных установок в перспективной ядерной энергетике / Г.В. Киселев, И.В. Чувило, О.В. Шведов и др. // *Атомная энергия*. 1994. Т. 77. № 3. С. 167–174.
3. *Грязнов Г.М.* Космическая атомная энергетика и новые технологии (записки директора). М.: ФГУП “ЦНИИатоминформ”, 2007.
4. *Лупко В.Я.* История работ по летательным аппаратам на ядерной энергии для космических и авиационных установок в ГНЦ РФ ФЭИ. Обнинск: ФЭИ, 2002.
5. Проблемы космической энергетики и роль ЯЭУ в их решении / Васильковский В.С., Андреев П.В., Зарицкий Г.А., Пономарев-Степной Н.Н. и др. *Ядерная энергетика в космосе*. В сб. докладов в 3-х т. Т. 1. М.: Изд. НИКИЭТ, 2005. С. 20–25.
6. *Thornton R.D.* Power Management and Distribution Equipment Developed for Space Applications // 26-th International Energy Conversion Engineering Conference (IECEC). Boston MS, 1991. V. II. P. 162–167.
7. Requirements and Design of a 30 kW DC-DC Converter for Space – Based Radar Applications / P.M. Anderson, S.E. Lofton, R.W. Ericson, A.F. Hernandez, G.L. Fronista // 26-th International Energy Conversion Engineering Conference (IECEC). Boston MS, 1991. V. II. P. 184–189.
8. *Rose M.F.* High Energy Density Capacitors for Space Power Conditions // 24-th International Energy Conversion Engineering Conference (IECEC). Washington DC, August 6–11 1989. V. III. P. 1059–1066.
9. *Mac'Lean D.* The MSPICE Simulation of Saturating Transformer // 24-th International Energy Conversion Engineering Conference (IECEC). Washington DC, August 6–11 1989. V. I. P. 105–110.
10. *Глибицкий М.М.* Системы питания и управления электрическими ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1981. 136 с.
11. *Онуфриева Е.В., Синяевский В.В., Онуфриев В.В.* Высокотемпературные системы преобразования тока перспективных космических энергодвигательных установок // *Известия РАН. Энергетика*. 2009. № 4. С. 137–144.

12. *Онуфриева Е.В., Алиев И.Н., Онуфриев В.В.* О выборе оптимального температурного режима преобразователя тока космической энергодвигательной установки // Известия вузов. Машиностроение. 2014. № 7. С. 10–18.
13. Импульсное управление током силовоточного низковольтного разряда на смеси паров цезия и бария / В.Б. Каплан, А.М. Марциновский, А.С. Мустафаев и др. // Журнал технической физики. 1977. Т. 47. Вып. 10. С. 2060–2068.
14. *Бакут Ф.Г., Костин А.А.* Теория сеточных ключевых элементов // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. В. 12. С. 29–35.
15. *Onufriev V.V., Grishin S.D.* Experimental Investigation of Electric Strength to Inverse Arc Breakdown of a Thermionic Diode with Cesium Filling // High Temperature. 1996. Т. 34. № 3. С. 477–480.
16. *Onufriyev V.V.* The Results of Investigations of High Temperature High Voltage Thermion Diode // International Energy Conversion Engineering Conference. (IECEC 2000): Proceeding. – Las Vegas (NV), 2000. – P. 290–296.
17. *Onufriyev V.V.* Experimental Investigation of High Temperature High Voltage Thermionic Diode for the Space Power Nuclear Reactor // Space Technology and Applications International Forum (STAIF-2001): Proceeding. Albuquerque (NM), 2001. P. 1136–1141.
18. *Онуфриев В.В., Лошкарев А.И., Синявский В.В.* Электроэнергетические характеристики термоэмиссионного высоковольтного диода для космических энергодвигательных установок // Известия РАН. Энергетика. 2006. № 1. С. 87–97.
19. Физические основы тепловых труб / М.Н. Ивановский, В.П. Сорокин, И.В. Ягодкин. Москва: Атомиздат. 1978. – 256 с.
20. *Богомолов И.В., Кузин Г.А., Юрченко А.А.* Экспериментальное исследование высокотемпературных вентилях на большие плотности тока // Всес. конф. по термоэмиссионному методу преобразования тепловой энергии в электрическую: Тезисы доклада. Обнинск, 1979. С. 96.

### **Energy-Mass and Thermoelectric Characteristics of the Current Convertor, Made on the Devices of Plasma Electric Power Industry**

**E. V. Onufrieva<sup>a</sup>, \* and V. V. Onufriev<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

*\*e-mail: onufryev@bmstu.ru*

In space power propulsion systems (SPPS) based on a low-voltage power source and high-voltage electric rocket thrusters, a current conversion system (CCS) is required. As one of the elements of promising high-temperature CCS, high-temperature plasma thermal emission valves (HPTV) of plasma electric power industry are considered – grid key elements (GKE) and high-voltage plasma thermal emission diodes (HVPTD). In the work, the modeling of the energy-mass characteristics of the CCS built on the GKE and HVPTD using heat pipes (HP) for cooling is carried out, the temperature conditions in which the minimum specific mass of the current converter is achieved are determined. The specific gravity values are determined. The results of the work can be used in the development of new high-temperature CCS space power propulsion systems for electrical power from tens to thousands of kilowatts.

*Keywords:* current conversion system, space power propulsion system, valve, grid key element, high-voltage plasma thermionic diode, electric power, temperature

УДК 539.3

**НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕПЛООВОГО УДАРА ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕПЛООБМЕНА**© 2023 г. Э. М. Карташов<sup>1, 2, \*</sup>, С. С. Крылов<sup>2, \*\*</sup><sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“МИРЭА – Российский технологический университет”, Москва, Россия<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)”,  
Москва, Россия

\*e-mail: professor.kartashov@gmail.com

\*\*e-mail: compgra@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Статья посвящена практически новым модельным представлениям локально-неравновесного теплопереноса в терминах нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа (волновых уравнений), а также динамическим моделям теплового удара на основе волновых уравнений. Приведенные в статье результаты практически открывают самостоятельное научное направление в аналитической теплофизике и в теории теплового удара, а именно: исследование термической реакции твердых тел канонической формы конечных размеров на интенсивный нагрев и охлаждение в условиях локально-неравновесного процесса теплообмена. Указанное направление потребовало развитие специального аппарата операционного исчисления ввиду появления в аналитических решениях модельных задач в пространстве изображений по Лапласу нестандартных операционных изображений, оригиналы которых неизвестны и отсутствуют в справочниках по операционному исчислению. Приведенные изображения являются характерными для операционных решений широкого класса обобщенных краевых задач для уравнений гиперболического типа в теории теплопроводности, диффузии, гидродинамики, колебаний, распространении электричества, термомеханики и других направлений науки и техники. Приведены иллюстративные примеры аналитических решений конкретных модельных задач локально-неравновесного теплообмена и теории теплового удара для конечной области как в классической, так и в обобщенной постановках (последнее с учетом конечной скорости распространения теплоты). Выявлены характерные особенности функциональных конструкций в качестве аналитических решений рассмотренных математических моделей.

*Ключевые слова:* локально-неравновесный теплообмен, тепловой удар, новый аппарат операционного исчисления, аналитические решения

DOI: 10.31857/S0002331023060031, EDN: PWWXZS

**ВВЕДЕНИЕ**

Классические модели аналитической теории переноса теплоты обязаны своим появлением линейному градиентному соотношению Фурье

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t),$$

с которым он выступил в докладе “О распространении тепла в твердом теле” в Париже в 1807 году. В законченном виде Фурье представил свою теорию в 1822 г. в работе “Аналитическая теория тепла”, которую Кельвин назвал “великой математической моделью” [1]. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел

$$c_p \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{q}(M, t) + F(M, t).$$

Закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c_p} F(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальным и граничными условиями

$$T(M, t)_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения  $M(x, y, z)$ ;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ;  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ). Входящие в (1)–(3) параметры – теплофизические характеристики среды, постоянные величины в интервале температур, не выходящих за точки перехода [2]. В литературе неоднократно отмечались некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)–(3): отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье в виду неучета механизма переноса теплоты элементарными частицами вещества (электронами, молекулами, ионными решетками) и времени релаксации, связанного со временем свободного пробега микрочастиц и, как следствие, вытекающий из аналитических решений моделей (1)–(3), вывод о бесконечной скорости распространения теплоты; сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области  $x > 0, t > 0$  при  $x \rightarrow 0 (t \rightarrow 0)$ . Тем не менее указанные обстоятельства не ограничивают область применения математических моделей (1)–(3), охватывая все новые содержательные объекты и все большее число самых разнообразных приложений [3–6].

В последние годы усилился интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, что обусловлено широкими возможностями их практического применения [7]: создание новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами (бинарные многокомпонентные металлические сплавы, полимерные материалы, металлические полупроводниковые стекла, наножидкости, коллоидные био- и криосистемы); оптимизация режимов лазерной обработки изделий; режимы интенсивного нагрева и охлаждения компонентов нанoeлектроники и нанотехники; нагрев, плавление и абляция вещества при воздействии сверхкоротких импульсов и др. Интенсификация тепловых процессов в этих условиях потребовала для их описания уточнения гипотезы Фурье, что и было сделано в рамках учета локальной неравновесности, заложенной в соотношении

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

и учитывающей конечную скорость распространения теплоты. Здесь время  $\tau_r$  – мера инерции теплового потока, связанная со скоростью распространения теплоты соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$ . Для металлов  $\tau_r \approx 10^{-14} - 10^{-11}$  с; для аморфных тел типа неорганического стекла и полимеров, имеющих сложную структуру,  $\tau_r \approx 10^{-11} - 10^{-5}$  с (для не-

органического стекла  $\tau_r \approx 10^{-7}$  с, для органического стекла  $\tau_r \approx 10^{-11}$  с), для азота  $\tau_r \approx 10^{-9}$  с, опытное измерение  $\tau_r$  во многих случаях не представляется возможным. Скорость распространения теплоты для стали  $v_T = 1800$  м/с (скорость распространения звука  $v_p = 6100$  м/с), для алюминия  $v_T = 2930$  м/с ( $v_p = 6260$  м/с), для неорганического стекла  $v_T = 1800$  м/с (скорость распространения звука  $v_p = 6100$  м/с), для алюминия  $v_T = 2930$  м/с ( $v_p = 6260$  м/с), для неорганического стекла  $v_T = 2 \times 10^6$  м/с ( $v_p = 4.5 \times 10^3$  м/с), для азота ( $v_T = 150$  м/с) и для газов в условиях разряженного сверхзвукового потока влияние конечной скорости ораспространения теплоты на теплообмен становится заметным. Подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например, в жидком гелии  $v_T = 19$  м/с при  $T = 1.4$  К) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [7]. Соотношение (4) было проверено экспериментально. Так, результаты исследований термических переходных процессов (в рамках гипотезы (4)), приведенные в работах Хервига и Бекерта [8] по зарегистрированному Митра с сотрудниками [9] термическому переходному процессу в ряде твердых тел, подтвердили реальность явления тепловой релаксации. Ю.А. Кирсанов с сотрудниками [10] на стадии переходного процесса теплообмена экспериментально измерили время тепловой релаксации ПММА:  $\tau_r = 2.4$  с, позже величина  $\tau_r$  была уточнена:  $\tau_r = (1.48 \pm 0.15)$  с). На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали Дж. Максвелл в теории газодинамики [11], А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [12], Каттанео [13] и Вернотт [14] в теории теплопроводности. Уравнение энергии и соотношение (4) приводят к уравнению переноса теплоты гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right] \quad (5)$$

и соответствующим краевым задачам нестационарной теплопроводности обобщенного типа. При математической постановке указанных задач следует использовать соответствующие локально-неравновесные граничные условия. Использование стандартных локально-равновесных граничных условий (3) (что довольно часто наблюдается в публикациях по аналитической теплофизике) может привести к физически противоречивым результатам (например, к появлению отрицательных решений для температуры [3]). Эти вопросы детально рассмотрены одним из авторов в [15]. Сформулированы корректные обобщенные граничные условия на основе соотношения (4) в интегральной и эквивалентной дифференциальной формах. Так, в первом случае для условия теплового нагрева (охлаждения) граничное условие второго рода имеет вид:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \pm (q_0/\lambda) S_+(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

В случае нагрева (охлаждения) средой следует записать:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \{ T(M, t) \Big|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)] \}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Здесь

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что гиперболическое уравнение (5) для описания локально-неравновесных процессов тепломассопереноса было получено впервые в работах И.А. Фока [16] и Б.И. Давыдова [17] на основании предположения о конечном значении скорости частиц, переносящих энергию или массу. Уравнение (5) также получил А.С. Предводителев [18], исходя из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представлений Римана, то есть при полном отказе от релаксационной формулы (4).

### НОВЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Обобщенные задачи переноса для уравнения (5) значительно отличаются от классических (1)–(3), являясь более сложными при нахождении аналитических решений. Специфика указанных задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудностях их решений в аналитически замкнутом виде. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений и, в основном, для частично ограниченных областей. Основной метод решения указанных задач – операционный, но здесь возникают две основные проблемы. Если нахождение операционного решения задачи не составляет особого труда, то переход к оригиналам затрудняется ввиду их отсутствия в таблицах по операционному исчислению. Формальное применение теорем операционного исчисления при нахождении оригиналов может привести к ошибочным результатам, так как искомые оригиналы должны содержать ступенчатую функцию Хевисайда [1], появление которой формально не всегда удается реализовать. Естественный выход из этой ситуации – развитие искусственных приемов или сложный переход к оригиналам с помощью контурного интегрирования изображений [1–19]. Математические модели для уравнения (5) в области  $x \in [0, l], t \geq 0$  с обобщенными граничными условиями практически не располагают в полной мере необходимым аппаратом операционного исчисления, что существенно затрудняет нахождение их точных аналитических решений. Рассмотрим ряд операционных соотношений, характерных для указанного случая. Найдем оригинал изображения

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \tag{9}$$

Воспользуемся справочной формулой [20]

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p^{k-n-1} = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m p^{-(m+1)} \leftarrow \\ &\leftarrow (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m \frac{1}{m!} t^m = (-1)^n L_n(t), \end{aligned}$$

где  $L_n(t) = \frac{1}{n!} \exp(t) \frac{d^n}{dt^n} [t^n \exp(-t)]$  – полином Лагерра [20]. Используя далее последовательно операционные теоремы  $(1/k)\bar{f}(p/k) \leftarrow f(kt)$ ,  $\bar{f}(p-k) \leftarrow \exp(kt)f(t)$ ,  $\bar{f}(p) \exp(-pt_0) \leftarrow f(t-t_0)\eta(t-t_0)$  находим искомый оригинал:

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta}t\right) L_n\left(2\frac{H}{\beta}t\right) = f(t). \tag{10}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать:

$$\frac{(H + \beta p)^n}{(H - \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{H}{\beta} t\right) L_n^*\left(2 \frac{H}{\beta} t\right), \quad (11)$$

где  $L_n^*(t) = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{1}{m!} t^m$  – полином Карташова. По теореме смещения находим:

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \exp(-\gamma \beta p) \leftarrow f(t - \gamma \beta) \eta(t - \gamma \beta), \quad (12)$$

где  $f(t)$  – функция (10);  $\eta(z)$  – функция Хевисайда.

Найдем оригинал изображения  $\bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2})$ , если  $\bar{f}(p) \leftarrow f(t)$ . Используем для этих целей теорему Эфроса:

$$\bar{f}[\bar{\varphi}_1(p)] \bar{\varphi}_2(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau, \quad \Psi(\tau, t) \rightarrow \exp[-\tau \bar{\varphi}_1(p)] \bar{\varphi}_2(p). \quad (13)$$

Находим:

$$\bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \leftarrow \exp(-at) \left[ f(t) + b \int_0^t y f(y) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right]. \quad (14)$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} & \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \exp\left[-\gamma \sqrt{(p+a)^2 - b^2}\right] \leftarrow \\ & \leftarrow \exp(-at) \left[ f(t - \gamma) + b \int_0^t y f(y - \gamma) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \exp\left[-\gamma \sqrt{(p+a)^2 - b^2}\right] \leftarrow \\ & \leftarrow \int_{\gamma}^t f(t - \gamma) \left[ \exp(-a\tau) + b\tau \int_{\tau}^t \exp(-ay) \frac{I_1(b\sqrt{y^2 - \tau^2})}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} dy \right] d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть теперь  $\bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$  или  $\bar{s}(p) = \beta \sqrt{\left(p + \frac{1}{2\beta^2}\right) - \frac{1}{4\beta^4}}$ .

Формулы (10), (14), (15) дают следующие оригиналы:

$$\frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \leftarrow \exp\left(-\frac{t}{2\beta^2}\right) \left[ f(t) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t f(\sqrt{t^2 - y^2}) I_1\left(\frac{y}{2\beta^2}\right) dy \right],$$

где

$$f(t) = (-1)^n \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(2 \frac{H}{\beta} t\right). \quad (17)$$

$$\frac{1}{p} \frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \leftarrow \int_0^t \left[ f(\tau) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^{\tau} f(\sqrt{\tau^2 - y^2}) I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} y\right) dy \right] \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) d\tau, \quad (18)$$

где  $f(t)$  – функция (17).

$$\frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \exp[-\gamma \bar{s}(p)] \leftarrow \left[ f(t - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t f(\tau - \gamma\beta) \frac{\tau I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \right] \exp\left(-\frac{t}{2\beta^2}\right), \quad (19)$$

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(2\frac{H}{\beta} t\right) \eta(t); \quad (20)$$

$$\frac{1}{p} \frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \exp[-\gamma \bar{s}(p)] \leftarrow \int_0^t \left[ f(\tau - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^\tau f(\tau' - \gamma\beta) \frac{\tau' I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau^2 - \tau'^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \tau'^2}} d\tau' \right] \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) d\tau, \quad (21)$$

где  $f(t)$  – функция (20). Выражение (16) включает важное в практическом плане соотношение

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \exp(-\gamma \sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \leftarrow \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) \varphi(\gamma, \tau) d\tau \\ & \varphi(\gamma, t) = f^*(t - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t y f^*(y - \gamma\beta) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - y^2}\right)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy, \\ & f^*(t) = \frac{1}{\beta} f(t/\beta) \eta(t). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Приведенные операционные соотношения закрывают проблему нахождения аналитических решений уравнения (5) с обобщенными граничными условиями. Однако указанная проблема имеет интересное продолжение, состоящее в возможности представления одного и того же аналитического решения в виде различных функциональных конструкций. Существенно при этом, что некоторая громоздкость аналитической записи решений может быть упрощена с использованием специальных преобразований, приводящих к новым аналитическим решениям, неизвестным ранее. Покажем это на примере первой краевой задачи для уравнения (5):

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} & W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \\ & W(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 1, \quad \tau > 0, \quad |W(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Пусть  $\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W(\xi, \tau) d\tau$  – изображение Лапласа функции  $W(\xi, \tau)$ . Найдем операционное решение задачи в виде

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{1}{p} \exp(-\xi \sqrt{\beta^2 p^2 + p}). \quad (25)$$

Оригинал изображения (25) имеет вид

$$W(\xi, \tau) = \left[ \exp\left(-\frac{\xi}{2\beta}\right) + \frac{\xi}{2\beta} \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} dx \right] \eta(\tau - \xi\beta) = \quad (26)$$

$$= \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta).$$

Оригинал изображения (25) можно записать также через интеграл Римана-Меллина

$$\frac{1}{p} \exp\left[-\beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp\left[p\tau - \beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] dp = \Psi_2(\xi, \tau). \quad (27)$$

Подинтегральная функция в (27) удовлетворяет условиям леммы Жордано [2], имеет две точки ветвления. Вычисляя контурный интеграл (27), находим:

$$\Psi_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin\xi\beta\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}}{\rho} d\rho. \quad (28)$$

Теперь покажем, что аналитические решения первой краевой задачи в виде  $W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta)$  и  $W(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta)$  эквивалентны, то есть  $\Psi_1(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau)$ . Имеем:

$$\Psi_1(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2 - \xi^2}\right) dx \right].$$

Продифференцируем обе части по  $\tau$ :

$$[\Psi_1]_{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\tau^2}{\beta^2} - \xi^2}\right) \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) J_0\left(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{(\beta\xi)^2 - \tau^2}\right) \right].$$

Воспользуемся далее интегралом (достаточно редким)

$$\int_0^a \frac{\exp(-py)}{\sqrt{ay - y^2}} \cos c\sqrt{ay - y^2} dy = \pi \exp\left(-\frac{ap}{2}\right) J_0\left(\frac{a}{2}\sqrt{c^2 - p^2}\right).$$

Находим:

$$[W_1(\xi, \tau)]_{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{\exp(-\rho\tau)}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}} \cos\left(\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}\right) d\rho \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \sin\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)} d\rho.$$

Проинтегрируем по  $\tau$ :

$$\Psi_1(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}}{\rho} d\rho + C.$$

Так как по условию задачи  $\Psi_1(0, \tau) = 1$ , то  $C = 1$  и окончательно получаем:

$$\Psi_1(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \beta \xi \sqrt{\rho \left( \frac{1}{\beta^2} - \rho \right)}}{\rho} d\rho = \Psi_2(\xi, \tau).$$

Таким образом показано, что

$$W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta) = \Psi_2(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta). \quad (29)$$

Приведенные рассуждения могут быть распространены также на вторую и третью краевые задачи с обобщенными граничными условиями, что подчеркивает особенность гиперболических моделей переноса. Следует отметить, что для областей канонического типа (бесконечная пластина, цилиндр сплошной или полый, шар сплошной или полый) точные аналитические решения гиперболических моделей переноса с обобщенными граничными условиями не получены до сих пор, и данная проблема по существу остается открытой. Более удовлетворительная ситуация имеется для частично ограниченных областей (во всех трех системах координат), однако и эта область аналитической теплофизики находится лишь в самом начале своего развития. Сказанное в равной степени относится и к теории теплового удара в терминах динамической термоупругости. Основные результаты исследований этой проблемы ряда авторов [21] опять таки касаются частично ограниченных областей (упругое полупространство, ограниченное плоской поверхностью; пространство с внутренней цилиндрической или сферической полостью). Практически отсутствуют исследования термической реакции на тепловой удар конечных тел канонической формы в условиях локально-неравновесного теплообмена. Одна из причин последнего — недостаточное развитие соответствующего аппарата операционного исчисления.

Настоящая публикация как раз и посвящена указанной проблеме и практически открывает самостоятельное научное направление в аналитической теплофизике и в теории теплового удара, а именно: исследование термической реакции твердых тел канонической формы в условиях локально-неравновесных процессов теплообмена.

### МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕПЛООВОГО УДАРА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Проблема теплового удара — одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классической феноменологии Фурье и (частично) Максвелла—Каттанео—Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах [21]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти [21]; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами ее состояния и скоростью их изменения во времени [22]. Интенсификация тепловых воздействий на элементы конструкций, создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных импульсных потоков энергии, стимулирует разработку соответствующих модельных представлений для описания термической реакции конструкционных материалов, применяемых на практике. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в книге [21].

Определяющие соотношения динамической термоупругости имеют следующий вид.

Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ),  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть  $\sigma_{ij}(M, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ,  $U_i(M, t)$  – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho \dot{U}_i(M, t), \quad (30)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)] \quad (31)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad (32)$$

$$M > D, t > 0,$$

где  $\rho$  – плотность;  $\mu = G$ ,  $G$  – модуль сдвига;  $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$  – изотермические коэффициенты Ламе;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, при этом  $2G(1 + \nu) = E$ ,  $E$  – модуль Юнга;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\bar{\varepsilon}(M, t) = U_{ii}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$  – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$  ( $n = x, y, z$ ) соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E}\bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (33)$$

Рассмотрим далее в качестве области  $D$  однородный изотропный слой конечной толщины  $l$  при свободных от напряжений границах, занимающий в системе прямоугольных декартовых координат  $(x, y, z)$  область  $0 \leq z \leq l$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ . Поверхности слоя подвергаются различному (интенсивному) тепловому воздействию (температурному, тепловому, воздействию средой) и, таким образом, речь идет о решении ряда одномерных задач об определении нестационарного температурного поля и вызываемых ими динамических температурных напряжений в слое  $0 \leq z \leq l$  при  $t \leq 0$ . В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0$ ;  $U_z = U_z(z, t)$ ;  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$  ( $i = j$ ); температурная функция  $T = T(z, t)$  и уравнения (30)–(32) при отсутствии объемных сил  $F_i(M, t)$  приводят к следующему соотношению

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < z < l, \quad t > 0, \quad (34)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (35)$$

скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (32)–(33) имеют вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}, \quad (36)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z, t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z, t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T(z, t) - T_0]. \quad (37)$$

Исходные модели сформулируем в безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p l}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p}, \quad v_T = \sqrt{a/\tau_r}, \quad W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}, \quad S_T = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{1-2\nu}.$$

Рассмотрим следующие модели теплового удара – интенсивный нагрев при  $T_c > T_0$  или интенсивное охлаждение при  $T_c < T_0$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (38)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (39)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (41)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = Bi^* [W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1] \\ W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0, \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} W_2(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 1 \\ W_2(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0, \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} \\ \frac{\partial W_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0. \quad (45)$$

Остановимся на граничном условии (43): через поверхность  $\xi = 0$  осуществляется теплообмен с внешней средой. Согласно (7) для уравнений гиперболического типа это условие в системе координат  $(\xi, \tau)$  должно иметь вид

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_1(\xi \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = Bi^* [W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1], \quad \tau > 0, \quad (46)$$

а в пространстве изображений по Лапласу

$$\frac{d\overline{W}(\xi, p)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = (Bi^* + \beta^2 Bi^* p) \left[ \overline{W}_1(\xi, p) \Big|_{\xi=0} - \frac{1}{p} \right].$$

Оценим  $\beta^2 Bi^*$ . Например, для случая кипящая вода-металлическая стенка средние значения  $\alpha = 4700$  Вт/м<sup>2</sup>К ( $\alpha$  – коэффициент теплообмена),  $v_p = 5000$  м/с,  $\lambda = 144 \times 10^{-5}$  кал/смК. Неравенство  $Bi^* \beta^2 \ll 1$  сводится к эквивалентному  $\tau_r \ll 1/h v_p$ ,

что дает  $\tau_r \ll 10^{-8}$  (с); последнее справедливо, учитывая приведенные выше цифры. Таким образом, операционная форма граничного условия в (43) будет  $\left[ d\bar{W}(\xi, p)/d\xi \right]_{\xi=0} = Bi^* \left[ \bar{W}(\xi, p)|_{\xi=0} - 1/p \right]$ . Впрочем, случай (46) будет рассмотрен ниже. Операционная форма аналитических решений задач (38)–(45) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1(\xi, p) &= \frac{Bi^*}{p} \frac{sh[(\xi_0 - \xi)\bar{s}(p)]}{[Bi^* - \bar{s}(p)]sh\xi_0\bar{s}(p)}; \\ \bar{W}_2(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{sh[(\xi_0 - \xi)\bar{s}(p)]}{sh\xi_0\bar{s}(p)} \\ \bar{W}_3(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{ch[(\xi - \xi_0)\bar{s}(p)]}{ch\xi_0\bar{s}(p)} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = p \frac{sh\xi p}{sh\xi_0 p} \int_0^{\xi} \bar{W}_i(\xi', p) sh[(\xi' - \xi)p] d\xi' + p \int_0^{\xi} \bar{W}_i(\xi', p) sh[(\xi - \xi')p] d\xi'. \quad (48)$$

Здесь:  $\bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$ ;  $i = 1, 2, 3$ .

Соотношения (47)–(48), по существу, новые (операционные) аналитические решения гиперболических моделей (38)–(45). Переход к оригиналам производится с помощью развитого выше аппарата операционного исчисления. Рассмотрим подробно случай  $i = 1$  (граничные условия (43)). Для остальных случаев выпишем готовые решения в оригиналах для напряжений.

Соотношения (47)–(48) для  $i = 1$  приводят к выражению вида:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= \frac{Bi^*}{(1 - \beta^2)p - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Bi^* - \bar{s}(p)]^k}{[Bi^* + \bar{s}(p)]^{k+1}} \times \left\{ \left[ \exp(-\gamma_{2k}(\xi)\bar{s}) - \exp(-\gamma_{1k}(\xi)\bar{s}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \exp(-\gamma_{3k}(\xi_0)\bar{s}) - \exp(-\gamma_{4k}(\xi_0)\bar{s}) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \exp(-\omega_{1n}(\xi)p) - \exp(-\omega_{2n}(\xi)p) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1k}(\xi) &= 2k\xi_0 + \xi; \quad \gamma_{3k}(\xi_0) = 2k\xi_0; \quad \omega_{1n}(\xi) = 2(n+1)\xi_0 - \xi; \\ \gamma_{2k}(\xi) &= 2(k+1)\xi_0 - \xi; \quad \gamma_{4k}(\xi_0) = 2(k+1); \quad \omega_{2n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Переходя к оригиналам, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta^2} \left( \tau - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} u \right) \right] \left\{ \left[ \varphi(\gamma_{2k}(\xi), \tau - u) - \varphi(\gamma_{1k}(\xi), \tau - u) \right] - \left[ \varphi(\gamma_{3k}(\xi_0), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tau - u) - \varphi(\gamma_{4k}(\xi_0), \tau - u) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{\omega_{1n}(\xi)}{1 - \beta^2} \right) \eta(u - \omega_{1n}) - \exp \left( -\frac{\omega_{2n}(\xi)}{1 - \beta^2} \right) \eta(u - \omega_{2n}) \right] du \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_{ik}, \tau) &= f^*(\tau - \gamma_{ik}\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^{\tau} f^*(\tau' - \gamma_{ik}\beta) \frac{\tau' I_1 \left( \frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau^2 - \tau'^2} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \tau'^2}} d\tau'; \\ f^*(\tau) &= (-1)^k \frac{Bi^*}{\beta} \exp \left( -\frac{Bi^*}{\beta} \tau \right) L_k \left( \frac{2Bi^*}{\beta} \tau \right) \eta(\tau). \end{aligned} \quad (52)$$

Функция  $\overline{W}_2(\xi, p)$  в соотношении (48):

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle [\Psi(\gamma_{2k}(\xi), \tau) - \Psi(\gamma_{1k}(\xi), \tau)] - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \times \times [\Psi(\gamma_{3k}(\xi_0), \tau - \omega_{jn}(\xi))\eta(\tau - \omega_{jn}(\xi)) - \Psi(\gamma_{4k}(\xi_0), \tau - \omega_{jn}(\xi))\eta(\tau - \omega_{jn}(\xi))] \rangle. \quad (53)$$

Здесь:

$$\Psi(\gamma_{ik}, \tau) = \left\langle \exp\left(\frac{\tau - \gamma_{ik}}{1 - \beta^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma_{ik}(\beta - 1)}{2\beta(\beta + 1)}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \exp\left(\frac{\tau}{1 - \beta^2}\right) \int_{\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}}^{\frac{\tau}{2\beta^2}} \exp\left[-x \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right] \times \times \frac{I_1\left(\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}} dx \right\rangle \eta(\tau - \gamma_{ik}\beta). \quad (54)$$

Функция  $\overline{W}_3(\xi, p)$  в соотношении (48):

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \Psi(\gamma_{1k}, \tau - \omega_{jn}) \right] - - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=3}^4 (-1)^{j-3} \exp\left(\frac{\tau - \omega_{jn}}{1 - \beta^2}\right) \eta(\tau - \omega_{jn}) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\Psi(\gamma_{2k}, \tau) + \Psi(\gamma_{3k}, \tau)]. \quad (55)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \gamma_{1k}(\xi_0) &= (2k + 1)\xi_0; \omega_{1n}(\xi) = (2n + 1)\xi_0 - \xi; \\ \gamma_{2k}(\xi) &= 2(k + 1)\xi_0 - \xi; \omega_{2n}(\xi) = (2n + 1)\xi_0 + \xi; \gamma_{3k}(\xi) = 2k\xi_0 + \xi; \\ \omega_{3n}(\xi) &= 2(n + 1)\xi_0 - \xi; \omega_{4n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi; \Psi(\gamma_{ik}, \tau) - \text{функция (54)}. \end{aligned}$$

Следует подчеркнуть, что термомеханические задачи с обобщенными граничными условиями (6)–(7) – открытая проблема теории теплового удара. Отсутствуют даже единичные публикации, и до сих пор неизвестны функциональные конструкции в качестве аналитических решений этого класса задач. Рассмотрим одну из таких задач (38)–(42) с граничными условиями вида

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^{\tau} \frac{\partial W(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = Bi^* [W(\xi, \tau)|_{\xi=0} - 1] \tau > 0, \quad (56)$$

$$W(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0. \quad (57)$$

Для нахождения аналитического решения обобщенной задачи (38)–(42), (56)–(57) нам понадобятся новые операционные соотношения:

$$\frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\tau'}{\beta} \sqrt{\frac{p}{p + 1/\beta^2}}\right) \leftarrow 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{1}{\rho} \exp(-\rho\tau) \sin \frac{\tau'}{\beta} \sqrt{\frac{\rho}{1/\beta^2 - \rho}} d\rho = \Psi_1(\tau, \tau'), \quad (58)$$

$$\left. \frac{Bi^* \left[ Bi^* - \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^k}{p \left[ Bi^* + \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^{k+1}} \leftarrow \int_0^\infty f_k(\tau') \Psi_1(\tau, \tau') d\tau' \right\} \quad (59)$$

$$f_k(\tau) = (-1)^k Bi^* \exp(-Bi^* \tau) L_k(2Bi^* \tau); \quad \bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$$

$$\exp[-\gamma_{ik}(\xi) \bar{s}(p)] \leftarrow \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho \tau) \sin \gamma_{ik} \beta \sqrt{\rho \left( \frac{1}{\beta^2} - \rho \right)} d\rho \eta(\tau - \gamma_{ik} \beta) \right] =$$

$$= \Psi_{ik}(\xi, \tau) \eta[\tau - \gamma_{ik}(\xi) \beta] \quad (i = 1, 2). \quad (60)$$

Вначале запишем решение тепловой задачи (41)–(42), (56)–(57) как новый результат аналитической теплофизики.

Операционное решение:

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{Bi^*}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[ Bi^* - \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^k}{\left[ Bi^* + \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^{k+1}} [\exp(-\gamma_{1k}(\xi) \bar{s}(p)) - \exp(-\gamma_{2k}(\xi) \bar{s}(p))],$$

$$\gamma_{1k}(\xi) = 2k\xi_0 + \xi; \quad \gamma_{2k}(\xi) = 2(k+1)\xi_0 - \xi.$$

Оригинал решения:

$$W(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_{1k}(\xi)}^{\tau} \left[ \int_0^\infty f_k(\tau') \Psi_1(\tau - u, \tau') d\tau' \right] \Psi_{1k}(\xi, u) du -$$

$$- \int_{\gamma_{2k}(\xi)}^{\tau} \left[ \int_0^\infty f_k(\tau') \Psi_1(\tau - u, \tau') d\tau' \right] \Psi_{2k}(\xi, u) du. \quad (61)$$

Операционное решение для напряжения:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{Bi^* / (1 - \beta^2)} = \frac{1}{p - 1 / (1 - \beta^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( Bi^* - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^k}{\left( Bi^* + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^{k+1}} [\exp(-\gamma_{3k}(\xi_0) \bar{s}(p)) -$$

$$- \exp(-\gamma_{4k}(\xi_0) \bar{s}(p))] \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(-\omega_{1n}(\xi) p) - \exp(-\omega_{2n}(\xi) p)] -$$

$$- \frac{1}{p - 1 / (1 - \beta^2)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left( Bi^* - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^k}{\left( Bi^* + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^{k+1}} [\exp(-\gamma_{1k}(\xi) \bar{s}(p)) - \exp(-\gamma_{2k}(\xi) \bar{s}(p))] \quad (62)$$

$$\gamma_{3k}(\xi_0) = 2k\xi_0; \quad \gamma_{4k}(\xi_0) = 2(k+1)\xi_0; \quad \omega_{1n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi; \quad \omega_{2n}(\xi) = 2(n+1)\xi_0 - \xi.$$

Оригинал решения:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{Bi^*/(1-\beta^2)} = & \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_{3k}(\xi_0)\beta}^{\tau} \varphi(\gamma_{3k}(\xi_0), u) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{1n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{1n}) - \right. \\ & \left. - \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{2n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{2n}) \right] du - \int_{\gamma_{4k}(\xi_0)\beta}^{\tau} \varphi(\gamma_{4k}(\xi_0), u) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{1n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \eta(\tau-u-\omega_{1n}) - \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{2n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{2n}) \right] du - \\ & \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_{\gamma_{1k}(\xi)\beta}^{\tau} \Psi_2^*(\gamma_{1k}(\xi), y) f_2(\tau-y) dy - \int_{\gamma_{2k}(\xi)\beta}^{\tau} \Psi_2^*(\gamma_{2k}(\xi), y) f_2(\tau-y) dy \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь:

$$\varphi(\gamma_{ik}, \tau) = f_2(\tau - \gamma_{ik}\beta) \exp\left(-\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \int_{\gamma_{ik}\beta}^{\tau} f_2(\tau - \tau') \exp\left(-\frac{\tau'}{2\beta^2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - (\gamma_{ik}\beta)^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - (\gamma_{ik}\beta)^2}} d\tau';$$

$$f_2(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(\tau') \Psi_1^*(\tau, \tau') d\tau'; \quad f_1(\tau) = -(1)^k \exp(-Bi^* \tau) L_k(2Bi^* \tau);$$

$$\Psi_1^*(\tau, \tau') = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \sin \frac{\tau'}{\beta} \frac{\rho}{\sqrt{1/\beta^2 - \rho}} d\rho;$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^*(\gamma_{ik}, \tau) = & \exp\left(\frac{\tau - \gamma_{ik}}{1 - \beta^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma_{ik}(\beta - 1)}{2\beta(\beta + 1)}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \exp\left(\frac{\tau}{1 - \beta^2}\right) \times \\ & \times \int_{\gamma_{ik}/2\beta}^{\tau/2\beta^2} \exp\left(-x \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right) \frac{I_1\left(\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}} dx. \end{aligned}$$

Профиль напряжения (53) в фиксированном сечении  $\xi = 0.5$  при  $\xi_0 = 1$  для  $\beta = 2.157$  (что соответствует слою из алюминия, для которого  $v_p = 6320$  м/с,  $v_T = 2930$  м/с) показан графиком на рис. 1. Принципиальной особенностью приведенного на рисунке графика напряжения для мгновенного теплового удара является крутой передний фронт термоупругой волны в отличие от плавного уменьшения в известных ранее работах [21], обусловленный введением бесконечной скорости распространения теплоты. К этому следует добавить, что решение (53) ( $1/Bi^* \rightarrow 0$ ) описывает падающие и многократно отраженные от обеих границ слоя плоские температурные волны. Сумма в решении (как и в других приведенных случаях) – математическое следствие принципа суперпозиции, который имеет место в силу линейности задачи. На рис. 2 приведена типичная кривая (для данного класса задач) распределения температуры  $W_2(\xi, \tau)$  по текущей толщине стержня в различные моменты времени (при тех же данных, что и на рис. 1). На графике отчетливо проявляется влияние времени на изменение температуры вдоль текущей толщины.

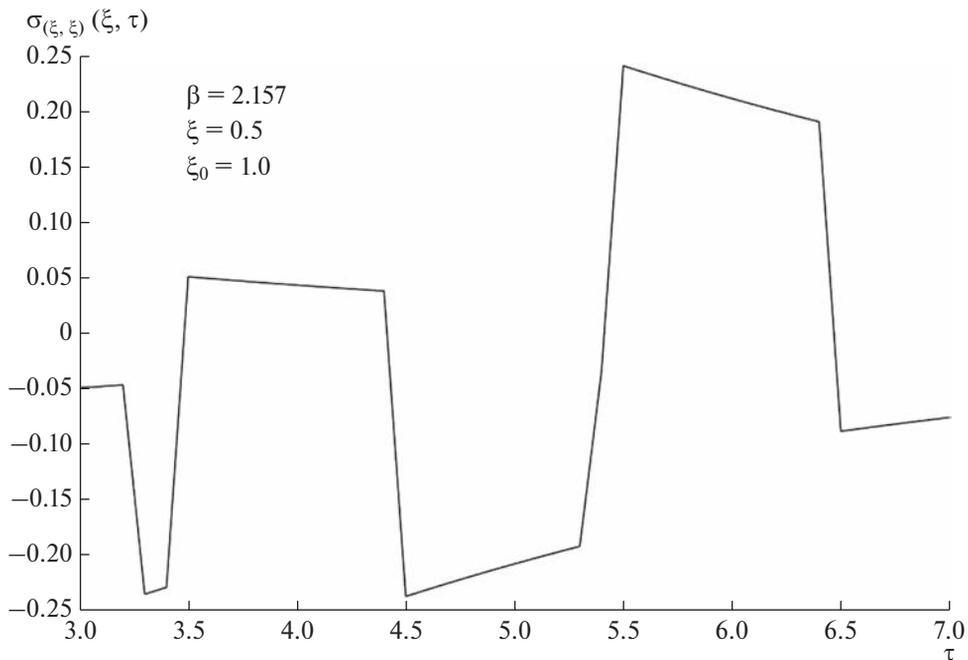


Рис. 1. Температурные напряжения (54) в фиксированном сечении  $\xi = 0.5$  при  $\xi_0 = 1$ ,  $\beta = 2.157$ .

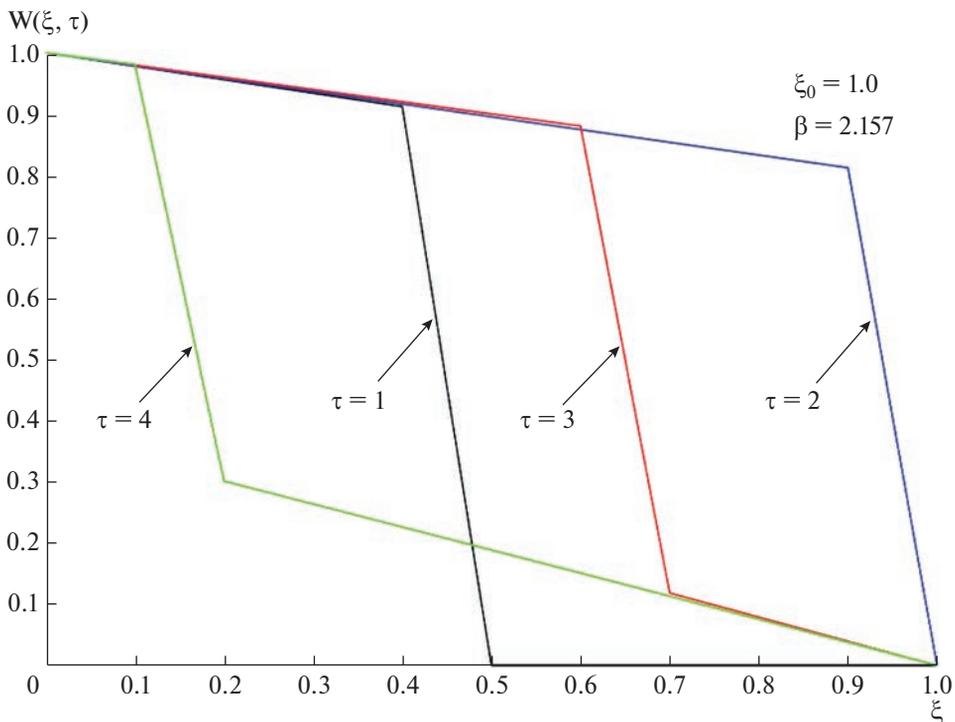


Рис. 2. Распределение температуры  $W_2(\xi, \tau)$  по текущей толщине слоя  $0 < \xi < 1$  в различные моменты времени при  $\beta = 2.157$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены оригиналы нестандартных операционных изображений (по Лапласу), входящие в операционные решения широкого класса задач локально-неравновесных процессов переноса (теплоты, массы, импульса), электрических цепей, гидродинамики, теории колебаний, термомеханики и других областей. Приведены иллюстративные примеры и показана возможность построения аналитических решений математических моделей теории теплового удара в ограниченной области в виде различных функциональных конструкций, для которых доказана эквивалентность. Представленные аналитические решения в областях канонического типа являются новыми в аналитической теплофизике и термомеханике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена // Российский технологический журнал. 2022. 10(1). С. 7–18.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М. Высшая школа. 2001. 540 с.
3. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS. 2012. 1080 с.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. 600 с.
5. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат. 1983. 328 с.
6. *Формалев В.Ф.* Уравнения математической физики. М.: URAA. 2021. 648 с.
7. *Кудинов И.В., Кудинов И.А.* Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физич. журнал. 2015. 88(2), 393–408.
8. *Herwig H., Beckert K.* Experimental evidence about controversy concerning Fourier or non-Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneous inner structure // Heat and Mass Transfer. 2000. V. 36. P. 387.
9. *Mitra K., Kumar S., Vedavars A., Mjallemi M.K.* Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat // Heat Transfer, Trans. ASME. V. 117. № 3. P. 568.
10. *Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю.* Об измерении времени тепловой релаксации твердого тела // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 1. С. 113.
11. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. of the Royal Soc. of London. 1967. V. 157. Part. 1. P. 49.
12. *Лыков А.В.* Теплопроводность и диффузия в производстве кожи, заменителей и других материалов. М.: Гизлегпром. 1941. 196 с.
13. *Cattaneo C.* Sulla Condizione de Calore // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell. Universita di Modena. 1948. V. 3. P. 83.
14. *Vernotte P.* Les paradoxes de la theorie continue de l' equation de la chaleur // Compte Rendus. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 246. № 22. P. 3154.
15. *Карташов Э.М.* Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072.
16. *Фок И.А.* Решение задачи теории диффузии методом конечных разностей и приложение его к диффузии света. М.: Труды государственного оптического института. 1926. 4(34). 32 с.
17. *Давыдов Б.И.* Диффузионное уравнение с учетом молекулярной скорости. ДАН СССР. 1935. 2. 474–475.
18. *Предводителев А.С.* Учение о теплоте и римановы многообразия. В кн. Проблемы тепло- и массопереноса. М.: Энергия. 1970. С. 151–192.
19. *Демирчан К.С., Бутырин П.А.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высшая школа. 1983, 335 с.
20. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочные по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1966. 446 с.
21. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS. 2012. 651 с.
22. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит. 2002. 168 с.

## **New Analytical Solutions of Mathematical Models of Heat Shock of Local Non-Equilibrium Heat Transfer**

**E. M. Kartashov<sup>a, b, \*</sup> and S. S. Krylov<sup>b, \*\*</sup>**

<sup>a</sup>*MIREA – Russian Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies  
named after M.V. Lomonosov), Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

*\*e-mail: professor.kartashov@gmail.com*

*\*\*e-mail: compgra@yandex.ru*

The article is devoted to practically new model representations of locally nonequilibrium heat transfer in terms of nonstationary heat conduction for hyperbolic type equations (wave equations), as well as dynamic models of heat shock based on wave equations. The results presented in the article practically open up an independent scientific direction in analytical thermal physics and in the theory of thermal shock, namely: the study of the thermal response of solids of a canonical form of finite sizes to intense heating and cooling under conditions of a locally nonequilibrium heat transfer process. This direction required the development of a special apparatus of operational calculus due to the appearance in analytical solutions of model problems in the image space according to Laplace of non-standard operational images, the originals of which are unknown and are not available in reference books on operational calculus. The presented images are typical for operational solutions of a wide class of generalized boundary value problems for equations of hyperbolic type in the theory of heat conduction, diffusion, hydrodynamics, vibrations, propagation of electricity, thermomechanics and other areas of science and technology. Illustrative examples of analytical solutions of specific model problems of locally nonequilibrium heat transfer and the theory of thermal shock for a finite region are given in both classical and generalized formulations (the latter taking into account the finite rate of heat propagation). The characteristic features of functional structures as analytical solutions of the considered mathematical models are revealed.

*Keywords:* local non-equilibrium heat transfer, heatstroke, new apparatus of operational calculus, analytical solutions

УДК 532.529

## РОСТ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА В ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ (ЭФФЕКТ ЗАПИРАНИЯ ДАВЛЕНИЯ)

© 2023 г. Ю. Б. Зудин<sup>1</sup>, \*, Д. С. Уренов<sup>1</sup><sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение “Национальный исследовательский центр  
”Курчатовский институт”, Москва, Россия

\*e-mail: yzudin@gmail.com

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Рассмотрена задача роста парового пузырька в перегретой жидкости. Выполнен расчет числа Стефана в метастабильной области. В рамках энергетической тепловой схемы исследована асимптотика “теплого взрыва”. Показано, что при числах Стефана, больших единицы, имеет место эффект “запирания давления”. Получено аналитическое решение для закона роста пузырька в жидкости, находящейся при температуре энергетической спинодали. Выполнено численное исследование роста пузырька бутана в околоспинодальной области. Проведено сопоставление результатов решения с экспериментальными результатами по вскипанию капли бутана.

*Ключевые слова:* паровой пузырек, число Стефана, метастабильная область, тепловой взрыв, запирание давления, энергетическая спинодаль, численное исследование

DOI: 10.31857/S0002331023060067, EDN: PSVOFM

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, картина пузырькового кипения на перегретой поверхности имеет сложный многофакторный характер, обусловленный зарождением, ростом и отрывом паровых пузырьков. Для анализа теплогидравлических процессов в пристенном кипящем слое жидкости необходимо знать закон роста пузырька (ЗРП) – функцию  $R(t)$  ЗРП определяется влиянием ряда факторов: процесса испарения жидкости на межфазной поверхности (МФП); инерционной реакцией оттесняемой пузырьком жидкости; видом контакта пузырька с перегретой поверхностью; взаимодействием с соседними растущими пузырьками. Этой проблеме посвящено огромное количество работ, укажем в этой связи обзоры [1, 2]. Необходимым этапом анализа ЗРП является детальное исследование идеализированной задачи о сферически-симметричном росте парового пузырька в бесконечном объеме равномерно перегретой жидкости [3].

### МЕТАСТАБИЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

**Бинодаль.** Первым документально зафиксированным упоминанием о свойствах перегретой жидкости служит выпущенная в 1777 году рекомендация Лондонского королевского общества помещать шарик термометра не в саму кипящую воду, а в ее пары. Век спустя, в 1873 году, Гиббс (Gibbs) [4] впервые провел физический анализ особенностей перегретого состояния жидкости. Интересные сведения о ранних наблюдени-

ях явлений, связанных с перегревом жидкостей, содержит вышедший в 1923 году “Курс физики” Хвольсона.

Зависимость температуры жидкости от давления в состоянии термодинамического равновесия описывается уравнением кривой насыщения (бинодали). Если увеличивать  $T$  при  $p = \text{const}$  или уменьшать  $p$  при  $T = \text{const}$ , то жидкость без фазового превращения переходит в метастабильное состояние, которое является неустойчивым по отношению к внешним возмущениям. Так как вероятность спонтанного испарения сколь-нибудь значительной массы жидкости очень мала, то жидкость в метастабильном состоянии может существовать неограниченно долго. Однако при некотором пороговом уровне флуктуаций параметров (давления, температуры) неустойчивое равновесие нарушается. Тогда в действие вступает положительная обратная связь, и малое возмущение будет усиливаться реакцией самой термодинамической системы.

**Спинодаль.** Нарастание неустойчивости будет выражено тем сильнее, чем глубже будет вторжение жидкости в метастабильную область. Конечным результатом развития возмущения является фазовый переход. Метастабильная область ограничена сверху спинодалью – зависимостью температуры предельного перегрева жидкости от давления. При  $T > T_{\text{spin}}$  термодинамическое состояние жидкости становится абсолютно неустойчивым, и она должна самопроизвольно превращаться в пар.

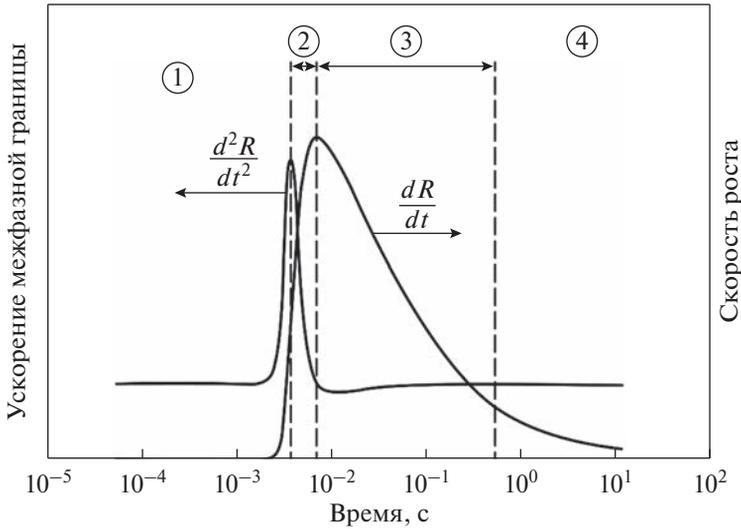
Уравнение спинодали  $T_{\text{spin}}(p)$  следует из уравнения состояния реальных газов. Уже ко времени написания монографии [5] было известно более сотни уравнений состояния, построенных на базе классического уравнения Ван-дер-Ваальса. С тех пор число их неуклонно росло, однако наиболее используемыми в инженерных расчетах оставались классические уравнения (уравнения Дитеричи, Бергло, Редлиха-Квонга), а также их модификации [6]. В частности, из уравнения Соаве-Редлиха-Квонга следует аппроксимация зависимости температуры спинодали от давления

$$\frac{T_{\text{spin}}}{T_{\text{cr}}} = 0.89 + 0.11 \frac{p}{p_{\text{cr}}}. \quad (1)$$

Следуя Гиббсу [4], можно выделить два принципиально различных метода определения спинодали. Теоретический метод заключается в исследовании термодинамической устойчивости жидкости на основе уравнения состояния. Для этого используется математический аппарат, основанный на уравнениях Максвелла (Maxwell) и Гиббса и впоследствии развитый Новиковым [7]. Экспериментальный метод заключается в достижении состояния предельного перегрева жидкости при ударном режиме вскипания [8]. Полученный при этом банк опытных данных показывает, что точки «ударной спинодали» хорошо ложатся на теоретическую кривую вида (1). Такое согласование результатов, полученных совершенно различным образом, подтверждает достоверность теоретических представлений [7] о метастабильной жидкости.

## СТАДИИ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА

**Численные исследования.** Численные исследования задачи сферически-симметричного роста парового пузырька в объеме равномерно перегретой жидкости начались в 70-х годах прошлого века [9, 10] и продолжают по сей день [11, 12]. Изначальным объектом исследования является критический паровой зародыш радиусом  $R_{\text{cr}} = 2\sigma/\Delta p$ , находящийся в неустойчивом термодинамическом равновесии с окружающей жидкостью. Здесь  $\Delta p = p_v - p_\infty$  – перепад давления;  $p_v = p_s(T_\infty)$  давление насыщения при температуре перегретой жидкости. Обе фазы – перегретая жидкость и насыщенный пар – находятся при температуре  $T_\infty$ . Триггером начала роста является скачкообразное увеличение радиуса зародыша, вызывающее его необратимый рост.



**Рис. 1.** Стадии роста парового пузырька согласно численным расчетам [11]. Зависимость ускорения межфазной границы и скорости роста пузырька от времени. 1 – капиллярная стадия; 2 – промежуточная стадия; 3 – инерционная стадия; 4 – тепловая стадия.

ЗРП описывается уравнением Рэля–Ламба (Rayleigh–Lamb) [13]

$$\rho \left( R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = \Delta p - 2\frac{\sigma}{R} - 4\frac{\mu_f}{R},$$

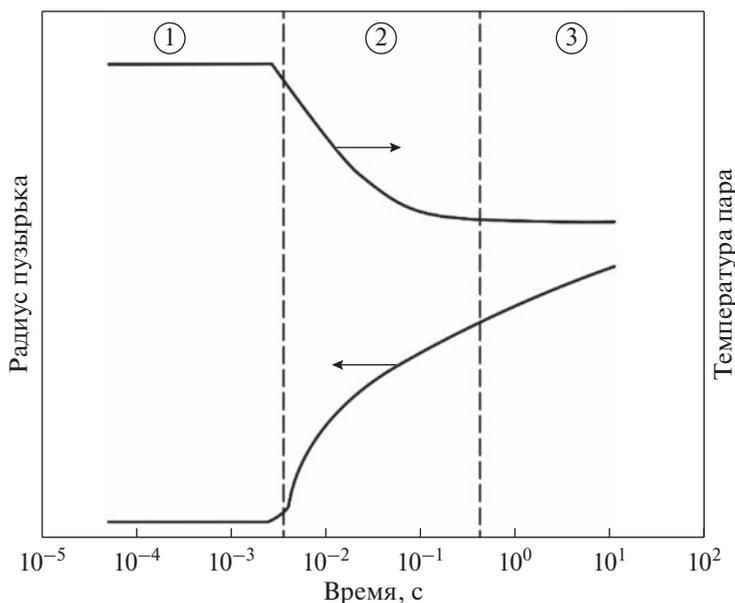
где  $\dot{R} = dR/dt$ ;  $\ddot{R} = d^2R/dt^2$ . Численные и экспериментальные исследования ЗРП при кипении воды и натрия [9–12] показали, что последний член в правой части, ответственный за влияние вязкости жидкости, можно опустить. Тогда мы будем иметь уравнение

$$\rho \left( R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = \Delta p - 2\frac{\sigma}{R}. \quad (2)$$

В работе [11] проведено численное исследование роста парового пузырька в воде, перегретой на 15 К при атмосферном давлении. Начальный радиус пузырька составлял  $R_{cr} = 1$  мкм. Рост пузырька инициировался скачкообразным увеличением его радиуса на  $\Delta R \approx 5 \times 10^{-4} R_{cr}$  за время  $\approx 10^{-3}$  мкс. Как следует из рис. 1, весь период роста можно разбить на три основные стадии: капиллярную, переходную и тепловую.

**Капиллярная стадия** наступает сразу после начала процесса роста и лимитируется силой поверхностного натяжения на МФП (второй член в правой части (2)). Большую часть капиллярной стадии занимает “инкубационный период”: скорость близка к нулю, ускорение мало и практически постоянно. Затем жидкость остается практически неподвижной, а параметры пузырька начинают медленно изменяться: радиус растет, температура пара снижается. При этом вследствие увеличения перепада температур ( $\Delta T = T_\infty - T_v > 0$ ) к МФП за счет теплопроводности жидкости начинает подводиться тепловой поток.

Здесь возникает цепочка положительной тепловой обратной связи: увеличение  $\Delta T \Rightarrow$  ускорение радиального расширения пузырька  $\Rightarrow$  ослабление влияния поверхностного натяжения в уравнении (2)  $\Rightarrow$  снижение  $T_v \Rightarrow$  новое увеличение  $\Delta T$  и т.д.



**Рис. 2.** Стадии роста парового пузырька согласно численным расчетам [11]. Зависимость радиуса пузырька и температуры пара от времени. 1 – капиллярная стадия; 2 – переходная стадия; 3 – тепловая стадия.

Этот эффект заметно проявляется, начиная с  $t \approx 2$  мкс. Как видно из рис. 2, за относительно короткий промежуток времени ( $2 \text{ мкс} < t < 3.6 \text{ мкс}$ ) ускорение  $\ddot{R}$  резко возрастает и при  $t \approx 3.6$  мкс достигает своего пика. Следствием этого является интенсивный рост  $\dot{R}$  и появление в динамике пузырька новых факторов.

**Переходная стадия** включает в себя две стадии – короткую промежуточную и протяженную инерционную. **Промежуточная стадия** характеризуется резким увеличением  $\dot{R}$ , что приводит к взрывообразному росту влияния инерционного члена (первый член в правой части (2)), который становится сравним с капиллярным членом. В конце промежуточной стадии ( $t \approx 6.8$  мкс)  $\ddot{R}$  падает практически до нуля, а  $\dot{R}$  достигает своего максимума. Это приводит к ослаблению тепловой обратной связи. Давление в пузырьке  $p_v$  резко возрастает; как следствие, в условиях  $p_\infty = \text{const}$  возрастает также и  $\Delta p$ . Динамика пузырька определяется главным образом инерционным членом в правой части уравнения (2), которое переходит в классическое уравнение Рэлея

$$\rho \left( R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = \Delta p. \quad (3)$$

Поскольку давление и температура пара связаны условиями бинодали, то  $\Delta T$  при этом снижается, что приводит к вырождению тепловой обратной связи. Итак, инерционная реакция жидкости в результате ведет к снижению  $\dot{R}$ .

**Инерционная стадия** определяется перепадом давлений  $\Delta p$  и описывается уравнением Рэлея (3). Первый член левой части имеет отрицательный знак и отражает эффект замедления роста. Доминирующую роль играет положительный второй член, ответственный за радиальное оттеснение жидкости. При  $t > 100$  мкс оба члена становятся соизмеримыми, хотя второй член остается несколько большим по модулю. Ко времени  $t \approx 500$  мкс инерционный механизм вырождается. Градиент температуры на МФП

монотонно снижается, что приводит к уменьшению подводимого к МФП теплового потока, а следовательно, и скорости роста.

**Тепловая стадия,** контролируемая процессом испарения жидкости на МФП, характеризуется монотонным снижением  $\dot{R}$ . Перепад давлений снижается практически до нуля; роль капиллярных и инерционных эффектов является пренебрежимо малой. ЗРП определяется градиентом температур на МФП, а также эффектом растягивания теплового пограничного слоя на поверхности пузырька. К моменту начала тепловой стадии перепад температур был лишь на 2% ниже начального перегрева жидкости в системе  $T_\infty - T_s(p_0)$ .

**Роль начального возмущения.** Следует подчеркнуть, что инициирование роста путем выведения парового зародыша из состояния термодинамического равновесия представляет собой эмпирический прием. Как показали проведенные в [11] варианты расчеты, усиление и удлинение начального “толчка” приводит к сокращению инкубационного периода  $R \approx \text{const}$ . С помощью эмпирического перебора вариантов были найдены некоторые оптимальные параметры запускающего импульса: скачкообразное увеличение радиуса зародыша на  $\Delta R = 5 \times 10^{-4} R_{\text{cr}}$  за время  $10^{-3}$  мкс. Для импульсов меньшей интенсивности начальная ветвь кривой  $R(t)$  практически переставала меняться. Отметим, что обоснование корректности такого метода нуждается в дополнительном исследовании процесса в рамках его более глубокого физического анализа.

**Аналитические аппроксимации.** В работе [14] предложено приближенное аналитическое решение задачи роста парового пузырька в начальный период. Выведены формулы для расчета продолжительности “инкубационного периода”, даны рекомендации по влиянию на динамику пузырька различных параметров. Анализ метода этой работы, а также полученных в ней результатов, приводит к следующим выводам.

- 1) В работе отсутствует теоретическое обоснование принимаемых допущений, некоторые из которых представляются спорными.
- 2) Автор [14] даже не упоминает имеющиеся исследования рассматриваемой проблемы, насчитывающие несколько десятилетий.
- 3) Предложенные в работе расчетные рекомендации количественно и качественно противоречат имеющимся в литературе результатам по характеру влияния на процесс физических факторов (вязкости, поверхностного натяжения, инерционных эффектов). Существенно расходятся также оценки продолжительности инкубационного периода.

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ РОСТА

Как показали численные и экспериментальные исследования [9–12], ЗРП определяется главным образом сопротивлением оттесняемой жидкости (динамические эффекты) и интенсивностью испарения на поверхности пузырька (энергетические эффекты). Динамические эффекты обусловлены инерцией жидкости и ее вязкостью, а энергетические – условиями подвода тепла к МФП и кинетикой процесса испарения. При росте парового пузырька все эти факторы действуют одновременно, однако в каждом конкретном случае определяющими являются лишь некоторые из них.

Лабунцов [15] впервые предложил системный подход, в рамках которого исследуются “предельные схемы роста”. Каждая из этих схем соответствует проявлению одного (главного) фактора, который играет лимитирующую роль. Это означает, что при воздействии двух (или нескольких) факторов реальная скорость роста парового пузырька будет лимитироваться наименьшей из скоростей, определяемых в рамках каждой из предельных схем.

Необходимым общим условием для любой предельной схемы является выполнение уравнения теплового баланса на МФП

$$q = \rho_v h_{fg} \dot{R}. \quad (4)$$

В реальном процессе начальная стадия ЗРП описывается формулой Рэлея<sup>1</sup>, вытекающей из динамической инерционной схемы

$$R = \sqrt{\frac{2 \Delta p_0 t}{3 \rho_f}} \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), инерционный ЗРП характеризуется постоянной скоростью

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2 \Delta p_0}{3 \rho_f}} \quad (6)$$

С течением времени начальный перепад давлений  $\Delta p_0$  быстро падает; ЗРП все более подчиняется энергетической тепловой схеме (ЭТС), описываемой автомодельным законом тепловой диффузии

$$R = m \sqrt{a_f t} \quad (7)$$

Здесь  $m$  – модуль роста, зависящий от степени перегрева жидкости по отношению к температуре насыщения. Тогда из формулы (7) для скорости роста будем иметь

$$\dot{R} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{a_f}{t}} \quad (8)$$

Подставляя  $\dot{R}$  из (8) в уравнение теплового баланса (4), получаем выражение для подводимого к МФП теплового потока

$$q = \frac{1}{2} m h_{fv} \rho_v \sqrt{\frac{a_f}{t}} \quad (9)$$

### РЕШЕНИЕ СКРАЙВЕНА

Точное решение для ЗРП в рамках ЭТС впервые получил Скрайвен (Scriven) [16] в виде интеграла. Результаты решения были систематизированы в виде “таблицы Скрайвена” (ТС), которую можно представить как табулированную зависимость вида  $m = f(\varepsilon, Ja)$ . Здесь введены следующие параметры:

$$\varepsilon = \frac{\rho_v}{\rho_f} \quad (10)$$

– отношение плотностей жидкой и паровой фаз,

$$Ja = \frac{\rho_f c_{pf} \Delta T}{\rho_v h_{fv}} \quad (11)$$

– “число Якоба”.

В работе [17] предложено приближенное решение рассматриваемой задачи, описывающее ТС с погрешностью менее 1.3%

$$m = \sqrt{3/\pi \psi} Ja + \left[ (\sqrt{3/\pi \psi} Ja)^n + (2Ja)^{n/2} \right]^{1/n}, \quad n = 2.315 - 0.575\varepsilon \quad (12)$$

Здесь

$$\psi = \left[ 1 + (\sqrt{\pi/2} - 1) S \right] \left( 1 + \sum_{i=1}^7 \beta_i S^i \right)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (13)$$

<sup>1</sup> Формула (1) справедлива для всей области давлений за исключением узкой области в окрестности термодинамической критической точки, где плотности фаз становятся соизмеримыми.

“фактор интенсификации”; коэффициенты в полиноме в правой части (13) определяются соотношениями:  $\beta_1 = -0.7604$ ,  $\beta_2 = -0.4452$ ,  $\beta_3 = 0.6153$ ,  $\beta_4 = -1.5366$ ,  $\beta_5 = 2.3369$ ,  $\beta_6 = -1.7361$ ,  $\beta_7 = 0.5261$ .

Уравнение (13) содержит второй (наряду с числом Якоба) определяющий параметр ЭТС – “число Стефана”

$$S = \frac{c_{pf} \Delta T}{h_{fv}}, \quad (14)$$

связанное с числом Якоба соотношением

$$\text{Ja} \varepsilon = S. \quad (15)$$

Полученное решение удовлетворяет условиям Карташова [18] для приближенных аналитических решений:

- минимально возможная расчетная погрешность;
- обеспечение сходимости процесса (настолько хорошо, чтобы можно было сделать заключения о свойствах полученного решения);
- наличие всех операций, допускаемых в процессе преобразований;
- достаточно простая реализация в практических приложениях.

**Асимптотики решения (12).** При  $\text{Ja} \rightarrow 0$  из (15) для любого  $0 < \varepsilon \leq 1$  следует  $S \rightarrow 0$ , и мы будем иметь асимптотику “медленного роста”, соответствующую стационарной проблеме теплопроводности [19]. Записывая тепловой поток в виде  $q = \lambda_f \Delta T / R$ , с учетом автомодельного закона (7), получаем:  $m = \sqrt{2\text{Ja}}$ .

При  $\text{Ja} \rightarrow \infty$  уравнение (12) упрощается к виду

$$m = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \Psi \text{Ja}. \quad (16)$$

Из соотношений (9), (16) получаем выражение для подводимого к МФП теплового потока

$$q = \sqrt{\frac{3 a_f}{\pi t}} \Psi \text{Ja} h_{fv} \rho_v. \quad (17)$$

Асимптотика (16), в свою очередь, включает в себя две внутренние асимптотики. “Средняя асимптотика” получается в результате раскрытия неопределенности вида:  $m \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow m_* \rightarrow 0$ , и мы будем иметь

$$m = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \text{Ja}. \quad (18)$$

Формула (18) была получена в работе Плессета–Цвика (Plesset–Zwick) [20] с помощью весьма сложной математической процедуры.

Вторую асимптотику уравнения (16) получаем из разложения фактора интенсификации в ряд при  $m_* \rightarrow \infty$ . Ограничиваясь первыми двумя членами и подставляя результат в (16), будем иметь

$$m = \sqrt{\frac{6}{1-S}} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (19)$$

При  $S \rightarrow 1$  формула (19) содержит две особенности. Математическая особенность состоит в неограниченном увеличении модуля роста ( $m \rightarrow \infty$ ), приводящем к “тепловому взрыву”. Физическая особенность заключается в достижении предельной метаста-

бильной неравновесности. При  $S = 1$  согласно определению (14) числа Стефана энтальпия перегрева единицы массы жидкости  $c_p \Delta T$  становится равной теплоте фазового перехода  $h_{fv}$ . Таким образом исчезают ограничения на скорость фазовых превращений, и каждая частица жидкости вблизи МФП мгновенно превращается в пар.

В действительности скорость роста пузырька при  $S = 1$  будут ограничивать факторы, не учитываемыми в рамках ЭТС.

- Радиальное расширение жидкости за счет роста пузырька вызовет ее инерционную реакцию. Это приведет к повышению давления на МФП, а значит и во всем объеме пузырька. Как следствие, температура насыщенного пара  $T_v$  возрастет, а перепад температур  $\Delta T = T_\infty - T_v$  уменьшится. Это вызовет снижение подводимого к МФП теплового потока, а с учетом уравнения теплового баланса (4) – скорости роста пузырька  $\dot{R}$ .

- Снижение теплового термического сопротивления при  $S \rightarrow 1$  приведет к усилению роли фазовой неравновесности на МФП со стороны паровой фазы. Вследствие этого неограниченному усилению интенсивности испарения будут препятствовать молекулярно-кинетические эффекты, которые в обычных условиях являются пренебрежимо малыми.

**Определяющие параметры.** Первым параметром, определяющем ЭТС, является отношение плотностей фаз (10), изменяющееся в диапазоне  $0 < \varepsilon \leq 1$ . В качестве основного теплового параметра выступает число Стефана (14), имеющее тот же диапазон изменения:  $0 < S \leq 1$ . Число Якоба, пределы изменения которого определяются равенством (15) ( $0 < Ja < 1/\varepsilon$ ), является производным от указанных двух главных параметров. Его использование в качестве независимого параметра может привести к нефизическому результату:  $Ja > 1/\varepsilon$ ,  $S = \varepsilon Ja > 1$ . Такой “заход в запрещенную область” может иметь место, в частности, для случая кипения органических жидкостей [21].

## БИНАРНАЯ ИНЕРЦИОННО-ТЕПЛОВАЯ СХЕМА

**Экспериментальные исследования.** Подавляющее большинство экспериментальных исследований ЗРП были проведены для области  $S \ll 1$ . Одно из немногих исключений составляет работа [21], в которой экспериментально исследовался рост пузырька в объеме сильно перегретой органической жидкости (бутана). Капля бутана помещалась в сосуд, заполненный высококипящей жидкостью (этиленгликолем), всплывала под воздействием силы Архимеда капля и на определенной высоте вскипала. Зарождавшийся внутри капли пузырек быстро рос и за время менее 100 мкс достигал границ капли.

Измеренные в [21] ЗРП соответствовали степенной функции, занимающей промежуточное положение между инерционной (5) и тепловой (7) зависимостями:  $R \sim t^n$ , где  $n \approx 0.8 \dots 0.95$ . Это позволяет предположить, что в условиях эксперимента реализовалась “бинарная схема роста” [17] при одновременном воздействии двух факторов – интенсивности испарения на МФП (энергетические эффекты, ответственные за соблюдение теплового баланса) и сопротивлением оттесняемой жидкости (динамические эффекты, ограничивающие скорость роста).

**Число Стефана в метастабильной области.** Рассмотрим в  $p, T$  – диаграмме ЗРП для случая предельного перегрева жидкости (рис. 3).

Состояние насыщенного пара в пузырьке соответствует точке  $A\{p_{\min}\}$  на бинодали, состояние перегретой жидкости – точке  $B\{p_{\min}\}$  на спинодали, где  $AB$  – изобара. Как показывает термодинамический анализ [7], при углублении захода в метастабильную область изобарная теплоемкость монотонно возрастает и при приближении к спино-

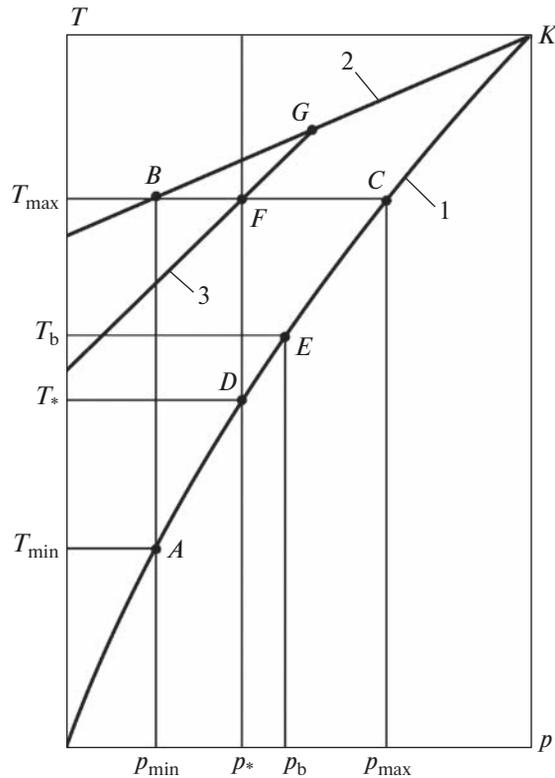


Рис. 3. Стадии роста парового пузырька в перегретой жидкости. 1 – бинодаль; 2 – спинопаль; 3 – энергетическая спинопаль.

дали устремляется к бесконечности. Поэтому число Стефана необходимо рассчитывать по формуле

$$S(T) = \frac{1}{h_{fv}} \int_{T_s}^T c_p(T) dT,$$

где теплота фазового перехода  $h_{fv}$  берется при  $T_s(p_{\min})$ .

При вычислении интеграла может оказаться, что, начиная с некоторой температуры  $T_c \leq T_{\text{spin}}$ , будет  $S(T_c) \geq 1$ . Однако из асимптотики (19) следует, что при росте пузырька всегда должно соблюдаться условие  $S \leq 1$ . Отсюда следует, что каждой изобаре будет соответствовать некоторая предельная температура, выше которой рост пузырька окажется невозможен.

**Энергетическая спинопаль.** Определим “энергетическую спинопаль”  $T_c(p)$ , для которой на каждой изобаре выполняется условие

$$S(T_c) = \frac{1}{L} \int_{T_s}^{T_c} c_p dT = 1.$$

В  $p, T$  – диаграмме энергетическая спинопаль описывается линией 3, лежащей между бинодалью 1 и спинопалью 2 и пересекающаяся с последней в точке  $G$  (рис. 3). Таким

образом, линии 2, 3 ограничивают часть метастабильной области, физически нереализуемую при росте пузырька. Если при достижении спинодали число Стефана останется меньшим единицы, то энергетическая спинодаль будет отсутствовать.

**Метод температурных аппроксимаций.** Традиционным способом расчета теплофизических свойств метастабильной жидкости является метод температурных аппроксимаций [8]. Рассмотрим в качестве примера предельный случай спинопальных перегревов. В момент вскипания  $t = -0$  температура жидкости, находящейся в точке  $B$ , при заданном давлении в системе может быть рассчитана по формуле (1). В момент включения инерционной реакции жидкости  $t = +0$  давление в пузырьке скачкообразно возрастает до значения  $p_{\max}$  (точка  $C$ ). Тогда изобарная теплоемкость жидкости будет равна значению  $c_p(T_{\max}) > c_p(T_{\min})$  на бинодали при ее пересечении с изотермой  $T = T_{\max}$ . В соответствие с методом температурных аппроксимаций  $c_p(T_{\max})$  принимается за значение изобарной теплоемкости в точке  $B$  на спинопали. Ясно, что с помощью такого метода невозможно оценить погрешность определения  $c_p$ .

**Расчет по уравнению состояния.** В работе [7] на основе теории фазовых переходов второго рода исследовалось поведение теплофизических свойств метастабильной жидкости. Было показано, что функция  $c_p(T)$  как в окрестности спинодали (точка  $B$ , рис. 3), так и в окрестности термодинамической критической точки описывается степенной зависимостью вида

$$\frac{c_{ps}}{c_p} = (1 - \theta)^\gamma. \quad (20)$$

Здесь  $\theta = \frac{T - T_s}{T_{\text{spin}} - T_s}$  – безразмерная разность температур;  $\gamma$  – “псевдокритический индекс”.

Следует отметить, что теория Новикова ничего не говорит о поведении  $c_p$  во всей метастабильной области (интервал АВ, рис. 3). Остается также открытым вопрос о точном значении псевдокритического индекса в интервале  $\gamma = 1/3 \dots 1/2$ . В монографии [22] были приведены результаты расчета изобарной теплоемкости с помощью уравнения Соаве–Редлиха–Квонга для случая  $p/p_{cr} = 0.6$ . На основании этих расчетов можно принять значение псевдокритического индекса в (20) равным  $\gamma = 1/2$  (рис. 4). Отсюда следует выражение для числа Стефана в метастабильной области:  $S(T) = 2c_{ps}(T - T_s)/h_{fv}$ .

**Аналитическая аппроксимация.** В работе [23] было получено аналитическое решение задачи роста парового пузырька в рамках бинарной инерционно-тепловой схемы для области  $S \ll 1$ . При этом кривая насыщения аппроксимировалась линейной функцией, а плотность пара в пузырьке принималась постоянной. Эта расчетная схема использовалась затем для области  $S \approx 1$  в работе [24], выполненной при участии одного из авторов настоящей статьи. Однако в результате удалось описать опытные данные [21] лишь для области малых времен:  $t < 60$  мкс. В то же время расчетная кривая  $R(t)$  для интервала  $60 \text{ мкс} < t < 100 \text{ мкс}$  “проваливается” по отношению к опытным точкам [21] более чем вдвое. Как представляется, это является следствием двух некорректных допущений расчетного метода работы [24]:

- неучет изменения во времени плотности пара, которая при движении пузырька от точки  $C \{p_{\max}, T_{\max}\}$  к точке  $D \{p_*, T_*\}$  уменьшается почти в 17 раз;
- аппроксимация участка кривой насыщения отрезком прямой, сильно искажающая взаимодействие инерционного и теплового механизмов.

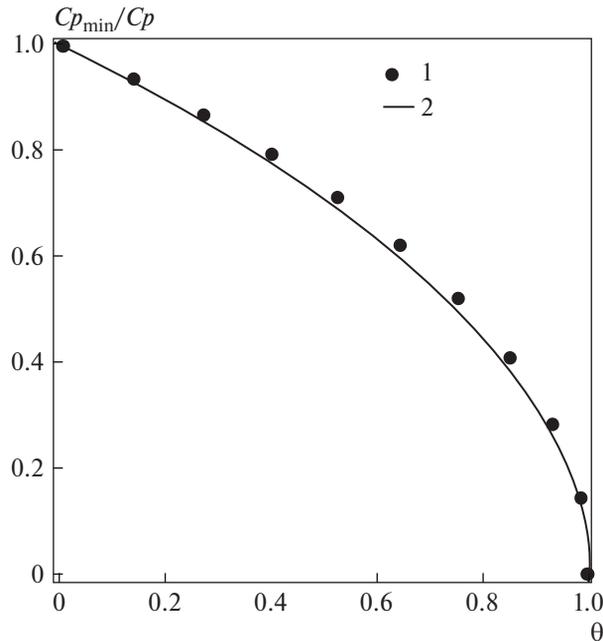


Рис. 4. Изобарная теплоемкость в метастабильной области для случая  $p/p_{cr} = 0.6$ . 1 – расчет по уравнению Соаве–Редлиха–Квонга, 2 – расчет по формуле (7) при  $\gamma = 1/2$ .

## ЭФФЕКТ “ЗАПИРАНИЯ ДАВЛЕНИЯ”

### Стадии роста пузырька

В рамках численных исследований [9–12] полагалось, что в начальный момент времени ( $t = -0$ ) пузырек представляет собой критический паровой зародыш. В момент времени  $t = +0$  радиусу пузырька придается малое возмущение, нарушающее состояние термодинамического равновесия. Начинает необратимый рост пузырька, насчитывающий четыре стадии: капиллярную, промежуточную, инерционную и тепловую.

Ниже мы будем рассматривать лишь две последние – наиболее протяженные – стадии роста, лимитируемые инерционными и тепловыми эффектами. Наложение этих двух факторов приводит к бинарной инерционно-тепловой схеме.

1) *Исходные данные* (рис. 3): число Стефана – больше единицы:  $S = S_{\max} > 1$ ; давление и температура жидкости равны:  $p = p_{\min}, T = T_{\max}$ .

2) *Начальное состояние (статическое)*  $t = -0$ . Пар находится в точке  $A\{p_{\min}, T_{\min}\}$  на бинадали 1, жидкость – в точке  $B\{p_{\min}, T_{\max}\}$  на спинодали, причем  $T_{\min} = T_s(p_{\min})$ .

3) *Начальное состояние (динамическое)*  $t = +0$ . Включается инерционная реакция жидкости. Давление в пузырьке возрастает вдоль бинадали от точки  $A\{p_{\min}, T_{\min}\}$  до точки  $C\{p_{\max}, T_{\max}\}$ ; жидкость переходит в точку  $C\{p_{\max}, T_{\min}\}$  по изотерме  $T = T_{\max}$ . Перепад температур и число Стефана обращаются в нуль:  $\Delta T = S = 0$ . Все эти изменения происходят скачкообразно. Скорость роста пузырька описывается рэлеевским законом, в который входит максимальный перепад давлений

$$\dot{R}_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{\max} - p_{\min}}{\rho}} \quad (21)$$

4) *Переходная стадия*  $t > 0$ . Рост пузырька определяется совместным воздействием тепловых и инерционных эффектов. Термодинамическое состояние пара “дрейфует” вдоль бинодали от начальной точки  $C\{p_{\max}, T_{\max}\}$  в сторону точки  $A$ . Перегрев жидкости увеличивается; число Стефана монотонно возрастает и в точке  $D\{p_*, T_*\}$  достигает единицы. При анализе ЭТС было показано, что при  $S \rightarrow 1$  имеет место асимптотика  $\dot{R} \rightarrow \infty$ . Однако в рамках инерционно-тепловой схемы скорость роста в точке  $D\{p_*, T_*\}$  остается конечной.

5) *Асимптотическая стадия*. Термодинамическое состояние пара «зависает» в окрестности предельной точки  $D$  и достигает ее лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Физически это означает, что в точке  $D\{T_*, p_*\}$  реализуется эффект “запирания давления”:  $S(t) \rightarrow 1$ ,  $p(t) \rightarrow p_* > p_{\min}$ ,  $T(t) \rightarrow T_* > T_{\min}$ . “Изобара запирания”  $p = p_*$  проходит через точку  $D$  на бинодали 1 и в точке  $F$  упирается в энергетическую спинодаль 3. Через точку  $F$  проходит также изотерма  $T = T_{\max}$ . Скорость роста описывается асимптотическим законом Рэлея

$$\dot{R}_* = \sqrt{\frac{2\Delta p_*}{3\rho}}. \quad (22)$$

Таким образом, ситуация  $S = S_{\max} > 1$  является гипотетической и относится только к начальному состоянию жидкости. В реальном процессе число Стефана в начальный момент скачкообразно обращается в нуль и затем асимптотически стремится к единице.

б) *Отсутствие эффекта запирания*. Пусть теперь точка  $G$  на спинодали расположена на левее точки  $B$ . Отсюда следует, что точка  $D$ , соответствующая равенству  $S = 1$ , будет находиться на бинодали левее точки  $A$ . Тогда предельным термодинамическим состоянием пара будет состояние насыщения  $T_{\min} = T_s(p_{\min})$ , и эффект «запирания давления» отсутствует.

**Область “запирания давления”.** Введем обозначения для перепада температуры  $\Delta T_b = T_{\max} - T_b$  и перепада давления  $\Delta p_b = p_b - p_{\min}$  для системы “пар–жидкость”. Давление и температура пара в точке  $E\{T_b, p_b\}$  будут превышать свои значения в точке  $D\{p_*, T_*\}$  на соответствующие перепады:  $\Delta p_s = p_b - p_*$ ,  $\Delta T_s = T_b - T_*$ . Согласно  $p, T$  – диаграмме (рис. 3) эти перепады связаны с соответствующими суммарными перепадами соотношениями:  $\Delta p_s + \Delta p_* = \Delta p_b$ ,  $\Delta T_s = \Delta T_* - \Delta T_b$ . Здесь  $\Delta p_* = p_* - p_{\min}$  – “запирющий” перепад давления. Согласно уравнению Клапейрона–Клаузиуса [13] малые перепады давления и температуры ( $\Delta p_s/p_* \ll 1$ ,  $\Delta T_s/T_* \ll 1$ ) вдоль кривой насыщения связаны между собой линейным соотношением

$$\frac{\Delta T_s}{T_*} = \frac{\Delta p_s}{h_{fv}\rho_v}.$$

Тогда из (5), (9) получаем биквадратное уравнение для  $\dot{R}$ , решение которого имеет вид

$$\dot{R} = \left[ \frac{R_*^2}{2} + \left( \frac{R_*^4}{4} + \frac{\rho}{\rho_v} \frac{ah_{fv}^2}{c_p T_*} \frac{1}{t} \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

При  $t \rightarrow \infty$  из (23) будем иметь  $\dot{R} \rightarrow \dot{R}_*$ . Таким образом скорость роста не стремится асимптотически к нулю (как в рамках ЭТС), а ограничивается снизу рэлеевским законом (22).

При  $S \rightarrow 1$  «запирающий» перепад давлений  $\Delta p_* = p_* - p_{\min}$  стремится к нулю; и в квадратных скобках в правой части (23) будет преобладать второй (нестационарный) член. В пределе при  $\Delta p_* = 0$  ( $S = 1$ ) получаем

$$\dot{R} = \left( \frac{a\rho h_{fv}^2}{c_p \rho_v T_* t} \right)^{1/4}.$$

Это – случай абсолютно неустойчивого равновесия, для реализации которого «запирающий» перепад давлений должен быть в точности равен нулю. При сколь угодно малых  $\Delta p_* \neq 0$  ЗРП будет «сваливаться» в одну из устойчивых асимптотик: при  $\Delta p_* < 0$  – в автомодельный закон (8); при  $\Delta p_* > 0$  – в рэлеевский закон (6). Таким образом, случай  $S = 1$  является чисто гипотетическим и не может быть реально реализован.

**Асимптотический закон роста.** Представим дифференциальное уравнение (23) в безразмерном виде

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{t}} = \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\tilde{t}} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

где  $\tilde{R} = \frac{c_p \rho_v T_* \dot{R}_*^3}{a\rho h_{fv}^2} R$ ,  $\tilde{t} = \frac{c_p \rho_v T_* \dot{R}_*^4}{a\rho h_{fv}^2} t$  – безразмерные значения радиуса и времени соответственно. Интегрируя (24) с начальным условием  $t = 0, R = 0$ , получаем

$$\tilde{R} = \ln 2 - \frac{1}{2} + \tilde{t} + \frac{1}{2} \ln \tilde{t} + \frac{5F}{8\tilde{t}},$$

где  $F = \Gamma\left(\left[1, 1, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right], \left[2, \frac{5}{2}, 3\right], \frac{4}{\tilde{t}}\right)$  – гипергеометрическая функция [25]. Это решение имеет весьма громоздкий вид и здесь не приводится. С погрешностью  $\mp 1.3\%$  оно аппроксимируется соотношением

$$\tilde{R} = \left( \tilde{R}_0^n + \tilde{R}_\infty^n \right)^{1/n}, \quad n \approx 2.68.$$

Предельная ветвь этого решения при  $\tilde{t} \ll 1$  имеет вид  $\tilde{R} = 4/3\tilde{t}^{3/4}$ , или в размерном виде

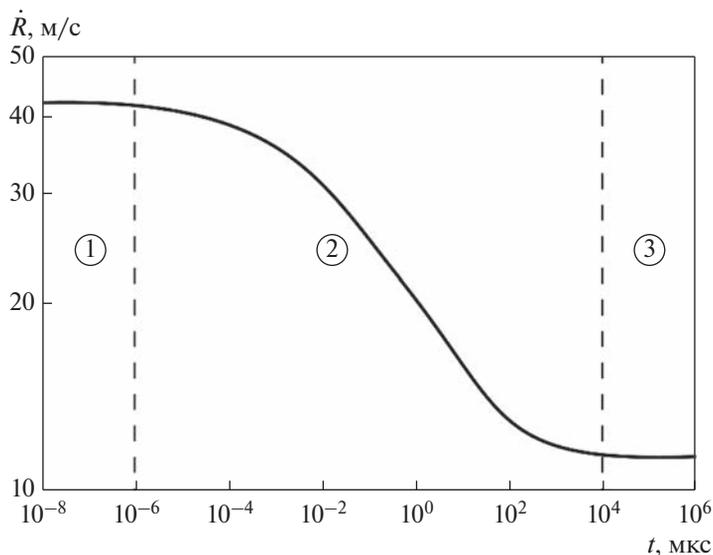
$$R = \frac{4}{3} \left( \frac{a\rho h_{fv}^2}{c_p \rho_v T_*} \right)^{1/4} \tilde{t}^{3/4}.$$

Другая предельная ветвь решения (24) – при  $\tilde{t} \gg 1$  – описывает рэлеевскую асимптотику  $\tilde{R} = \tilde{t}$ , или в размерном виде

$$R = \sqrt{\frac{2\Delta p_*}{3\rho}} t.$$

**Численное исследование.** Как показано в работе [26], при переменной во времени температуре пара в пузырьке можно с приемлемой точностью одновременно использовать оба предельных закона – инерционный (5) и тепловой (7). Такой подход приводит к системе из двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \sqrt{\frac{2(p_v - p_\infty)}{3\rho}}, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{m}{2} \sqrt{\frac{a}{t}} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

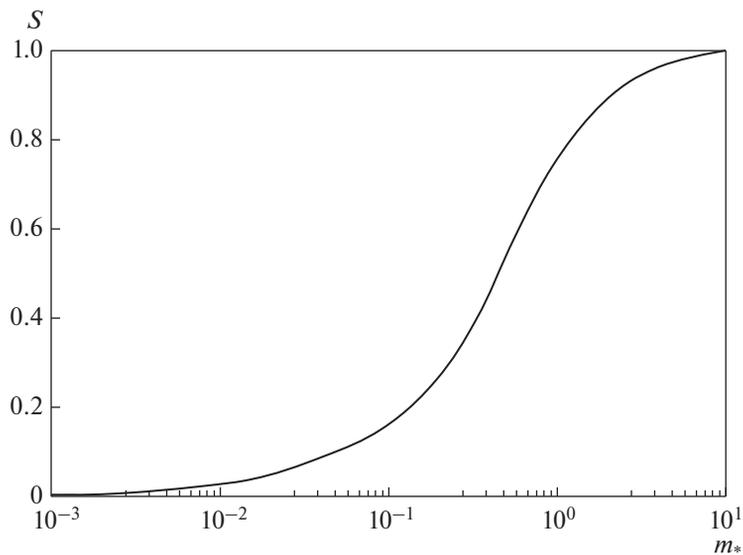


**Рис. 5.** Зависимость скорости роста пузырька от времени применительно к экспериментальным условиям [21]. Численный расчет системы уравнений (25): 1 – начальный закон Рэлея, 2 – инерционно-тепловой закон, 3 – асимптотический закон Рэлея.

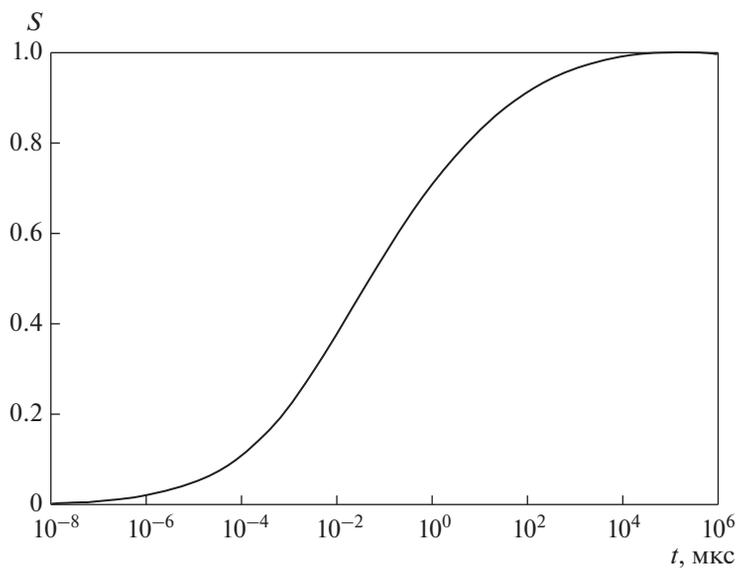
В работе [27] проведено численное интегрирование системы уравнений (25) с помощью программного пакета системы компьютерной алгебры Maple. На рис. 5 представлена зависимость  $\dot{R}(t)$ , в которой можно выделить три основные стадии. В очень короткий начальный период ( $t < 10^{-6}$  мкс) скорость роста подчиняется рэлеевскому закону (5). Протяженная промежуточная стадия ( $10^{-6}$  мкс  $< t < 10^4$  мкс) протекает в условиях взаимного влияния инерционного и теплового механизмов. В асимптотической стадии (при  $t > 10^4$  мкс) проявляется эффект “запирания давления”: пузырек растет в соответствии с асимптотическим рэлеевским законом (22); причем давление пара в нем не опускается ниже “давления запирания”  $p_* \approx 2.1$  бар.

На рис. 6, 7 приведены зависимости локального числа Стефана соответственно от модифицированного модуля роста и от времени применительно к экспериментальным условиям [21]. Здесь также наглядно проявляются три основные стадии роста. В начальной рэлеевской стадии имеем  $S \approx 0$ . В инерционно-тепловой стадии число Стефана со все большим ускорением нарастает. Затем следует точка перегиба и плавный переход в рэлеевскую асимптотику. Физически это соответствует “зависанию” точки  $E$  в окрестности предельной точки  $D$  на  $p, T$  – диаграмме (рис. 3).

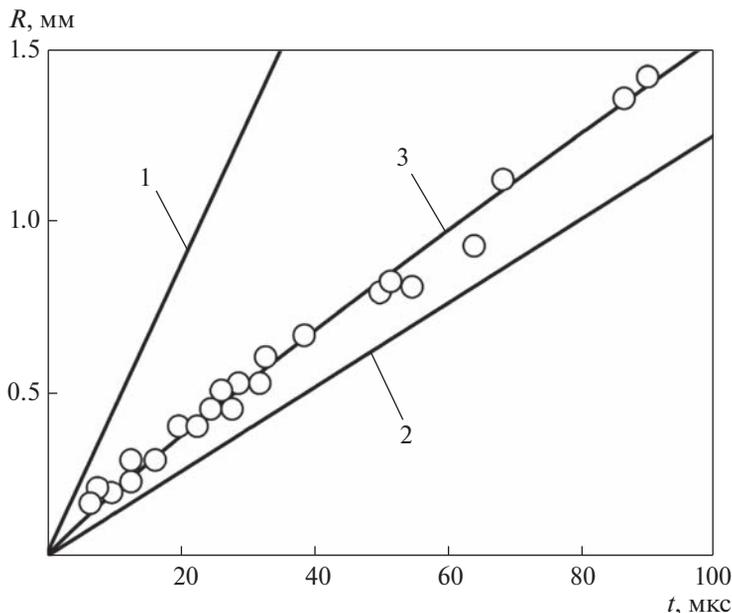
На рис. 8 приведена расчетная кривая  $R(t)$  в интервале  $5$  мкс  $< t < 100$  мкс, которая хорошо аппроксимируется формулой  $R \approx 0.0242t^{0.9}$ . Здесь  $[R] = \text{мм}$ ;  $[t] = \text{мкс}$ . Из рисунка следует, что экспериментальные точки лежат в переходной инерционно-тепловой области 3 и удалены от обеих рэлеевских областей – начальной 1 и асимптотической 2.



**Рис. 6.** Зависимость локального числа Стефана от модифицированного модуля роста применительно к экспериментальным условиям [21]. Численный расчет системы уравнений (25).



**Рис. 7.** Зависимость локального числа Стефана от времени применительно к экспериментальным условиям [21]. Численный расчет системы уравнений (25).



**Рис. 8.** Кривая роста пузырьков при вскипании капли бутана. Кружочки – экспериментальные точки [21]. Численный расчет системы уравнений (25): 1 – начальный закон Рэлея, 2 – асимптотический закон Рэлея, 3 – переходный инерционно-тепловой закон.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача роста парового пузырька в неограниченном объеме равномерно перегретой жидкости. Проведен анализ стадий роста: капиллярной, промежуточной, инерционной, тепловой. Показано, что определяющую роль играет бинарная инерционно-тепловая схема роста. На основе термодинамического анализа выполнен расчет числа Стефана в метастабильной области. Введено понятие энергетической спинодали, расположенной в метастабильной области между бинодалью и спинодалью. В рамках энергетической тепловой схемы исследована асимптотика закона роста пузырька, соответствующая неограниченному возрастанию модуля роста (асимптотика “теплого взрыва”). Проведен анализ процесса роста парового пузырька в  $p, T$  – диаграмме. Показано, что при числах Стефана, больших единицы, имеет место эффект “запирания давления”. Получено аналитическое решение для закона роста пузырька в жидкости, находящейся при температуре энергетической спинодали. Проведено численное исследование роста пузырька бутана в околоспинодальной области. Получено хорошее согласование с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

**Сокращения:** ЗРП – Закон роста пузырька; МФП – Межфазная поверхность; ЭТС – Энергетическая тепловая схема.

**Обозначения:**  $a$  – температуропроводность;  $c_p$  – изобарная теплоемкость;  $Ja$  – число Якоба;  $j$  – массовый поток;  $h_{fv}$  – теплота фазового перехода;  $m$  – модуль роста;  $m_*$  – модифицированный модуль роста;  $p$  – давление;  $\Delta p$  – перепад давлений;  $R$  – радиус пузырька;  $R_{cr}$  – радиус критического парового зародыша;  $S$  – число Стефана;  $T$  – температура;  $\Delta T$  – перепад температур;  $t$  – время;  $q$  – тепловой поток.

**Греческие символы:**  $\varepsilon$  – отношение плотностей фаз;  $\Delta p$  – перепад давлений;  $\rho$  – плотность;  $\Delta T$  – перепад температур;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\psi$  – фактор интенсификации;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

**Нижние индексы:**  $c_r$  – критический;  $e$  – энергетическая спинодаль;  $f$  – жидкость;  $\max$  – максимальный;  $\min$  – минимальный;  $\text{spin}$  – спинодаль;  $s$  – насыщенный  $v$  – пар;  $\infty$  – на бесконечности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ghazivini M., Hafez M., Ratanpara A. et al. A review on correlations of bubble growth mechanisms and bubble dynamics parameters in nucleate boiling // J. Therm Anal Calorim. 2022. V. 147. P. 6035–6071.
2. Stojanovic A.D., Belosevic S.V., Crnomarkovic N.D., Tomanovic I.D., Milicevic A.R. Nucleate pool boiling heat transfer: Review of models and bubble dynamics parameters. Thermal Science. 2022. V. 26. №1. P. 157–174.
3. Lee H.S., Merle Jr. H. Spherical vapor bubble growth in uniformly superheated liquid // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39. № 12. P. 2427–2447.
4. Гиббс Дж.В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука. 1982. 584 с.
5. Вукалович М.П., Новиков И.И. Уравнение состояния реальных газов. М.: Госэнергоиздат. 1948. М.-Л.: Госэнергоиздат. 340 с.
6. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие. Л.: Химия. 1982.
7. Новиков И.И. Термодинамика спинодалей и фазовых переходов. М.-Л.: Наука. 2000.
8. Скрипов В.П. Метастабильная жидкость. М.: Наука. 1972.
9. Dalle Donne M., Ferranti M.P. The growth of vapour bubbles in superheated sodium // Int. J. Heat Mass Transfer. 1975. V. 18. P. 477–493.
10. Prosperetti A., Plesset M.S. Vapor-bubble growth in a superheated liquid // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 85. № 2. P. 349–368.
11. Robinson A. Bubble growth dynamics in boiling. Ph. D. Thesis. McMaster University Hamilton, Ontario, Canada. 2002.
12. Zanje S, Iyer K.K.R., Murallidharan J.S., Punekar H., Gupta V.K. Development of generalized bubble growth model for cavitation and flash boiling // Physics of Fluids. 2021. V. 33. № 7. Article id.077116077116.
13. Brennen C.E. Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford: Oxford University Press. 1995.
14. Авдеев А.А. Динамика парового зародыша в перегретой жидкости (закономерности начального периода роста) // ТВТ. 2015. Т. 53. Вып. 4. С. 569–578.
15. Лабунцов Д.А. Современные представления о механизме пузырькового кипения жидкостей. В кн.: Теплообмен и физическая газодинамика: М.: Изд-во АН СССР. С. 98–115. 1974.
16. Scriven L.E. On the dynamics of phase growth. Chem. Eng. Sci. 1959. V. 10. № 1/2. P. 1–14.
17. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С. Предельные и бинарные схемы роста парового пузырька // Известия РАН. Энергетика. 2023. № 5. С. 60–78.
18. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном относительном коэффициенте теплообмена // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 2. С. 138–149.
19. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Учебное пособие. 1985. 480 с.
20. Plesset M.S., Zwick S.A. The growth of vapor bubbles in superheated liquids // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. P. 493–500.
21. Shepherd J.E., Sturtevant B. Rapid evaporation at the superheat limit // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 379–402.
22. Zudin Y.B. Non-equilibrium Evaporation and Condensation Processes: Analytical Solutions. Springer: Heidelberg. 2021 (3rd Edition).
23. Mikic B.B., Rosenow W.M., Griffith P. On bubble growth rates // Int. J. Heat Mass Transf. 1970. V. 13. P. 657–666.
24. Авдеев А.А., Зудин Ю.Б. Рост парового пузыря в околоспинодальной области в рамках обобщенной инерционно-тепловой схемы // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40. С. 971–978.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандр. М.: Наука. 1973.
26. Корабельников А.В., Накоряков В.Е., Шрайбер И.Р. Учет неравновесного испарения в задачах динамики парового пузырька // Теплофизика высоких температур. 1981. Т. 19. № 4. С. 797–785
27. Зудин Ю.Б., Зенин В.В. Эффект “запирания давления” при росте парового пузырька в сильно перегретой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 5. С. 1148–1159.

**Vapor Bubble Growth in a Superheated Liquid (Pressure Blocking Effect)****Yu. B. Zudin<sup>a</sup>, \* and D. S. Urtenov<sup>a</sup>**<sup>a</sup>*National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia**\*e-mail: yzudin@gmail.com*

The vapor bubble growth problem in a superheated liquid is considered. The Stefan number in the metastable region is evaluated. The asymptotics of the “thermal explosion” is investigated in the framework of the energy thermal scheme. The “pressure blocking” effect is shown to occur if the Stefan number exceeds 1. An analytical solution is obtained for the bubble growth law in a liquid with energy spinodal temperature. A numerical study of butane bubble growth in the near-spinodal region is performed. A comparison of the solution with the experimental results on the boiling of a butane drop is given.

*Keywords:* vapor bubble, Stefan number, metastable region, thermal explosion, pressure blocking, energy spinodal, numerical study